MỤC LỤC

CHƯƠNG 3 NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG 1

1 NGUYÊN HÀM 1

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM 1

1 Nguyên hàm và tính chất 1

1.1 Nguyên hàm 1
1.2 Tính chất 1

2 Phương pháp tính nguyên hàm 1

2.1 Phương pháp tính nguyên hàm đổi biến số 1
2.2 Phương pháp tính nguyên hàm từng phần 1
2.3 Bảng nguyên hàm cơ bản 2
2.4 Bảng nguyên hàm mở rộng 2

3 Các dạng toán và bài tập 3

3.1 Tính nguyên hàm bằng bảng nguyên hàm 3
3.1.1 Bài tập vận dụng 3
3.2 Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số 22
3.2.1 Bài tập áp dụng 23
3.3 Nguyên hàm từng phần 35
3.3.1 Ví dụ và bài tập 35

4 Phương pháp đổi biến số 39

B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 39

1 Nhận biết 39

1.1 ĐÁP ÁN 54

2 Thông hiểu 54

2.1 ĐÁP ÁN 69

3 Vận dụng thấp 69

3.1 ĐÁP ÁN 81

4 Vận dụng cao 81

4.1 ĐÁP ÁN 86

2 TÍCH PHÂN 87

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM 87

1 Khái niệm tích phân 87

1.1 Định nghĩa tích phân 87
1.2 Tính chất của tích phân 87

2 PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN 87

2.1 Phương Pháp Đổi Biến Số 87

2.2 Phương Pháp Tích Phân Từng Phần 88
3 Các dạng toán và bài tập 88
3.1 Tích phân cơ bản và tính chất tính phân 88
3.1.1 Ví dụ và bài tập 88
3.2 Tích phân hàm số phân thức hữu tỉ 93
3.2.1 Ví dụ và bài tập 93
3.3 Tính chất của tích phân 95
3.3.1 Ví dụ và bài tập 96
3.4 Tích phân hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 107
3.4.1 Ví dụ và bài tập 107
3.5 Phương pháp đổi biến số 109
3.5.1 Ví dụ và bài tập 109
3.6 Tích phân từng phần 140
3.6.1 Ví dụ và bài tập 140
B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 150
1 Nhận biết 150
1.1 ĐÁP ÁN 161
2 Thông hiểu 161
2.1 ĐÁP ÁN 191
3 Vận dụng thấp 192
3.1 ĐÁP ÁN 227
4 Vận dụng cao 228
4.1 ĐÁP ÁN 246
3 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN 247
A TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG 247
1 Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành 247
2 Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong 247
B TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY 247
C Dạng toán và bài tập 248
1 Diện tích hình phẳng và bài toán liên quan 248
1.1 Diện tích hình phẳng 248
1.2 Tìm vận tốc, gia tốc, quãng đường trong vật lí 251
2 Thể tích 254
2.1 Thể tích của vật thể 254
2.2 Tính thể tích của vật thể tròn xoay 256

D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 259

1 Nhận biết 259

1.1 ĐÁP ÁN 277

2 Thông hiểu 277

2.1 ĐÁP ÁN 286

3 Vận dụng thấp 287

3.1 ĐÁP ÁN 297

4 Vận dụng cao 297

4.1 ĐÁP ÁN 302

CHƯƠNG 3 NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1. NGUYÊN HÀM

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1 NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1.1 Nguyên hàm

Định nghĩa 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathscr{K}$. Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in\mathscr{K}$.

Định lí 1. *Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$.*

Định lí 2. *Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ đều có dạng $F(x)+C$, với C là một hằng số.*

Định lí 3. *Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathscr{K}$ đều có nguyên hàm trên $\mathscr{K}$.*

1.2 Tính chất

Tính chất 1.

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C$$

Tính chất 2.

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad (k \text{ là một hằng số khác } 0).$$

Tính chất 3.

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

2 PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

2.1 Phương pháp tính nguyên hàm đổi biến số

Định lí 4. *Nếu $\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)+C$ và $u=u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì*

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x=F(u(x))+C.$$

2.2 Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Định lí 5. *Nếu hai hàm số $u=u(x)$ và $v=v(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathscr{K}$ thì*

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nhận xét. *Vì $v'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v, u'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ nên đẳng thức trên còn được viết ở dạng $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$.*

Để tính nguyên hàm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u,v sao cho $f(x)\,\mathrm{d}x=u\,\mathrm{d}v$ (chú ý $\mathrm{d}v=v'(x)\,\mathrm{d}x$). Sau đó tính $v=\int\mathrm{d}v$ và $\mathrm{d}u=u'\cdot\mathrm{d}x$.

Bước 2: Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int v\,\mathrm{d}u$. Chú ý. Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v\,\mathrm{d}u$ dễ tính hơn $\int u\,\mathrm{d}v$. Ta thường gặp các dạng sau

① **Dạng 1:** $I=\int P(x)\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\mathrm{d}x$. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u=P(x)\\ \mathrm{d}v=\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\mathrm{d}x\end{cases}$

② **Dạng 2:** $I=\int P(x)\mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u=P(x)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

③ **Dạng 3:** $I=\int P(x)\ln(mx+n)\,\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức. Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u=\ln(mx+n)\\ \mathrm{d}v=P(x)\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

④ **Dạng 4:** $I=\int\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. Với dạng này ta đặt $\begin{cases}u=\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\\ \mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}$

2.3 Bảng nguyên hàm cơ bản

Nguyên hàm của hàm sơ cấp	**Nguyên hàm của hàm hợp** $u=u(x)$
① $\int 0\,\mathrm{d}x=C$	① $\int 0\,\mathrm{d}u=C$
② $\int 1\,\mathrm{d}x=x+C$	② $\int 1\,\mathrm{d}u=u+C$
③ $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	③ $\int u^\alpha\,\mathrm{d}u=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
④ $\int\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$	④ $\int\dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln\lvert u\rvert+C$
⑤ $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}e^x+C$	⑤ $\int \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u=\mathrm{e}^u+C$
⑥ $\int a^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$	⑥ $\int a^u\,\mathrm{d}u=\dfrac{a^u}{\ln a}+C$
⑦ $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$	⑦ $\int\cos u\,\mathrm{d}u=\sin u+C$
⑧ $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$	⑧ $\int\sin u\,\mathrm{d}u=-\cos u+C$
⑨ $\int\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\tan x+C$	⑨ $\int\dfrac{1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u=\tan u+C$
⑩ $\int\dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\cot x+C$	⑩ $\int\dfrac{1}{\sin^2 u}\,\mathrm{d}u=-\cot u+C$
⑪ $\int\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\sqrt{x}+C$	⑪ $\int\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u=\sqrt{u}+C$

2.4 Bảng nguyên hàm mở rộng

① $\int(ax+b)^\alpha\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$	⑩ $\int\dfrac{1}{ax+b}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$
② $\int\mathrm{e}^{ax+b}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}+C$	⑪ $\int\cos(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
③ $\int\sin(ax+b)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C$	⑫ $\int\dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

④ $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$	⑬ $\int \tan(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert+C$
⑤ $\int \cot(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert+C$	⑭ $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$
⑥ $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$	⑮ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$
⑦ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} = C$	⑯ $\int \frac{dx}{x.\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left\lvert\frac{x}{a}\right\rvert+C$
⑧ $\int \ln(ax+b)\mathrm{d}x = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b)-x+C$	⑰ $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$
⑨ $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx)+b\sin bx}{a^2+b^2}+C$	⑱ $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx)-b\cos bx}{a^2+b^2}+C$

3 CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

3.1 Tính nguyên hàm bằng bảng nguyên hàm

Phương pháp giải

① Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{\text{PP}}$ khai triển.

② Tích các hàm mũ $\xrightarrow{\text{PP}}$ khai triển theo công thức mũ.

③ Chứa căn $\xrightarrow{\text{PP}}$ chuyển về lũy thừa.

④ Tích lượng giác bậc một của sin và cosin $\xrightarrow{\text{PP}}$ Sử dụng công thức tích thành tổng.

- $\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$
- $\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$
- $\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

⑤ Bậc chẵn của sin và cosin $\Rightarrow$ Hạ bậc: $\sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2a$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2a$.

⑥ Nguyên hàm của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$, với $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức.

- Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{\text{PP}}$ Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{\text{PP}}$ Phân tích mẫu số $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng đồng nhất thức đưa về dạng tổng của các phân số (**PP che**).
  - $\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$, với $\Delta = b^2-4ac$.
  - $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}+\frac{D}{(x-b)^2}$.

Nhận xét. *Nếu mẫu không phân tích được thành tích sẽ tìm hiểu ở phần đổi biến.*

3.1.1 Bài tập vận dụng

Ví dụ 1. Tính nguyên hàm của hàm số

$f(x) = 3x^2+\frac{1}{3}x =$ . . . . . .

ĐS: $x^3+\dfrac{x^2}{6}+C$

Lời giải: Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(3x^2+\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x=x^3+\frac{x^2}{6}+C.$

Bài 1. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định), biết

① $f(x)=2x^3-5x^2-4x+7=$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{5}{3}x^3-2x^2+7x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(2x^3-5x^2-4x+7\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3-2x^2+7x+C.$ □

② $f(x)=6x^5-12x^3+x^2-8=$ .....

ĐS: $x^6-3x^4+\dfrac{1}{3}x^3-8x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(6x^5-12x^3+x^2-8\right)\mathrm{d}x=x^6-3x^4+\frac{1}{3}x^3-8x+C.$ □

③ $f(x)=(x^2-3x)(x+1)$ .....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(x^2-3x)(x+1)\mathrm{d}x=\int(x^3-2x^2-3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C.$ □

④ $f(x)=(x-1)(x^2+2)$ .....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-2x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(x-1)(x^2+2)\mathrm{d}x=\int(x^3-x^2+2x-2)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2-2x+C.$ □

⑤ $f(x)=x(x^2+1)^2$ .....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{6}(x^2+1)^3+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int x(x^2+1)^2\mathrm{d}x=\int(x^2+1)^2\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{2}=\frac{1}{6}(x^2+1)^3+C.$ □

⑥ $f(x)=(3-x)^3$ .....

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{4}(3-x)^4+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(3-x)^3\mathrm{d}x=-\int(3-x)^3\mathrm{d}(3-x)=-\frac{1}{4}(3-x)^4+C.$ □

⑦ $f(x)=(2x+1)^5$ .....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{12}(2x+1)^6+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(2x+1)^5\mathrm{d}x=\int(2x+1)^5\frac{\mathrm{d}(2x+1)}{2}=\frac{1}{12}(2x+1)^6+C.$ □

⑧ $f(x)=(2x-10)^{2018}$ .....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{4038}(2x-10)^{2019}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(2x-10)^{2018}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(2x-10)^{2018}\mathrm{d}(2x-10)=\frac{1}{4038}(2x-10)^{2019}+C.$ □

⑨ $f(x)=(3-4x)^{2019}$ .....

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{8080}(3-4x)^{2020}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(3-4x)^{2019}\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int(3-4x)^{2019}\mathrm{d}(3-4x)=-\frac{1}{8080}(3-4x)^{2020}+C.$ □

⑩ $f(x)=(2x^2-1)^2$ .....

ĐS: $F(x)=\dfrac{4}{5}x^5-\dfrac{4}{3}x^3+x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(2x^2-1)^2\mathrm{d}x=\int\left(4x^4-4x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+x+C.$ □

⑪ $f(x)=(x^2+1)^3$ .....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{7}x^7+\dfrac{3}{5}x^5+x^3+x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int(x^2+1)^3\mathrm{d}x=\int\left(x^6+3x^4+3x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}x^7+\frac{3}{5}x^5+x^3+x+C.$ □

Ví dụ 2. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=4x^3-4x+5$ thỏa mãn $F(1)=3$ .....

ĐS: $F(x)=x^4-2x^2+5x-1$

Lời giải: Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(4x^3-4x+5\right)\mathrm{d}x=x^4-2x^2+5x+C.$

Vì $F(1)=3\Leftrightarrow 1-2+5+C=3\Leftrightarrow C=-1.$

Suy ra $F(x)=x^4-2x^2+5x-1.$

Bài 2. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_\circ)=k$.

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=-x^3+3x^2-2x$ thỏa mãn $F(1)=0$ .....

ĐS: $F(x)=-\dfrac{x^4}{4}+x^3-x^2+\dfrac{1}{4}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(-x^3+3x^2-2x\right)\mathrm{d}x=-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2+C.$

Vì $F(1)=0$ nên $C=\dfrac{1}{4}$. Suy ra $F(x)=-\dfrac{x^4}{4}+x^3-x^2+\dfrac{1}{4}.$ □

② Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=3x^3-2x^2+1$ thỏa mãn $F(-2)=3$ .....

ĐS: $F(x)=\dfrac{3x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+x-\dfrac{37}{3}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^3-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{3x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x+C.$

Vì $F(-2)=3$ nên $C=-\dfrac{37}{3}$. Suy ra $F(x)=\dfrac{3x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+x-\dfrac{37}{3}.$ □

③ Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=-5x^4+4x^2-6$ thỏa mãn $F(3)=1$. Tính $F(-3)$ . . . . .

ĐS: $F(-3)=451$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(-5x^4+4x^2-6\right)\mathrm{d}x=-x^5+\dfrac{4x^3}{3}-6x+C$.

Vì $F(3)=1$ nên $C=226$. Suy ra $F(x)=-x^5+\dfrac{4x^3}{3}-6x+226$.

Do đó $F(-3)=451$. □

④ Hàm số $f(x)=x^3+3x^2+2$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa $F(2)=14$. Tính $F(-2)$ . . . . . .

ĐS: $F(-2)=-10$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(x^3+3x^2+2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+x^3+2x+C$.

Vì $F(2)=14$ nên $C=-2$. Suy ra $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+x^3+2x-2$.

Do đó $F(-2)=-10$. □

⑤ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=(1-x)^9$ thỏa $10F(2)=9$ . . . . . .

ĐS: $F(x)=-\dfrac{(1-x)^{10}}{10}+1$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left((1-x)^9\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{(1-x)^{10}}{10}+C$.

Vì $10F(2)=9$ nên $C=1$. Suy ra $F(x)=-\dfrac{(1-x)^{10}}{10}+1$. □

⑥ Hàm số $f(x)=(2x+1)^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$. Tính $F\left(\dfrac{3}{2}\right)$ . . . . . .

ĐS: $F\left(\dfrac{3}{2}\right)=34$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left((2x+1)^3\right)\mathrm{d}x=\dfrac{(2x+1)^4}{8}+C$.

Vì $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$ nên $C=2$. Suy ra $F(x)=\dfrac{(2x+1)^4}{8}+2$.

Do đó $F\left(\dfrac{3}{2}\right)=34$. □

⑦ Hàm số $f(x)=(1-2x)^5$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$. Tính $F(1)$ . . . . . .

ĐS: $F\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{71}{12}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left((1-2x)^5\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{(1-2x)^6}{12}+C$.

Vì $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$ nên $C=6$. Suy ra $F(x)=-\dfrac{(1-2x)^6}{12}+6$.

Do đó $F\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{71}{12}$. □

⑧ Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa $F(0)=\dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_2[3F(1)-2F(2)]$ .....

ĐS: $P=\log_2[3F(1)-2F(2)]=2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left((2x-3)^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{(2x-3)^3}{6}+C$.

Vì $F(0)=\dfrac{1}{3}$ nên $C=\dfrac{29}{6}$. Suy ra $F(x)=\dfrac{(2x-3)^3}{6}+\dfrac{29}{6}\Rightarrow F(1)=\dfrac{13}{3};F(2)=5$.

Do đó $P=\log_2[3F(1)-2F(2)]=2$. □

⑨ Gọi $F_1(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_1(x)=x(x+2)^2$ thỏa $F_1(0)=1$ và $F_2(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_2(x)=x^3+4x^2+5$ thỏa $F_2(0)=-2$. Tìm nghiệm của phương trình $F_1(x)=F_2(x)$ .....

ĐS: $\left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F_1(x)=\displaystyle\int f_1(x)\,\mathrm{d}x=\int x(x+2)^2\,\mathrm{d}x=\int\left(x^3+4x^2+4x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+2x^2+C$.

Vì $F_1(0)=1$ nên $C=1$. Suy ra $F_1(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+2x^2+1$ (1).

Tương tự $F_2(x)=\displaystyle\int f_2(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(x^3+4x^2+5\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+5x+C$.

Vì $F_2(0)=-2$ nên $C=-2$. Suy ra $F_2(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+5x-2$ (2).

Từ (1) và (2), ta có $F_1(x)=F_2(x)\Leftrightarrow 2x^2+1=5x-2\Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$ □

⑩ Gọi $F_1(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_1(x)=(x+1)(x+2)$ thỏa $F_1(0)=0$ và $F_2(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_2(x)=x^2+x-2$ thỏa $F_2(0)=0$. Biết phương trình $F_1(x)=F_2(x)$ có hai nghiệm là x_1, x_2. Tính $2^{x_1}+2^{x_2}$ .....

ĐS: $\dfrac{17}{16}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F_1(x)=\displaystyle\int f_1(x)\,\mathrm{d}x=\int(x+1)(x+2)\,\mathrm{d}x=\int\left(x^2+3x+2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^3}{2}-2x+C$.

Vì $F_1(0)=0$ nên $C=0$. Suy ra $F_1(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^3}{2}-2x$ (1).

Tương tự $F_2(x)=\displaystyle\int f_2(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(x^2+x^2-2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x+C$.

Vì $F_2(0)=0$ nên $C=0$. Suy ra $F_2(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x$ (2).

Từ (1) và (2), ta có $F_1(x)=F_2(x)\Leftrightarrow\dfrac{3x^2}{2}+2x=\dfrac{x^2}{2}-2x\Leftrightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4.\end{array}\right.$

Khi đó $2^0+2^{-4}=\dfrac{17}{16}$. □

Ví dụ 3. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định). $f(x)=x^2-3x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow$ $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+\ln|x|+C$

Lời giải: Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(x^2-3x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\ln|x|+C.$

Bài 3. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định).

① $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{x}-2\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: $x^3+\ln|x|-2x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(3x^2+\frac{1}{x}-2\right)\mathrm{d}x=x^3+\ln|x|-2x+C.$ □

② $f(x)=3x^2-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: $x^3-2\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(3x^2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=x^3-2\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$ □

③ $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int\frac{x^2-3x+1}{x}\mathrm{d}x=$ .....

$=$ .....

ĐS: $\dfrac{x^2}{2}-3x+\ln|x|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\frac{x^2-3x+1}{x}\mathrm{d}x=\int\left(x-3+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x|+C.$ □

④ $f(x)=\dfrac{2x^4-x^2-3x}{x^2}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int\frac{2x^4-x^2-3x}{x^2}\mathrm{d}x=$ .....

$=$ .....

ĐS: $\dfrac{2x^3}{3}-x-3\ln|x|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\frac{2x^4-x^2-3x}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(2x^2-1-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-x-3\ln|x|+C.$ □

⑤ $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2x-1)}{2x-1}=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C.$ □

⑥ $f(x)=\dfrac{1}{3-4x}$ .....

ĐS: $-\dfrac{1}{4}\ln|3-4x|+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int \dfrac{1}{3-4x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}\int \dfrac{\mathrm{d}(3-4x)}{3-4x}=-\dfrac{1}{4}\ln|3-4x|+C$. □

⑦ $f(x)=\dfrac{5}{3x+1}$ .....

ĐS: $\dfrac{5}{3}\ln|3x+1|+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int \dfrac{5}{3x+1}\mathrm{d}x=\dfrac{5}{3}\int \dfrac{\mathrm{d}(3x+1)}{3x+1}=\dfrac{5}{3}\ln|3x+1|+C$. □

⑧ $f(x)=\dfrac{3}{2-4x}$ .....

ĐS: $-\dfrac{3}{4}\ln|2-4x|+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int \dfrac{3}{2-4x}\mathrm{d}x=-\dfrac{3}{4}\int \dfrac{\mathrm{d}(2-4x)}{2-4x}=-\dfrac{3}{4}\ln|2-4x|+C$. □

⑨ $f(x)=\dfrac{2}{5-2x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}$ .....

ĐS: $-\ln|5-2x|+2\ln|x|-\dfrac{3}{x}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int\left(\dfrac{2}{5-2x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=-\int \dfrac{\mathrm{d}(5-2x)}{5-2x}+2\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x+3\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\ln|5-2x|+2\ln|x|-\dfrac{3}{x}+C$. □

⑩ $f(x)=\dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}$ .....

ĐS: $2\ln|2x+1|+5\ln|x|+\dfrac{2}{x}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int\left(\dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=2\int \dfrac{\mathrm{d}(2x+1)}{2x+1}+5\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x-2\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=2\ln|2x+1|+5\ln|x|+\dfrac{2}{x}+C$. □

⑪ $f(x)=\dfrac{12}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{2x-3}$ .....

ĐS: $-\dfrac{12}{x-1}+\ln|2x-3|+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int\left(\dfrac{12}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{2x-3}\right)\mathrm{d}x=12\int (x-1)^{-2}\mathrm{d}(x-1)+\int \dfrac{\mathrm{d}(2x-3)}{2x-3}=-\dfrac{12}{x-1}+\ln|2x-3|+C$. □

⑫ $f(x)=\dfrac{6}{(3x-1)^2}-\dfrac{9}{3x-1}$ .....

ĐS: $-\dfrac{2}{3x-1}-3\ln|3x-1|+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int\left(\dfrac{6}{(3x-1)^2}-\dfrac{9}{3x-1}\right)\mathrm{d}x=2\int (3x-1)^{-2}\mathrm{d}(3x-1)-3\int \dfrac{\mathrm{d}(3x-1)}{3x-1}=-\dfrac{2}{3x-1}-3\ln|3x-1|+C$. □

Ví dụ 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định). $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{(2-x)^2}-2x \Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: $\ln|x|-\dfrac{1}{x-2}-x^2+C$

Lời giải: Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{(2-x)^2}-2\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{x-2}-x^2+C.$

Bài 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định).

① $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{4}{x^4}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: $-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{3x^3}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^4}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x}-\frac{4}{3x^3}+C.$ □

② $f(x)=\dfrac{2}{(2x-1)^3}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: $-\dfrac{1}{2(2x-1)^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\left(\frac{2}{(2x-1)^3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2(2x-1)^2}+C.$ □

Bài 5. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_\circ)=k$.

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x-5}$ thỏa mãn $F(1)=2\ln\sqrt{3}$ .....

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|2x-5|+\dfrac{1}{2}\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x-5}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|2x-5|+C.$

Vì $F(1)=2\ln\sqrt{3}$ nên $C=\dfrac{1}{2}\ln 3$. Suy ra $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|2x-5|+\dfrac{1}{2}\ln 3.$ □

② Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{5}{2-10x}$ thỏa mãn $F(2)=3\ln 2$ .....

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{2}\ln|10x-2|+\dfrac{1}{2}\ln 18+3\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{5}{2-10x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln|10x-2|+C.$

Vì $F(2)=3\ln 2$ nên $C=\dfrac{1}{2}\ln 18+3\ln 2$. Suy ra $F(x)=-\dfrac{1}{2}\ln|10x-2|+\dfrac{1}{2}\ln 18+3\ln 2.$ □

③ Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$ .....

ĐS: $F(3)=\ln 2+1$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C.$

Vì $F(2)=1$ nên $C=1$. Suy ra $F(x)=\ln|x-1|+1$. Do đó $F(3)=\ln 2+1.$ □

④ Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$ và $F(0)=2$. Tính $F(e)$ . . . . . .

ĐS: $F(e)=\ln(2e+1)+2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\ln|2x+1|+C$.
Vì $F(0)=2$ nên $C=2$. Suy ra $F(x)=\ln|2x+1|+2$. Do đó $F(e)=\ln(2e+1)+2$. □

⑤ cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ và $f(1)=1$. Tính $f(5)$ . . . . . .

ĐS: $f(5)=2\ln 3+1$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|2x-1|+C$.
Vì $f(1)=1$ nên $C=1$. Suy ra $f(x)=\ln|2x-1|+1$. Do đó $f(5)=2\ln 3+1$. □

⑥ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $P=f(-1)+f(3)$ . . . . . .

ĐS: $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|2x-1|+C$, với mọi x.

— Xét trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. Ta có $f(0)=1$, suy ra $C=1$.
Do đó, $f(x)=\ln|2x-1|+1$, với mọi $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. Suy ra $f(-1)=1+\ln 3$.

— Xét trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Ta có $f(1)=2$, suy ra $C=2$.

Do đó, $f(x)=\ln|2x-1|+2$, với mọi $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Suy ra $f(3)=2+\ln 5$.
Vậy $f(-1)+f(3)=3+\ln 3+\ln 5=3+\ln 15$.
Mấu chốt của bài toán là tính chất của hàm $f(x)$, hàm $f(x)$ là hàm phân nhánh (hàm cho bởi nhiều biểu thức) thường ít xuất hiện trong các bài toán tích phân, nguyên hàm thông thường. Nắm được điểm này, ta có thể viết ra biểu thức $f(x)$ một cách rõ ràng, và tìm được các giá trị cụ thể của C. □

⑦ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{x-1}$, $f(0)=3$ và $f(2)=4$. Giá trị của biểu thức $P=f(-2)+f(5)$ . . . . . .

ĐS: $f(-2)+f(5)=5+2\ln 2+\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$, với mọi x.

— Xét trên $(-\infty;1)$. Ta có $f(0)=3$, suy ra $C=1$.
Do đó, $f(x)=\ln|x-1|+1$, với mọi $x\in(-\infty;1)$. Suy ra $f(-2)=1+\ln 3$.

— Xét trên $(1;+\infty)$. Ta có $f(2)=4$, suy ra $C=4$.
Do đó, $f(x)=\ln|x-1|+4$, với mọi $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Suy ra $f(5)=4+2\ln 2$.

Vậy $f(-2)+f(5)=5+2\ln 2+\ln 3$. □

⑧ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{6}{3x-1}$, $f(-2)=2$ và $f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $P=f(-1)+f(4)$.....

ĐS: $f(-1)+f(4)=3+2\ln 2-\ln 7+2\ln 11$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{6}{3x-1}\mathrm{d}x=2\ln|3x-1|+C$, với mọi x.

— Xét trên $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$. Ta có $f(-2)=2$, suy ra $C=2-\ln 7$.

Do đó, $f(x)=2\ln|3x-1|+2-\ln 7$, với mọi $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$. Suy ra $f(-1)=2+4\ln 2-\ln 7$.

— Xét trên $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. Ta có $f(1)=1$, suy ra $C=1-2\ln 2$.

Do đó, $f(x)=2\ln|3x-1|+1-2\ln 2$, với mọi $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. Suy ra $f(4)=1+2\ln 11-2\ln 2$.

Vậy $f(-1)+f(4)=3+2\ln 2-\ln 7+2\ln 11$. □

Bài 6.

① Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^\star$ thỏa mãn $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $f(-1)=1$, $f(1)=0$ và $f(2)=0$. Giá trị của biểu thức $f(-2)$ bằng

A. $1+2\ln 2$. **B.** $2+\ln 2$. **C.** $3+\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

ĐS: $f(-2)=1+2\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(x)=\displaystyle\int f''(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+C_1$.

Suy ra, $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left[-\frac{1}{x}+C_1\right]\mathrm{d}x=-\ln|x|+C_1x+C_2=\begin{cases}-\ln(x)+C_1x+C_{21} & \text{khi } x>0\\ -\ln(-x)+C_1x+C_{22} & \text{khi } x<0.\end{cases}$

Với $f(-1)=1$, $f(1)=0$ và $f(2)=0$, ta có hệ

$$\begin{cases}f(-1)=\ln(1)+C_1\cdot(-1)+C_{22}=1\\ f(1)=\ln(1)+C_1\cdot(1)+C_{21}=0\\ f(2)=\ln(2)+C_1\cdot(2)+C_{21}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-C_1+C_{22}=1\\ C_1+C_{21}=0\\ 2C_1+C_{21}=-\ln(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-\ln 2\\ C_{21}=\ln 2\\ C_{22}=1+\ln 2.\end{cases}$$

Khi đó, $f(x)=\begin{cases}-\ln x-x\ln 2+\ln 2 & \text{khi } x>0\\ -\ln(-x)-x\ln 2+1+\ln 2 & \text{khi } x<0.\end{cases}$

Vậy $f(-2)=1+2\ln 2$.

Chọn đáp án (A) □

② Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ thỏa $f'(x)=|2x-4|$, $f(1)=1$ và $f(3)=-2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(4)$ bằng bao nhiêu?

A. -6. **B.** 2. **C.** -14. **D.** 0.

ĐS: -6.

✍ **Lời giải.**

Ta có $|2x-4|=\begin{cases}2x-4 & \text{khi } x>2\\ 4-2x & \text{khi } x<2.\end{cases}$

Khi đó, $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}x^2-4x+C_1 & \text{khi } x>2\\ 4x-x^2+C_2 & \text{khi } x<2.\end{cases}$

mà $\begin{cases}f(3)=-2\\ f(1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^2-4\cdot3+C_1=-2\\ 4\cdot1-1^2+C_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=-2\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}x^2-4x+1 & \text{khi } x>2\\ 4x-x^2-2 & \text{khi } x<2.\end{cases}$

Vậy $f(-1)+f(4)=4\cdot(-1)-(-1)^2-2+[4^2-4\cdot4+1]=-6$.

Chọn đáp án A □

③ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa $f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$; $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(-2)+f(0)+f(4)$.

A. $2\ln2-2\ln3-\ln5$. **B.** $2\ln3-\ln5+1$.

C. $2\ln3-\ln5$. **D.** $2\ln3-\ln5+6$.

ĐS: $2\ln3-\ln5+1$.

✍ **Lời giải.**

$f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+C$.

Hay $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)+C_1 & \text{khi } x>1\\ \ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)+C_2 & \text{khi } -1<x<1\\ \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)+C_3 & \text{khi } x<-1.\end{cases}$

Theo đề ta có

$$\begin{cases}f(-3)+f(3)=0\\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln2+C_1+\ln\dfrac{1}{2}+C_3=0\\ \ln3+C_2+\ln\dfrac{1}{3}+C_2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1+C_3=0\\ C_2=1.\end{cases}$$

Do đó $f(-2)+f(0)+f(4)=\ln3+C_3+C_2+\ln\dfrac{3}{5}+C_1=\ln3+\ln3-\ln5+1=2\ln3-\ln5+1$.

Chọn đáp án B □

④ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1;\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa $f'(x)=\dfrac{4x+1}{2x^2+x-1}$; $f(1)+f(-2)=0$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\ln20$ và $f(0)+f(1)=0$. Tính giá trị của biểu thức $f(-3)+f(3)+f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

A. $\ln\left(\dfrac{7}{2}\right)$. **B.** $-\ln7$.

C. $\ln2$. **D.** $\ln14$.

ĐS: $\ln\left(\dfrac{7}{2}\right)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{4x+1}{2x^2+x-1}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2x^2+x-1}\,\mathrm{d}(2x^2+x-1)=\ln|2x^2+x-1|+C$.

Khi đó, $f(x)=\begin{cases}\ln(2x^2+x-1)+C_1 & \text{khi } x<-1\\ \ln(1-x-2x^2)+C_2 & \text{khi } -1<x<\dfrac{1}{2}\\ \ln(2x^2+x-1)+C_3 & \text{khi } x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Mà $\begin{cases} f(1)+f(-2)=0 \\ f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\ln 20 \\ f(0)+f(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln 2+C_3+\ln 5+C_1=0 \\ \ln 5+C_3=\ln 20 \\ \ln 1+C_2+\ln 2+C_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_3=-\ln 10 \\ C_3=\ln 4 \\ C_2+C_3=-\ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=-\ln 40 \\ C_2=-\ln 8 \\ C_3=\ln 4. \end{cases}$

Khi đó, $f(-3)+f(3)+f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\ln 14+C_1+\ln 20+C_3+C_2=\ln 14-\ln 40+\ln 20+\ln 4-\ln 8=\ln\left(\dfrac{7}{2}\right)$.

Chọn đáp án A □

⑤ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ thỏa $f'(x)=|x-1|+|x-2|$; $f(0)+f\left(\dfrac{4}{3}\right)=0$ và $f(4)=2$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(-1)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)+f(3)$ bằng

A. $-\dfrac{3}{26}$. **B.** $-\dfrac{35}{6}$.

C. $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{5}{36}$.

ĐS: $-\dfrac{35}{6}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(x)=|x-1|+|x-2|=\begin{cases} 3-2x & \text{khi } x<1 \\ 1 & \text{khi } 1<x<2 \\ 2x-3 & \text{khi } x>2. \end{cases}$

Khi đó $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases} 3x-x^2+C_1 & \text{khi } x<1 \\ x+C_2 & \text{khi } 1<x<2 \\ x^2-3x+C_3 & \text{khi } x>2. \end{cases}$

Mà $\begin{cases} f(0)+f\left(\dfrac{4}{3}\right)=0 \\ f(4)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+\dfrac{4}{3}+C_2=0 \\ 4+C_3=2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2=-\dfrac{4}{3} \\ C_3=-2 \end{cases}$

Suy ra $f(-1)+f\left(\dfrac{3}{2}\right)+f(3)=(-4+C_1)+\left(\dfrac{3}{2}+C_2\right)+C_3=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{3}-2=-\dfrac{35}{6}$.

Chọn đáp án B □

⑥ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa $f'(x)=x\ln|x|$; $f(-1)=\dfrac{3}{4}$ và $f(2)=-1$. Tính giá trị của biểu thức $P=f(-2)+f(1)$.

ĐS: $P=-\dfrac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

$f'(x)=\begin{cases} x\ln x & \text{khi } x>0 \\ x\ln(-x) & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó, $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x}{2}+C$.

Tương tự ta có

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x}{2}+C_1 & \text{khi } x>0\\ \dfrac{x^2}{2}\ln(-x)+\dfrac{x}{2}+C_2 & \text{khi } x<0\end{cases}$$

Mà $f(-1)=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}+C_2=\dfrac{3}{4}\Rightarrow C_2=\dfrac{5}{4}$

và $f(2)=-1\Leftrightarrow 2\ln 2-1+C_1=-1\Leftrightarrow C_1=-2\ln 2$.

Do đó, $P=f(-2)+f(1)=-\ln 2-1+C_2-\dfrac{1}{2}+C_1=2\ln 2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}-2\ln 2=-\dfrac{1}{4}$. □

⑦ Cho $f'(x)=2x+1$; $f(1)=5$ và phương trình $f(x)=5$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Tính tổng $\log_2|x_1|+\log_2|x_2|$. **ĐS:** 1

✍ **Lời giải.**

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int(2x+1)\,\mathrm{d}x=x^2+x+C$.

Mà $f(1)=5\Leftrightarrow 2+C=5\Leftrightarrow C=3$.

Mặt khác $f(x)=5$ có hai nghiệm $x_1;x_2$, nên $x^2+x+3=5$ có hai nghiệm $1;-2$.

Suy ra $\log_2|x_1|+\log_2|x_2|=\log_2|x_1\cdot x_2|=\log_2|-2|=1$. □

⑧ Cho $f'(x)=\dfrac{2}{(2x-1)^2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ thỏa $f(2)=-\dfrac{1}{3}$. Biết phương trình $f(x)=-1$ có nghiệm duy nhất $x=x_0$. Tính 2017^{x_0}. **ĐS:** 1

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left[\frac{2}{(2x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x=-\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{x-1}+C$.

Mà $f(2)=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}+1+C_1=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow C_1=-1$.

Phương trình $f(x)=-1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{x-1}-1=-1$ có nghiệm duy nhất $x=0$, suy ra $2017^{x_0}=2007^0=1$.

□

⑨ Cho hàm số có đạo hàm cấp hai là $f''(x)=12x^2+6x-4$ và thỏa $f(0)=1$, $f(1)=3$. Tính giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x=-1$. **ĐS:** -3

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(x)=\displaystyle\int f''(x)\,\mathrm{d}x=\int(12x^2+6x-4)\,\mathrm{d}x=4x^3+3x^2-4x+C_1$.

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int(4x^3+3x^2+C_1)\,\mathrm{d}x=x^4+x^3-2x^2+C_1x+C_2$.

Mà $\begin{cases}f(0)=1\\ f(1)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=1\\ C_1+C_2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=2\\ C_2=1\end{cases}$.

Suy ra $f(x)=x^4+x^3-2x^2+2x+1\Rightarrow f(-1)=-3$. □

⑩ Tìm hàm số $f(x)$, biết $f'(x)=ax+\dfrac{b}{x^2}$, $f'(1)=0$, $f(1)=4$ và $f(-1)=2$. Tính $f(2)$. **ĐS:** 5

✍ **Lời giải.**

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(ax+\frac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}x^2-\frac{b}{x}+C$.

Ta có $\begin{cases}f'(1)=0\Leftrightarrow a+b=0\\ f(1)=4\Leftrightarrow\dfrac{a}{2}-b+C=4\\ f(-1)=2\Leftrightarrow\dfrac{a}{2}+b+C=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\\ c=\dfrac{5}{2}\end{cases}$.

Suy ra, $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2}\Rightarrow f(2)=5$. □

⑪ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[-1;2]$ thỏa $f(0)=1$ và $f^2(x)\cdot f'(x)=1+2x+3x^2$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1;2]$. **ĐS:** $m=f(-1)=\sqrt[3]{-2}$ và $M=f(2)=\sqrt[3]{43}$

✍ **Lời giải.**

$\int f^2(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\int(1+2x+3x^2)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}f^3(x)=x^3+x^2+x+C \Leftrightarrow f^3(x)=3(x^3+x^2+x+C)$

mà $f(0)=1 \Leftrightarrow f^3(0)=1 \Leftrightarrow C=\dfrac{1}{3}$ Suy ra, $f^3(x)=3x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{3x^3+3x^2+3x+1}$.

Mà $f'(x)=\dfrac{1+2x+3x^2}{f^2(x)}>0\ \forall x$, nên $f(x)$ là hàm đồng biến.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m=f(-1)=\sqrt[3]{-2}$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $M=f(2)=\sqrt[3]{43}$. □

Ví dụ 5. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa $f(x)=\sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow F(x)=\int\sqrt[n]{ax+b}\,\mathrm{d}x=\ldots.$

ĐS: $F(x)=\dfrac{n}{(n+1)a}\cdot(ax+b)\sqrt[n]{ax+b}+C$

Lời giải: Đặt $t=\sqrt[n]{ax+b} \Rightarrow t^n=ax+b \Rightarrow n\cdot t^{n-1}dt=a\cdot dx$.

Suy ra $F(x)=\int\dfrac{n\cdot t^{n-1}\cdot t}{a}\,\mathrm{d}t=\dfrac{n}{(n+1)a}\cdot t^{n+1}+C=\dfrac{n}{(n+1)a}\cdot(ax+b)\sqrt[n]{ax+b}+C$.

Nhận xét. $\boxed{\int\sqrt[n]{ax+b}\,\mathrm{d}x=\dfrac{n}{(n+1)a}\cdot(ax+b)\sqrt[n]{ax+b}+C.}$

- *Với $n=2$, suy ra* $F(x)=\int\sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b}+C.$
- *Với $n=3$, suy ra* $F(x)=\int\sqrt[3]{ax+b}\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4a}(ax+b)\sqrt[3]{ax+b}+C.$

Bài 7. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_0)=k$.

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ thỏa mãn $F(4)=\dfrac{19}{3}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+1$.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

mà $F(4)=\dfrac{19}{3} \Rightarrow \dfrac{2}{3}4\sqrt{4}+C=\dfrac{19}{3} \Rightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+1$. □

② Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{4}{3}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+1$.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\int\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3\cdot2}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$.

mà $F(1)=\dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3}(2\cdot1-1)\sqrt{2\cdot1-1}+C=\dfrac{4}{3} \Rightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+1$. □

③ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sqrt{4x-5}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{9}{4}\right)=2$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{6}(4x-5)\sqrt{4x-5}+\dfrac{2}{3}$.

✍ Lời giải.

$F(x)=\int\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3\cdot4}(4x-5)\sqrt{4x-5}+C.$

mà $F\left(\dfrac{9}{4}\right)=2\Rightarrow\dfrac{1}{6}\left(4\cdot\dfrac{9}{4}-5\right)\sqrt{4\cdot\dfrac{9}{4}-5}+C=2\Rightarrow C=\dfrac{2}{3}.$

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{6}(4x-5)\sqrt{4x-5}+\dfrac{2}{3}.$ □

④ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sqrt{5-2x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{3}.$

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{3}(5-2x)\sqrt{5-2x}+\dfrac{1}{3}.$

✍ Lời giải.

$F(x)=\int\sqrt{5-2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3\cdot(-2)}(5-2x)\sqrt{5-2x}+C=-\dfrac{1}{3}(5-2x)\sqrt{5-2x}+C.$

mà $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{7}{3}\Rightarrow-\dfrac{1}{3}\left(5-2\cdot\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{5-2\cdot\dfrac{1}{2}}+C=-\dfrac{7}{3}\Rightarrow C=\dfrac{1}{3}.$

Vậy $F(x)=-\dfrac{1}{3}(5-2x)\sqrt{5-2x}+\dfrac{1}{3}.$ □

⑤ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sqrt{1-x}$ thỏa mãn $F(-3)=\dfrac{5}{3}.$

ĐS: $F(x)=-\dfrac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+7.$

✍ Lời giải.

$F(x)=\int\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3\cdot(-1)}(1-x)\sqrt{1-x}+C=-\dfrac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C.$

mà $F(-3)=\dfrac{5}{3}\Rightarrow-\dfrac{2}{3}(1-(-3))\sqrt{1-(-3)}+C=\dfrac{5}{3}\Rightarrow C=7.$

Vậy $F(x)=-\dfrac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+7.$

□

⑥ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sqrt[3]{2x-4}$ thỏa mãn $F(-2)=\dfrac{1}{4}.$

ĐS: $F(x)=\dfrac{3}{8}(2x-4)\sqrt[3]{2x-4}-\dfrac{23}{4}.$

✍ Lời giải.

$F(x)=\int\sqrt[3]{2x-4}\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4\cdot2}(2x-4)\sqrt[3]{2x-4}+C=\dfrac{3}{8}(2x-4)\sqrt[3]{2x-4}+C$

mà $F(-2)=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{3}{8}(2\cdot(-2)-4)\sqrt[3]{2\cdot(-2)-4}+C=\dfrac{1}{4}\Rightarrow C=-\dfrac{23}{4}.$

Vậy $F(x)=\dfrac{3}{8}(2x-4)\sqrt[3]{2x-4}-\dfrac{23}{4}.$

□

⑦ Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ thỏa mãn $F(3)=\dfrac{7}{4}$. Tính giá trị biểu thức

$$T=2^{\log_{13}[F(10)]}+3^{\log_{13}[F(-6)]}.$$

ĐS: $T=2^{\log_{13}12}+3^{\log_{13}12}$

✍ Lời giải.

$F(x)=\int\sqrt[3]{x-2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2}+C.$

mà $F(3)=\dfrac{7}{4}\Rightarrow\dfrac{3}{4}(3-2)\sqrt[3]{3-2}+C=\dfrac{7}{4}\Rightarrow C=1.$

Vậy $F(x)=\dfrac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2}+1$, nên $F(10)=13$; $F(-6)=13$.
Vậy $T=2^{\log_{13}[F(10)]}+3^{\log_{13}[F(-6)]}=2^{\log_{13}12}+3^{\log_{13}12}$. □

⑧ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sqrt[3]{3-5x}$ thỏa mãn $F(-1)=-\dfrac{8}{5}$.

ĐS: $F(x)=-\dfrac{3}{20}(3-5x)\sqrt[3]{3-5x}+\dfrac{4}{5}$.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\sqrt[3]{3-5x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4\cdot(-5)}(3-5x)\sqrt[3]{3-5x}+C=-\frac{3}{20}(3-5x)\sqrt[3]{3-5x}+C$
mà $F(-1)=-\dfrac{8}{5}\Rightarrow-\dfrac{3}{20}(3-5\cdot(-1))\sqrt[3]{3-5\cdot(-1)}+C=-\dfrac{8}{5}\Rightarrow C=\dfrac{4}{5}$.
Vậy $F(x)=-\dfrac{3}{20}(3-5x)\sqrt[3]{3-5x}+\dfrac{4}{5}$.

□

⑨ Cho $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}\mathrm{d}x=\ldots$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{n}{(n-1)a}\cdot\dfrac{ax+b}{\sqrt[n]{ax+b}}+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[n]{ax+b}\Leftrightarrow t^n=ax+b\Leftrightarrow n\cdot t^{n-1}\,\mathrm{d}t=a\,\mathrm{d}x$.
Suy ra, $F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}\mathrm{d}x=\int\frac{n\cdot t^{n-1}}{at}\mathrm{d}t=\int\frac{n\cdot t^{n-2}}{a}\mathrm{d}t=\frac{n}{(n-1)a}\cdot t^{n-1}+C=\frac{n}{(n-1)a}\cdot\frac{ax+b}{\sqrt[n]{ax+b}}+C$.

□

Nhận xét. $\boxed{\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{n}{(n-1)a}\cdot\frac{ax+b}{\sqrt[n]{ax+b}}+C}$.

- *Với* $n=2$, *suy ra* $F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\cdot\sqrt{ax+b}+C$.
- *Với* $n=3$, *suy ra* $F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[3]{ax+b}}\mathrm{d}x=\frac{3}{2a}\cdot\sqrt[3]{(ax+b)^2}+C$.

⑩ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}$ thỏa mãn $F(3)=3\sqrt{11}$.

ĐS: $F(x)=\sqrt{4x-1}+2\sqrt{11}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{\sqrt{4x-1}}\mathrm{d}x=\frac{2\cdot2}{4}\sqrt{4x-1}+C=\sqrt{4x-1}+C$.
Mà $F(3)=3\sqrt{11}\Leftrightarrow\sqrt{4\cdot3-1}+C=3\sqrt{11}\Leftrightarrow C=2\sqrt{11}$.
Vậy $F(x)=\sqrt{4x-1}+2\sqrt{11}$. □

⑪ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$ thỏa mãn $F(2)=\sqrt{5}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x-1}+\dfrac{1}{3}\sqrt{5}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{\sqrt{3x-1}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{3x-1}+C$.
Mà $F(2)=\sqrt{5}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}\sqrt{3\cdot2-1}+C=\sqrt{5}\Leftrightarrow C=\dfrac{1}{3}\sqrt{5}$.
Vậy $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x-1}+\dfrac{1}{3}\sqrt{5}$. □

12 Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ thỏa mãn $F\left(-\dfrac{3}{2}\right)=2018$.

ĐS: $F(x)=-\sqrt{1-2x}+2020$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{-2}\sqrt{1-2x}+C=-\sqrt{1-2x}+C$.

Mà $F\left(-\dfrac{3}{2}\right)=2018\Leftrightarrow-\sqrt{1-2\cdot\dfrac{-3}{2}}+C=2018\Leftrightarrow C=2020$.

Vậy $F(x)=-\sqrt{1-2x}+2020$. □

13 Biết $\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=a(x+2)\sqrt{x+2}+b(x+1)\sqrt{x+1}+C$ với a,b là các số hữu tỷ và C là hằng số bất kỳ. Tính $S=3a+b$.

ĐS: $S=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\int\dfrac{(x+2)-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$F(x)=\displaystyle\int(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-\dfrac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$.

Ta có $a=\dfrac{2}{3};b=-\dfrac{2}{3}$ nên $S=3a+b=\dfrac{4}{3}$. □

14 Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ thỏa $F(0)=\dfrac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$T=3[F(3)+F(2)]+4\sqrt{2}.$$

ĐS: $T=16$.

Lời giải.

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\int\dfrac{(x+1)-x}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$F(x)=\displaystyle\int(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Ta có $F(0)=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}(0+1)\sqrt{0+1}-\dfrac{2}{3}0\sqrt{0}+C=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow C=0$,

$T=3[F(3)+F(2)]+4\sqrt{2}=3\left[\dfrac{2}{3}(3+1)\sqrt{3+1}-\dfrac{2}{3}3\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}(2+1)\sqrt{2+1}-\dfrac{2}{3}2\sqrt{2}\right]+4\sqrt{2}=16$. □

Ví dụ 6. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-2}}$ thỏa $F(1)=\sqrt{2}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x-1}+\dfrac{1}{3}(2x-2)\sqrt{2x-2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

Lời giải: Ta có:

$$\begin{aligned}F(x)=\int\frac{3}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-2}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{3\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-2}\right)}{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-2}\right)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{3\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-2}\right)}{3}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x+\int\sqrt{2x-2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}(2x+1)+\frac{1}{2}\int\sqrt{2x-2}\,\mathrm{d}(2x-2)\\&=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x-1}+\frac{1}{3}(2x-2)\sqrt{2x-2}+C.\end{aligned}$$

Vì $F(1)=\sqrt{2}$ nên suy ra $\sqrt{3}+C=\sqrt{2}\Rightarrow C=\sqrt{2}-\sqrt{3}$.
Vậy $F(x)=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+\frac{1}{3}(2x-2)\sqrt{2x-2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Bài 8.

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{9x}{\sqrt{x+10}+\sqrt{10-8x}}$ thỏa $F(0)=\sqrt{10}$.

ĐS: $F(x)=\frac{2}{3}(x+10)\sqrt{x+10}+\frac{1}{12}(10-8x)\sqrt{10-8x}-\frac{13}{2}\sqrt{10}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}F(x)=\int\frac{9x}{\sqrt{x+10}+\sqrt{10-8x}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{9x\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{10-8x}\right)}{\left(\sqrt{x+10}+\sqrt{10-8x}\right)\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{10-8x}\right)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{9x\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{10-8x}\right)}{9x}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{10-8x}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\sqrt{x+10}\,\mathrm{d}(x+10)+\frac{1}{8}\int\sqrt{10-8x}\,\mathrm{d}(10-8x)\\&=\frac{2}{3}(x+10)\sqrt{x+10}+\frac{1}{12}(10-8x)\sqrt{10-8x}+C.\end{aligned}$$

Vì $F(0)=\sqrt{10}$ nên suy ra $\frac{15}{2}\sqrt{10}+C=\sqrt{10}\Rightarrow C=-\frac{13}{2}\sqrt{10}$.
Vậy $F(x)=\frac{2}{3}(x+10)\sqrt{x+10}+\frac{1}{12}(10-8x)\sqrt{10-8x}-\frac{13}{2}\sqrt{10}$. □

② Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{6x}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{7-3x}}$ thỏa $F(2)=1$.

ĐS: $F(x)=\frac{2}{9}(3x+7)\sqrt{3x+7}-\frac{2}{9}(7-3x)\sqrt{7-3x}+\frac{11}{9}-\frac{26}{9}\sqrt{13}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}F(x)=\int\frac{6x}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{7-3x}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{6x\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{7-3x}\right)}{\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{7-3x}\right)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{6x\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{7-3x}\right)}{6x}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{7-3x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\int\sqrt{3x+7}\,\mathrm{d}(3x+7)-\frac{1}{3}\int\sqrt{7-3x}\,\mathrm{d}(7-3x)\\&=\frac{2}{9}(3x+7)\sqrt{3x+7}-\frac{2}{9}(7-3x)\sqrt{7-3x}+C.\end{aligned}$$

Vì $F(2)=1$ nên suy ra $\frac{2}{9}13\sqrt{13}-\frac{2}{9}+C=1\Rightarrow C=\frac{11}{9}-\frac{26}{9}\sqrt{13}$.
Vậy $F(x)=\frac{2}{9}(3x+7)\sqrt{3x+7}-\frac{2}{9}(7-3x)\sqrt{7-3x}+\frac{11}{9}-\frac{26}{9}\sqrt{13}$. □

③ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}}$ thỏa $F(2)=2\sqrt{2}$.

ĐS: $F(x)=2\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{3}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}F(x)=\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}(x+1)\\&=2\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}+C.\end{aligned}$$

Vì $F(2)=2\sqrt{2}$ nên suy ra $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+C=2\sqrt{2}\Rightarrow C=-2\sqrt{3}$.
Vậy $F(x)=2\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{3}$. □

④ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x+2}}$ thỏa $F(3)=4$.

ĐS: $F(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+2}-1$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}F(x)=\int\frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}(x+1)-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}(x+2)\\&=2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+2}+C.\end{aligned}$$

Vì $F(3)=4$ nên suy ra $4-2\sqrt{5}+C=4\Rightarrow C=2\sqrt{5}$.
Vậy $F(x)=2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+2}+2\sqrt{5}$. □

⑤ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x}-x\sqrt{x+2}}$ thỏa $F(1)=\sqrt{3}$.

ĐS: $F(x)=2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+2}+2\sqrt{5}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}F(x)=\int\frac{1}{(x+2)\sqrt{x}-x\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}(x+2)\\&=\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+C.\end{aligned}$$

Vì $F(1)=\sqrt{3}$ nên suy ra $1+\sqrt{3}+C=\sqrt{3}\Rightarrow C=-1$.
Vậy $F(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+2}-1$. □

Ví dụ 7. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x+\sin x$ thỏa mãn điều kiện $F(0)=19$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\cos x+20$

Lời giải: Ta có: $F(x)=\displaystyle\int(x+\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C$.
Vì $F(0)=19$ nên suy ra $0-1+C=19\Rightarrow C=20$.
Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\cos x+20$.

Bài 9. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_0)=k$

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x-\cos x$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

ĐS: $F(x)=-\cos x-\sin x+\sqrt{2}$

✍ Lời giải.

Ta có: $F(x)=\int(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x=-\cos x-\sin x+C$.

Vì $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ nên suy ra $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+C=0\Rightarrow C=\sqrt{2}$.

Vậy $F(x)=-\cos x-\sin x+\sqrt{2}$. □

② Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x-3\cos x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$. Tính $F(\pi)$.

ĐS: $F(x)=x^2-3\sin x+3$

✍ Lời giải.

Ta có: $F(x)=\int(2x-3\cos x)\,\mathrm{d}x=x^2-3\sin x+C$.

Vì $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$ nên suy ra $\frac{\pi^2}{4}-3+C=0\Rightarrow C=3$.

Vậy $F(x)=x^2-3\sin x+3$. □

③ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}$.

ĐS: $F(x)=x+\cos x+\pi$

✍ Lời giải.

Ta có: $F(x)=\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\int(1-\sin x)\,\mathrm{d}x=x+\cos x+C$.

Vì $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{2}$ nên suy ra $\frac{\pi}{2}+C=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow C=\pi$.

Vậy $F(x)=x+\cos x+\pi$. □

④ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{2}{\cos^2 x}$ thỏa mãn điều kiện $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2$.

ĐS: $F(x)=2\tan x+4$

✍ Lời giải.

Ta có: $F(x)=\int\frac{2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=2\tan x+C$.

Vì $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2$ nên suy ra $-2+C=2\Rightarrow C=4$.

Vậy $F(x)=2\tan x+4$. □

⑤ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn điều kiện $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

ĐS: $F(x)=-\cot x-\sqrt{3}$

✍ Lời giải.

Ta có: $F(x)=\int\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\cot x+C$.

Vì $F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$ nên suy ra $\sqrt{3}+C=0\Rightarrow C=-\sqrt{3}$.

Vậy $F(x)=-\cot x-\sqrt{3}$. □

⑥ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x\left(2+\frac{1}{x\sin^2 x}\right)$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

ĐS: $F(x)=x^2-\cot x-\frac{\pi^2}{16}$

✍ Lời giải.

Ta có: $F(x)=\int x\left(2+\frac{1}{x\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=x^2-\cot x+C$.

Vì $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$ nên suy ra $\frac{\pi^2}{16}-1+C=-1\Rightarrow C=-\frac{\pi^2}{16}$.

Vậy $F(x)=x^2-\cot x-\frac{\pi^2}{16}$. □

⑦ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn điều kiện $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ĐS: $F(x)=-\cos x+\tan x+\sqrt{2}+1$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int\left(\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\cos x+\tan x+C$.

Vì $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ nên suy ra $-\frac{\sqrt{2}}{2}-1+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow C=\sqrt{2}+1$.

Vậy $F(x)=-\cos x+\tan x+\sqrt{2}+1$. □

⑧ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=1+\tan^2 x$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ĐS: $F(x)=\tan x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x=\tan x+C$.

Vì $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ nên suy ra $-\frac{\sqrt{3}}{3}+C=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $F(x)=\tan x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$. □

⑨ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\tan^2 x$ thỏa mãn điều kiện $F(0)=3$.

ĐS: $F(x)=\tan x-x+3$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int\left(\tan^2 x+1-1\right)\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.

Vì $F(0)=3$ nên suy ra $0-0+C=3\Rightarrow C=3$.

Vậy $F(x)=\tan x-x+3$. □

⑩ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=(\tan x+\cot x)^2$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$.

ĐS: $F(x)=\tan x-\cot x+3$

✍ **Lời giải.**

Ta có:

$$F(x)=\int(\tan x+\cot x)^2\,\mathrm{d}x=\int\left(\tan^2 x+2+\cot^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\left(\tan^2 x+1+\cot^2 x+1\right)\mathrm{d}x$$
$$=\tan x-\cot x+C.$$

Vì $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$ nên suy ra $1-1+C=3\Rightarrow C=3$.

Vậy $F(x)=\tan x-\cot x+3$. □

⑪ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

ĐS: $F(x)=-\cot x-\tan x+2$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\cot x-\tan x+C.$
Vì $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ nên suy ra $-1-1+C=0\Rightarrow C=2.$
Vậy $F(x)=-\cot x-\tan x+2.$ □

⑫ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin^2\dfrac{x}{2}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4.$

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{9-\pi}{4}$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int \sin^2\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1-\cos x}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\sin x+C.$
Vì $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4$ nên suy ra $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}+C=4\Rightarrow C=\dfrac{9-\pi}{4}.$
Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{9-\pi}{4}.$ □

⑬ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}.$

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int \cos^2\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1+\cos x}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin x+C.$
Vì $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ nên suy ra $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}+C=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow C=-\dfrac{1}{2}.$
Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}.$ □

Ví dụ 8. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos 2x$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{5}{2}.$

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+2$

Lời giải: Ta có: $F(x)=\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C.$
Vì $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{5}{2}$ nên suy ra $\dfrac{1}{2}+C=\dfrac{5}{2}\Rightarrow C=2.$
Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+2.$

Bài 10. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_0)=k$

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin(1-2x)$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=1.$

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}\cos(1-2x)+\dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int\sin(1-2x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int\sin(1-2x)\,\mathrm{d}(1-2x)=\dfrac{1}{2}\cos(1-2x)+C.$
Vì $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$ nên suy ra $\dfrac{1}{2}+C=1\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}.$
Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}\cos(1-2x)+\dfrac{1}{2}.$ □

② Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos^4 x-\sin^4 x$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{2}.$

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+1$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int\left(\sin\cos^4 x-\sin^4 x\right)\mathrm{d}x=\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

Vì $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{2}$ nên suy ra $\dfrac{1}{2}+C=\dfrac{3}{2}\Rightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+1$. □

③ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\pi}{16}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{16}\sin 4x$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\cos^4 x+\sin^4 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-2\cos^2 x\sin^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x=1-\dfrac{1}{4}(1-\cos 4x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4x$.

Do đó: $F(x)=\int\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{16}\sin 4x+C$.

Vì $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\pi}{16}$ nên suy ra $\dfrac{3\pi}{16}+C=\dfrac{3\pi}{16}\Rightarrow C=0$.

Vậy $F(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{16}\sin 4x$. □

④ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x(2+\cos x)$ thỏa mãn điều kiện $4F(0)=11$.

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{2}(2+\cos x)^2+\dfrac{29}{4}$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int\sin x(2+\cos x)\,\mathrm{d}x=-\int(2+\cos x)\,\mathrm{d}(2+\cos x)=-\dfrac{1}{2}(2+\cos x)^2+C$.

Vì $4F(0)=11$ nên suy ra $4\left(-\dfrac{9}{2}+C\right)=11\Rightarrow C=\dfrac{29}{4}$.

Vậy $F(x)=-\dfrac{1}{2}(2+\cos x)^2+\dfrac{29}{4}$. □

⑤ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{6}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{3}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+C$.

Vì $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{6}$ nên suy ra $-\dfrac{1}{6}+C=\dfrac{5}{6}\Rightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{3}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$. □

⑥ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos 6x-\cos 4x$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{6}\sin 6x-\dfrac{1}{4}\sin 4x+\dfrac{1}{4}$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int(\cos 6x-\cos 4x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}\sin 6x-\dfrac{1}{4}\sin 4x+C$.

Vì $F\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ nên suy ra $\dfrac{\sqrt{2}}{12}-\dfrac{1}{4}+C=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\Rightarrow C=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{6}\sin 6x-\dfrac{1}{4}\sin 4x+\dfrac{1}{4}$. □

⑦ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin 2x+3x^2$ thỏa mãn điều kiện $F(0)=0$.

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+x^3+\dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int\left(\sin 2x+3x^2\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+x^3+C$.

Vì $F(0)=0$ nên suy ra $-\dfrac{1}{2}+C=0\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+x^3+\dfrac{1}{2}$. □

⑧ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=1+\tan^2\dfrac{x}{2}$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=5$.

ĐS: $F(x)=2\tan\dfrac{x}{2}+3$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{2}\right)=2\tan\dfrac{x}{2}+C$.

Vì $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=5$ nên suy ra $2+C=5\Rightarrow C=3$.

Vậy $F(x)=2\tan\dfrac{x}{2}+3$. □

⑨ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$ thỏa mãn điều kiện $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3$.

ĐS: $F(x)=-2\cot 2x+3$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{4}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{2}{\sin^2 2x}\mathrm{d}(2x)=-2\cot 2x+C$.

Vì $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3$ nên suy ra $0+C=3\Rightarrow C=3$.

Vậy $F(x)=-2\cot 2x+3$. □

⑩ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{(\cos x-\sin x)^2}$ thỏa mãn điều kiện $F(0)=1$.

ĐS: $F(x)=-\cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1$

✍ **Lời giải.**

Ta có:

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{2}{(\cos x-\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{2}{\left(\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+C$.

Vì $F(0)=1$ nên suy ra $1+C=0\Rightarrow C=-1$.

Vậy $F(x)=-\cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1$. □

⑪ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{(\cos x+\sin x)^2}$ thỏa mãn điều kiện $F(0)=\dfrac{1}{2}$.

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

✍ **Lời giải.**

Ta có:

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{1}{(\cos x+\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+C$.

Vì $F(0)=\dfrac{1}{2}$ nên suy ra $-\dfrac{1}{2}+C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$. □

⑫ Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=a+b\cos 2x$ thỏa mãn điều kiện $F(0)=\dfrac{\pi}{2}$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

ĐS: $F(x)=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2\pi}{9}\sin 2x+\dfrac{\pi}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int(a+b\cos 2x)\,\mathrm{d}x=ax+\frac{1}{2}b\sin 2x+C$.

Vì $F(0)=\dfrac{\pi}{2}$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} C &= \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{a\pi}{2}+C &= \dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{a\pi}{12}+\dfrac{b}{4}+C &= \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=\dfrac{\pi}{2} \\ a=\dfrac{-2}{3} \\ b=\dfrac{-4\pi}{9} \end{cases}.$$

Vậy $F(x)=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2\pi}{9}\sin 2x+\dfrac{\pi}{2}$. □

⑬ Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2\sin 5x+\sqrt{x}+\dfrac{3}{5}$ thỏa mãn điều kiện đồ thị của hai hàm số $F(x)$ và $f(x)$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung. Tìm hàm số $F(x)$.

ĐS: $F(x)=-\dfrac{2}{5}\cos 5x+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{3}{5}x+1$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int\left(2\sin 5x+\sqrt{x}+\frac{3}{5}\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{5}\cos 5x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x+C$.

Đồ thị hàm số $f(x)=2\sin 5x+\sqrt{x}+\dfrac{3}{5}$ cắt trục tung tại điểm $A\left(0;\dfrac{3}{5}\right)$.

Vì đồ thị của hai hàm số $F(x)$ và $f(x)$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung nên suy ra $F(x)$ đi qua điểm $A\left(0;\dfrac{3}{5}\right)$. Do đó:

$-\dfrac{2}{5}+C=\dfrac{3}{5}\Rightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=-\dfrac{2}{5}\cos 5x+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{3}{5}x+1$. □

Ví dụ 9. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos^2 x$ thỏa mãn $F(0)=10$.

Lời giải: $F(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+10$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

Vì $F(0)=10$ nên suy ra $C=10$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+10$. □

Bài 11. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_0)=k$

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin^2 2x$, biết rằng đồ thị của hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}\sin 4x$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\int \sin^2 2x\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{1-\cos 4x}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}\sin 4x+C.$

Vì đồ thị của hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên suy ra:

$\dfrac{\pi}{4}+C=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow C=0.$

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}\sin 4x.$ □

② Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=(1+\sin x)^2$ thỏa mãn $F(0)=0$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{3}{2}x-2\cos x-\dfrac{1}{4}\sin 4x+2$

✍ Lời giải.

Ta có:

$$F(x)=\int (1+\sin x)^2\,\mathrm{d}x=\int \left(1+2\sin x+\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{2}+2\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 4x+C.$$

Vì $F(0)=0$ nên suy ra $-2+C=0\Rightarrow C=2.$

Vậy $F(x)=\dfrac{3}{2}x-2\cos x-\dfrac{1}{4}\sin 4x+2.$ □

③ Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{4m}{\pi}+\sin^2 x$ thỏa mãn $F(0)=1$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{8}$. Tìm giá thực của tham số m.

ĐS: $m=-\dfrac{3}{4}$

✍ Lời giải.

Ta có: $F(x)=\int\left(\dfrac{4m}{\pi}+\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{4m}{\pi}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{4m}{\pi}+\dfrac{1}{2}\right)x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C.$

Vì $F(0)=1$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{8}$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} C &=1\\ m+\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{3}{4} &=\dfrac{\pi}{8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C &=1\\ m &=-\dfrac{3}{4}\end{cases}.$$

Vậy $m=-\dfrac{3}{4}$. □

④ Cho hàm số $f(x)=\dfrac{a}{\pi}+\cos^2 x$ Tìm tất cả các giá trị của a để $f(x)$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn đồng thời $F(0)=\dfrac{1}{4}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

ĐS: $a=\dfrac{\pi}{2}-2$

✍ Lời giải.

Ta có: $F(x)=\int\left(\dfrac{a}{\pi}+\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{a}{\pi}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{a}{\pi}+\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C.$

Vì $F(0)=\dfrac{1}{4}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ nên suy ra:

$$\begin{cases} C &=\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{a}{4}+\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}+C &=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} C= &1\\ a= &\dfrac{\pi}{2}-2\end{cases}.$$

Vậy $a=\dfrac{\pi}{2}-2.$ □

⑤ Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng $f'(x)=\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ và $f(0)=\dfrac{13}{4}$.

ĐS: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+3$

✍ Lời giải.

Ta có: $f(x)=\int \cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$.

Vì $f(0)=\dfrac{13}{4}$ nên suy ra $\dfrac{1}{4}+C=\dfrac{13}{4}\Rightarrow C=3$.

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+3$. □

Ví dụ 10. Gọi $F_1(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_1(x)=\sin^2 x$ thỏa $F_1(0)=0$ và $F_2(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_2(x)=\cos^2 x$ thỏa mãn $F_2(0)=0$. Giải phương trình $F_1(x)=F_2(x)$.

ĐS: $x=k\dfrac{\pi}{2}$

Lời giải: Ta có, $F_1(x)=\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

mà $F_1(0)=0\Rightarrow\dfrac{1}{2}\left(0-\dfrac{1}{2}\sin 0\right)+C=0\Rightarrow C=0$

Khi đó, $F_1(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$

Tương tự, $F_2(x)=\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

mà $F_2(0)=0\Rightarrow\dfrac{1}{2}\left(0+\dfrac{1}{2}\sin 0\right)+C=0\Rightarrow C=0$

Khi đó, $F_2(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$

Theo đề bài,

$$\begin{aligned}&F_1(x)=F_2(x)\\ \Rightarrow\ &\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\\ \Rightarrow\ &\sin 2x=0\\ \Rightarrow\ &2x=k\pi\\ \Rightarrow\ &x=k\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Bài 12. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_\circ)=k$.

① Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos^4 x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\sin 4x\right)+8\sqrt{2}-2-\dfrac{3\pi}{4}$

✍ Lời giải.

Ta có,

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\cos^4 x\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{8}\int(3+4\cos 2x+\cos 4x)\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C\end{aligned}$$

mà $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{8}\left(\frac{3\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin\pi\right)+C=\sqrt{2}\Rightarrow C=8\sqrt{2}-2-\frac{3\pi}{4}$

Vậy một nguyên hàm cần tìm là $F(x)=\frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+8\sqrt{2}-2-\frac{3\pi}{4}$. □

② Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin^4 2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{8}$.

ĐS: $F(x)=\frac{1}{8}\left(3x-\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)+\frac{3}{8}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\text{Ta có, } F(x) &= \int\sin^4 2x\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 4x+\frac{1-\cos 8x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 4x-\cos 8x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{8}\left(3x-\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C\end{aligned}$$

mà $F(0)=\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{1}{8}\left(0-\sin 0-\frac{1}{8}\sin 0\right)+C=\frac{3}{8}\Rightarrow C=\frac{3}{8}$

Vậy một nguyên hàm cần tìm là $F(x)=\frac{1}{8}\left(3x-\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 8x\right)+\frac{3}{8}$. □

Ví dụ 11. Hàm số $f(x)=\sin 3x\cos x$ có 1 nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{15}{16}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

ĐS: $F(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+1$

Lời giải:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int(\sin 3x\cos x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int(\sin 4x+\sin 2x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C\end{aligned}$$

Theo giả thuyết, $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{15}{16}\Rightarrow\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right)+C=\frac{15}{16}\Rightarrow C=1$.

Vậy có 1 nguyên hàm cần tìm là $F(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+1$.

Bài 13. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_\circ)=k$.

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2\sin x\cos 3x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3$.

ĐS: $F(x)=-\frac{\cos 4x}{4}+\frac{\cos 2x}{2}-\frac{9}{4}$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\int 2\sin x\cos 3x\,\mathrm{d}x=\int(\sin 4x+\sin(-2x))\,\mathrm{d}x=\int(\sin 4x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos 4x}{4}+\frac{\cos 2x}{2}+C$.

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\Leftrightarrow-\frac{\cos 2\pi}{4}+\frac{\cos\pi}{2}+C=-3\Leftrightarrow-\frac{1}{4}+\frac{-1}{2}+C=-3\Leftrightarrow C=-\frac{9}{4}$.

Vậy $F(x)=-\frac{\cos 4x}{4}+\frac{\cos 2x}{2}-\frac{9}{4}$. □

② Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin 4x\cos x$ thỏa mãn $F(\pi)=4$.

ĐS: $\mathrm{F(x)}=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\cos 5x}{5}-\dfrac{\cos 3x}{3}\right)+\dfrac{56}{15}$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int \sin 4x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin 3x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5}-\frac{\cos 3x}{3}\right)+C.$

$F(\pi)=4\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\cos 5\pi}{5}-\dfrac{\cos 3\pi}{3}\right)+C=4\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}\right)+C=4\Leftrightarrow C=\dfrac{56}{15}.$

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\cos 5x}{5}-\dfrac{\cos 3x}{3}\right)+\dfrac{56}{15}.$ □

③ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos 5x\cos x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=5$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 6x}{6}+\dfrac{\sin 4x}{4}\right)+\dfrac{61}{12}$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int \cos 5x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\cos 6x+\cos 4x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 4x}{4}\right)+C.$

$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=5\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 6\dfrac{\pi}{4}}{6}+\dfrac{\sin\pi}{4}\right)+C=5\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{6}+\dfrac{0}{4}\right)+C=5\Leftrightarrow C=\dfrac{61}{12}.$

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 6x}{6}+\dfrac{\sin 4x}{4}\right)+\dfrac{61}{12}.$ □

④ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos 6x\cos 2x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 8x}{8}+\dfrac{\sin 4x}{4}\right)+\dfrac{\sqrt{3}-64}{32}$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int \cos 6x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\cos 8x+\cos 4x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 8x}{8}+\frac{\sin 4x}{4}\right)+C.$

$F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 8\dfrac{\pi}{6}}{8}+\dfrac{\sin 4\dfrac{\pi}{6}}{4}\right)+C=-2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{8}+\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{4}\right)+C=-2\Leftrightarrow C=\dfrac{\sqrt{3}-64}{32}.$

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 8x}{8}+\dfrac{\sin 4x}{4}\right)+\dfrac{\sqrt{3}-64}{32}.$ □

⑤ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos 2x\cos 8x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=2018$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 10x}{10}+\dfrac{\sin 6x}{6}\right)+2018-\dfrac{\sqrt{2}}{60}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}F(x)&=\int\cos 2x\cos 8x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int(\cos 10x+\cos(-6x))\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int(\cos 10x+\cos 6x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 10x}{10}+\frac{\sin 6x}{6}\right)+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F\left(\frac{\pi}{8}\right)=2018 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 10\dfrac{\pi}{8}}{10}+\frac{\sin 6\dfrac{\pi}{8}}{6}\right)+C=2018 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \dfrac{5\pi}{4}}{10}+\frac{\sin \dfrac{3\pi}{4}}{6}\right)+C=2018 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\left(\frac{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{10}+\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{6}\right)+C=2018 \\
\Leftrightarrow\ & C=2018-\frac{\sqrt{2}}{60}
\end{aligned}$$

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 10x}{10}+\dfrac{\sin 6x}{6}\right)+2018-\dfrac{\sqrt{2}}{60}$. □

⑥ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin 7x\sin x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-7$.

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 8x}{8}-\dfrac{\sin 6x}{6}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{32}-7$

✍ **Lời giải.**

$$F(x)=\int \sin 7x\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int(\cos 8x-\cos 6x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 8x}{8}-\frac{\sin 6x}{6}\right)+C.$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-7\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 8\dfrac{\pi}{3}}{8}-\frac{\sin 6\dfrac{\pi}{3}}{6}\right)+C=-7\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{8}-\frac{0}{6}\right)+C=-7\Leftrightarrow C=\frac{\sqrt{3}}{32}-7.$$

Vậy $F(x)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 8x}{8}-\dfrac{\sin 6x}{6}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{32}-7$. □

⑦ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x\sin 3x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$.

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 4x}{4}-\dfrac{\sin 2x}{2}\right)+\dfrac{1}{4}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \sin x\sin 3x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int(\cos 4x-\cos(-2x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int(\cos 4x-\cos 2x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 4x}{4}-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 4\frac{\pi}{4}}{4}-\frac{\sin 2\frac{\pi}{4}}{2}\right)+C=\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\pi}{4}-\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right)+C=\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{0}{4}-\frac{1}{2}\right)+C=\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & C=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vậy $F(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 4x}{4}-\frac{\sin 2x}{2}\right)+\frac{1}{4}$. □

⑧ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin 10x\sin 5x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=9$.

ĐS: $F(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 15x}{15}-\frac{\sin 5x}{5}\right)+\frac{133}{15}$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\int \sin 10x\sin 5x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int(\cos 15x-\cos 5x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 15x}{15}-\frac{\sin 5x}{5}\right)+C.$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=9\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 15\frac{\pi}{2}}{15}-\frac{\sin 5\frac{\pi}{2}}{5}\right)+C=9\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{15}-\frac{1}{5}\right)+C=9\Leftrightarrow C=\frac{133}{15}.$

Vậy $F(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 15x}{15}-\frac{\sin 5x}{5}\right)+\frac{133}{15}$. □

Ví dụ 12. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^{3x}$ thỏa mãn $F(0)=1$.

ĐS: $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2}{3}$

Lời giải: $F(x)=\int e^{3x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{3x}+C.$

$F(0)=1\Leftrightarrow \frac{1}{3}e^{0}+C=1\Leftrightarrow C=\frac{2}{3}.$

Vậy $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2}{3}$.

Bài 14. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_\circ)=k$.

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^{3x+1}$ thỏa mãn $F(0)=\frac{e}{3}$. Tính $\ln^3[3F(1)]$.

ĐS: $\ln^3[3F(1)]=64$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\int e^{3x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{3x+1}+C.$

$F(0)=\frac{e}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{3}e+C=\frac{e}{3}\Leftrightarrow C=0.$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}e^{3x+1}\Rightarrow F(1)=\frac{e^4}{3}.$

$\ln^3[3F(1)]=\ln^3\left[3\frac{e^4}{3}\right]=4^3=64.$ □

② Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\left(2+e^{3x}\right)^2$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{3}{2}$. Tính $F\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

ĐS: $F\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3e^2}{2}+12e$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\left(2+e^{3x}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(e^{6x}+4e^{3x}+4\right)\mathrm{d}x=\dfrac{e^{6x}}{6}+\dfrac{4e^{3x}}{3}+4x+C.$

$F(0)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{e^0}{6}+\dfrac{4e^0}{3}+0+C=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{6}+\dfrac{4}{3}+C=\dfrac{3}{2}\Rightarrow C=0.$

$\Rightarrow F(x)=\dfrac{e^{6x}}{6}+\dfrac{4e^{3x}}{3}+4x.$

$\Rightarrow F\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{e^{6\frac{1}{3}}}{6}+\dfrac{4e^{3\frac{1}{3}}}{3}+4\dfrac{1}{3}=\dfrac{e^2}{6}+\dfrac{4e}{3}+\dfrac{4}{3}.$ □

③ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^{-x}(2e^x+1)$ thỏa mãn $F(0)=1$.

ĐS: $F(x)=2x-e^{-x}+2$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int e^{-x}\left(2e^x+1\right)\mathrm{d}x=\int\left(2+e^{-x}\right)\mathrm{d}x=2x-e^{-x}+C.$

$F(0)=1\Rightarrow 2\cdot 0-e^0+C=1\Rightarrow C=2.$

Vậy $F(x)=2x-e^{-x}+2$ □

④ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^x(3+e^{-x})$ thỏa mãn $F(\ln 2)=3$

ĐS: $F(x)=3e^x+x-4-\ln 2$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int e^x\left(3+e^{-x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3e^x+1\right)\mathrm{d}x=3e^x+x+C.$

$F(\ln 2)=3\Rightarrow 3e^{\ln 2}+\ln 2+C=2\Rightarrow C=-4-\ln 2.$

Vậy $F(x)=3e^x+x-4-\ln 2.$ □

⑤ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sqrt{e^{4x-2}}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$

ĐS: $F(x)=\dfrac{e^{2x-1}}{2}+\dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\sqrt{e^{4x-2}}\mathrm{d}x=\int e^{\frac{4x-2}{2}}\mathrm{d}x=\int e^{2x-1}\mathrm{d}x=\dfrac{e^{2x-1}}{2}+C.$

$F\left(\dfrac{1}{2}\right)=1\Rightarrow\dfrac{e^{2\frac{1}{2}-1}}{2}+C=1\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}.$

Vậy $F(x)=\dfrac{e^{2x-1}}{2}+\dfrac{1}{2}.$ □

⑥ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=e^{3x-1}-\dfrac{1}{x^2}$ thỏa mãn $F(1)=2+\dfrac{e^2}{3}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{e^{3x-1}}{3}+\dfrac{1}{x}+1$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int e^{3x-1}-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{e^{3x-1}}{3}+\dfrac{1}{x}+C.$

$F(1)=2+\dfrac{e^2}{3}\Rightarrow\dfrac{e^{3\cdot1-1}}{3}+\dfrac{1}{1}+C=2+\dfrac{e^2}{3}\Rightarrow C=1.$

Vậy $F(x)=\dfrac{e^{3x-1}}{3}+\dfrac{1}{x}+1.$ □

⑦ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2017^x$ thỏa mãn $F(1)=\ln^{-1}2017$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{2017^x}{\ln2017}-\dfrac{2016}{\ln2017}$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int 2017^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2017^x}{\ln2017}+C.$

$F(1)=\ln^{-1}2017\Rightarrow\dfrac{2017^1}{\ln2017}+C=\ln^{-1}2017\Rightarrow C=\dfrac{-2016}{\ln2017}.$

Vậy $F(x)=\dfrac{2017^x}{\ln2017}-\dfrac{2016}{\ln2017}.$ □

⑧ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=3^x-2^x\cdot3^x$ thỏa mãn $F(0)=-\dfrac{1}{\ln6}+2$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{3^x}{\ln3}-\dfrac{6^x}{\ln6}+2-\dfrac{1}{\ln3}$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int 3^x-2^x\cdot3^x\,\mathrm{d}x=\int 3^x-6^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln3}-\dfrac{6^x}{\ln6}+C.$

$F(0)=-\dfrac{1}{\ln6}+2\Rightarrow\dfrac{3^0}{\ln3}-\dfrac{6^0}{\ln6}+C=-\dfrac{1}{\ln6}+2\Rightarrow\dfrac{1}{\ln3}-\dfrac{1}{\ln6}+C=-\dfrac{1}{\ln6}+2\Rightarrow C=2-\dfrac{1}{\ln3}.$

Vậy $F(x)=\dfrac{3^x}{\ln3}-\dfrac{6^x}{\ln6}+2-\dfrac{1}{\ln3}.$ □

⑨ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=9^x-3x^2$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{\ln9}+2$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{9^x}{\ln9}-x^3+2$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int 9^x-3x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{9^x}{\ln9}-x^3+C.$

$F(0)=\dfrac{1}{\ln9}+2\Rightarrow\dfrac{9^0}{\ln9}-0+C=\dfrac{1}{\ln9}+2\Rightarrow C=2.$

Vậy $F(x)=\dfrac{9^x}{\ln9}-x^3+2.$ □

⑩ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=4^x2^{2x+3}$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{2}{\ln2}$. Tính $A=\dfrac{[\ln2\cdot F(1)]^3}{2^{10}}$.

ĐS: $A=32$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int 4^x2^{2x+3}\,\mathrm{d}x=\int 8\cdot16^x\,\mathrm{d}x=8\dfrac{16^x}{\ln16}+C=2\dfrac{16^x}{\ln2}+C.$

$F(0)=\dfrac{2}{\ln2}\Rightarrow2\dfrac{16^0}{\ln2}+C=\dfrac{2}{\ln2}\Rightarrow C=0.$

$\Rightarrow F(x)=2\dfrac{16^x}{\ln2}.$

$A=\dfrac{[\ln2\cdot F(1)]^3}{2^{10}}=\dfrac{\left[\ln2\cdot2\dfrac{16^1}{\ln2}\right]^3}{2^{10}}=32.$ □

⑪ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2^{2x}3^x7^x$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{\ln 84}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{84^x}{\ln 84}-\dfrac{83}{\ln 84}$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int 2^{2x}3^x7^x\,\mathrm{d}x=\int 84^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{84^x}{\ln 84}+C.$

$F(1)=\dfrac{1}{\ln 84}\Rightarrow\dfrac{84^1}{\ln 84}+C=\dfrac{1}{\ln 84}\Rightarrow C=-\dfrac{83}{\ln 84}.$

Vậy $F(x)=\dfrac{84^x}{\ln 84}-\dfrac{83}{\ln 84}$. □

⑫ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2^x3^{-2x}$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{2}{9}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{\left(\frac{2}{9}\right)^x}{\ln\frac{2}{9}}+\dfrac{2}{9}\left(1-\dfrac{1}{\ln\frac{2}{9}}\right)$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int 2^x3^{-2x}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{9}\right)^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\left(\frac{2}{9}\right)^x}{\ln\frac{2}{9}}+C.$

$F(1)=\dfrac{2}{9}\Rightarrow\dfrac{\left(\frac{2}{9}\right)^1}{\ln\frac{2}{9}}+C=\dfrac{2}{9}\Rightarrow C=\dfrac{2}{9}\left(1-\dfrac{1}{\ln\frac{2}{9}}\right)$

Vậy $F(x)=\dfrac{\left(\frac{2}{9}\right)^x}{\ln\frac{2}{9}}+\dfrac{2}{9}\left(1-\dfrac{1}{\ln\frac{2}{9}}\right)$. □

Ví dụ 13. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int\dfrac{2x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=2x+3\ln|x-1|+C$

Lời giải: $F(x)=\displaystyle\int\dfrac{2x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\int 2+\dfrac{3}{x-1}\,\mathrm{d}x=2x+3\ln|x-1|+C$

Bài 15. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định)

① $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int\dfrac{3x+1}{x-2}\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=3x+7\ln|x-2|+C$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{3x+1}{x-2}\,\mathrm{d}x=\int 3+\dfrac{7}{x-2}\,\mathrm{d}x=3x+7\ln|x-2|+C.$ □

② $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+3}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int\dfrac{x+1}{2x+3}\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\ln|2x+3|}{2}+C$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{x+1}{2x+3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2x+3)}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\ln|2x+3|}{2}+C.$ □

③ $f(x)=\dfrac{x-1}{3x+1}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int\dfrac{x-1}{3x+1}\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{4\ln|3x+1|}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{x-1}{3x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3}-\dfrac{4}{3(3x+1)}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x}{3}-\dfrac{4\ln|3x+1|}{3}+C.$ □

④ $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\ln|x+1|+C$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int x+\dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+\ln|x+1|+C.$ □

⑤ $f(x)=\dfrac{4x^2+6x+1}{2x+1}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=x^2+2x-\ln|2x+1|+C$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{4x^2+6x+1}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\int 2x+2-\dfrac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x=x^2+2x-\ln|2x+1|+C.$ □

⑥ $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{2x+1}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3x}{4}+\dfrac{11\ln|2x+1|}{4}+C$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{x^2-x+2}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{11}{4(2x+1)}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3x}{4}+\dfrac{11\ln|2x+1|}{4}+C.$ □

⑦ $f(x)=\dfrac{4x^3+4x^2-1}{2x+1}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{\ln|2x+1|}{2}+C$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{4x^3+4x^2-1}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\int 2x^2+x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2(2x+1)}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{\ln|2x+1|}{2}+C.$ □

⑧ $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+3x-5}{2x+3}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{7x^2}{8}+\dfrac{33x}{8}-\dfrac{139\ln|2x+3|}{8}+C$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{x^3-2x^2+3x-5}{2x+3}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{7x}{4}+\dfrac{33}{8}-\dfrac{139}{8(2x+3)}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{7x^2}{8}+\dfrac{33x}{8}-\dfrac{139\ln|2x+3|}{8}+C.$

□

Ví dụ 14. Tìm nguyên của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2-a^2}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|}{2a}+C$

Lời giải. $F(x)=\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}\int\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|}{2a}+C.$

Bài 16. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định)

① $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|}{4}+C$

✍ **Lời giải.**

$$F(x)=\int \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x=\frac{\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|}{4}+C.$$ □

② $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

$$F(x)=\int \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$$ □

③ $f(x)=\dfrac{3}{x^2+3x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\ln\left|\dfrac{x}{x+3}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

$$F(x)=\int \frac{3}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C.$$ □

④ $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\ln\left|\dfrac{x-4}{x}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

$$F(x)=\int \frac{4}{x^2-4x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x-4}-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x-4}{x}\right|+C.$$ □

⑤ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+5}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-5}{x-1}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

$$F(x)=\int \frac{1}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{(x-1)(x-5)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C.$$ □

⑥ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x-5}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x+5}{x-1}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

$$F(x)=\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{(x+5)(x-1)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+5}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C.$$ □

⑦ $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-x-6}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{7}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+\frac{3}{2}}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

$$F(x)=\int \frac{1}{2x^2-x-6}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2(x+\frac{3}{2})(x-2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+\frac{3}{2}}\int \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+\frac{3}{2}}\right|+C.$$ □

⑧ $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-3x-9}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{9}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+\frac{3}{2}}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\dfrac{1}{2x^2-3x-9}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2(x+\frac{3}{2})(x-3)}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3+\frac{3}{2}}\int\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{9}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+\frac{3}{2}}\right|+C..$ □

⑨ $f(x)=\dfrac{4x-5}{x^2-x-2}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\ln|x-2|+3\ln|x+1|+C$

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức: $\dfrac{mx+n}{(ax+b)(cx+d)}=\dfrac{1}{ad-bc}\left[\dfrac{-(mb-na)}{ax+b}+\dfrac{md-nc}{cx+d}\right].$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int\dfrac{4x-5}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x\\
&= \int\dfrac{4x-5}{(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x\\
&= \int\dfrac{1}{1+2}\left[\dfrac{-(4\cdot(-2)-(-5))}{x-2}+\dfrac{4\cdot1-(-5)}{x+1}\right]\mathrm{d}x\\
&= \int\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{9}{x+1}\right]\mathrm{d}x\\
&= \int\left[\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x+1}\right]\mathrm{d}x\\
&= \ln|x-2|+3\ln|x+1|+C
\end{aligned}$$

□

⑩ $f(x)=\dfrac{4x+11}{x^2+5x+6}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=3\ln|x+2|+\ln|x+3|+C$

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức: $\dfrac{mx+n}{(ax+b)(cx+d)}=\dfrac{1}{ad-bc}\left[\dfrac{-(mb-na)}{ax+b}+\dfrac{md-nc}{cx+d}\right].$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int\dfrac{4x+11}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x\\
&= \int\dfrac{4x+11}{(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x\\
&= \int\dfrac{1}{3-2}\left[\dfrac{-(4\cdot2-(11\cdot1))}{x+2}+\dfrac{4\cdot3-11\cdot1}{x+3}\right]\mathrm{d}x\\
&= \int\left[\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}\right]\mathrm{d}x\\
&= 3\ln|x+2|+\ln|x+3|+C
\end{aligned}$$

□

⑪ $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x-6}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{4}{5}\ln|x-3|+\dfrac{1}{5}\ln|x+2|+C$

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức: $\dfrac{mx+n}{(ax+b)(cx+d)} = \dfrac{1}{ad-bc}\left[\dfrac{-(mb-na)}{ax+b} + \dfrac{md-nc}{cx+d}\right]$.

$F(x) = \displaystyle\int \dfrac{x+1}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{x+1}{(x-3)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{4}{x-3} + \dfrac{1}{x+2}\right]\mathrm{d}x = \dfrac{4}{5}\ln|x-3| + \dfrac{1}{5}\ln|x+2| + C.$

□

(12) $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2-3x+2} \Rightarrow F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x =$

ĐS: $F(x) =$

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức: $\dfrac{mx+n}{(ax+b)(cx+d)} = \dfrac{1}{ad-bc}\left[\dfrac{-(mb-na)}{ax+b} + \dfrac{md-nc}{cx+d}\right]$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{5x-3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{5x-3}{(x-2)(x-1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{1}\left[\frac{7}{x-2} + \frac{-2}{x-1}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{7}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right]\mathrm{d}x \\ &= 7\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + C \end{aligned}$$

□

(13) $f(x) = \dfrac{2x^2+6x-4}{x(x^2-4)} \Rightarrow F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x =$

ĐS: $F(x) = \ln|x| - \ln|x+2| + 2\ln|x-2| + C$

✍ **Lời giải.**

$F(x) = \displaystyle\int \dfrac{2x^2+6x-4}{x(x^2-4)}\,\mathrm{d}x = \int \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{x-2}\right]\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x+2| + 2\ln|x-2| + C.$ □

(14) $f(x) = \dfrac{2x^2-6x-6}{x^3-6x^2+11x-6} \Rightarrow F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x =$

ĐS: $F(x) = 10\ln|x-2| - 3\ln|x-3| - 5\ln|x-1| + C$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{2x^2-6x-6}{x^3-6x^2+11x-6}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{10}{x-2} - \frac{3}{x-3} - \frac{5}{x-5}\right]\mathrm{d}x \\ &= 10\ln|x-2| - 3\ln|x-3| - 5\ln|x-1| + C \end{aligned}$$

□

(15) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-6x+9} \Rightarrow F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x =$

ĐS: $F(x) = -\dfrac{1}{x-3} + C$

✍ **Lời giải.**

$F(x) = \displaystyle\int \dfrac{1}{x^2-6x+9}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x-3} + C.$ □

⑯ $f(x)=\dfrac{3x+2}{4x^2-4x+1}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=\dfrac{3}{4}\ln|2x-1|-\dfrac{1}{4(2x-1)}+C$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}F(x) &= \int\frac{3x+2}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\left[\frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{(2x-1)^2}\right]\mathrm{d}x\\ &= \int\left[\frac{3}{2(2x-1)}+\frac{1}{2(2x-1)^2}\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{4}\ln|2x-1|-\frac{1}{4(2x-1)}+C\end{aligned}$$

□

⑰ $f(x)=\dfrac{3x+1}{(x+1)^3}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=$

ĐS: $F(x)=-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+C$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}F(x) &= \int\frac{3x+1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\left[\frac{3(x+1)-2}{(x+1)^3}\right]\mathrm{d}x\\ &= \int\left[\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}\right]\mathrm{d}x\\ &= -\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+C\end{aligned}$$

□

Ví dụ 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^3}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ldots$

ĐS: $F(x)=-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}+C$ **Lời giải:**

$$\begin{aligned}F(x) &= \int\frac{2x-1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x\\ &= \int\left[\frac{2(x-1)+1}{(x-1)^3}\right]\mathrm{d}x\\ &= \int\left[\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}\right]\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C.\end{aligned}$$

Bài 17. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định)

① $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ldots$

ĐS: $F(x)=\ln|x-1|-\ln|x|+\dfrac{1}{x}+C$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^2(x-1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{x^2-(x^2-1)}{x^2(x-1)}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}+C. \end{aligned}$$

□

② $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)(x+2)^2} \Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x =$

ĐS: $F(x)=\dfrac{2}{9}\ln|x-1|-\dfrac{2}{9}\ln|x+2|+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x+2}+C$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{2}{(x-1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\int \left[\frac{x+2-(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\int \left[\frac{1}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{(x+2)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\int \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)-\frac{1}{(x+2)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{2}{9}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+2}+C. \end{aligned}$$

□

③ $f(x)=\dfrac{3}{x(x-1)^2} \Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ldots$

ĐS: $F(x)=-\dfrac{3}{x-1}-3\ln|x-1|+3\ln|x|+C$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{3}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{3x-3(x-1)}{x(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{3}{x(x-1)}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x}\right]\mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{x-1}-3\ln|x-1|+3\ln|x|+C. \end{aligned}$$

□

④ $f(x)=\dfrac{4}{(x^2-x)(x-2)^2} \Rightarrow F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ldots$

ĐS: $F(x)=-\ln|x|+4\ln|x-1|-3\ln|x-2|-\dfrac{2}{x-2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\dfrac{4}{(x^2-x)(x-2)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{D}{x-2}+\dfrac{E}{(x-2)^2}$
$\Rightarrow A(x-1)(x-2)^2+Bx(x-2)^2+Dx(x-1)(x-2)+Ex(x-1)=4$
$\Rightarrow (A+B+D)x^3+(-5A-4B-3D+E)x^2+(8A+4B+2D-E)x-4A=4$
$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+D=0 \\ -5A-4B-3D+E=0 \\ 8A+4B+2D-E=0 \\ -4A=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=4 \\ D=-3 \\ E=2. \end{cases}$$
Khi đó
$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left[-\frac{1}{x}+\frac{4}{x-1}-\frac{3}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= -\ln|x|+4\ln|x-1|-3\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C. \end{aligned}$$

□

⑤ $f(x)=\dfrac{x+1}{x(x-1)^2}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ldots$

ĐS: $F(x)=\ln|x|-\ln|x-1|-\dfrac{2}{x-1}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\dfrac{x+1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{D}{(x-1)^2}$
$\Rightarrow A(x-1)^2+Bx(x-1)+Dx=x+1$
$\Rightarrow (A+B)x^2+(-2A-B+D)x+A=x+1$
$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+D=1 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ D=2. \end{cases}$$
Khi đó
$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \ln|x|-\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C. \end{aligned}$$

□

⑥ $f(x)=\dfrac{x^2+10x-6}{x^3-2x^2-7x-4}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ldots$

ĐS: $2\ln|x-4|-\ln|x+1|-\dfrac{3}{x+1}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\dfrac{x^2+10x-6}{x^3-2x^2-7x-4}=\dfrac{x^2+10x-6}{(x-4)(x+1)^2}=\dfrac{A}{x-4}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{D}{(x+1)^2}$
$\Rightarrow A(x+1)^2+B(x-4)(x+1)+D(x-4)=x^2+10x-6$
$\Rightarrow (A+B)x^2+(2A-3B+D)x+A-4B-4D=x^2+10x-6$
$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A-3B+D=10 \\ A-4B-4D=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ D=3. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{2}{x-4} - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= 2\ln|x-4| - \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C. \end{aligned}$$

□

⑦ $f(x) = \dfrac{3x+6}{x(x-1)(x-2)^2} \Rightarrow F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ldots$

ĐS: $-\dfrac{3}{2}\ln|x| + 9\ln|x-1| - \dfrac{15}{2}\ln|x-2| - \dfrac{6}{x-2} + C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x) = \dfrac{3x+6}{x(x-1)(x-2)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{D}{(x-2)} + \dfrac{E}{(x-2)^2}$

$\Rightarrow A(x-1)(x-2)^2 + Bx(x-2)^2 + Dx(x-1)(x-2) + Ex(x-1) = 3x+6$

$\Rightarrow (A+B+D)x^3 + (-5A-4B-3D+E)x^2 + (8A+4B+2D-E)x - 4A = 3x+6$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+D=0 \\ -5A-4B-3D+E=0 \\ 8A+4B+2D-E=3 \\ -4A=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{3}{2} \\ B=9 \\ D=-\dfrac{15}{2} \\ E=6. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left[-\frac{3}{2x} + \frac{9}{x-1} - \frac{15}{2(x-2)} + \frac{6}{(x-2)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{2}\ln|x| + 9\ln|x-1| - \frac{15}{2}\ln|x-2| - \frac{6}{x-2} + C. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 16. Tìm một nguyên hàm của hàm số $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ thỏa $F(2) = 3 - \ln 3$.

ĐS: $F(x) = x - \ln|x+1| + 1$ **Lời giải:** Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= x - \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(2) = 3 - \ln 3 \Leftrightarrow 2 - \ln 3 + C = 3 - \ln 3 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = x - \ln|x+1| + 1$.

Bài 18. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $F(x_0) = k$.

① Tìm một nguyên hàm của hàm số $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ biết đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(2;5)$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+1$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(2)=5 \Leftrightarrow 2+2+\ln 1+C=5 \Leftrightarrow C=1$.
Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+1$. □

② Tìm một nguyên hàm của hàm số $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$ biết $F(-1)=3$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x+4\ln|x+2|+\dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^2}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2-2x+4\ln|x+2|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(-1)=3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}+2+4\ln 1+C=3 \Leftrightarrow C=\dfrac{1}{2}$.
Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x+4\ln|x+2|+\dfrac{1}{2}$. □

③ Hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(-2)=6$. Tính $F(0)$.

ĐS: $F(0)=2$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{x^3+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{x^2-x+1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int \left[x-2+\frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(-2)=6 \Leftrightarrow 2+4+3\ln 1-1+C=6 \Leftrightarrow C=1$.
Do đó $F(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+1$.
Vậy $F(0)=2$. □

④ Hàm số $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^3}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(-\dfrac{3}{2}\right)=5$. Tính $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

ĐS: $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x+1-1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\right]\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F\left(-\dfrac{3}{2}\right)=5 \Leftrightarrow 2+2+C=5 \Leftrightarrow C=1$.
Do đó $F(x)=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}+1$.
Vậy $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$. □

⑤ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{3x+1}{(x+1)^3}$ biết $F(-2)=5$.

ĐS: $F(x)=-\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+1$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{3x+1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{3(x+1)-2}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{3}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}\right]\mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(-2) = 5 \Leftrightarrow 3 + 1 + C = 5 \Leftrightarrow C = 1$.
Vậy $F(x) = -\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} + 1$. □

⑥ Hàm số $f(x) = \dfrac{x}{(2x+1)^3}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{9}$. Tính $F\left(-\dfrac{1}{8}\right)$.

ĐS: $F\left(-\dfrac{1}{8}\right) = 0$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x+1)^3}\right]\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(2x+1)^2} + C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + C = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow C = \dfrac{1}{9}$.
Do đó $F(x) = -\dfrac{1}{4(2x+1)} + \dfrac{1}{8(2x+1)^2} + \dfrac{1}{9}$.
Vậy $F\left(-\dfrac{1}{8}\right) = 0$. □

⑦ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ biết $F(2) = \dfrac{5}{3}$.

ĐS: $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| - 5$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^3}{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^3-1+1}{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(2)=\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \dfrac{8}{3}+2+2+C=\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow C=-5$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|-5$. □

⑧ Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x+1}$ biết $F(1)=\dfrac{5}{6}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x-2\ln|x+1|+2\ln 2$

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^3-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^3+1-2}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-2\ln|x+1|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(1)=\dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+1-2\ln 2+C=\dfrac{5}{6} \Leftrightarrow C=2\ln 2$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x-2\ln|x+1|+2\ln 2$. □

⑨ Hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(-3)=0$. Tính $F(-1)$.

ĐS: $F(-1)=\dfrac{74}{3}$

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^3}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^3+8-8}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3-x^2+4x-8\ln|x+2|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(-3)=0 \Leftrightarrow -9-9-12+C=0 \Leftrightarrow C=30$.
Do đó $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+4x-8\ln|x+2|+30$.
Vậy $F(-1)=\dfrac{74}{3}$. □

(10) Biết $f'(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ và $f(2)=6$. Tính giá trị của $\mathrm{e}^{f(0)}$.

ĐS: $\mathrm{e}^{f(0)}=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^2$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{2x+3}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(2+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2x+\ln|x+1|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $f(2)=6 \Leftrightarrow 4+\ln 3+C=6 \Leftrightarrow C=2-\ln 3$.
Do đó $f(x)=2x+\ln|x+1|+2-\ln 3$.
Vậy $\mathrm{e}^{f(0)}=\mathrm{e}^{2-\ln 3}=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^2$. □

(11) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+2x-3}$ thỏa $F(0)=0$. Tính $F(-2)$.

ĐS: $F(-2)=-2\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+2x-3}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+3} \Rightarrow (A+B)x+3A-B=x-3$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 3A-B=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{2} \\ B=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x-3}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x+3|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(0)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\ln 3+C=0 \Leftrightarrow C=-\dfrac{3}{2}\ln 3$.
Do đó $F(x)=-\dfrac{1}{2}\ln|x-1|+\dfrac{3}{2}\ln|x+3|-\dfrac{3}{2}\ln 3$.
Vậy $F(-2)=-2\ln 3$. □

(12) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x+2}$ thỏa $F(-1)=\dfrac{1}{2}$. Tính $F(2)$.

ĐS: $F(2)=2+\ln 4$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{(x+1)^2}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^2+2x+1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x+\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2+\ln|x+2|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(-1)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}+C=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow C=0$.

Do đó $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\ln|x+2|$.

Vậy $F(2)=2+\ln 4$. □

13 Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{4x^2+4x+1}$; biết rằng đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

ĐS: $F(x)=-\dfrac{1}{2(2x+1)}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{4x^2+4x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2(2x+1)}+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(-1)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}+C=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow C=0$.

Vậy $F(x)=-\dfrac{1}{2(2x+1)}$. □

14 Hàm số $f(x)=\dfrac{2x+9}{x+3}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(-2)=0$. Biết phương trình $F(x)=2x+4$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính tổng $\dfrac{1}{2^{x_1}}+\dfrac{1}{2^{x_2}}$.

ĐS: $\dfrac{1}{2^{x_1}}+\dfrac{1}{2^{x_2}}=20$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{2x+9}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(2+\frac{3}{x+3}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2x+3\ln|x+3|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(-2)=0 \Leftrightarrow -4+C=0 \Leftrightarrow C=4$.

Khi đó phương trình $F(x)=2x+4 \Leftrightarrow 2x+3\ln|x+3|+4=2x+4 \Leftrightarrow |x+3|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=1 \\ x+3=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(=x_1) \\ x=-4(=x_2). \end{array}\right.$ Vậy $\dfrac{1}{2^{x_1}}+\dfrac{1}{2^{x_2}}=20$. □

15 Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+3}{2x+1}$, biết đồ thị của hàm số $y=F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\dfrac{9}{8}$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}\ln|2x+1|$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{2x^2+2x+3}{2x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\ln|2x+1|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(0)=\dfrac{9}{8} \Leftrightarrow C=\dfrac{9}{8}$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}\ln|2x+1|$. □

16 Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x}$ thỏa mãn $F(1)=-\dfrac{5}{3}\ln 2$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{3}\ln|x|-\dfrac{1}{3}\ln|x+3|-\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|x+3|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(1)=-\dfrac{5}{3}\ln 2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\ln 4+C=-\dfrac{5}{3}\ln 2 \Leftrightarrow C=-\ln 2$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{3}\ln|x|-\dfrac{1}{3}\ln|x+3|-\ln 2$. □

17 Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$; biết rằng đồ thị của hàm số $y=F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\dfrac{2}{3}\ln 2$.

ĐS: $F(x)=\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+\ln 2$

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(0)=\frac{2}{3}\ln 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\ln 2+C=\frac{2}{3}\ln 2 \Leftrightarrow C=\ln 2$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+\ln 2$. □

(18) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$; biết $F(-1)=\frac{6}{5}\ln 4$.

ĐS: $F(x)=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+\ln 4$

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{5}\ln|x+2|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(-1)=\frac{6}{5}\ln 4 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\ln 4+C=\frac{6}{5}\ln 4 \Leftrightarrow C=\ln 4$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+\ln 4$. □

(19) Hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(3)=0$. Tính $F\left(\frac{2}{3}\right)$.

ĐS: $F\left(\frac{2}{3}\right)=3\ln 2$

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-2|-\ln|x-1|+C. \end{aligned}$$

Ta lại có $F(3)=0 \Leftrightarrow -\ln 2+C=0 \Leftrightarrow C=\ln 2$.

Do đó $F(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+\ln 2$.

Vậy $F\left(\frac{2}{3}\right)=\ln\frac{4}{3}-\ln\frac{1}{3}+\ln 2=\ln 8=3\ln 2$. □

20 Hàm số $f(x)=\dfrac{2x+3}{2x^2-x-1}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(-1)=\dfrac{11}{3}\ln 2$. Tìm $\mathrm{e}^{F(0)}$.

ĐS: $\mathrm{e}^{F(0)}=4$

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{2x+3}{2x^2-x-1}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{x-1}$

$\Rightarrow A(x-1)+B(2x+1)=2x+3\Rightarrow (A+2B)x-A+B=2x+3\Rightarrow \begin{cases}A+2B=2\\-A+B=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}A=-\dfrac{4}{3}\\B=\dfrac{5}{3}.\end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{2x+3}{2x^2-x-1}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2x+1}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C.\end{aligned}$$

Ta lại có $F(-1)=\dfrac{11}{3}\ln 2\Leftrightarrow\dfrac{5}{3}\ln 2+C=\dfrac{11}{3}\ln 2\Leftrightarrow C=2\ln 2.$

Do đó $F(x)=-\dfrac{2}{3}\ln|2x+1|+\dfrac{5}{3}\ln|x-1|+2\ln 2.$

Vậy $\mathrm{e}^{F(0)}=\mathrm{e}^{2\ln 2}=4.$ □

21 Hàm số $f(x)=\dfrac{4x+11}{x^2+5x+6}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(-1)=\ln 2$. Tìm $\mathrm{e}^{F(-4)}$.

ĐS: $\mathrm{e}^{F(-4)}=3\ln 2$

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{4x+11}{x^2+5x+6}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}$

$\Rightarrow A(x+3)+B(x+2)=4x+11\Rightarrow (A+B)x+3A+2B=4x+11\Rightarrow \begin{cases}A+B=4\\3A+2B=11\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}A=3\\B=1.\end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{4x+11}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x\\&=3\ln|x+2|+\ln|x+3|+C.\end{aligned}$$

Ta lại có $F(-1)=\ln 2\Leftrightarrow\ln 2+C=\ln 2\Leftrightarrow C=0.$

Do đó $F(x)=3\ln|x+2|+\ln|x+3|.$

Vậy $\mathrm{e}^{F(-4)}=3\ln 2.$ □

22 Hàm số $f(x)=\dfrac{5x+3}{x^2+7x+12}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(-2)=18\ln 2$. Tìm $F(-5)$.

ĐS: $F(-5)=-11\ln 2$

Lời giải.

Ta có $f(x)=\dfrac{5x+3}{x^2+7x+12}=\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x+4}$

$\Rightarrow A(x+4)+B(x+3)=5x+3\Rightarrow (A+B)x+4A+3B=5x+3\Rightarrow \begin{cases}A+B=5\\4A+3B=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}A=-12\\B=17.\end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int \frac{5x+3}{x^2+7x+12}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(-\frac{12}{x+3}+\frac{17}{x+4}\right)\mathrm{d}x\\&=-12\ln|x+3|+17\ln|x+4|+C.\end{aligned}$$

Ta lại có $F(-2)=18\ln 2\Leftrightarrow 17\ln 2+C=18\ln 2\Leftrightarrow C=\ln 2.$

Do đó $F(x)=-12\ln|x+3|+17\ln|x+4|+\ln 2.$

Vậy $F(-5)=-12\ln 2+\ln 2=-11\ln 2.$ □

(23) Hàm số $f(x)=\dfrac{9x-10}{6x^2-11x+3}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(1)=\ln 2$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $F(x)=\ln|3x-1|+\dfrac{1}{2}\ln 3$. Tính $3^{x_1}+3^{x_2}$.

ĐS: $3^{x_1}+3^{x_2}=28$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\dfrac{9x-10}{6x^2-11x+3}=\dfrac{A}{2x-3}+\dfrac{B}{3x-1}$

$\Rightarrow A(3x-1)+B(2x-3)=9x-10\Rightarrow (3A+2B)x-A-3B=9x-10\Rightarrow \begin{cases}3A+2B=9\\-A-3B=-10\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}A=1\\B=3.\end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int \frac{9x-10}{6x^2-11x+3}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{1}{2x-3}+\frac{3}{3x-1}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln|2x-3|+\ln|3x-1|+C.\end{aligned}$$

Ta lại có $F(1)=\ln 2\Leftrightarrow C=0.$

Do đó $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|2x-3|+\ln|3x-1|.$

Phương trình $F(x)=\ln|3x-1|+\dfrac{1}{2}\ln 3\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln|2x-3|+\ln|3x-1|=\ln|3x-1|+\dfrac{1}{2}\ln 3\Leftrightarrow |2x-3|=3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-3=3\\2x-3=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3(=x_1)\\x=0(=x_2)\end{array}\right.$.

Vậy $3^{x_1}+3^{x_2}=28.$ □

(24) Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x+1)}$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thỏa $F(1)=\ln 2$. Tính $F(-2)$.

ĐS: $F(-2)=\dfrac{3}{2}-\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{D}{x^2}$

$$\Rightarrow Ax^2+Bx(x+1)+D(x+1)=1\Rightarrow (A+B)x^2+(B+D)x+D=1\Rightarrow \begin{cases}A+B=0\\B+D=0\\D=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}A=1\\B=-1\\D=1.\end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1}{x^2(x+1)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \ln|x+1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+C.\end{aligned}$$

Ta lại có $F(1)=\ln 2\Leftrightarrow \ln 2-1+C=\ln 2\Leftrightarrow C=1.$

Do đó $F(x)=\ln|x+1|-\ln|x|-\dfrac{1}{x}+1.$

Vậy $F(-2)=-\ln 2+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}-\ln 2.$ □

3.2 Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

Định lí

Cho $\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)+C$ *và* $u=u(x)$ *là hàm số có đạo hàm liên tục thì*

$$\int f[u(x)]\,u'(x)\,\mathrm{d}x=F[u(x)]+C.$$

Một số dạng đổi biến thường gặp

① $\begin{cases}I=\int f(ax+b)^n\cdot x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=ax+b\Rightarrow \mathrm{d}t=a\,\mathrm{d}x.\\ I=\int f\left(\dfrac{x^n}{ax^{n+1}+1}\right)^m \mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=ax^{n+1}+1\Rightarrow \mathrm{d}t=a(n+1)x^n\,\mathrm{d}x, \text{ với } m,n\in\mathbb{Z}.\\ I=\int f(ax^2+b)^n\cdot x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=ax^2+b\Rightarrow \mathrm{d}t=2ax\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

② $I=\int \sqrt[n]{f(x)}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=\sqrt[n]{f(x)}\Rightarrow t^n=f(x)\Rightarrow nt^{n-1}\,\mathrm{d}t=f'(x)\,\mathrm{d}x.$

③ $\begin{cases}I=\int f(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x.\\ I=\int f(a+b\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=a+b\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{b}{x}\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

④ $\begin{cases}I=\int f(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.\\ I=\int f(a+b\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=a+b\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=b\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{cases}$

⑤ $\begin{cases}I=\int f(\cos x)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x.\\ I=\int f(a+b\cos x)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=a+b\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-b\sin x\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

⑥ $\begin{cases} I=\int f(\sin x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x. \\ I=\int f(a+b\sin x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{phương pháp}} \text{Đặt } t=a+b\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=b\cos x\,\mathrm{d}x. \end{cases}$

⑦ $I=\int f(\tan x)\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\xrightarrow{\text{phương pháp}}$ Đặt $t=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x.$

⑧ $I=\int f(\cot x)\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}\xrightarrow{\text{phương pháp}}$ Đặt $t=\cot x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x.$

⑨ $I=\int f(\sin^2 x;\cos^2 x)\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{phương pháp}}$ Đặt $\begin{cases} t=\sin^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=\sin 2x\,\mathrm{d}x; \\ t=\cos^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin 2x\,\mathrm{d}x. \end{cases}$

⑩ $I=\int f(\sin x\pm\cos x)\cdot(\sin x\mp\cos x)\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{phương pháp}}$ Đặt $t=\sin x\pm\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x\mp\sin x)\mathrm{d}x.$

⚠ **Chú ý:** *Sau khi đổi biến và tính nguyên hàm xong, ta cần trả lại biến cũ ban đầu là x.*

3.2.1 Bài tập áp dụng

Ví dụ 1. Tính $I=\int x(1-x)^{2018}\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{(1-x)^{2020}}{2020}-\dfrac{(1-x)^{2019}}{2019}+C$

Lời giải: Đặt $t=1-x\Rightarrow x=1-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= -\int(1-t)t^{2018}\mathrm{d}t=\int\left(t^{2019}-t^{2018}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^{2020}}{2020}-\frac{t^{2019}}{2019}+C=\frac{(1-x)^{2020}}{2020}-\frac{(1-x)^{2019}}{2019}+C. \end{aligned}$$

Vậy $I=\int x(1-x)^{2018}\mathrm{d}x=\dfrac{(1-x)^{2020}}{2020}-\dfrac{(1-x)^{2019}}{2019}+C.$

Bài 1. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

① Tính $I=\int x(1+x)^{2017}\mathrm{d}x.$

ĐS: $I=\dfrac{(1+x)^{2019}}{2019}-\dfrac{(1+x)^{2018}}{2018}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+x\Rightarrow x=t-1\Rightarrow \mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int(t-1)t^{2017}\mathrm{d}t=\int\left(t^{2018}-t^{2017}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^{2019}}{2019}-\frac{t^{2018}}{2018}+C=\frac{(1+x)^{2019}}{2019}-\frac{(1+x)^{2018}}{2018}+C. \end{aligned}$$

Vậy $I=\int x(1+x)^{2017}\mathrm{d}x=\dfrac{(1+x)^{2019}}{2019}-\dfrac{(1+x)^{2018}}{2018}+C.$ □

② Tính $I=\int x(x^2+1)^5\mathrm{d}x.$

ĐS: $I=\dfrac{\left(x^2+1\right)^6}{12}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$I = \frac{1}{2}\int t^5\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6}+C = \frac{(x^2+1)^6}{12}+C.$$

Vậy $I = \displaystyle\int x(x^2+1)^5\,\mathrm{d}x = \frac{(x^2+1)^6}{12}+C$. □

③ Tính $I = \displaystyle\int x^2(x-1)^9\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $I = \dfrac{(x-1)^{12}}{12}+2\dfrac{(x-1)^{11}}{11}+\dfrac{(x-1)^{10}}{10}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x-1 \Rightarrow x = t+1 \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int (t+1)^2t^9\,\mathrm{d}t = \int \left(t^{11}+2t^{10}+t^9\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^{12}}{12}+2\frac{t^{11}}{11}+\frac{t^{10}}{10}+C = \frac{(x-1)^{12}}{12}+2\frac{(x-1)^{11}}{11}+\frac{(x-1)^{10}}{10}+C. \end{aligned}$$

Vậy $I = \displaystyle\int x^2(x-1)^9\,\mathrm{d}x = \frac{(x-1)^{12}}{12}+2\frac{(x-1)^{11}}{11}+\frac{(x-1)^{10}}{10}+C$. □

④ Tính $I = \displaystyle\int 2\left[x\left(1-x^2\right)\right]^5\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $I = -\dfrac{\left(1-x^2\right)^6}{6}+\dfrac{2\left(1-x^2\right)^7}{7}-\dfrac{\left(1-x^2\right)^8}{8}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int 2\left[x\left(1-x^2\right)\right]^5\,\mathrm{d}x = \int x^4\left(1-x^2\right)^5\cdot 2x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-t \Rightarrow 2x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= -\int (1-t)^2t^5\,\mathrm{d}t = \int \left(-t^5+2t^6-t^7\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{t^6}{6}+\frac{2t^7}{7}-\frac{t^8}{8}+C = -\frac{\left(1-x^2\right)^6}{6}+\frac{2\left(1-x^2\right)^7}{7}-\frac{\left(1-x^2\right)^8}{8}+C. \end{aligned}$$

Vậy $I = \displaystyle\int 2\left[x\left(1-x^2\right)\right]^5\,\mathrm{d}x = -\frac{\left(1-x^2\right)^6}{6}+\frac{2\left(1-x^2\right)^7}{7}-\frac{\left(1-x^2\right)^8}{8}+C$. □

⑤ Tính $I = \displaystyle\int x^5\left(1-x^3\right)^6\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $I = -\dfrac{\left(1-x^3\right)^7}{21}+\dfrac{\left(1-x^3\right)^8}{24}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int x^5\left(1-x^3\right)^6\,\mathrm{d}x = \int x^3\left(1-x^3\right)^6\cdot x^2\,\mathrm{d}x$

Đặt $t = 1-x^3 \Rightarrow x^3 = 1-t \Rightarrow x^2\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3}\int (1-t)t^6\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\int \left(t^6-t^7\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{t^7}{21}+\frac{t^8}{24}+C = -\frac{\left(1-x^3\right)^7}{21}+\frac{\left(1-x^3\right)^8}{24}+C. \end{aligned}$$

Vậy $I=\int x^5\left(1-x^3\right)^6\,\mathrm{d}x=-\dfrac{\left(1-x^3\right)^7}{21}+\dfrac{\left(1-x^3\right)^8}{24}+C.$ □

⑥ Tính $I=\int x^3\left(2-3x^2\right)^8\,\mathrm{d}x.$

ĐS: $I=-\dfrac{\left(2-3x^2\right)^9}{81}+\dfrac{\left(2-3x^2\right)^{10}}{180}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int x^3\left(2-3x^2\right)^8\,\mathrm{d}x=\int x^2\left(2-3x^2\right)^8\cdot x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=2-3x^2\Rightarrow x^2=\dfrac{2-t}{3}\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{6}\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$\begin{aligned}I&=-\frac{1}{6}\int\left(\frac{2-t}{3}\right)t^8\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{18}\int\left(2t^8-t^9\right)\mathrm{d}t\\&=-\frac{t^9}{81}+\frac{t^{10}}{180}+C=-\frac{\left(2-3x^2\right)^9}{81}+\frac{\left(2-3x^2\right)^{10}}{180}+C.\end{aligned}$$

Vậy $I=\int x^3\left(2-3x^2\right)^8\,\mathrm{d}x=-\dfrac{\left(2-3x^2\right)^9}{81}+\dfrac{\left(2-3x^2\right)^{10}}{180}+C.$ □

Ví dụ 2. Tính $I=\int\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+2}.$

ĐS: $I=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2)+C$

Lời giải: Đặt $t=x^2+2\Rightarrow x^2=t-2\Rightarrow 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln|t|+C\\&=\frac{1}{2}\ln|x^2+2|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C.\end{aligned}$$

Vậy $I=\int\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+2}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2)+C.$

Bài 2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

① Tính $I=\int\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^5}.$

ĐS: $I=-\dfrac{1}{3(x+1)^3}+\dfrac{1}{4(x+1)^4}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=x+1\Rightarrow x=t-1\Rightarrow \mathrm{d}x=\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{t-1}{t^5}\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^5}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{t^{-3}}{-3}-\frac{t^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{3(x+1)^3}+\frac{1}{4(x+1)^4}+C.\end{aligned}$$

Vậy $I=\int\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^5}=-\dfrac{1}{3(x+1)^3}+\dfrac{1}{4(x+1)^4}+C.$ □

② Tính $I=\int\dfrac{x^3\,\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^3}.$

ĐS: $I=-\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)}+\dfrac{1}{4\left(1+x^2\right)^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{x^3\,\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^3}=\int\dfrac{x^2\cdot x\,\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Đặt $t=1+x^2\Rightarrow x^2=t-1\Rightarrow 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\int\frac{t-1}{t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^{-1}}{-1}-\frac{t^{-2}}{-2}\right)+C=-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{4\left(1+x^2\right)^2}+C.\end{aligned}$$

Vậy $I=\int\dfrac{x^3\,\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^3}=-\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)}+\dfrac{1}{4\left(1+x^2\right)^2}+C$. □

③ Tính $I=\int\dfrac{4x^3\,\mathrm{d}x}{\left(x^4+2\right)^2}$. **ĐS:** $I=-\dfrac{1}{x^4+2}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=x^4+2\Rightarrow x^4=t-2\Rightarrow 4x^3\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$I = \int\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x^4+2}+C.$$

Vậy $=\int\dfrac{4x^3\,\mathrm{d}x}{\left(x^4+2\right)^2}=-\dfrac{1}{x^4+2}+C$. □

④ Tính $I=\int\dfrac{x^5\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$. **ĐS:** $I=\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{4}-\left(x^2+1\right)+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{x^5\,\mathrm{d}x}{x^2+1}=\int\dfrac{x^4\cdot x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$.

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow x^2=t-1\Rightarrow 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\int\frac{(t-1)^2}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(t-2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}-2t+\ln|t|\right)+C=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{4}-\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C.\end{aligned}$$

Vậy $I=\int\dfrac{x^5\,\mathrm{d}x}{x^2+1}=\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{4}-\left(x^2+1\right)+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$. □

⑤ Tính $I=\int\dfrac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^{10}-4}$. **ĐS:** $I=\dfrac{1}{20}\ln\left|\dfrac{x^5-2}{x^5+2}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^{10}-4}=\int\dfrac{x^4\,\mathrm{d}x}{\left(x^5-2\right)\left(x^5+2\right)}$.

Đặt $t=x^5\Rightarrow x^4\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5}\int\left[\frac{1}{(t-2)(t+2)}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{20}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{20}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{x^5-2}{x^5+2}\right|+C. \end{aligned}$$

Vậy $I=\displaystyle\int\frac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^{10}-4} = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{x^5-2}{x^5+2}\right|+C.$ □

⑥ Tính $I=\displaystyle\int\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$. **ĐS:** $I=-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+\dfrac{1}{x}\Rightarrow\dfrac{1}{x}=t-1\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$I = -\int t^3\,\mathrm{d}t = -\frac{t^4}{4}+C = -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4+C.$$

Vậy $I=\displaystyle\int\left(1+\frac{1}{x}\right)^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4+C.$ □

Ví dụ 3. Tính $I=\displaystyle\int\frac{(x+1)^{2017}}{(2x+3)^{2019}}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{1}{2018}\cdot\left(\dfrac{x+1}{2x+3}\right)^{2018}+C$

Lời giải: Ta có $I=\displaystyle\int\frac{(x+1)^{2017}}{(2x+3)^{2019}}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^{2017}\cdot\frac{1}{(2x+3)^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\dfrac{x+1}{2x+3}\Rightarrow\mathrm{d}t=\dfrac{1}{(2x+3)^2}\,\mathrm{d}x.$

Suy ra

$$I = \int t^{2017}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{2018}}{2018}+C = \frac{1}{2018}\cdot\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^{2018}+C.$$

Vậy $I=\displaystyle\int\frac{(x+1)^{2017}}{(2x+3)^{2019}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2018}\cdot\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^{2018}+C.$

Bài 3. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

① Tính $I=\displaystyle\int\frac{x^5}{(x+1)^7}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^6+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\frac{x^5}{(x+1)^7}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x}{x+1}\right)^5\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\dfrac{x}{x+1}\Rightarrow\mathrm{d}t=\dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

Suy ra

$$I = \int t^5\,\mathrm{d}t = \frac{t^6}{6}+C = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^6+C.$$

Vậy $I=\displaystyle\int\frac{x^5}{(x+1)^7}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^6+C.$ □

② Tính $I=\displaystyle\int\frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{1}{900}\cdot\left(\dfrac{7x-1}{2x+1}\right)^{100}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}\,\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}\cdot\dfrac{1}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\dfrac{7x-1}{2x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{9}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x\Rightarrow=\dfrac{1}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{9}\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$I=\frac{1}{9}\int t^{99}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\cdot\frac{t^{100}}{100}+C=\frac{1}{900}\cdot\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{100}+C.$$

Vậy $I=\int\dfrac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{900}\cdot\left(\dfrac{7x-1}{2x+1}\right)^{100}+C.$ □

③ Tính $I=\int\dfrac{x^9\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^6}.$ **ĐS:** $I=\dfrac{1}{10}\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^5+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{x^9\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^6}=\int\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^4\cdot\dfrac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{x^2+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$I=\frac{1}{2}\int t^4\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^5+C.$$

Vậy $I=\int\dfrac{x^9\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^6}=\dfrac{1}{10}\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^5+C.$ □

④ Tính $I=\int\dfrac{x^{2001}\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{1002}}.$ **ĐS:** $I=\dfrac{1}{2002}\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{1001}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{x^{2001}\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{1002}}=\int\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{1000}\cdot\dfrac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{x^2+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$I=\frac{1}{2}\int t^{1000}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1001}}{1001}+C=\frac{1}{2002}\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{1001}+C.$$

Vậy $I=\int\dfrac{x^{2001}\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{1002}}=\dfrac{1}{2002}\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{1001}+C.$ □

Ví dụ 4. Tính $I=\int\dfrac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x-4}}.$ **ĐS:** $I=\sqrt{x^2+2x-4}+C$

Lời giải: Đặt $t=\sqrt{x^2+2x-4}\Rightarrow t^2=x^2+2x-4$

$\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=(2x+2)\,\mathrm{d}x\Rightarrow(x+1)\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$I=\int\frac{t}{t}\,\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t=t+C=\sqrt{x^2+2x-4}+C.$$

Vậy $I=\displaystyle\int\frac{(x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x-4}}=\sqrt{x^2+2x-4}+C.$

Bài 4. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

① Tính $I=\displaystyle\int\frac{(2x-3)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-3x-5}}$. **ĐS:** $I=2\sqrt{x^2-3x-5}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x^2-3x-5}\Rightarrow t^2=x^2-3x-5$

$\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=(2x-3)\,\mathrm{d}x\Rightarrow(2x-3)\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$I=\int\frac{2t}{t}\,\mathrm{d}t=\int 2\,\mathrm{d}t=2t+C=2\sqrt{x^2-3x-5}+C.$$

Vậy $I=\displaystyle\int\frac{(2x-3)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-3x-5}}=2\sqrt{x^2-3x-5}+C.$ □

② Tính $I=\displaystyle\int x\sqrt{2017-x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{2(2017-x)^2\sqrt{2017-x}}{5}-\dfrac{4034(2017-x)\sqrt{2017-x}}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{2017-x}\Rightarrow x=2017-t^2\Rightarrow\mathrm{d}x=-2t\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$\begin{aligned}I&=\int(2017-t^2)\cdot t\cdot(-2t)\,\mathrm{d}t=\int(2t^4-4034t^2)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2t^5}{5}-\frac{4034t^3}{3}+C=\frac{2(2017-x)^2\sqrt{2017-x}}{5}-\frac{4034(2017-x)\sqrt{2017-x}}{3}+C.\end{aligned}$$

Vậy $I=\displaystyle\int x\sqrt{2017-x}\,\mathrm{d}x=\frac{2(2017-x)^2\sqrt{2017-x}}{5}-\frac{4034(2017-x)\sqrt{2017-x}}{3}+C.$ □

③ Tính $I=\displaystyle\int x\sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x^2+3}\Rightarrow t^2=x^2+3\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$I=\int t^2\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}{3}+C.$$

Vậy $I=\displaystyle\int x\sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x=\frac{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}{3}+C.$ □

④ Tính $I=\displaystyle\int x\sqrt{2019-x^2}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=-\dfrac{(2019-x^2)\sqrt{2019-x^2}}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{2019-x^2}\Rightarrow t^2=2019-x^2\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=-2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=-t\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$I=\int -t^2\,\mathrm{d}t=-\frac{t^3}{3}+C=-\frac{(2019-x^2)\sqrt{2019-x^2}}{3}+C.$$

Vậy $I=\displaystyle\int x\sqrt{2019-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{(2019-x^2)\sqrt{2019-x^2}}{3}+C.$ □

⑤ Tính $I=\int x\sqrt[3]{x^2-2018}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{3(x^2-2018)\sqrt[3]{x^2-2018}}{8}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2-2018}\Rightarrow t^3=x^2-2018\Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}t^2\,\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$I=\frac{3}{2}\int t^3\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=\frac{3(x^2-2018)\sqrt[3]{x^2-2018}}{8}+C.$$

Vậy $I=\int x\sqrt[3]{x^2-2018}\,\mathrm{d}x=\dfrac{3(x^2-2018)\sqrt[3]{x^2-2018}}{8}+C$. □

⑥ Tính $I=\int\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+4}\Rightarrow t^3=x^2+4\Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra

$$I=\int\frac{3t^2}{t}\,\mathrm{d}t=\int 3t\,\mathrm{d}t=\frac{3t^2}{2}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}+C.$$

Vậy $I=\int\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^2}+C$. □

⑦ Tính $I=\int 5x\sqrt[3]{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=-\dfrac{15}{8}\left(1-x^2\right)\sqrt[3]{1-x^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{1-x^2}\Rightarrow t^3=1-x^2\Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t=-2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{3t^2}{2}\,\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$I=-\frac{3}{2}\int 5t^3\,\mathrm{d}t=-\frac{15}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C=-\frac{15}{8}\left(1-x^2\right)\sqrt[3]{1-x^2}+C.$$

Vậy $I=\int 5x\sqrt[3]{1-x^2}\,\mathrm{d}x=-\dfrac{15}{8}\left(1-x^2\right)\sqrt[3]{1-x^2}+C$. □

⑧ Tính $I=\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=-2\sqrt{1-x}+\dfrac{4(1-x)\sqrt{1-x}}{3}-\dfrac{2(1-x)^2\sqrt{1-x}}{5}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow x=1-t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=-2t\,\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\left(1-t^2\right)^2}{t}\cdot(-2t)\,\mathrm{d}t=-2\int\left(1-2t^2+t^4\right)\mathrm{d}t\\&=-2t+4\cdot\frac{t^3}{3}-2\cdot\frac{t^5}{5}+C=-2\sqrt{1-x}+\frac{4(1-x)\sqrt{1-x}}{3}-\frac{2(1-x)^2\sqrt{1-x}}{5}+C.\end{aligned}$$

Vậy $I=\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x=-2\sqrt{1-x}+\dfrac{4(1-x)\sqrt{1-x}}{3}-\dfrac{2(1-x)^2\sqrt{1-x}}{5}+C$. □

⑨ Tính $I=\int\dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}{3}-4\sqrt{4-x^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\int \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\cdot x\,\mathrm{d}x$
Đặt $t=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow t^2=4-x^2\Rightarrow x^2=4-t^2\Rightarrow 2x\,\mathrm{d}x=-2t\,\mathrm{d}t\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=-t\,\mathrm{d}t$.
Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4-t^2}{t}\cdot(-t)\mathrm{d}t=\int \left(t^2-4\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^3}{3}-4t+C=\frac{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}{3}-4\sqrt{4-x^2}+C. \end{aligned}$$

Vậy $I=\int \dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}{3}-4\sqrt{4-x^2}+C$. □

(10) Tính $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4}}$. **ĐS:** $I=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4}}=\int \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.
Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow x^2=t^2-4\Rightarrow 2x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$.
Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t^2-4}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right|+C. \end{aligned}$$

Vậy $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right|+C$. □

(11) Tính $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+9}}$. **ĐS:** $I=\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+9}+3}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+9}}=\int \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.
Đặt $t=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow t^2=x^2+9\Rightarrow x^2=t^2-9\Rightarrow 2x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$.
Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t^2-9}\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+9}+3}\right|+C. \end{aligned}$$

Vậy $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+9}+3}\right|+C$. □

(12) Tính $I=\int x^5\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}\mathrm{d}x$. **ĐS:**
$I=-\dfrac{3}{80}\left(1-2x^2\right)\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}+\dfrac{3}{64}\left(1-2x^2\right)^2\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}-\dfrac{3}{176}\left(1-2x^2\right)^3\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int x^5\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int x^4\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}\cdot x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt[3]{1-2x^2}\Rightarrow t^3=1-2x^2\Rightarrow x^2=\dfrac{1-t^3}{2}\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{3t^2}{4}\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$\begin{aligned}I&=\int\left(\frac{1-t^3}{2}\right)^2\cdot t^2\cdot\left(-\frac{3t^2}{4}\right)\mathrm{d}t=-\frac{3}{16}\int\left(t^4-2t^7+t^{10}\right)\mathrm{d}t\\&=-\frac{3}{16}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^8}{8}+\frac{t^{11}}{11}\right)+C\\&=-\frac{3}{80}\left(1-2x^2\right)\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}+\frac{3}{64}\left(1-2x^2\right)^2\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}-\frac{3}{176}\left(1-2x^2\right)^3\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}+C.\end{aligned}$$

Vậy $I=-\dfrac{3}{80}\left(1-2x^2\right)\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}+\dfrac{3}{64}\left(1-2x^2\right)^2\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}-\dfrac{3}{176}\left(1-2x^2\right)^3\sqrt[3]{\left(1-2x^2\right)^2}+C.$ □

(13) Tính $I=\int\dfrac{2x^3-3x^2+x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $I=\dfrac{2\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2-x+1}}{3}-2\sqrt{x^2-x+1}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{2x^3-3x^2+x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{(2x-1)(x^2-x)}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{(x^2-x)}{\sqrt{x^2-x+1}}\cdot(2x-1)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow t^2=x^2-x+1\Rightarrow x^2-x=t^2-1\Rightarrow(2x-1)\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{t^2-1}{t}\cdot2t\,\mathrm{d}t=\int\left(2t^2-2\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{2t^3}{3}-2t+C=\frac{2\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2-x+1}}{3}-2\sqrt{x^2-x+1}+C.\end{aligned}$$

Vậy $I=\int\dfrac{2x^3-3x^2+x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2-x+1}}{3}-2\sqrt{x^2-x+1}+C.$ □

Ví dụ 5. Tính $I=\int\dfrac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}.$ **ĐS:** $I=\dfrac{2(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}}{3}-2\sqrt{1+\ln x}+C$

Lời giải: Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow t^2=1+\ln x\Rightarrow\ln x=t^2-1\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=2t\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{t^2-1}{t}\cdot2t\,\mathrm{d}t=\int\left(2t^2-2\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{2t^3}{3}-2t+C=\frac{2(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}}{3}-2\sqrt{1+\ln x}+C.\end{aligned}$$

Vậy $I=\int\dfrac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}=\dfrac{2(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}}{3}-2\sqrt{1+\ln x}+C.$

Bài 5. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

(1) Tính $I=\int\dfrac{\ln x\sqrt{1+3\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $I=\dfrac{2(1+3\ln x)^2\sqrt{1+3\ln x}}{45}-\dfrac{2(1+3\ln x)\sqrt{1+3\ln x}}{27}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow t^2=1+3\ln x\Rightarrow\ln x=\dfrac{t^2-1}{3}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{2t}{3}\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(t^2-1)t}{3}\cdot\frac{2t}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\int (t^4-t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C = \frac{2(1+3\ln x)^2\sqrt{1+3\ln x}}{45}-\frac{2(1+3\ln x)\sqrt{1+3\ln x}}{27}+C. \end{aligned}$$

Vậy $I=\displaystyle\int \frac{\ln x\sqrt{1+3\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2(1+3\ln x)^2\sqrt{1+3\ln x}}{45}-\frac{2(1+3\ln x)\sqrt{1+3\ln x}}{27}+C.$ □

② Tính $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+\ln x}}$. **ĐS:** $I=\dfrac{3\sqrt[3]{(1+\ln x)^2}}{2}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{1+\ln x}\Rightarrow t^3=1+\ln x\Rightarrow \ln x=t^3-1\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=3t^2\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t}\cdot 3t^2\,\mathrm{d}t = \int 3t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3t^2}{2}+C = \frac{3\sqrt[3]{(1+\ln x)^2}}{2}+C. \end{aligned}$$

Vậy $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{1+\ln x}} = \frac{3\sqrt[3]{(1+\ln x)^2}}{2}+C.$ □

③ Tính $I=\displaystyle\int \frac{\ln^2 x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$. **ĐS:** $I=\dfrac{2(1+\ln x)^2\sqrt{1+\ln x}}{5}-\dfrac{4(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}}{3}+2\sqrt{1+\ln x}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow t^2=1+\ln x\Rightarrow \ln x=t^2-1\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=2t\,\mathrm{d}t.$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int (2t^4-4t^2+2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2t^5}{5}-\frac{4t^3}{3}+2t+C = \frac{2(1+\ln x)^2\sqrt{1+\ln x}}{5}-\frac{4(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}}{3}+2\sqrt{1+\ln x}+C. \end{aligned}$$

Vậy $I=\displaystyle\int \frac{\ln^2 x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}} = \frac{2(1+\ln x)^2\sqrt{1+\ln x}}{5}-\frac{4(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}}{3}+2\sqrt{1+\ln x}+C.$ □

④ $I=\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sqrt{5-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$

ĐS: $\dfrac{-2}{3}\left(\sqrt{5-\mathrm{e}^x}\right)^3+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{5-\mathrm{e}^x}\Rightarrow t^2=5-\mathrm{e}^x\Rightarrow -2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Suy ra $I=\displaystyle\int t\cdot(-2t)\,\mathrm{d}t=-2\int t^2\,\mathrm{d}t=\frac{-2}{3}t^3+C=\frac{-2}{3}\left(\sqrt{5-\mathrm{e}^x}\right)^3+C.$ □

⑤ $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}.$

ĐS: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\left|\sqrt{\mathrm{e}^x+3}-\sqrt{3}\right|-\ln\left|\sqrt{\mathrm{e}^x+3}+\sqrt{3}\right|\right)+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+3}\Rightarrow t^2=\mathrm{e}^x+3\Rightarrow \mathrm{e}^x=t^2-3\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2t}{t^2-3}\mathrm{d}t.$
Suy ra

$$\begin{aligned}I=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-3}\mathrm{d}t=2\int\frac{1}{t^2-3}\mathrm{d}t &= \frac{2}{2\sqrt{3}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}}-\frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\left|t-\sqrt{3}\right|-\ln\left|t+\sqrt{3}\right|\right)+C\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\left|\sqrt{\mathrm{e}^x+3}-\sqrt{3}\right|-\ln\left|\sqrt{\mathrm{e}^x+3}+\sqrt{3}\right|\right)+C.\end{aligned}$$

□

⑥ $I=\int\cos x\sqrt{3\sin x+2}\mathrm{d}x.$

ĐS: $\dfrac{2}{9}\left(\sqrt{3\sin x+2}\right)^3+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{3\sin x+2}\Rightarrow t^2=3\sin x+2\Rightarrow \dfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x.$
Suy ra $I=\int t\cdot\dfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}\int t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{9}t^3+C=\dfrac{2}{9}\left(\sqrt{3\sin x+2}\right)^3+C.$ □

⑦ $I=\int\sin x\sqrt{2018+\cos x}\mathrm{d}x.$

ĐS: $\dfrac{-2}{3}\left(\sqrt{2018+\cos x}\right)^3+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{2018+\cos x}\Rightarrow t^2=2018+\cos x\Rightarrow -2t\,\mathrm{d}t=\sin x\,\mathrm{d}x.$
Suy ra $I=\int t\cdot(-2t)\mathrm{d}t=-2\int t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{-2}{3}t^3+C=\dfrac{-2}{3}\left(\sqrt{2018+\cos x}\right)^3+C.$ □

⑧ $I=\int\dfrac{1}{x\ln x\sqrt{6+3\ln^2 x}}\mathrm{d}x.$

ĐS: $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\left(\ln\left|\sqrt{6+3\ln^2 x}-\sqrt{6}\right|-\ln\left|\sqrt{6+3\ln^2 x}+\sqrt{6}\right|\right)+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{\ln x}{x\ln^2 x\sqrt{6+3\ln^2 x}}\mathrm{d}x.$
Đặt $t=\sqrt{6+3\ln^2 x}\Rightarrow t^2=6+3\ln^2 x\Rightarrow \dfrac{1}{3}t\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\ln x\,\mathrm{d}x.$
Suy ra

$$\begin{aligned}I=\int\frac{1}{\frac{t^2-6}{3}\cdot t}\cdot\frac{1}{3}t\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t^2-6}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\sqrt{6}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{6}}-\frac{1}{t+\sqrt{6}}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\ln\left|t-\sqrt{6}\right|-\ln\left|t+\sqrt{6}\right|\right)+C\\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\ln\left|\sqrt{6+3\ln^2 x}-\sqrt{6}\right|-\ln\left|\sqrt{6+3\ln^2 x}+\sqrt{6}\right|\right)+C.\end{aligned}$$

□

⑨ $I=\int\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$

ĐS: $\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot x\,\mathrm{d}x=\int x^2\,\mathrm{d}x-\int x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x=I_1-I_2$.

$I_1=\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3+C_1$.

$I_2=\int x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow t^2=x^2-1\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I_2=\int t\cdot t\,\mathrm{d}t=\int t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}t^3+C_2=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3+C_2$.

Vậy $I=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3+C$. □

⑩ $I=\int\dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}-x^2}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $\dfrac{1}{6}x^6+\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{x^4+1}\right)^3+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)\cdot x^3\,\mathrm{d}x=\int x^3\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x+\int x^5\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

$I_2=\int x^5\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}x^6+C_1$.

$I_1=\int x^3\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{x^4+1}\Rightarrow t^2=x^4+1\Rightarrow\dfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t=x^3\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I_1=\int t\cdot\dfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{6}t^3+C_2=\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{x^4+1}\right)^3+C_2$. Vậy $I=\dfrac{1}{6}x^6+\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{x^4+1}\right)^3+C$.

□

⑪ $I=\int\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}{3}+\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x=\int x\sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x-\int x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x=I_1-I_2$.

$I_1=\int\sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $a=\sqrt{x^2+2}\Rightarrow a^2=x^2+2\Rightarrow a\,\mathrm{d}a=x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I_1=\int a^2\,\mathrm{d}a=\dfrac{a^3}{3}+C_1=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}{3}+C_1$.

$I_2=\int x\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $b=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow b^2=x^2-1\Rightarrow b\,\mathrm{d}b=x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I_2=\int b^2\,\mathrm{d}b=\dfrac{b^3}{3}+C_2=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3}+C_2$.

Vậy $I=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}{3}+\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3}+C$. □

Ví dụ 6. $I=\int\dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $\dfrac{\ln^2 x}{2}+C$

Lời giải:

Đặt $t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$. Suy ra $I = \displaystyle\int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

Bài 6. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

① $I = \displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$.

ĐS: $\dfrac{\ln^3 x}{3} + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$. Suy ra $I = \displaystyle\int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C$. □

② $I = \displaystyle\int \frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

ĐS: $\dfrac{(1+\ln x)^2}{2} + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 1 + \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$. Suy ra $I = \displaystyle\int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(1+\ln x)^2}{2} + C$. □

③ $I = \displaystyle\int \frac{1+\ln^4 x}{x}\mathrm{d}x$.

ĐS: $\ln x + \dfrac{\ln^5 x}{5} + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$. Suy ra $I = \displaystyle\int (1+t^4)\,\mathrm{d}t = t + \frac{t^5}{5} + C = \ln x + \frac{\ln^5 x}{5} + C$. □

④ $I = \displaystyle\int \frac{3\ln x + 1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

ĐS: $\ln|x| + \ln|x\ln x| + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = (\ln x + 1)\mathrm{d}x$.

Suy ra

$$\begin{aligned} I = \int \frac{3\ln x+1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int \frac{2\ln x + \ln x + 1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{\ln x + 1}{x\ln x}\mathrm{d}x &= \ln|x| + \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \ln|x| + \ln|t| + C \\ &= \ln|x| + \ln|x\ln x| + C. \end{aligned}$$

□

⑤ $I = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

ĐS: $\ln|2+\ln x| + 2\cdot\dfrac{1}{2+\ln x} + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 2 + \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Suy ra $I = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{t-2}{t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \int \frac{2}{t^2}\mathrm{d}t = \ln|t| + 2\frac{1}{t} + C = \ln|2+\ln x| + 2\cdot\frac{1}{2+\ln x} + C$. □

⑥ $I=\int \dfrac{\sqrt{4+\ln x}}{x}\mathrm{d}x.$

ĐS: $\dfrac{2\left(\sqrt{4+\ln x}\right)^3}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{4+\ln x}\Rightarrow t^2=4+\ln x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x.$

Suy ra $I=\int \dfrac{\sqrt{4+\ln x}}{x}\mathrm{d}x=\int 2t^2\,\mathrm{d}t=2\int t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{2t^3}{3}+C=\dfrac{2\left(\sqrt{4+\ln x}\right)^3}{3}+C.$ □

⑦ $I=\int \dfrac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}\mathrm{d}x.$

ĐS: $\dfrac{2}{9}\left(\sqrt{1+3\ln x}\right)^3+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow t^2=1+3\ln x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\dfrac{3}{x}\mathrm{d}x.$

Suy ra $I=\int \dfrac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}\mathrm{d}x=\int \dfrac{2}{3}t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{t^3}{3}+C=\dfrac{2}{9}\left(\sqrt{1+3\ln x}\right)^3+C.$ □

⑧ $I=\int \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x.$

ĐS: $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{1+\ln x}\right)^3+2\sqrt{1+\ln x}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow t^2=1+\ln x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x.$

Suy ra $I=\int \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x=2\int \dfrac{t(t^2-1)}{t}\mathrm{d}t=2\int (t^2-1)\mathrm{d}t=2\cdot\dfrac{t^3}{3}-2t+C=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{1+\ln x}\right)^3+2\sqrt{1+\ln x}+C.$ □

Ví dụ 7. $I=\int \dfrac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}.$

ĐS: $\ln|\mathrm{e}^x-1|+C$

Lời giải: Đặt $t=\mathrm{e}^x-1\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Suy ra $I=\int \dfrac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}=\int \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln|t|+C=\ln|\mathrm{e}^x-1|+C.$

Bài 7. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

① $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+3}.$

ĐS: $\dfrac{1}{3}(\ln|\mathrm{e}^x|-\ln|\mathrm{e}^x+3|)+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\mathrm{e}^x+3\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Suy ra

$$I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+3}=\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+3)}=\int \frac{1}{(t-3)t}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{3(t-3)}-\frac{1}{3t}\right)\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{3}\ln|t-3|-\frac{1}{3}\ln|t|+C$$
$$=\frac{1}{3}\left(\ln|\mathrm{e}^x|-\ln|\mathrm{e}^x+3|\right)+C.$$

□

② $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+4}$.

ĐS: $\dfrac{1}{4}(\ln|\mathrm{e}^x|-\ln|\mathrm{e}^x+4|)+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\mathrm{e}^x+4\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+4}=\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+4)}=\int\frac{1}{(t-4)t}\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{4(t-4)}-\frac{1}{4t}\right)\mathrm{d}t \begin{aligned}&=\frac{1}{4}\ln|t-4|-\frac{1}{4}\ln|t|+C\\&=\frac{1}{4}\left(\ln|\mathrm{e}^x|-\ln|\mathrm{e}^x+4|\right)+C.\end{aligned}$$

□

③ $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

ĐS: $\arctan\mathrm{e}^x+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Suy ra $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

Đặt $t=\tan u\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u$.

Vậy $I=\displaystyle\int\frac{1}{\tan^2 u+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u=\int\mathrm{d}u=u+C=\arctan t+C=\arctan\mathrm{e}^x+C$. □

④ $I=\int \dfrac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

ĐS: $\dfrac{1}{2}\ln|\mathrm{e}^{2x}+1|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=e^{2x}+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+e^{-x}}=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|\mathrm{e}^{2x}+1|+C$. □

⑤ $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+2e^{-x}-3}$.

ĐS: $\ln|\mathrm{e}^x-2|-\ln|\mathrm{e}^x-1|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Ta có

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-x}-3}=\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+2-3\mathrm{e}^x}=\int\frac{1}{t^2-3t+2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{(t-2)(t-1)}\,\mathrm{d}t \begin{aligned}&=\int\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\\&=\ln|t-2|-\ln|t-1|+C\\&=\ln|\mathrm{e}^x-2|-\ln|\mathrm{e}^x-1|+C.\end{aligned}$$

□

⑥ $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-4\cdot\mathrm{e}^{-x}}$.

ĐS: $\dfrac{1}{4}(\ln|\mathrm{e}^x-2|-\ln|\mathrm{e}^x+2|)+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-4}\mathrm{dx}$.
Đặt $t=\mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
Suy ra $I=\int \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2-4}=\dfrac{1}{4}\int\left(\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{t+2}\right)=\dfrac{1}{4}(\ln|t-2|-\ln|t+2|)+C=\dfrac{1}{4}\left(\ln\left|\mathrm{e}^x-2\right|-\ln\left|\mathrm{e}^x+2\right|\right)+C$.
□

⑦ $I=\int \dfrac{(1+\mathrm{e}^x)^3}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $\dfrac{-1}{\mathrm{e}^x}+3x+3\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{1+3\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+3+3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{-1}{\mathrm{e}^x}+3x+3\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$. □

⑧ $I=\int \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $2\ln|\mathrm{e}^x+1|-\ln|\mathrm{e}^x+2|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+3)}{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$.
Đặt $t=\mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
Suy ra $I=\int \dfrac{t+3}{t^2+3t+2}\mathrm{d}t=\int\left(\dfrac{2}{t+1}-\dfrac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=2\ln|t+1|-\ln|t+2|+C=2\ln\left|\mathrm{e}^x+1\right|-\ln\left|\mathrm{e}^x+2\right|+C$.

□

⑨ $I=\int \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $\dfrac{-1}{\mathrm{e}^x+1}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\mathrm{e}^x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}=\dfrac{-1}{t}+C=\dfrac{-1}{\mathrm{e}^x+1}+C$. □

⑩ $I=\int \dfrac{2\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $2\ln\mathrm{e}^x+1-\dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^x)-\dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^x+2)+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\mathrm{e}^x+1 \Rightarrow \mathrm{e}^x=t-1 \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{t-1}$.
Suy ra

$$\begin{aligned} I=\int \frac{2(t-1)-1}{t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t-1}=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t(t-1)}\right)\mathrm{d}t &= 2\ln t-\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right) \\ &= 2\ln t-\ln(t-1)-\ln(t)+C \\ &= 2\ln(\mathrm{e}^x+1)-\ln(\mathrm{e}^x)-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C. \end{aligned}$$

□

⑪ $I=\int \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $\dfrac{2\left(\sqrt{\mathrm{e}^x+1}\right)^2}{3}+\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\Rightarrow t^2=\mathrm{e}^x-1\Rightarrow \mathrm{e}^x=t^2+1\Rightarrow \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$.

Suy ra $I=\displaystyle\int\dfrac{(t^2+1)2t}{t}\,\mathrm{d}t=2\int(t^2+1)\,\mathrm{d}t=\dfrac{2t^3}{3}+2t+C=\dfrac{2\left(\sqrt{\mathrm{e}^x+1}\right)^3}{3}+2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+C$ □

⑫ $I=\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+\mathrm{e}^x}}$.

ĐS: $\dfrac{2\mathrm{e}^x}{3}\sqrt{3+\mathrm{e}^x}-6\sqrt{3+\mathrm{e}^x}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{3+\mathrm{e}^x}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{3+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I=\displaystyle\int 2(t^2-3)\,\mathrm{d}t=\dfrac{2t^3}{3}-6t+C=\dfrac{2}{3}(3+\mathrm{e}^x)\sqrt{3+\mathrm{e}^x}-6\sqrt{3+\mathrm{e}^x}+C=\dfrac{2\mathrm{e}^x}{3}\sqrt{3+\mathrm{e}^x}-6\sqrt{3+\mathrm{e}^x}+C$.

□

⑬ $I=\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$.

ĐS: $\ln\left|\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-1\right|-\ln\left|\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+1\right|+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra

$$\begin{aligned} I=2\int\frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=2\int\left(\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}\right)\mathrm{d}t &= \ln|t-1|-\ln|t+1|+C\\ &= \ln\left|\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-1\right|-\ln\left|\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+1\right|+C. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 8. $I=\displaystyle\int\tan x\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $-\ln|\cos x|+C$.

Lời giải: Ta có $I=\displaystyle\int\dfrac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I=\displaystyle\int-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C$.

Bài 8. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

① $I=\displaystyle\int\sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $-\cos x+\dfrac{\cos^3 x}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int(1-\cos^2 x)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I=\displaystyle\int-(1-t^2)\,\mathrm{d}t=-t+\frac{t^3}{3}+C=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$. □

② $I=\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $-\dfrac{\cos^5 x}{5}+\dfrac{2\cos^3 x}{3}-\cos x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int (1-\cos^2 x)^2\sin x\,\mathrm{d}x$.
Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.
Suy ra $I=\int -(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t=\int(-t^4+2t^2-1)\,\mathrm{d}t=-\dfrac{t^5}{5}+\dfrac{2t^3}{3}-t+C=-\dfrac{\cos^5 x}{5}+\dfrac{2\cos^3 x}{3}-\cos x+C$. □

③ $I=\int \cos^{2017} x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $-\dfrac{\cos^{2018} x}{2018}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.
Suy ra $I=\int -t^{2017}\,\mathrm{d}t=-\dfrac{t^{2018}}{2018}+C=-\dfrac{\cos^{2018} x}{2018}+C$. □

④ $I=\int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $\dfrac{1}{\cos x}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.
Suy ra $I=\int -\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{t}+C=\dfrac{1}{\cos x}+C$. □

⑤ $I=\int \sin 2x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $-\dfrac{\cos^4 x}{2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int 2\sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.
Suy ra $I=\int -2t^3\,\mathrm{d}t=-\dfrac{t^4}{2}+C=-\dfrac{\cos^4 x}{2}+C$. □

⑥ $I=\int \dfrac{\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $-\ln|2+\cos x|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2+\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.
Suy ra $I=\int -\dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-\ln|t|+C=-\ln|2+\cos x|+C$. □

⑦ $I=\int \dfrac{5\sin^3 x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $-5\cos x-\dfrac{5}{2}\cos^2 x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{5(1-\cos^2 x)\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x=\int 5(1+\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x.$
Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x.$
Suy ra $I=\int -5(1+t)\,\mathrm{d}t=-5t-5\dfrac{t^2}{2}+C=-5\cos x-\dfrac{5}{2}\cos^2 x+C.$ □

⑧ $I=\int \sin^2 x\tan x\,\mathrm{d}x.$

ĐS: $-\ln|\cos x|+\dfrac{\cos^2 x}{2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{\sin^3 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$
Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x.$
Suy ra $I=\int -\dfrac{1-t^2}{t}\,\mathrm{d}t=\int\left(-\dfrac{1}{t}+t\right)\mathrm{d}t=-\ln|t|+\dfrac{t^2}{2}+C=-\ln|\cos x|+\dfrac{\cos^2 x}{2}+C.$ □

⑨ $I=\int\dfrac{\sin 2x\cos x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x.$

ĐS: $\dfrac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+\ln|\cos x|+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{2\sin x\cos^2 x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x.$
Đặt $t=1-\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=\sin x\,\mathrm{d}x.$
Suy ra $I=\int\dfrac{(1-t)^2}{t}\,\mathrm{d}t=\int\left(t-2+\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{t^2}{2}-2t+\ln|t|+C=\dfrac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+\ln|\cos x|+C.$ □

⑩ $I=\int\dfrac{\sin 2x}{4-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

ĐS: $\ln|4-\cos^2 x|+C.$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=4-\cos^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=\sin 2x\,\mathrm{d}x.$
Suy ra $I=\int\dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln|t|+C=\ln|4-\cos^2 x|+C.$ □

⑪ $I=\int\dfrac{\sin 4x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

ĐS: $-2(1+\cos^2 x)^2+6\ln|1+\cos^2 x|+C.$

✍ **Lời giải.**

$I=\int\dfrac{2\sin 2x(2(\cos^2 x+1)-3)}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
Đặt $t=1+\cos^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin 2x\,\mathrm{d}x.$
Suy ra $I=\int -\dfrac{2(2t^2-3)}{t}\,\mathrm{d}t=\int-\left(4t-\dfrac{6}{t}\right)\mathrm{d}t=-2t^2+6\ln|t|+C=-2(1+\cos^2 x)^2+6\ln|1+\cos^2 x|+C.$
□

⑫ $I=\int\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)\sin x\,\mathrm{d}x.$

ĐS: $-\ln|\cos x|+C$

✍ **Lời giải.**

$$I=\int\frac{\cos x\cos\dfrac{x}{2}+\sin x\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x\cos\dfrac{x}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos\dfrac{x}{2}}{\cos x\cos\dfrac{x}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I=\displaystyle\int-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C$. □

(13) $I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos 2x+3\cos x+2}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $\ln|\cos x+1|-\ln|2\cos x+1|+C$

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{2\cos^2 x+3\cos x+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra

$$\begin{aligned}I=\int-\frac{1}{2t^2+3t+1}\,\mathrm{d}t &= \int-\frac{1}{(2t+1)(t+1)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{2}{2t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln|t+1|-\ln|2t+1|+C=\ln|\cos x+1|-\ln|2\cos x+1|+C\end{aligned}$$

□

(14) $I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos 2x-\cos x}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $-\dfrac{1}{3}\ln|\cos x+1|+\dfrac{1}{3}\ln|2\cos x+1|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{2\cos^2 x-\cos x-1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra

$$\begin{aligned}I=\int-\frac{1}{2t^2-t-1}\,\mathrm{d}t &= \int-\frac{1}{(2t+1)(t-1)}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{2}{2t+1}\right)\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{3}\ln|2t+1|+C=-\frac{1}{3}\ln|\cos x+1|+\frac{1}{3}\ln|2\cos x+1|+C.\end{aligned}$$

□

(15) $I=\displaystyle\int\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $-\dfrac{\cos 4x}{2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\frac{2\sin 4x\cos 2x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int 2\sin 4x\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos 4x}{2}+C$. □

(16) $I=\displaystyle\int 2\sin x\sqrt{1+4\cos x}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $-\dfrac{1}{3}\sqrt{1+4\cos x}(1+4\cos x)+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+4\cos x}\Rightarrow t^2=1+4\cos x\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=-2\sin x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I=\displaystyle\int-t^2\,\mathrm{d}t=-\frac{t^3}{3}=-\frac{1}{3}\sqrt{1+4\cos x}(1+4\cos x)+C$. □

17 Tính $I=\int \dfrac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $-\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{2\left(\sqrt{1+3\cos x}\right)^3}{3}+\sqrt{1+3\cos x}\right)+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{\sin x(2\cos x+1)}{\sqrt{1+3\cos x}}$.

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow t^2=1+3\cos x\Rightarrow -\dfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t=\sin x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I=\int \frac{-\frac{2}{3}t\left(2\left(\frac{t^2-1}{3}\right)+1\right)}{t}\,\mathrm{d}t=\int -\frac{2}{9}(2t^2+1)\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{9}\left(\frac{2t^3}{3}+t\right)+C=-\frac{2}{9}\left(\frac{2\left(\sqrt{1+3\cos x}\right)^3}{3}+\sqrt{1+3\cos x}\right)+C.$$

□

18 Tính $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}$. **ĐS:** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\int \dfrac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int \dfrac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1-\cos^2 x}$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow -\mathrm{d}t=\sin x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I=\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\ln|t-1|-\ln|t+1|)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C.$$

□

19 Tính $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}$. **ĐS:** $-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{1}{1+\cos x}+\ln\left|\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|\right)+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}=\int \dfrac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x}=\int \dfrac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(1-\cos^2 x)^2}$.

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{-\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}=-\frac{1}{4}\int \frac{[(1+t)+(1-t)]^2\,\mathrm{d}t}{(1-t)^2\cdot(1+t)^2}=-\frac{1}{4}\int \frac{(1+t)^2+(1-t)^2+2(1-t)(1+t)}{(1-t)^2(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1-t)(1+t)}\right]\mathrm{d}t=-\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right]\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)+C=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{1}{1+\cos x}+\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|\right)+C.
\end{aligned}$$

□

20 Tính $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}$. **ĐS:** $-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{2}\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x}{1-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|+C.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 9.

Tính $I=\int \cot x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\ln|\sin x|+C$

Lời giải:

Ta có $I=\int \cot x\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$.

Bài 9. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

① Tính $I=\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x=\int \cos x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó $I=\int t^2\,\mathrm{d}=\dfrac{t^3}{3}+C=\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C$. □

② Tính $I=\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\sin x-\dfrac{2}{3}\sin^3 x+\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x=\int \cos x\left(1-\sin^2 x\right)^2\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \left(1-t^2\right)^2\,\mathrm{d}t=\int \left(1-2t^2+t^4\right)\,\mathrm{d}t \\ &= t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+C=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C. \end{aligned}$$

□

③ Tính $I=\int \sin^{2019} x\cos x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{1}{2020}\sin^{2020} x+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó $I=\int t^{2019}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2020}t^{2020}+C=\dfrac{1}{2020}\sin^{2020} x+C$. □

④ Tính $I=\int (1+2\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{(1+2\sin x)^2}{4}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+2\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\cos x\,\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I=\int \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}\frac{(1+2\sin x)^2}{2}+C.$$

□

⑤ Tính $I=\int \dfrac{\cos x}{4+\sin x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\ln|4+\sin x|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=4+\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó $I=\int \dfrac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|+C=\ln|4+\sin x|+C$. □

⑥ Tính $I=\int \dfrac{\cos x}{9-2\sin x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $-\dfrac{1}{2}\ln|9-2\sin x|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 9 - 2\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\cos x\,\mathrm{d}x \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I = \int \frac{-\frac{1}{2}\mathrm{d}t}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln|9 - 2\sin x| + C.$$

□

⑦ Tính $I = \displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $-2\ln|1-\sin x| + 2(1-\sin x) + C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x\cos x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$.
Đặt $t = 1 - \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I = \int \frac{-2(1-t)\,\mathrm{d}t}{t} = \int \left(\frac{-2}{t} + 2\right)\mathrm{d}t = -2\ln|t| + 2t + C = -2\ln|1-\sin x| + 2(1-\sin x) + C.$$

□

⑧ Tính $I = \displaystyle\int \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $2\ln|2+\sin x| + \dfrac{4}{2+\sin x} + C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x\cos x}{(2+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.
Đặt $t = 2 + \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I = \int \frac{2(t-2)\,\mathrm{d}t}{t^2} = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{4}{t^2}\right)\mathrm{d}t = 2\ln|t| + \frac{4}{t} + C = 2\ln|2+\sin x| + \frac{4}{2+\sin x} + C.$$

□

⑨ Tính $I = \displaystyle\int (1+\sin x)^9 \cos x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{(1+\sin x)^{10}}{10} + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 1 + \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó $I = \displaystyle\int t^9\,\mathrm{d}t = \frac{t^{10}}{10} + C = \frac{(1+\sin x)^{10}}{10} + C$. □

⑩ Tính $I = \displaystyle\int \sin 2x \sin^5 x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{2}{7}\sin^7 x + C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int \sin 2x \sin^5 x\,\mathrm{d}x = \int 2\sin^6 x\cos x\,\mathrm{d}x$.
Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó $I = \displaystyle\int 2t^6\,\mathrm{d}t = \frac{2}{7}t^7 + C = \frac{2}{7}\sin^7 x + C$. □

⑪ Tính $I = \displaystyle\int (1+2\sin x)^7 \cos x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{(1+2\sin x)^8}{8} + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 1 + 2\sin x \Rightarrow \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó $I = \displaystyle\int t^7\,\mathrm{d}t = \frac{t^8}{8} + C = \frac{(1+2\sin x)^8}{8} + C$. □

⑫ Tính $I = \displaystyle\int \frac{(2\sin x - 3)\cos x}{2\sin x + 1}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{1}{2}(2\sin x + 1 - 4\ln|2\sin x + 1|) + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 2\sin x + 1 \Rightarrow \dfrac{t-1}{2} = \sin x \Rightarrow \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I = \int \frac{(t-1-3)\frac{1}{2}\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{4}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t - 4\ln|t|) + C = \frac{1}{2}(2\sin x + 1 - 4\ln|2\sin x + 1|) + C.$$

□

13 Tính $I=\int \dfrac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{1}{4}\ln|1+2\sin 2x|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+2\sin 2x \Rightarrow \mathrm{d}t=4\cos 2x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1}{4}\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\ln|t|+C=\frac{1}{4}\ln|1+2\sin 2x|+C. \end{aligned}$$

□

14 Tính $I=\int \dfrac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{1}{2}\ln|1+\sin 2x|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.
Đặt $t=1+\sin 2x \Rightarrow \mathrm{d}t=2\cos 2x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I=\int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|1+\sin 2x|+C.$$

□

15 Tính $I=\int \dfrac{\cos x\,\mathrm{d}x}{6-5\sin x+\sin^2 x}$. **ĐS:** $\ln\left|\dfrac{\sin x-3}{\sin x-2}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\cos x\,\mathrm{d}x}{6-5\sin x+\sin^2 x}=\int \dfrac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(\sin x-3)(\sin x-2)}$.
Đặt $t=\sin x-3 \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I=\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+3-2)}=\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin x-3}{\sin x-2}\right|+C.$$

□

16 Tính $I=\int \cos x\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\mathrm{e}^{\sin x}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \cos x\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\sin x}+C$. □

17 Tính $I=\int \cos x\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\sin x)^3}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x} \Rightarrow t^2=1+\sin x \Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I = \int t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=\frac{2t^3}{3}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(1+\sin x)^3}+C.$$

□

18 Tính $I=\int \cos x\sqrt{3\sin x+1}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{2\sqrt{(3\sin x+1)^3}}{9}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{3\sin x+1}\Rightarrow t^2=3\sin x+1\Rightarrow \dfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I = \int \frac{2}{3}t^2\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{(3\sin x+1)^3}}{3}+C.$$

□

19 Tính $I=\displaystyle\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2+\sqrt{3\sin x+1}}$. **ĐS:** $\dfrac{2}{3}\left(2+\sqrt{3\sin x+1}-2\ln\left|2+\sqrt{3\sin x+1}\right|\right)+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2+\sqrt{3\sin x+1}\Rightarrow t-2=\sqrt{3\sin x+1}\Rightarrow (t-2)^2=3\sin x+1\Rightarrow 2(t-2)\,\mathrm{d}t=3\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2+\sqrt{3\sin x+1}}=\int \frac{\frac{2}{3}\cdot(t-2)\,\mathrm{d}t}{t}\\ &= \frac{2}{3}\int \frac{t-2}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int\left(1-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{3}(t-2\ln|t|)+C=\frac{2}{3}\left(2+\sqrt{3\sin x+1}-2\ln\left|2+\sqrt{3\sin x+1}\right|\right)+C. \end{aligned}$$

□

20 Tính $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$. **ĐS:** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x}$.
Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}(\ln|1+t|-\ln|1-t|)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C. \end{aligned}$$

□

21 Tính $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}$. **ĐS:** $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1-\sin x}-\dfrac{1}{1+\sin x}+\ln\left|\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right)+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}=\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^4 x}=\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(1-\sin^2 x)^2}$.
Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{4}\int \frac{[(1+t)+(1-t)]^2\,\mathrm{d}t}{(1-t)^2\cdot(1+t)^2}=\frac{1}{4}\int \frac{(1+t)^2+(1-t)^2+2(1-t)(1+t)}{(1-t)^2(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1-t)(1+t)}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right]\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)+C=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}+\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right)+C. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 10. Tính $I=\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{\tan^2 x}{2}+C$

Lời giải: Đặt $t=\tan x \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó $I=\displaystyle\int t\,\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}+C=\frac{\tan^2 x}{2}+C$.

Bài 10. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

① Tính $I=\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{\tan^3 x}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\tan x \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó $I=\displaystyle\int t^2\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\tan^3 x}{3}+C$. □

② Tính $I=\displaystyle\int \frac{(1+\tan x)^2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{(1+\tan x)^3}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+\tan x \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó $I=\displaystyle\int t^2\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(1+\tan x)^3}{3}+C$. □

③ Tính $I=\displaystyle\int \frac{2+3\tan x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{(2+3\tan x)^2}{2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int \frac{2+3\tan x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=\int \frac{2+3\tan x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2+3\tan x \Rightarrow \dfrac{1}{3}\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó $I=\displaystyle\int \frac{1}{6}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{6}\cdot\frac{(2+3\tan x)^2}{2}+C$. □

④ Tính $I=\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\cos 2x}\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right|-\tan x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\cos 2x}\mathrm{d}x=\int \frac{\tan^2 x}{2\cos^2 x-1}\mathrm{d}x=\int \frac{\tan^2 x}{2-\dfrac{1}{\cos^2 x}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \frac{\tan^2 x}{2-(1+\tan^2 x)}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.

Đặt $t=\tan x \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)\mathrm{d}t=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}-2\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-t+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right|-\tan x+C. \end{aligned}$$

□

⑤ Tính $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x-4\cos^2 x}$. **ĐS:** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\tan x-2}{\tan x+2}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x-4\cos^2 x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\left(\tan^2 x-4\right)}$.

Đặt $t=\tan x \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-4}=\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln|t-2|-\ln|t+2|\right)+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan x-2}{\tan x+2}\right|+C. \end{aligned}$$

□

⑥ Tính $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+3\sin x\cos x}$. **ĐS:** $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\tan x}{\tan x+3}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+3\sin x\cos x}=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(\tan^2 x+3\tan x)}$.

Đặt $t=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3t}=\int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}(\ln|t|-\ln|t+3|)+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t}{t+3}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan x}{\tan x+3}\right|+C. \end{aligned}$$

□

⑦ Tính $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5\cos^2 x-8\sin x\cos x+3\sin^2 x}$. **ĐS:** $-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\tan x-1}{3\tan x-5}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5\cos^2 x-8\sin x\cos x+3\sin^2 x}=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(5-8\tan x+3\tan^2 x)}$.

Đặt $t=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{d}t}{5-8t+3t^2}=\int \frac{\mathrm{d}t}{(3t-5)(t-1)}=\int -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{t-1}-\frac{3}{3t-5}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}(\ln|t-1|-\ln|3t-5|)+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{3t-5}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x-1}{3\tan x-5}\right|+C. \end{aligned}$$

□

⑧ Tính $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x}$. **ĐS:** $\ln|\tan x|+\dfrac{\tan^2 x}{2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x}=\int \dfrac{1}{\sin x\cos x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \dfrac{1}{\cos^2 x(\tan x)}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.

Đặt $t=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó

$$I=\int \frac{1+t^2}{t}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t}+t\right)\mathrm{d}t=\ln|t|+\frac{t^2}{2}+C=\ln|\tan x|+\frac{\tan^2 x}{2}+C.$$

□

⑨ Tính $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x\sin^2 x}$. **ĐS:** $-\dfrac{1}{\tan x}+2\tan x+\dfrac{\tan^3 x}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x\sin^2 x}=\int \dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \dfrac{1}{\cos^4 x(\tan^2 x)}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \dfrac{(1+\tan^2 x)^2}{\tan^2 x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$.

Đặt $t=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t^2}+2+t^2\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{t}+2t+\frac{t^3}{3}+C=-\frac{1}{\tan x}+2\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}+C. \end{aligned}$$

□

⑩ Tính $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$. **ĐS:** $\tan x+\dfrac{\tan^3 x}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}=\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \dfrac{1+\tan^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó $I=\int (1+t^2)\mathrm{d}t=t+\dfrac{t^3}{3}+C=\tan x+\dfrac{\tan^3 x}{3}+C.$ □

⑪ Tính $I=\int \dfrac{(1+\sin 2x)\mathrm{d}x}{2\sin x\cos^3 x+\cos^4 x}$. **ĐS:** $\dfrac{\tan^2 x}{4}+\dfrac{3\tan x}{4}+\dfrac{\ln|2\tan x+1|}{8}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(1+\sin 2x)\mathrm{d}x}{2\sin x\cos^3 x+\cos^4 x}=\int \frac{1+\sin 2x}{2\sin x\cos x+\cos^2 x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\\ &= \int \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}+2\tan x}{2\tan x+1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \frac{1+\tan^2 x+2\tan x}{2\tan x+1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t^2+2t+1}{2t+1}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}+\frac{1}{4(2t+1)}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{t^2}{4}+\frac{3t}{4}+\frac{\ln|2t+1|}{8}+C\\ &= \frac{\tan^2 x}{4}+\frac{3\tan x}{4}+\frac{\ln|2\tan x+1|}{8}+C.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 11.

Tính $I=\int \dfrac{\cot x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$. **ĐS:** $-\dfrac{\cot^2 x}{2}+C$

Lời giải: Đặt $t=\cot x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

Do đó $I=\int -t\,\mathrm{d}t=-\dfrac{t^2}{2}+C=-\dfrac{\cot^2 x}{2}+C.$

Bài 11. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

① Tính $I=\int \dfrac{(2-\cot x)^2}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{(2-\cot x)^3}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2-\cot x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

Do đó $I=\int t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}+C=\dfrac{(2-\cot x)^3}{3}+C.$ □

② Tính $I=\int \dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x$. **ĐS:** $-\dfrac{\cot^3 x}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{\cot^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cot x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Do đó $I=\int -t^2\,\mathrm{d}t=-\dfrac{t^3}{3}+C=-\dfrac{\cot^3 x}{3}+C$. □

③ Tính $I=\int\dfrac{3-\cot x}{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{1}{4}(3-\cot x)^2+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{3-\cot x}{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{3-\cot x}{1-(1-2\sin^2 x)}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{3-\cot x}{2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=3-\cot x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Do đó $I=\int\dfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t=t^2+C=\dfrac{1}{4}(3-\cot x)^2+C$. □

④ Tính $I=\int\dfrac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=-\dfrac{\cot^5 x}{5}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{\cot^4 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cot x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Do đó $I=\int -t^4\,\mathrm{d}t=-\dfrac{t^5}{5}+C=-\dfrac{\cot^5 x}{5}+C$. □

⑤ Tính $I=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x}$. **ĐS:** $-\cot x-\dfrac{\cot^3 x}{3}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x}=\int\dfrac{1+\cot^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\cot x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Do đó $I=-\int(1+t^2)\,\mathrm{d}t=-t-\dfrac{t^3}{3}+C=-\cot x-\dfrac{\cot^3 x}{3}+C$. □

⑥ Tính $I=\int\dfrac{\cot^2 x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $-\cot x-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cot x-1}{\cot x+1}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\cot x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-(1+\cot^2 x)\,\mathrm{d}x$.

Ta có $\cos 2x=\dfrac{t^2-1}{1+t^2}$.

Suy ra $\mathrm{d}t=-(1+\cot^2 x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Do đó $I=\displaystyle\int\frac{t^2\left(-\dfrac{1}{1+t^2}\right)}{\dfrac{t^2-1}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=-\int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=-\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=-\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$.

Vậy $I=-\displaystyle\int\left(t+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)\right)\mathrm{d}t=-t-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-\cot x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cot x-1}{\cot x+1}\right|+C$. □

⑦ Tính $I=\int\dfrac{\cot^4 x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $-\dfrac{\cot^3 x}{3}-\cot x-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cot x-1}{\cot x+1|}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\cot x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x.$

Ta có $\cos 2x=\dfrac{t^2-1}{1+t^2}.$

Suy ra $\mathrm{d}t=-(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$

Do đó $I=\displaystyle\int \frac{t^4\left(-\dfrac{1}{1+t^2}\right)}{\dfrac{t^2-1}{1+t^2}}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^4}{t^2-1}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^4-1+1}{t^2-1}\mathrm{d}t=-\int\left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t.$

Vậy $I=-\dfrac{t^3}{3}-t-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|+C=-\dfrac{\cot^3 x}{3}-\cot x-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cot x-1}{\cot x+1|}\right|+C.$ □

⑧ Tính $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sin^3 x}.$ **ĐS:** $-\dfrac{\cot^2 x}{2}-\ln|\cot x|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sin^3 x}=\int\frac{2(1+\cot^2 x)}{\sin 2x}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\cot x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x.$

Và $\sin 2x=\dfrac{2t}{t^2+1}.$

Do đó $I=-\displaystyle\int\frac{2(1+t^2)}{(1+t^2)\left(\dfrac{2t}{t^2+1}\right)}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^2+1}{t}\mathrm{d}t=-\int\left(t+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=-\frac{t^2}{2}-\ln|t|+C.$

Vậy $I=-\dfrac{\cot^2 x}{2}-\ln|\cot x|+C.$ □

⑨ Tính $I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $-\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\frac{\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}\mathrm{d}x=\int\frac{2\sqrt{2}\sin x}{\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x+\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x.$

Do đó $I=\displaystyle\int\frac{2\sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^3 t}\mathrm{d}t=\int\frac{2(\sin t-\cos t)}{\sin^3 t}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{2}{\sin^2 t}-\frac{\cot t}{\sin^2 t}\right)\mathrm{d}t.$

Vậy $I=-2\cot t+\cot t+C=-\cot t+C=-\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+C.$ □

Ví dụ 12.

Tính $I=\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $-\ln|1+\cos^2 x|+C$

Lời giải: Đặt $t=1+\cos^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin 2x\,\mathrm{d}x.$

Do đó $I=\displaystyle\int-\frac{1}{t}\mathrm{d}t=-\ln|t|+C=-\ln|1+\cos^2 x|+C.$

Bài 12. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

① Tính $I=\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $\ln|1+\sin^2 x|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 1 + \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = \sin 2x\,\mathrm{d}x$.
Do đó $I = \displaystyle\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln|1 + \sin^2 x| + C$. □

② Tính $I = \displaystyle\int \frac{\sin 2x}{3 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $-\ln|3 + \cos^2 x| + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 3 + \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
Do đó $I = \displaystyle\int -\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln|t| + C = -\ln|3 + \cos^2 x| + C$. □

③ Tính $I = \displaystyle\int \sin 2x\left(1 + \sin^2 x\right)^3\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{(1 + \sin^2 x)^4}{4} + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 1 + \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = \sin 2x\,\mathrm{d}x$.
Do đó $I = \displaystyle\int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(1 + \sin^2 x)^4}{4} + C$. □

④ Tính $I = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin^2 x} \sin 2x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\mathrm{e}^{\sin^2 x} + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = \sin 2x\,\mathrm{d}x$.
Do đó $I = \displaystyle\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t + C = \mathrm{e}^{\sin^2 x} + C$. □

⑤ Tính $I = \displaystyle\int \mathrm{e}^{\cos^2 x} \sin 2x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $-\mathrm{e}^{\cos^2 x} + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
Do đó $I = \displaystyle\int -\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^t + C = -\mathrm{e}^{\cos^2 x} + C$. □

⑥ Tính $I = \displaystyle\int \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $-4(1 + \cos^2 x) + 6\ln|1 + \cos^2 x| + C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(2\cos^2 x - 1)\sin 2x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
Đặt $t = 1 + \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
Do đó $I = -2\displaystyle\int \frac{2t - 3}{t}\,\mathrm{d}t = \int \left(-4 + \frac{6}{t}\right)\mathrm{d}t = -4t + 6\ln|t| + C = -4(1 + \cos^2 x) + 6\ln|1 + \cos^2 x| + C$. □

⑦ Tính $I = \displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{2}{3}\sqrt{1 + \sin^2 x} + C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$.
Đặt $t = 1 + 3\sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\sin 2x\,\mathrm{d}x$.
Do đó $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{1 + \sin^2 x} + C$. □

⑧ Tính $I = \displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{4\cos^2 x + 9\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{1}{5}\sqrt{4 + 5\sin^2 x} + C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{4\cos^2 x+9\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{4+5\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x.$
Đặt $t=4+5\sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t=5\sin 2x\,\mathrm{d}x.$
Do đó $I=\int \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{5}\sqrt{t}+C=\dfrac{1}{5}\sqrt{4+5\sin^2 x}+C.$ □

Ví dụ 13.
Tính $I=\int \dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $-\ln|\sin x+\cos x|+C$
Lời giải: Đặt $t=\sin x+\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t=-(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x.$
Do đó $I=-\int \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-\ln|t|+C=-\ln|\sin x+\cos x|+C.$

Bài 13. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

① Tính $I=\int \dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x+3}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $-\ln|\sin x+\cos x+3|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sin x+\cos x+3 \Rightarrow \mathrm{d}t=-(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x.$
Do đó $I=-\int \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln|t|+C=-\ln|\sin x+\cos x+3|+C.$ □

② Tính $I=\int \dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x+1}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $\ln|\sin x+\cos x+1|-\sin x-\cos x-1+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x+1}\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x+1}\,\mathrm{d}x=-\int \dfrac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x+1}\,\mathrm{d}x.$
Đặt $t=\sin x+\cos x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=-(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x.$
Do đó $I=\int \dfrac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t=\int\left(1-\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=t-\ln|t|+C=\sin x+\cos x+1-\ln|\sin x+\cos x+1|+C.$ □

③ Tính $I=\int \dfrac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+4)^3}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $-\dfrac{1}{\sin x+\cos x+4}+\dfrac{2}{(\sin x+\cos x+4)^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+4)^3}\,\mathrm{d}x=-\int \dfrac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}{(\sin x+\cos x+4)^3}\,\mathrm{d}x.$
Đặt $t=\sin x+\cos x+4 \Rightarrow \mathrm{d}t=-(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x.$
Do đó $I=\int \dfrac{t-4}{t^3}\,\mathrm{d}t=-\int\left(\dfrac{4}{t^3}-\dfrac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{t}+\dfrac{2}{t^2}+C=-\dfrac{1}{\sin x+\cos x+4}+\dfrac{2}{(\sin x+\cos x+4)^2}+C.$
□

④ Tính $I=\int \dfrac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $-\dfrac{1}{4}\cdot\ln\left|\dfrac{\sin x-\cos x-2}{\sin x-\cos x+2}\right|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int \dfrac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int \dfrac{\sin x+\cos x}{4-(\sin x-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x.$
Đặt $t=\sin x-\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t=(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x.$
Do đó $I=\int \dfrac{1}{4-t^2}\,\mathrm{d}t=-\int \dfrac{1}{t^2-4}\,\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{4}\cdot\int\left(\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{4}\cdot\ln\left|\dfrac{t-2}{t+2}\right|+C.$
Vậy $I=-\dfrac{1}{4}\cdot\ln\left|\dfrac{\sin x-\cos x-2}{\sin x-\cos x+2}\right|+C.$ □

⑤ Tính $I=\int \dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $2\sin x+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{(\sin x+\cos x)^2+(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int 2\cos x\,\mathrm{d}x.$
Do đó $I=2\sin x+C.$ □

⑥ Tính $I=\int\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $\dfrac{1}{\sin x+\cos x+1}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$
Đặt $t=\sin x+\cos x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=-(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x.$
Do đó $I=-\int\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{t}+C=\dfrac{1}{\sin x+\cos x+1}+C.$ □

⑦ Tính $I=\int\dfrac{\cos 2x}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x$
ĐS: $-\dfrac{4}{3}(\sqrt{1+\sin x-\cos x})^3+4(\sqrt{1+\sin x-\cos x})^2-16\sqrt{1+\sin x-\cos x}+32\ln|2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}|+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{\cos 2x}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}{\sqrt{1+\sin x-\cos x}-2}\,\mathrm{d}x.$
Đặt $t=\sqrt{1+\sin x-\cos x}\Rightarrow t^2=1+\sin x-\cos x\Rightarrow 2t\cdot\mathrm{d}t=(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x.$
Và $\sin x-\cos x=t^2-1.$
Do đó $I=\int\dfrac{2t(t^2-1)}{2-t}\,\mathrm{d}t=\int\left(-4t^2+8t-16-\dfrac{32}{2-t}\right)\mathrm{d}t=-\dfrac{4}{3}t^3+4t^2-16t+32\ln|2-t|+C.$
Vậy $I=-\dfrac{4}{3}(\sqrt{1+\sin x-\cos x})^3+4(\sqrt{1+\sin x-\cos x})^2-16\sqrt{1+\sin x-\cos x}+32\ln|2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}|+C.$ □

⑧ Tính $I=\int\dfrac{4(\sin x+\cos x)-\cos 2x}{2(\sin x-\cos x-1)-\sin 2x}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $\dfrac{5}{4}\ln|\sin x-\cos x-1|-\dfrac{1}{4}\ln|\sin x-\cos x+3|+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{4(\sin x+\cos x)-\cos 2x}{2(\sin x-\cos x-1)-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{(\sin x+\cos x)(4+\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2+2(\sin x-\cos x)-3}\,\mathrm{d}x.$
Đặt $t=\sin x-\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x.$
Do đó $I=\int\dfrac{4+t}{t^2+2t-3}\,\mathrm{d}t=\int\dfrac{4+t}{(t-1)(t+3)}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}\cdot\int\left(\dfrac{5}{t-1}-\dfrac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t.$
Vậy $I=\dfrac{5}{4}\ln|t-1|-\dfrac{1}{4}\ln|t+3|+C=\dfrac{5}{4}\ln|\sin x-\cos x-1|-\dfrac{1}{4}\ln|\sin x-\cos x+3|+C.$ □

⑨ Tính $I=\int\dfrac{\cos 2x}{(1+\sin 2x)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $-\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x+\cos x}+C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\dfrac{\cos 2x}{(1+\sin 2x)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x=-\int\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x+\cos x)^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x=-\int\dfrac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x.$
Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x.$
Do đó $I=\int\dfrac{\sqrt{2}}{t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=-\dfrac{\sqrt{2}}{t}+C.$
Vậy $I=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x+\cos x}+C.$ □

3.3 Nguyên hàm từng phần

Định lí.
Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm và liên tục trên K thì

$$I = \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \text{ hay } I = \int u\,\mathrm{d}v - \int v\,\mathrm{d}u.$$

Nhận dạng: Tích hai hàm khác loại nhau. Ví dụ: $\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$, $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$, ...

① Đặt: $\begin{cases} u = \ldots & \xrightarrow{\text{vi phân}} \mathrm{d}u = \ldots \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \ldots \mathrm{d}x & \xrightarrow{\text{nguyên hàm}} v = \ldots \end{cases}$ Suy ra: $I = \int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$

② Thứ tự ưu tiên chọn u: nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ và $\mathrm{d}v$ = phần còn lại.

③ Lưu ý rằng bậc của đa thức và bậc của ln tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.

④ Dạng mũ nhân lượng giác là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.

3.3.1 Ví dụ và bài tập

Ví dụ 1. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định)

Tính $I = \int \ln x\,\mathrm{d}x$.

Chọn $\begin{cases} u = \ldots \longrightarrow \mathrm{d}u = \ldots \\ \mathrm{d}v = \ldots \longrightarrow v = \ldots \end{cases}$

ĐS: $I = x\ln x - x + C$

Lời giải: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$

Ta có: $I = x\ln x - \int x\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$

Bài 1. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ (giả sử điều kiện được xác định):

① Tính $I = \int x\ln x\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u = \ldots \longrightarrow \mathrm{d}u = \ldots \\ \mathrm{d}v = \ldots \longrightarrow v = \ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C.$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Ta có: $I = \dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C.$ □

② Tính $I = \int (2x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u = \ldots \longrightarrow \mathrm{d}u = \ldots \\ \mathrm{d}v = \ldots \longrightarrow v = \ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I = (x^2+x)\ln x - \dfrac{x^2}{2} - x + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = (2x+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x^2 + x \end{cases}$

Ta có: $I = (x^2+x)\ln x - \int (x^2+x)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = (x^2+x)\ln x - \int (x+1)\,\mathrm{d}x = (x^2+x)\ln x - \dfrac{x^2}{2} - x + C$

□

③ Tính $I=\int x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases}u=\ldots\longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots\\ \mathrm{d}v=\ldots\longrightarrow v=\ldots\end{cases}$ **ĐS:** $I=\dfrac{x^2-1}{2}\ln(1-x)-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=\ln(1-x)\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{-1}{1-x}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$

$$\begin{aligned}I&=\frac{x^2}{2}\ln(1-x)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{-1}{1-x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\int\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x)\right)+C\\&=\frac{x^2-1}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C.\end{aligned}$$

□

④ Tính $I=\int x\sin x\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases}u=\ldots\longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots\\ \mathrm{d}v=\ldots\longrightarrow v=\ldots\end{cases}$ **ĐS:** $I=-x\cos x+\sin x+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-\cos x\end{cases}$

$$\begin{aligned}I&=-x\cos x-\int(-\cos x)\,\mathrm{d}x\\&=-x\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}x\\&=-x\cos x+\sin x+C.\end{aligned}$$

□

⑤ Tính $I=\int x\cos x\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases}u=\ldots\longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots\\ \mathrm{d}v=\ldots\longrightarrow v=\ldots\end{cases}$ **ĐS:** $I=x\sin x+\cos x+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x\end{cases}$

Ta có: $I=x\sin x-\int\sin x\,\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C.$ □

⑥ Tính $I=\int(x+1)\sin 2x\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases}u=\ldots\longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots\\ \mathrm{d}v=\ldots\longrightarrow v=\ldots\end{cases}$ **ĐS:** $I=-\dfrac{1}{2}(x+1)\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ \mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x - \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C. \end{aligned}$$

□

⑦ Tính $I = \int x\sin\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u = \ldots \longrightarrow \mathrm{d}u = \ldots \\ \mathrm{d}v = \ldots \longrightarrow v = \ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I = -2x\cdot\cos\dfrac{x}{2} + 4\sin\dfrac{x}{2} + C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -2\cos\dfrac{x}{2} \end{cases}$

$I = -2x\cdot\cos\dfrac{x}{2} - \int(-2)\cdot\cos\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = -2x\cdot\cos\dfrac{x}{2} + 4\sin\dfrac{x}{2} + C.$ □

⑧ Tính $I = \int x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u = \ldots \longrightarrow \mathrm{d}u = \ldots \\ \mathrm{d}v = \ldots \longrightarrow v = \ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I = -\dfrac{1}{4}x\cdot\cos 2x + \dfrac{1}{8}\sin 2x + C$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int \dfrac{1}{2}x\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}x \\ \mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{4}x\cdot\cos 2x - \int\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}x\cdot\cos 2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C \\ &= -\frac{1}{4}x\cdot\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C \end{aligned}$$

□

⑨ Tính $I = \int x(2\cos^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u = \ldots \longrightarrow \mathrm{d}u = \ldots \\ \mathrm{d}v = \ldots \longrightarrow v = \ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I = \dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$

✍ **Lời giải.**

$I = \int x\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}x\sin 2x - \int\frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C. \end{aligned}$$

□

10 Tính $I=\int xe^x\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u=\ldots \longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots \\ \mathrm{d}v=\ldots \longrightarrow v=\ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I=x\cdot e^x-e^x+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=e^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} I&=x\cdot e^x-\int e^x\,\mathrm{d}x \\ &=x\cdot e^x-e^x+C. \end{aligned}$$

□

11 Tính $I=\int (1-2x)e^x\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u=\ldots \longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots \\ \mathrm{d}v=\ldots \longrightarrow v=\ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I=(1-2x)e^x+2e^x+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=1-2x \\ \mathrm{d}v=e^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-2\,\mathrm{d}x \\ v=e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} I&=(1-2x)\cdot e^x-\int e^x(-2)\,\mathrm{d}x \\ &=(1-2x)e^x+2e^x+C. \end{aligned}$$

□

12 Tính $I=\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u=\ldots \longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots \\ \mathrm{d}v=\ldots \longrightarrow v=\ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I=\dfrac{1}{3}xe^{3x}-\dfrac{1}{9}e^{3x}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=e^{3x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} I&=\frac{1}{3}e^x-\int \frac{1}{3}e^{3x}\,\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{3x}+C \\ &=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C. \end{aligned}$$

□

13 Tính $I=\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u=\ldots \longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots \\ \mathrm{d}v=\ldots \longrightarrow v=\ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=e^{-x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=-e^{-x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} I&=-xe^{-x}-\int (-e^{-x})\,\mathrm{d}x \\ &=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &=-xe^{-x}-e^{-x}+C. \end{aligned}$$

□

14 Tính $I=\int(4x-1)e^{-2x}\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases}u=\ldots\longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots\\ \mathrm{d}v=\ldots\longrightarrow v=\ldots\end{cases}$ **ĐS:** $I=-\dfrac{1}{2}(4x-1)e^{-2x}-e^{-2x}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=4x-1\\ v=e^{-2x}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=4\,\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\end{cases}$

$$\begin{aligned}I&=-\frac{1}{2}(4x-1)e^{-2x}-\int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot 4\right)\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{2}(4x-1)e^{-2x}+2\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{2}(4x-1)e^{-2x}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2x}+C\\ &=-\frac{1}{2}(4x-1)e^{-2x}-e^{-2x}+C.\end{aligned}$$

□

15 Tính $I=\int\dfrac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases}u=\ldots\longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots\\ \mathrm{d}v=\ldots\longrightarrow v=\ldots\end{cases}$ **ĐS:** $I=-x\cot x-\ln|\sin x|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-\cot x\end{cases}$

$$\begin{aligned}I&=-x\cot x+\int(-\cot x)\,\mathrm{d}x\\ &=-x\cot x-\int\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\ &=-x\cot x-\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}\\ &=-x\cot x-\ln|\sin x|+C.\end{aligned}$$

□

16 Tính $I=\int\dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases}u=\ldots\longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots\\ \mathrm{d}v=\ldots\longrightarrow v=\ldots\end{cases}$ **ĐS:** $I=x\tan x+\ln|\cos x|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x\end{cases}$

$$\begin{aligned}I&=x\tan x-\int\tan x\,\mathrm{d}x\\ &=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &=x\tan x+\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}\\ &=x\tan x+\ln|\cos x|+C.\end{aligned}$$

□

17 Tính $I=\int \dfrac{2x-1}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u=\ldots \longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots \\ \mathrm{d}v=\ldots \longrightarrow v=\ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I=\dfrac{1}{2}(2x-1)\tan x+\ln|\cos x|+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=2x-1 \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{2}\tan x \end{cases}$

$$\begin{aligned} I&=\frac{1}{2}(2x-1)\tan x-\int \frac{1}{2}\tan x\cdot 2\,\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{2}(2x-1)\tan x+\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &=\frac{1}{2}(2x-1)\tan x+\ln|\cos x|+C. \end{aligned}$$

□

18 Tính $I=\int \dfrac{2x}{1-\cos 4x}\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u=\ldots \longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots \\ \mathrm{d}v=\ldots \longrightarrow v=\ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I=-\dfrac{1}{2}x\cot 2x+\dfrac{1}{4}\ln|\sin 2x|+C$

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int \frac{2x}{2\sin^2 2x}\mathrm{d}x=\int \frac{x}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=-\dfrac{1}{2}\cot 2x \end{cases}$

$$\begin{aligned} I&=-\frac{1}{2}x\cot 2x-\int\left(-\frac{1}{2}\cot 2x\right)\mathrm{d}x \\ &=-\frac{1}{2}x\cot 2x+\frac{1}{2}\int \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\mathrm{d}x \\ &=-\frac{1}{2}x\cot 2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x} \\ &=-\frac{1}{2}x\cot 2x+\frac{1}{4}\ln|\sin 2x|+C. \end{aligned}$$

□

19 Tính $I=\int \dfrac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u=\ldots \longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots \\ \mathrm{d}v=\ldots \longrightarrow v=\ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I=-\dfrac{\ln x}{2x^2}-\dfrac{1}{4x^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^{-2}}{-2}=\dfrac{1}{-2x^2}. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I&=-\frac{\ln x}{2x^2}-\int \frac{x^{-2}}{-2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x \\ &=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C \\ &=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C. \end{aligned}$$

□

20 Tính $I=\int \dfrac{x^2-1}{x^2}\ln x\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u=\ldots \longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots \\ \mathrm{d}v=\ldots \longrightarrow v=\ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x-x+\dfrac{1}{x}+C$

✍ **Lời giải.**

$I=\int \dfrac{x^2-1}{x^2}\ln x\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=x+\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} I&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x-\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ &=\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x-\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x-\left(x-\frac{1}{x}\right)+C\\ &=\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x-x+\frac{1}{x}+C. \end{aligned}$$

□

21 Tính $I=\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u=\ldots \longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots \\ \mathrm{d}v=\ldots \longrightarrow v=\ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I=\dfrac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=\cos x \\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=-\sin x\,\mathrm{d}x \\ v=e^x \end{cases}$

$I=e^x\cdot\cos x+\int e^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x=e^x\cdot\cos x+I_2$, với $I_2=\int e^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u=\sin x \\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x \\ v=e^x \end{cases}$

$I_2=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x=e^x\sin x-I.$

Do đó: $I=e^x\cos x-(e^x\sin x-I)+C\Leftrightarrow I=\dfrac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)+C.$ □

22 Tính $I=\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases} u=\ldots \longrightarrow \mathrm{d}u=\ldots \\ \mathrm{d}v=\ldots \longrightarrow v=\ldots \end{cases}$ **ĐS:** $I=\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=\sin x \\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x \\ v=e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} I&=e^x\sin x-\int e^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\\ &=e^x\sin x-I_2 \end{aligned}$$

Tính $I_2=\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ \mathrm{d}v = e^x \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x \\ v = e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} I_2 &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{d}x \\ &= e^x \cos x + I \\ \Rightarrow I &= e^x \sin x - e^x \cos x - I \\ \Leftrightarrow 2I &= e^x(\sin x - \cos x) \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Tìm một nguyên hàm của hàm số $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện cho trước.
Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

ĐS: $F(x) = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1$

Lời giải: Theo đề ta tính $\int f(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x & \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x & \Rightarrow v = -\mathrm{e}^{-x}. \end{cases}$

Suy ra $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C = F(x)$.

Mà $F(0) = 1 \Rightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1$.

Bài 2. Tìm một nguyên hàm của hàm số $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện cho trước.

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x\cos 3x$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

ĐS: $F(x) = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x - \frac{1}{9}$

✍ **Lời giải.**

Theo đề ta tính $\int f(x)\mathrm{d}x = \int x\cos 3x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x & \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos 3x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow v = \frac{1}{3}\sin 3x. \end{cases}$

Suy ra $\int x\cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C = F(x)$.

Mà $F(0) = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{9}$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x - \frac{1}{9}$. □

② Cho $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x^3}$. Tìm nguyên hàm của hàm $f'(x)\ln x$.

ĐS: $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x^3}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}&(\ln x)'=\frac{f(x)}{x^3}\\ \Rightarrow\ &\frac{1}{x}=\frac{f(x)}{x^3}\\ \Rightarrow\ &f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x.\end{aligned}$$

Khi đó $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\int 2x\ln x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x & \Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=2x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow v=x^2.\end{cases}$

Suy ra $\displaystyle\int 2x\ln x\,\mathrm{d}x=x^2\ln x-\int x\,\mathrm{d}x=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}+C.$ □

③ Cho $F(x)=\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của hàm $f'(x)\ln x$.

ĐS: $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x^2}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}&(\ln x)'=\frac{f(x)}{x^2}\\ \Rightarrow\ &\frac{1}{x}=\frac{f(x)}{x^2}\\ \Rightarrow\ &f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1.\end{aligned}$$

Khi đó $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\int \ln x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x & \Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x & \Rightarrow v=x.\end{cases}$

Suy ra $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-\int 1\,\mathrm{d}x=x\ln x-x+C.$ □

④ Cho $F(x)=\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$. Tìm nguyên hàm của hàm $f'(x)\ln x$.

ĐS: $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{2x^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $xf(x)$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}&(\ln x)'=xf(x)\\ \Rightarrow\ &\frac{1}{x}=xf(x)\\ \Rightarrow\ &f(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{x^3}.\end{aligned}$$

Khi đó $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\int \frac{-2}{x^3}\ln x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x & \Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{-2}{x^3}\mathrm{d}x & \Rightarrow v=\dfrac{1}{x^2}.\end{cases}$

Suy ra $\displaystyle\int \frac{-2}{x^3}\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x^2}\ln x-\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{2x^2}+C.$ □

⑤ Cho $F(x)=x^2+1$ là một nguyên hàm của $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm $f'(x)\ln x$.

ĐS: $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=2x^2\ln x-x^2+C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=x^2+1$ là một nguyên hàm $\dfrac{f(x)}{x}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}&(x^2+1)'=\frac{f(x)}{x}\\ \Rightarrow\ &2x=\frac{f(x)}{x}\\ \Rightarrow\ &f(x)=2x^2\Rightarrow f'(x)=4x.\end{aligned}$$

Khi đó $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\int 4x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x & \Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=4x\,\mathrm{d}x & \Rightarrow v=2x^2.\end{cases}$

Suy ra $\displaystyle\int 4x\ln x\,\mathrm{d}x=2x^2\ln x-\int 2x\,\mathrm{d}x=2x^2\ln x-x^2+C$. □

⑥ Cho $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)(x^4-x^3)$.

ĐS: $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=2x^2-4x+C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\dfrac{f(x)}{x}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{f(x)}{x}\\ \Rightarrow\ &-\frac{2}{x^3}=\frac{f(x)}{x}\\ \Rightarrow\ &f(x)=-\frac{2}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{x^3}.\end{aligned}$$

Khi đó $\displaystyle\int f'(x)(x^4-x^3)\,\mathrm{d}x=\int(4x-4)\,\mathrm{d}x=2x^2-4x+C$.

□

⑦ Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

ĐS: $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=2x-2x^2+C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}&(x^2)'=f(x)\mathrm{e}^{2x}\\ \Rightarrow\ &2x=f(x)\mathrm{e}^{2x}\\ \Rightarrow\ &f(x)=\frac{2x}{\mathrm{e}^{2x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{2-4x}{\mathrm{e}^{2x}}\end{aligned}$$

Khi đó $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\int(2-4x)\,\mathrm{d}x=2x-2x^2+C$

□

⑧ Cho $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)(x^3+1)$.

ĐS: $\displaystyle\int f'(x)(x^3+1)\,\mathrm{d}x=4x-\frac{2}{x^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\dfrac{f(x)}{x}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{f(x)}{x}\\ \Rightarrow\quad &-\frac{2}{x^3}=\frac{f(x)}{x}\\ \Rightarrow\quad &f(x)=-\frac{2}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{x^3}.\end{aligned}$$

Khi đó $\displaystyle\int f'(x)(x^3+1)\,\mathrm{d}x=\int(4+\frac{4}{x^3})\,\mathrm{d}x=4x-\frac{2}{x^2}+C.$

□

⑨ Cho $F(x)=\dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $x^2f(x)$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)x^3\ln x$.

ĐS: $\displaystyle\int f'(x)x^3\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{x}\ln x-\frac{4}{x}+C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=\dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $x^2f(x)$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{x}\right)'=x^2f(x)\\ \Rightarrow\quad &-\frac{1}{x^2}=x^2f(x)\\ \Rightarrow\quad &f(x)=-\frac{1}{x^4}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{x^5}.\end{aligned}$$

Khi đó $\displaystyle\int f'(x)x^3\ln x\,\mathrm{d}x=\int\frac{4}{x^2}\ln x\,\mathrm{d}x.$

□

Đặt $\begin{cases}u=\ln x & \Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{4}{x^2}\mathrm{d}x & \Rightarrow v=-\dfrac{4}{x}.\end{cases}$

Suy ra $\displaystyle\int 4x^2\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{x}\ln x+\int\frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{x}\ln x-\frac{4}{x}+C.$

⑩ Cho $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)x\ln x$.

ĐS: $\displaystyle\int f'(x)x\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{x}\ln x-\frac{4}{x}+C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow-\frac{2}{x^3}=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=-\frac{2}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{x^3}.$$

Khi đó $I=\int f'(x)x\ln x\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{4}{x^2}\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{4}{x^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\\ v=-\dfrac{4}{x}\end{cases}\Rightarrow I=-\dfrac{4}{x}\ln x+\int\dfrac{4}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{4}{x}\ln x-\dfrac{4}{x}+C.$ □

(11) Cho $F(x)=\dfrac{1}{x^3}$ là một nguyên hàm của $\dfrac{f(x)}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)\ln x$.

ĐS: $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{x^2}\cdot\ln x-\frac{3}{2x^2}+C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=\dfrac{1}{x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x^2}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)'=\frac{f(x)}{x^2}\Rightarrow-\frac{3}{x^4}=\frac{f(x)}{x^2}\Rightarrow f(x)=-\frac{3}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{6}{x^3}.$$

Khi đó $I=\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=6\int\dfrac{1}{x^3}\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\\ v=-\dfrac{1}{2x^2}\end{cases}\Rightarrow I=-6\cdot\dfrac{1}{2x^2}\cdot\ln x+3\int\dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x=-\dfrac{3}{x^2}\cdot\ln x-\dfrac{3}{2x^2}+C.$ □

(12) Cho $F(x)=\dfrac{x^4}{16}$ là một nguyên hàm của $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)\ln x$.

ĐS: $\displaystyle\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{x^4}{16}+C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=\dfrac{x^4}{16}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\left(\frac{x^4}{16}\right)'=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow\frac{x^3}{4}=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{x^4}{4}\Rightarrow f'(x)=x^3.$$

Khi đó $I=\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x^3\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\\ v=\dfrac{x^4}{4}\end{cases}\Rightarrow I=\dfrac{x^4}{4}\cdot\ln x-\int\dfrac{x^3}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}\cdot\ln x-\dfrac{x^4}{16}+C.$ □

(13) Cho $F(x)=-x\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

ĐS: $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=-x\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\left(-x\mathrm{e}^x\right)'=f(x)\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x=f(x)\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow f(x)=\frac{-1-x}{\mathrm{e}^x}\Rightarrow f'(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

Khi đó $I=\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x\end{cases}\Rightarrow I=x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C.$ □

(14) Cho $F(x)=2(x-1)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^x$ thỏa $f(0)=0$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$.

ĐS: $\int f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x+C'$

✍ Lời giải.

Vì $F(x)=2(x-1)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^x$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có

$$\left(2(x-1)\mathrm{e}^x\right)'=f'(x)\mathrm{e}^x\Rightarrow 2\mathrm{e}^x+2(x-1)\mathrm{e}^x=f'(x)\mathrm{e}^x\Rightarrow 2x\mathrm{e}^x=f'(x)\mathrm{e}^x\Rightarrow f'(x)=2x\Rightarrow f(x)=x^2+C.$$

Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0$, do đó $f(x)=x^2$.
Khi đó $I=\int f(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x^2\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x\end{cases}\Rightarrow I=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u'=x\\ \mathrm{d}v'=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u'=\mathrm{d}x\\ v'=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C.$

Do đó $I=x^2\mathrm{e}^x-2\left(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C\right)=\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x+C'$ (với $C'=2C$). □

(15) Cho $F(x)=\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x+x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\cos x$.

ĐS: $\int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$

✍ Lời giải.

Vì $F(x)=\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x+x\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\sin x$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có $\left(\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x+x\sin x\right)'=f(x)\sin x\Rightarrow -x\cos x-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\sin x+\sin x+x\cos x=f(x)\sin x\Rightarrow\dfrac{x^2}{2}\sin x=f(x)\sin x\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{2}\Rightarrow f'(x)=x.$

Khi đó $I=\int f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int x\cos x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x\end{cases}\Rightarrow I=x\sin x-\int\sin x\,\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C.$ □

(16) Cho $F(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right)\sin x+x\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cos x$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\sin x$.

ĐS: $\int f'(x)\sin x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C$

✍ Lời giải.

Vì $F(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right)\sin x+x\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\cos x$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có $\left(\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right)\sin x+x\cos x\right)'=f(x)\cos x\Rightarrow x\sin x+\left(\dfrac{x^2}{2}-1\right)\cos x+\cos x-x\sin x=f(x)\cos x\Rightarrow\dfrac{x^2}{2}\cos x=f(x)\cos x\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{2}\Rightarrow f'(x)=x.$

Khi đó $I=\int f'(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\int x\sin x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-\cos x\end{cases}\Rightarrow I=-x\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C.$ □

17 Cho $F(x)=x\tan x+\ln|\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{\cos^2 x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\tan x$. **ĐS:** $\displaystyle\int f'(x)\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$

✍ Lời giải.

Vì $F(x)=x\tan x+\ln|\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{\cos^2 x}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có $(x\tan x+\ln|\cos x|)'=\dfrac{f(x)}{\cos^2 x}\Rightarrow\tan x+\dfrac{x}{\cos^2 x}-\tan x=\dfrac{f(x)}{\cos^2 x}\Rightarrow\dfrac{x}{\cos^2 x}=\dfrac{f(x)}{\cos^2 x}\Rightarrow f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$.

Khi đó $I=\displaystyle\int f'(x)\tan x\,\mathrm{d}x=\int\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$. □

18 Cho $F(x)=-x\cot x+\ln|\sin x|$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{\sin^2 x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\cot x$. **ĐS:** $\displaystyle\int f'(x)\cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

✍ Lời giải.

Vì $F(x)=-x\cot x+\ln|\sin x|$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{\sin^2 x}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có $(-x\cot x+\ln|\sin x|)'=\dfrac{f(x)}{\sin^2 x}\Rightarrow-\cot x+\dfrac{x}{\sin^2 x}+\cot x=\dfrac{f(x)}{\sin^2 x}\Rightarrow\dfrac{x}{\sin^2 x}=\dfrac{f(x)}{\sin^2 x}\Rightarrow f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$.

Khi đó $I=\displaystyle\int f'(x)\cot x\,\mathrm{d}x=\int\cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$. □

19 Cho $F(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}-x+1\right)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^x$. **ĐS:** $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x-1)\mathrm{e}^x+C$

✍ Lời giải.

Vì $F(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}-x+1\right)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta có $\left[\left(\dfrac{x^2}{2}-x+1\right)\mathrm{e}^x\right]'=f(x)\mathrm{e}^x\Rightarrow(x-1)\mathrm{e}^x+\left(\dfrac{x^2}{2}-x+1\right)\mathrm{e}^x=f(x)\mathrm{e}^x\Rightarrow x^2\mathrm{e}^x=f(x)\mathrm{e}^x\Rightarrow f(x)=x^2$.

Suy ra $f'(x)=2x$. Khi đó $I=\displaystyle\int f'(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=2x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x\end{cases}\Rightarrow I=x\mathrm{e}^x-\displaystyle\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x=(x-1)\mathrm{e}^x$. □

4 PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

$$\int_a^b[f(x)]u'(x)\,\mathrm{d}x=F[u(x)]\Big|_a^b=F[u(b)]-F[u(a)].$$

— **Bước 1:** Biến đổi để chọn phép đặt $t=u(x)\Rightarrow\mathrm{d}t=u'(x)\mathrm{d}x$.

— **Bước 2:** Đổi cận $\begin{cases}x=b\Rightarrow t=u(b)\\ x=a\Rightarrow t=u(a)\end{cases}$.

— **Bước 3:** Đưa về dạng $I=\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)}f(t)\,\mathrm{d}t$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 NHẬN BIẾT

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+x$ là

A. e^x+x^2+C. **B.** $\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **C.** $\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **D.** e^x+1+C.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^x+x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\int x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C,\text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

Chọn đáp án B □

Câu 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x$ là

A. x^4+x^2+C. **B.** $3x^2+1+C$. **C.** x^3+x+C. **D.** $\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int(x^3+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 3. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x^2$ là

A. $4x^3+2x+C$. **B.** $\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{3}x^3+C$. **C.** x^4+x^2+C. **D.** x^5+x^3+C.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(x^4+x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 4. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau?

A. $\displaystyle\int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=2\left(\mathrm{e}^x+C\right)$. **B.** $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{d}x=\frac{x^4+C}{4}$.

C. $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln x+C$. **D.** $\displaystyle\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$ nên mệnh đề ở phương án C sai.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^{2x}$?

A. $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=2.5^{2x}\ln 5+C$. **B.** $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=2.\frac{5^{2x}}{\ln 5}+C$.

C. $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{25^x}{2\ln 5}+C$. **D.** $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{25^{x+1}}{x+1}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{5^{2x}}{\ln 5}+C=\frac{25^x}{2\ln 5}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+3^x$ là

A. $x^3+3^x\ln 3+C$. **B.** $x^3+\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$. **C.** x^3+3^x+C. **D.** $x^3+\dfrac{\ln 3}{3^x}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\left(3x^2+3^x\right)\mathrm{d}x=x^3+\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^{2x}$ là

A. $4^x\cdot\ln 4+C$. **B.** $\dfrac{1}{4^x\cdot\ln 4}+C$. **C.** 4^x+C. **D.** $\dfrac{4^x}{\ln 4}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int 2^{2x}\,\mathrm{d}x = \int 4^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{4^x}{\ln 4} + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 8. Với C là hằng số, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos 2x$ là

A. $-\sin 2x + C.$ **B.** $-2\sin 2x + C.$ **C.** $2\sin 2x + C.$ **D.** $\sin 2x + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x = \sin 2x + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(2 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos^2 x}\right).$

A. $F(x) = -\dfrac{2}{\mathrm{e}^x} + \tan x + C.$ **B.** $F(x) = 2\mathrm{e}^x - \tan x + C.$

C. $F(x) = -\dfrac{2}{\mathrm{e}^x} - \tan x + C.$ **D.** $F(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + \tan x + C.$

✍ **Lời giải.**

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Ta có

$$\int \mathrm{e}^{-x}\left(2 + \frac{\mathrm{e}^x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = \int \left(2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{2}{\mathrm{e}^x} + \tan x + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tìm $I = \int [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x.$

A. $I = 2xF(x) - x + C.$ **B.** $I = 2xF(x) - 1 + C.$ **C.** $I = 2F(x) - 1 + C.$ **D.** $I = 2F(x) - x + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I = \int [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x = 2\int f(x)\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = 2F(x) - x + C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 11. Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x$ là

A. $\dfrac{1}{5}\cos 5x + C.$ **B.** $\cos 5x + C.$ **C.** $-\cos 5x + C.$ **D.** $-\dfrac{1}{5}\cos 5x + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \sin 5x\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{5}\cos 5x + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 12. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ là

A. $\log|1+x| + C.$ **B.** $\ln(1+x) + C.$ **C.** $-\dfrac{1}{(1+x)^2} + C.$ **D.** $\ln|1+x| + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}(x+1) = \ln|x+1| + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + x^2$ là

A. $\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^x + \dfrac{x^3}{3} + C.$ **B.** $\mathrm{e}^x + 2x + C.$ **C.** $\mathrm{e}^x + \dfrac{x^3}{3} + C.$ **D.** $\mathrm{e}^x + 3x^3 + C.$

✍ **Lời giải.**

$\int \left(\mathrm{e}^x + x^2\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \dfrac{x^3}{3} + C$, với C là hằng số.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$.

A. $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = 3\sin 3x + C$.
B. $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin 3x}{3} + C$.
C. $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\sin 3x}{3} + C$.
D. $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \sin 3x + C$.

Lời giải.

$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int \cos 3x\,\mathrm{d}(3x) = \dfrac{\sin 3x}{3} + C$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{5x-2}$.

A. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5x-2} = \dfrac{1}{5}\ln|5x-2| + C$.
B. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5x-2} = -\dfrac{1}{2}\ln(5x-2) + C$.
C. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5x-2} = 5\ln|5x-2| + C$.
D. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{5x-2} = \int \dfrac{1}{5(5x-2)}\mathrm{d}(5x-2) = \dfrac{1}{5}\ln|5x-2| + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=7^x$.

A. $\int 7^x\,\mathrm{d}x = 7^x\ln 7 + C$.
B. $\int 7^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{7^x}{\ln 7} + C$.
C. $\int 7^x\,\mathrm{d}x = 7^{x+1} + C$.
D. $\int 7^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{7^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 17. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 2x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$. .
C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$. .
D. $\int f(x)\mathrm{d}x = -2\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}(2x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{x} + C$.
B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x} + C$.
C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{x} + C$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(x^2 + \dfrac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{x} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C.
B. $\dfrac{x^3}{3}+x+C$.
C. $6x+C$.
D. x^3+x+C.

Lời giải.

Ta có $\int (3x^2+1)\,\mathrm{d}x = 3.\dfrac{x^3}{3} + x + C = x^3 + x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x$ là

A. x^4+x^2+C.
B. $3x^2+1+C$.
C. x^3+x+C.
D. $\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}x^2+C$.

Lời giải.

Ta có $\int (x^3+x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 4^x \cdot 2^{2x+3}$.

A. $F(x) = \dfrac{2^{4x+3}}{\ln 2}$. **B.** $F(x) = 2^{4x+1} \cdot \ln 2$. **C.** $F(x) = \dfrac{2^{4x+1}}{\ln 2}$. **D.** $F(x) = 2^{4x+3} \cdot \ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)dx = \int 4^x \cdot 2^{2x+3}\,\mathrm{d}x = \int 2^{4x+3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2^{4x+3}}{4\ln 2} + C = \dfrac{2^{4x+1}}{\ln 2} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int [f(x)-g(x)]\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

✍ **Lời giải.**

Mệnh đề $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ sai vì $k \neq 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\cos 2x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}\sin 2x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \pi \sin 2x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\sin 2x + C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \dfrac{\pi}{2}\cos 2x\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\int f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int f'(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) + C$.

C. $\int k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{f^2(x)}{2} + C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}[f(x)] = \dfrac{f^2(x)}{2} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4^{x+1}}{x+1} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4^{x+1} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4^x \ln 4 + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4^x}{\ln 4} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4^x}{\ln 4} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 26. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^{-3x+1}$ là

A. $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C$. **B.** $-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C$. **C.** $3\mathrm{e}^{-3x+1} + C$. **D.** $-3\mathrm{e}^{-3x+1} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \mathrm{e}^{-3x+1}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1} + C$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 27. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)+C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

✍ **Lời giải.**

Với $k=0$ ta có $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = \int 0\,\mathrm{d}x = C$ còn $k\int f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Do đó mệnh đề "$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$" là mệnh đề sai.

Chọn đáp án A ☐

Câu 28. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. $\int [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\int 0\,\mathrm{d}x = 0$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = f'(x)+C$.

D. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)+C$.

✍ **Lời giải.**

Hiển nhiên theo định nghĩa nguyên hàm thì $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$ nên họ tất cả các nguyên hàm của $f'(x)$ là $f(x)+C$ do đó $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)+C$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 29. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{5x-2}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\ln(5x-2)+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}\ln|5x-2|+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln|5x-2|+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 5\ln|5x-2|+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{5x-2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}\ln|5x-2|+C$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 30. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin 3x + C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\sin 3x}{3}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sin 3x + C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin 3x}{3}+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin 3x}{3}+C$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 31. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k\in\mathbb{R}$.

B. $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$ với $f(x)$; $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ với $\alpha\neq -1$.

D. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}$ sai vì tính chất đúng khi $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Tính $\int (x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{x^2}{2}+\sin x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}+\cos 2x+C$. **C.** $x^2+\frac{\cos 2x}{2}+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}+\frac{\cos 2x}{2}+C$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int (x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x - \int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+\frac{\cos 2x}{2}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 33. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int 0\,\mathrm{d}x = C$. **B.** $\int x^4\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5}+C$. **C.** $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$. **D.** $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

✍ Lời giải.

Tacó: $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

Vậy C sai.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x - \sin 2x$ là

A. $\frac{x^2}{2}+\cos 2x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **C.** $x^2+\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

✍ Lời giải.

Ta có: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 35. Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3\cos x - 2^x$ là

A. $-3\sin x - \frac{2^x}{\ln 2}+C$. **B.** $3\sin x - 2^x + C$. **C.** $3\sin x - \frac{2^x}{\ln 2}+C$. **D.** $3\sin x - 2^x\ln 2 + C$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int \left(3\cos x - 2^x\right)\mathrm{d}x = 3\sin x - \frac{2^x}{\ln 2}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

A. $3x^2+2x+C$. **B.** $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C$. **C.** x^4+x^3+C. **D.** $4x^4+3x^3+C$.

✍ Lời giải.

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (x^3+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Tìm một họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + 7^x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3}+\frac{7^x}{\ln 7}+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3^x\ln 3 + 7^x\ln 7 + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^{x+1}}{x+1}+\frac{7^x}{x+1}+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3^{x+1}+7^{x+1}+C$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (3^x+7^x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3}+\frac{7^x}{\ln 7}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}$ là

A. $F(x)=-\dfrac{1}{x^2}+C$. **B.** $F(x)=\dfrac{2}{x^2}+C$. **C.** $F(x)=\ln|x|+C$. **D.** $F(x)=\sqrt{x}+C$.

Lời giải.

Vì $\displaystyle\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$ nên họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}$ là $F(x)=\ln|x|+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 39. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 2x+3x$ là

A. $-\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{3}{2}x^2+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\sin 2x+3x^2+C$.

C. $-2\sin 2x+3+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{3}{2}x^2+C$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\cos 2x+3x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{3}{2}x^2+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ là

A. $\ln|2x-1|+C$. **B.** $2\ln|2x-1|+C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)+C$.

Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x^2}$

A. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{x}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{x}+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{x}+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\left(x^2+\dfrac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{x}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. Hàm số $f(x)=\cos(4x+7)$ có một nguyên hàm là

A. $-\sin(4x+7)+x$. **B.** $\dfrac{1}{4}\sin(4x+7)-3$. **C.** $\sin(4x+7)-1$. **D.** $-\dfrac{1}{4}\sin(4x+7)+3$.

Lời giải.

Tính nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos(4x+7)$

Ta có: $\displaystyle\int\cos(4x+7)\mathrm{d}x=\int\cos(4x+7)\dfrac{\mathrm{d}(4x+7)}{4}=\dfrac{1}{4}\int\cos(4x+7)\mathrm{d}(4x+7)=\dfrac{1}{4}\sin(4x+7)+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+x$ là

A. $\cos x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **B.** $\cos x+x^2+C$. **C.** $-\cos x+1+C$. **D.** $-\cos x+\dfrac{1}{2}x^2+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int(\sin x+x)\mathrm{d}x=\int\sin x\,\mathrm{d}x+\int x\,\mathrm{d}x=-\cos x+\dfrac{1}{2}x^2+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 44. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+\sin 2x$ là

A. $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $\dfrac{x^4}{4}-\cos 2x+C$. **C.** $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\dfrac{x^4}{4}+\cos 2x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(x^3+\sin 2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 45. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ là

A. $-\dfrac{1}{(x+1)^2}+C$. **B.** $-\ln|x+1|+C$. **C.** $-\dfrac{1}{2}\ln(x+1)^2+C$. **D.** $\ln|2x+2|+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $(\ln|2x+2|+C)'=\dfrac{1}{x+1}$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\int[f_1(x)+f_2(x)]\,\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x+\int f_2(x)\mathrm{d}x$.

B. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)=G(x)$.

C. $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ (k là hằng số và $k\neq 0$).

D. Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ thì $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$.

✍ **Lời giải.**

Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)=G(x)+C$, với C là hằng số.

Chọn đáp án B □

Câu 47. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$

A. $\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\cos 2x+C$. **B.** $\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=2\cos 2x+C$.

C. $\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{\cos 2x}{2}+C$. **D.** $\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\cos 2x}{2}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{\cos 2x}{2}+C$

Chọn đáp án C □

Câu 48. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2019x}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2019}\cdot\mathrm{e}^{2019x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2019\cdot\mathrm{e}^{2019x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2019x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2019x}\ln 2019+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2019}\cdot\mathrm{e}^{2019x}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 3x$ là

A. $\cos 3x+C$. **B.** $-\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$. **C.** $-\cos 3x+C$. **D.** $\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sin 3x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Tính $\int\sin x\,\mathrm{d}x$.

A. $\sin(\pi-x)+C$. **B.** $\cos x+C$. **C.** $\cos(\pi-x)+C$. **D.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C=\cos(\pi-x)+C$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 51. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x$ là

A. $F(x)=\tan x+C$. **B.** $F(x)=\cot x+C$. **C.** $F(x)=-\sin x+C$. **D.** $F(x)=\sin x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 52. Tìm nguyên hàm $F(x)=\int \cos x\,\mathrm{d}x$

A. $F(x)=\cos x+C$. **B.** $F(x)=-\cos x+C$. **C.** $F(x)=\sin x+C$. **D.** $F(x)=-\sin x+C$.

Câu 53. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+1$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x^2+x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^2}{2}+x+C=x^2+x+C$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 54. Hàm số nào sau đây **không** là nguyên hàm của hàm số $y=x^3$?

A. $y=\dfrac{x^4}{4}+3$. **B.** $y=\dfrac{x^4}{4}+1$. **C.** $y=\dfrac{x^4}{4}+2$. **D.** $y=3x^2$.

✍ **Lời giải.**

Nguyên hàm của hàm số $y=x^3$ là $\dfrac{x^4}{4}+C$, với C là hằng số. Vậy hàm số $y=3x^2$ không là một nguyên hàm của hàm số $y=x^3$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 55. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $\int \cos x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$. **B.** $\int \cos x\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$.

C. $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$. **D.** $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 56. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{-x}+2x$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}+x^2+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-x\mathrm{e}^{-x}+x^2+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+x^2+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{-x}+x^2+C$.

✍ **Lời giải.**

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $\int f(x)\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+x^2+C$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 57. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là sai?

A. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+C$. **B.** $\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3+C$. **C.** $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+C$. **D.** $\int x^7\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}x^8+C$.

✍ **Lời giải.**

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 58. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$ là

A. $F(x)=-\cos x$. **B.** $F(x)=-\cos x+C$. **C.** $F(x)=\cos x+C$. **D.** $F(x)=\cos x$.

Lời giải.

Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$ là $F(x)=-\cos x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 59. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln|2-3x|+C$. **B.** $\dfrac{1}{(2-3x)^2}+C$. **C.** $-\dfrac{3}{(2-3x)^2}+C$. **D.** $-\dfrac{1}{3}\ln|3x-2|+C$.

Lời giải.

Ta thấy $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x}=-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C=-\frac{1}{3}\ln|3x-2|+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 60. Cho $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{2x-1}=\ln C$. Khi đó giá trị của C là

A. 3. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 81.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{2x-1}=\left(\frac{1}{2}\ln|2x-1|\right)\Big|_1^5=\frac{1}{2}\ln 9=\ln 3$. Do đó $C=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Khi tính $\displaystyle\int \sin ax\cdot\cos bx\,\mathrm{d}x$, biến đổi nào dưới đây là đúng?

A. $\displaystyle\int \sin ax\cdot\cos bx\,\mathrm{d}x=\int \sin ax\,\mathrm{d}x\cdot\int \cos bx\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int \sin ax\cdot\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x]\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int \sin ax\cdot\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left[\sin\frac{a+b}{2}x+\sin\frac{a-b}{2}x\right]\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int \sin ax\cdot\cos bx\,\mathrm{d}x=ab\int \sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Ta có $\sin ax\cdot\cos bx=\dfrac{1}{2}[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x]$.

Do đó $\displaystyle\int \sin ax\cdot\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x]\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 62. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+1$ là

A. $-\cos x+x+C$. **B.** $\dfrac{\sin^2 x}{2}+x+C$. **C.** $\cos x+x+C$. **D.** $\sin 2x+x+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int(\sin x+1)\,\mathrm{d}x=-\cos x+x+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 63. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+2x$ là

A. $2\ln|x|+x^2+\mathrm{C}$. **B.** $\ln|x|+2x^2+\mathrm{C}$. **C.** $\ln|x|+x^2+\mathrm{C}$. **D.** $\ln|x^2|+2x+\mathrm{C}$.

Lời giải.

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}+2x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int 2x\,\mathrm{d}x=\ln|x|+x^2+\mathrm{C}$.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3}{1-2x}$.

A. $-6\ln|1-2x|+C$. **B.** $3\ln|1-2x|+C$. **C.** $-\dfrac{3}{2}\ln|1-2x|+C$. **D.** $\dfrac{3}{2}\ln|1-2x|+C$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{3}{1-2x}\,\mathrm{d}x=-\dfrac{3}{2}\ln|1-2x|+C.$

Chọn đáp án C □

Câu 65. Hàm số nào sau đây **không phải** là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$?

A. $F(x)=\ln|2x+1|+1$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+2$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln|4x+2|+3$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{4}\ln(4x^2+4x+1)+3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\dfrac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

Mặt khác $\dfrac{1}{2}\ln|4x+2|+3=\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+\dfrac{\ln 2}{2}+3$ và $\dfrac{1}{2}\ln(4x^2+4x+1)+3=\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+3$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x$ là

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3^x+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3^x\ln 3+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^{x+1}}{x+1}+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức nguyên hàm thì $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Cho hàm số $f(x)=2017^x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2017^x}{\ln 2018}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2017^x}{\ln 2017}+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017^x\ln 2017+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2017^x}{2017}+C$.

✍ **Lời giải.**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2017^x}{\ln 2017}+C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 68. Tính $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

A. $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=-\sin 2x+C$. **B.** $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

C. $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\sin 2x+C$. **D.** $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\int\cos 2x\dfrac{\mathrm{d}(2x)}{2}=\dfrac{1}{2}\int\cos 2x\,\mathrm{d}(2x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 69. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+\sin x$ là

A. $\sin x-\cos x+C$. **B.** $\sin x+\cos x+C$. **C.** $-\sin x+\cos x+C$. **D.** $-\sin x-\cos x+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int (\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 70. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)^3$.

A. $3(x-1)+C$. **B.** $\dfrac{1}{4}(x-1)^4+C$. **C.** $4(x-1)^4+C$. **D.** $\dfrac{1}{4}(x-1)^3+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (x-1)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(x-1)^4+C.$

Chọn đáp án B □

Câu 71. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{1-4x}$.

A. $y = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{1-4x}$. **B.** $y = -4\mathrm{e}^{1-4x}$. **C.** $y = \mathrm{e}^{1-4x}$. **D.** $y = -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{1-4x}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int \mathrm{e}^{1-4x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{1-4x}+C.$

Chọn đáp án D □

Câu 72. Cho bốn mệnh đề sau

I. $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^3 x}{3}+C.$

II. $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x = 3^x\cdot\ln 3+C.$

III. $\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ với $\alpha\in\mathbb{R}$.

IV. Nếu $F(x), G(x)$ là các nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta lần lượt xét 4 mệnh đề đã cho

— Mệnh đề (I) sai vì $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C.$

— Mệnh đề (II) sai vì $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3}+C.$

— Mệnh đề (III) sai vì thiếu điều kiện $\alpha\neq -1$.

— Mệnh đề (IV) sai vì nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là có một họ nguyên hàm, chúng sai khác nhau một hằng số.

Vậy có 4 mệnh đề SAI.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)$.

A. $x(x+1)+C$. **B.** $2x+1+C$. **C.** x^3+x^2+C. **D.** $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int x(x+1)\,\mathrm{d}x = \int (x^2+x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C.$

Chọn đáp án D □

Câu 74. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int 0\,\mathrm{d}x = C$. **B.** $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$. **C.** $\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$. **D.** $\int \mathrm{d}x = x + C$.

Lời giải.

Đáp án $\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ không đúng với trường hợp $a = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x - \cos x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + \cos x + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x + \cos x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin x - \cos x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x = -\cos x - \sin x + C = -\sin x - \cos x + C$

Chọn đáp án C □

Câu 76. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + \frac{1}{x^2}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3^x + \frac{1}{x} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{x} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3^x - \frac{1}{x} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x} + C$.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x} + C\right)' = \frac{3^x \ln 3}{\ln 3} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3^x + \frac{1}{x^2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3^x}{\mathrm{e}^3}$

A. $\frac{3^x}{\mathrm{e}^3 \ln \frac{3}{\mathrm{e}}} + C$. **B.** $\frac{3^x}{-2\ln 3 \cdot \mathrm{e}^2} + C$. **C.** $\frac{3^x \ln 3}{\mathrm{e}^3} + C$. **D.** $\frac{3^x}{\mathrm{e}^3 \ln 3} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \frac{3^x}{\mathrm{e}^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{\mathrm{e}^3 \ln 3} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$.

(II). $kF(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $kf(x)$, $(k \in \mathbb{R})$.

(III). $F(x) \cdot G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) \cdot g(x)$.

Mệnh đề nào là mệnh đề **đúng**?

A. (I) và (III). **B.** (I) và (II). **C.** (II) và (III). **D.** (III).

Lời giải.

Chỉ có mệnh đề (I) và (II) là hai mệnh đề đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 + \sin x - 2$ là

A. $x^4 + \cos x - 2x + C$. **B.** $\frac{x^4}{4} + \cos x + C$. **C.** $12x + \cos x + C$. **D.** $x^4 - \cos x - 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int \left(4x^3 + \sin x - 2\right)\mathrm{d}x = x^4 - \cos x - 2x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 80. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$ là

A. $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $F(x)=\cos 2x+C$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $F(x)=-\cos 2x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int \sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos 2x}{2}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 81. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=5^x$ là

A. $\dfrac{5^x}{\ln 5}+C$. **B.** $5^x\cdot\ln 5+C$. **C.** $\dfrac{5^{x+1}}{x+1}+C$. **D.** $5^{x+1}+C$.

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$, ta được

$$\int 5^x\,\mathrm{d}x=\frac{5^x}{\ln 5}+C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 82. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$.

A. $F(x)=\mathrm{e}^x+C$. **B.** $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}+C$. **C.** $F(x)=\mathrm{e}^{2x}+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle F(x)=\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+x$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $F(x)=2\ln|x|+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2}+C$. **B.** $F(x)=\ln x-\ln x^2+\dfrac{x^2}{2}+C$.

C. $F(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2}+C$. **D.** $F(x)=\ln|x|+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=2\ln|x|+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 84. Tìm nguyên hàm $I=\displaystyle\int\left(\mathrm{e}^{-x}+2x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\mathrm{e}^{-x}+x^2+C$. **B.** $I=\mathrm{e}^{-x}+x^2+C$. **C.** $I=-\mathrm{e}^{-x}-x^2+C$. **D.** $I=\mathrm{e}^{-x}-x^2+C$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle I=\int\left(\mathrm{e}^{-x}+2x\right)\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+x^2+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 85. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x$ là

A. $-\sin x+C$. **B.** $\sin x+C$. **C.** $\cos x+C$. **D.** $-\cos x+C$.

✍ **Lời giải.**

Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x$ là $F(x)=\sin x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y=\cos x$?

A. $y=\tan x$. **B.** $y=\cot x$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=-\sin x$.

✍ **Lời giải.**

Vì $(\sin x)' = \cos x$ nên $\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $\cos x$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$ với mọi hàm $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

B. $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

D. $\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

✍ **Lời giải.**

$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là mệnh đề sai vì hằng số k phải khác 0.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(3ax + 1)$ (với a là tham số khác 0).

A. $\cos(3ax + 1) + C$.

B. $\dfrac{1}{3a}\cos(3ax + 1) + C$.

C. $-\dfrac{1}{3a}\cos(3ax + 1) + C$.

D. $-\cos(3ax + 1) + C$.

✍ **Lời giải.**

$$\int \sin(3ax + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3a}\int \sin(3ax + 1)\,\mathrm{d}(3ax + 1) = -\frac{1}{3a}\cos(3ax + 1) + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 89. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ trên khoảng $(-\infty; -2)$ là

A. $\ln|x + 2| + C$.

B. $\dfrac{1}{2}\ln|x + 2| + C$.

C. $\ln(x + 2) + C$.

D. $\dfrac{1}{2}\ln(x + 2) + C$.

✍ **Lời giải.**

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ trên khoảng $(-\infty; -2)$ là $\ln|x + 2| + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 90. Công thức nguyên hàm nào sau đây là công thức SAI?

A. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0; a \neq 1)$.

B. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C$.

C. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

D. $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

✍ **Lời giải.**

Công thức đúng $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 91. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = \sin(x - 1)$.

A. $\int \sin(x-1)\,\mathrm{d}x = -\cos(x-1) + C$.

B. $\int \sin(x-1)\,\mathrm{d}x = \cos(x-1) + C$.

C. $\int \sin(x-1)\,\mathrm{d}x = (x-1)\cos(x-1) + C$.

D. $\int \sin(x-1)\,\mathrm{d}x = (1-x)\cos(x-1) + C$.

✍ **Lời giải.**

$$\int \sin(x-1)\,\mathrm{d}x = \int \sin(x-1)\,\mathrm{d}(x-1) = -\cos(x-1) + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 92. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = x^3$.

A. $\int x^3\,\mathrm{d}x = 3x^4 + C$. **B.** $\int x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}x^4 + C$. **C.** $\int x^3\,\mathrm{d}x = 4x^4 + C$. **D.** $\int x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}x^4 + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}x^4 + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = \cos(3x-2)$.

A. $\int \cos(3x-2)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\sin(3x-2) + C$. **B.** $\int \cos(3x-2)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin(3x-2) + C$.

C. $\int \cos(3x-2)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin(3x-2) + C$. **D.** $\int \cos(3x-2)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\sin(3x-2) + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \cos(3x-2)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int \cos(3x-2)\mathrm{d}(3x-2) = \dfrac{1}{3}\sin(3x-2) + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x$ là

A. $\sin x + C$. **B.** $\cos x + C$. **C.** $-\sin x + C$. **D.** $-\cos x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 95. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\ln|x| + C$. **B.** $-\mathrm{e}^x + C$. **C.** $\mathrm{e}^x + C$. **D.** $\dfrac{1}{x} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 96. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ là họ hàm số nào sau đây?

A. $x^2 + x + C$. **B.** $x^2 + 1 + C$. **C.** $2x^2 + 1 + C$. **D.** $4x^2 + x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int (2x+1)\,\mathrm{d}x = x^2 + x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Công thức nguyên hàm nào sau đây **không đúng**?

A. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$. **B.** $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$.

C. $\int x^\alpha\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$. **D.** $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$.

✍ **Lời giải.**

Công thức đúng là $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 98. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \ln x^2 + C$. **B.** $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

C. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \cot x + C$. **D.** $\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^x + C$.

✍ **Lời giải.**

$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+2\sin x$.

A. $\int\left(\mathrm{e}^x+2\sin x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-\cos^2 x+C$.

B. $\int\left(\mathrm{e}^x+2\sin x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\sin^2 x+C$.

C. $\int\left(\mathrm{e}^x+2\sin x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-2\cos x+C$.

D. $\int\left(\mathrm{e}^x+2\sin x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+2\cos x+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int\left(\mathrm{e}^x+2\sin x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-2\cos x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+x-2$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+1+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 101. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^3-9$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^4-9x+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^4-9x+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^4+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=4x^3+9x+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int(2x^3-9)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^4-9x+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 102. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$.

B. $\int\sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$.

C. $\int\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}$.

D. $\int\cos x\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int\cot x\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}=\ln|\sin x|+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 103. Cho tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{3\ln x+1}{x}\,\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\ln x$ thì

A. $I=\displaystyle\int_0^1\dfrac{3t+1}{e^t}\,\mathrm{d}t$.

B. $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{3t+1}{t}\,\mathrm{d}t$.

C. $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(3t+1)\,\mathrm{d}t$.

D. $I=\displaystyle\int_0^1(3t+1)\,\mathrm{d}t$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\ln x$, ta có $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Khi $x=1$ thì $t=0$. Khi $x=e$ thì $t=1$. Vậy $I=\displaystyle\int_0^1(3t+1)\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án D □

Câu 104. Biết $\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)+C$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int f(2x-1)\,\mathrm{d}x=2F(2x-1)+C$.

B. $\int f(2x-1)\,\mathrm{d}x=2F(x)-1+C$.

C. $\int f(2x-1)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}F(2x-1)+C$.

D. $\int f(2x-1)\,\mathrm{d}x=F(2x-1)+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u = 2x-1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$. Khi đó, ta có

$$\int f(2x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}F(2x-1)+C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 105. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 5^x \ln 5 + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 5^x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5^x}{\ln x} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{5^x}{\ln 5} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 5^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{5^x}{\ln 5} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 106. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$?

A. $F(x) = -\dfrac{1}{4}\ln|4-4x|+3$. **B.** $F(x) = -\ln|1-x|+4$.

C. $F(x) = \ln|1-x|+2$. **D.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+1)+5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(1-x)}{1-x} = -\ln|1-x|+C.$$

Do đó $F(x) = -\ln|1-x|+4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đã cho.

Chọn đáp án B □

Câu 107. Hàm số $F(x) = \mathrm{e}^{3x}$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$. **B.** $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$. **C.** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{3}$. **D.** $f(x) = 3\ln 3x$.

✍ **Lời giải.**

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ khi và chỉ khi $F'(x) = f(x)$. Vậy $f(x) = \left(\mathrm{e}^{3x}\right)' = 3\mathrm{e}^{3x}$.

Chọn đáp án A □

Câu 108. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = -2\sin 2x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \cos 2x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}(2x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 109. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 48\sin 2x$ là

A. $24\cos 2x + C$. **B.** $96\cos 2x + C$. **C.** $-96\cos 2x + C$. **D.** $-24\cos 2x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $(-24\cos 2x + C)' = 48\sin 2x$.

Chọn đáp án D □

Câu 110. Để tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 12x\ln x$, ta đặt $u = \ln x$ và $\mathrm{d}v = 12x\,\mathrm{d}x$. Tính $\mathrm{d}u$.

A. $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}$. **B.** $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$. **C.** $\mathrm{d}u = 12x\,\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}v$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 111. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$. **B.** $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

C. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \sqrt{x} + C$. **D.** $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = a^x \cdot \ln a + C\ (a > 0, a \neq 1)$.

✍ **Lời giải.**

Chú ý rằng $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0, a \neq 1)$.

Chọn đáp án D □

Câu 112. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin(1-2x)$ và thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $F(x) = \cos(1-2x)$. **B.** $F(x) = \cos(1-2x) + 1$.

C. $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(1-2x) + \dfrac{3}{2}$. **D.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\cos(1-2x) + \dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \sin(1-2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cos(1-2x) + C$.

Do $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}$. Vậy $F(x) = \dfrac{1}{2}\cos(1-2x) + \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 113. Hàm số $f(x) = \sqrt{x+3}$ là một nguyên hàm của hàm số nào bên dưới?

A. $g(x) = \dfrac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}} + C$. **B.** $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$.

C. $g(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x+3}}$. **D.** $g(x) = \dfrac{3}{2}(x+3)^{\frac{3}{2}} + C$.

✍ **Lời giải.**

$$g(x) = f'(x) = \left(\sqrt{x+3}\right)' = \frac{(x+3)'}{2\sqrt{x+3}} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 114. Tìm $F(x) = \displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x$.

A. $\sin x + C$. **B.** $\cos x + C$. **C.** $-\cos x + C$. **D.** $-\sin x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 115. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\displaystyle\int 2^x\,\mathrm{d}x = 2^x ln2 + C$. **B.** $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x} + C$.

C. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x + C$. **D.** $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C$.

✍ **Lời giải.**

Công thức nguyên hàm cơ bản $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 116. Cho $F(x)$ và $f'(x)$ lần lượt là một nguyên hàm và đạo hàm của hàm số $f(x)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a)-F(b)$.

B. $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b \mathrm{d}x = b-a$.

D. $\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.

Chọn đáp án A □

Câu 117. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+C$.

B. $\int x^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+C$.

C. $\int \cos 2x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

D. $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

— $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x+C$.

— $\int x^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+C$.

— $\int \cos 2x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

— $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 118. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 3^x\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{2}{\ln 3}$.

B. $I = \dfrac{3}{\ln 3}$.

C. $I = \dfrac{1}{2}$.

D. $I = 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \dfrac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1 = \dfrac{2}{\ln 3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 119. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x+1$ là

A. $3^x\ln x + x + C$.

B. $\dfrac{3^x}{\ln 3}+x+C$.

C. $\dfrac{3^x}{\ln 3}+C$.

D. 3^x+x+C.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \left(3^x+1\right)\mathrm{d}x = \dfrac{3^x}{\ln 3}+x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 120. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

A. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

B. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

C. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

D. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\tan x + C$.

✍ **Lời giải.**

Mệnh đề sai ở đáp án **D**. Mệnh đề đúng phải là $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 121. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos(2x+3)$.

A. $F(x) = -\sin(2x+3) + C$. **B.** $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C$.

C. $F(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x+3) + C$. **D.** $F(x) = \sin(2x+3) + C$.

✍ **Lời giải.**

$F(x) = \int \cos(2x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 122. Tính $\int 4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$, kết quả nào sau đây là **đúng**?

A. $-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+C$. **B.** $-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+C$. **C.** $-4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+C$. **D.** $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int 4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x = -2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 123. Nguyên hàm $I = \int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$. **B.** $-\ln|2x+1|+C$. **C.** $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$. **D.** $\ln|2x+1|+C$.

✍ **Lời giải.**

Sử dụng công thức $\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$, ta được

$$\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+1|+C.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 124. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2 + x + 1$ là

A. $\frac{2x^3}{3}+x^2+x+C$. **B.** $4x+1$. **C.** $\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$. **D.** $\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int (2x^2+x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 125. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x - 1$ là

A. $\cos x - x + C$. **B.** $-\cos x + C$. **C.** $-\cos x - x + C$. **D.** $\cos x - x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)dx = \int (\sin x - 1)\,\mathrm{d}x = -\cos x - x + C$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 126. Tính nguyên hàm $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x$.

A. $-3\sin 3x + c$. **B.** $\frac{1}{3}\sin 3x + c$. **C.** $3\sin 3x + c$. **D.** $-\frac{1}{3}\sin 3x + c$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin 3x + c$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 127. Công thức nguyên hàm nào sau đây là **sai**?

A. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C.$ **B.** $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$

C. $\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C (< a \neq -1).$ **D.** $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C.$

✍ **Lời giải.**

Dựa vào công thức nguyên hàm cơ bản. (Đúng là $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$).

Chọn đáp án A □

Câu 128. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathscr{K}$ và $a, b \in \mathscr{K}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$ **B.** $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^b [f(x)g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$ **D.** $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

Dựa vào tính chất của tích phân.

Chọn đáp án C □

Câu 129. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2x+3}$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{2x+3} + C.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x+3} + C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3} + C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{2x+3} + C.$

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng, ta được $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x+3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3} + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 130. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ là

A. $\dfrac{1}{2}\ln(2x+3) + C.$ **B.** $\dfrac{1}{2}\ln|2x+3| + C.$ **C.** $\ln|2x+3| + C.$ **D.** $\dfrac{1}{\ln 2}\ln|2x+3| + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln|2x+3| + C.$

Chọn đáp án B □

Câu 131. Họ nguyên hàm của hàm số $y = \sin 2x$ là

A. $y = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **B.** $y = -\dfrac{1}{2}\cos 2x.$ **C.** $y = \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **D.** $y = -\cos 2x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 132. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1 - \mathrm{e}.$ **B.** $\mathrm{e} + 1.$ **C.** $\mathrm{e} - 1.$ **D.** $\mathrm{e}.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x}\,\mathrm{d}(\cos x) = -\mathrm{e}^{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e} - 1.$

Chọn đáp án C □

Câu 133. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=7^x$.

A. $\int 7^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{7^x}{\ln 7}+C$. **B.** $\int 7^x\,\mathrm{d}x=7^x\ln 7+C$.

C. $\int 7^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{7^{x+1}}{x+1}+C$. **D.** $\int 7^x\,\mathrm{d}x=7^{x+1}+C$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức nguyên hàm $\int 7^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{7^x}{\ln 7}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 134. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int \sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$. **B.** $\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2+C$.

C. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$. **D.** $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức nguyên hàm $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 135. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$. **B.** $\int \sin x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

C. $\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$. **D.** $\int \sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 136. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

A. $\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$ với mọi hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x-\int g(x)\mathrm{d}x$ với mọi hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int (f(x)\cdot g(x))\,\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\cdot\int g(x)\mathrm{d}x$ với mọi hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

✍ **Lời giải.**

Mệnh đề **sai** là $\int (f(x)\cdot g(x))\,\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\cdot\int g(x)\mathrm{d}x$ với mọi hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 137. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2^{2x}\left(3^x-\dfrac{\sqrt{x}}{4^x}\right)$.

A. $F(x)=\dfrac{12^x}{\ln 12}-\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+C$. **B.** $F(x)=12^x+x\sqrt{x}+C$.

C. $F(x)=\dfrac{2^{2x}}{\ln 2}\left(\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{x\sqrt{x}}{4^x}\right)+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{2^{2x}}{\ln 2}\left(\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{x\sqrt{x}\ln 4}{4^x}\right)+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $f(x)=12^x-\sqrt{x}$ nên $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{12^x}{\ln 12}-\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 138. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^5-\dfrac{1}{x}+2018$ là

A. $\dfrac{4}{6}x^6+\ln|x|+2018x+C$. **B.** $\dfrac{2}{3}x^6-\ln x+2018x+C$.

C. $20x^4+\dfrac{1}{x^2}+C$. **D.** $\dfrac{2}{3}x^6-\ln|x|+2018x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(4x^5-\frac{1}{x}+2018\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^6-\ln|x|+2018x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 139. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 5x+2$ là

A. $5\cos 5x+C$. **B.** $-\dfrac{1}{5}\cos 5x+2x+C$. **C.** $\dfrac{1}{5}\cos 5x+2x+C$. **D.** $\cos 5x+2x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\displaystyle\int f(x)dx=\int(\sin 5x+2)dx=-\frac{1}{5}\cos 5x+2x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 140. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x$ là

A. $\cos x+C$. **B.** $\sin x+C$. **C.** $-\cos x+C$. **D.** $-\sin x+C$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 141. Khẳng định nào sau đây **sai** (C là hằng số)?

A. $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\tan x+C$. **B.** $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\cot x+C$.

C. $\displaystyle\int\sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$. **D.** $\displaystyle\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 142. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3+2\sin x$ và $f(0)=3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x)=3x-2\cos x+5$. **B.** $f(x)=3x+2\cos x+3$.

C. $f(x)=3x-2\cos x+3$. **D.** $f(x)=3x+2\cos x+5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int(3+2\sin x)\,\mathrm{d}x=3x-2\cos x+C$.

$f(0)=3\Leftrightarrow -2+C=3\Leftrightarrow C=5$.

Vậy $f(x)=3x-2\cos x+5$.

Chọn đáp án A □

Câu 143. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x$.

A. $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x=3^x+C$. **B.** $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

C. $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x=3^x\ln 3+C$. **D.** $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x=\frac{3^{x+1}}{x+1}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int 3^x\,\mathrm{d}x=\frac{3^x}{\ln 3}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 144. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\displaystyle\int\sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$. **B.** $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2}+C$.

C. $\displaystyle\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$. **D.** $\displaystyle\int\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 145. Tính nguyên hàm $A = \int \dfrac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $t = \ln x$. Mệnh đề nào dưới dây **đúng**?

A. $A = \int \mathrm{d}t.$ **B.** $A = \int \dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$ **C.** $A = \int t\,\mathrm{d}t.$ **D.** $A = \int \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

$A = \int \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

Chọn đáp án D □

Câu 146. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$.

A. $\int (2x+1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2} + x + C.$ **B.** $\int (2x+1)\,\mathrm{d}x = x^2 + x + C.$

C. $\int (2x+1)\,\mathrm{d}x = 2x^2 + 1 + C.$ **D.** $\int (2x+1)\,\mathrm{d}x = x^2 + C.$

✍ **Lời giải.**

$\int (2x+1)\,\mathrm{d}x = x^2 + x + C.$

Chọn đáp án B □

Câu 147. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = 10^{2x}$ là

A. $\dfrac{10^x}{2\ln 10} + C.$ **B.** $10^{2x} 2\ln 10 + C.$ **C.** $\dfrac{10^{2x}}{2\ln 10} + C.$ **D.** $\dfrac{10^{2x}}{\ln 10} + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int 10^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{10^{2x}}{2.\ln 10} + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 148. Họ nguyên hàm $\int \sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\cos x + C.$ **B.** $-\sin x + C.$ **C.** $-\cos x + C.$ **D.** $\sin x + C.$

✍ **Lời giải.**

Có $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 149. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là

A. $\sin 2x + C.$ **B.** $\dfrac{1}{2}\sin 2x + C.$ **C.** $-\dfrac{1}{2}\sin 2x + C.$ **D.** $2\sin 2x + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C.$

Chọn đáp án B □

Câu 150. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{2018x}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2018x} + C.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2018} \cdot \mathrm{e}^{2018x} + C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2018 \cdot \mathrm{e}^{2018x} + C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2018x} \cdot \ln 2018 + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2018x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2018}\mathrm{e}^{2018x}\,\mathrm{d}(2018x) = \dfrac{1}{2018} \cdot \mathrm{e}^{2018x} + C.$

Chọn đáp án B □

Câu 151. Họ nguyên hàm của hàm số $y=\cos 3x$ là

A. $\dfrac{\sin 3x}{3}+C$. **B.** $-\dfrac{\sin 3x}{3}+C$. **C.** $\sin 3x+C$. **D.** $-\sin 3x+C$.

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức $\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sin(ax+b)}{a}+C$ ta có $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sin 3x}{3}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 152. Họ nguyên hàm của hàm số $\mathrm{e}x^{\mathrm{e}}+4$ là

A. $\mathrm{e}x^{\mathrm{e}+1}+4x+C$. **B.** $\mathrm{e}^2x^{\mathrm{e}-1}+C$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$. **D.** $\dfrac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\displaystyle\int\left(\mathrm{e}x^{\mathrm{e}}+4\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}\int x^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x+\int 4\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}\frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+4x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 153. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\cos x+\dfrac{1}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$.

A. $3\cos x+\ln x+C$. **B.** $3\sin x-\dfrac{1}{x}+C$. **C.** $-3\sin x+\dfrac{1}{x}+C$. **D.** $3\cos x+\dfrac{1}{x}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\displaystyle\int\left(3\cos x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=3\int\cos x\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=3\sin x-\frac{1}{x}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 154. Trong các hàm số sau, hàm số nào không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3$?

A. $y=\dfrac{x^4}{4}-1$. **B.** $y=\dfrac{x^4}{4}+1$. **C.** $y=\dfrac{x^4}{4}$. **D.** $y=3x^2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int x^3\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+C.$$

Suy ra hàm số $y=3x^2$ không phải là nguyên hàm của $y=x^3$.

Chọn đáp án D □

Câu 155. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=x^2$. Giá trị của biểu thức $F'(4)$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

✍ **Lời giải.**

Theo định nghĩa nguyên hàm, ta có $F'(x)=x^2$. Suy ra $F'(4)=16$.

Chọn đáp án D □

Câu 156. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=3-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ là

A. $F(x)=3x-\tan x+C$. **B.** $F(x)=3x+\tan x+C$.

C. $F(x)=3x+\cot x+C$. **D.** $F(x)=3x-\cot x+C$.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\left(3-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=3x+\cot x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 157. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{-1}\mathrm{e}^{-x} + C = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 158. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $F(x) = 2\sin 2x + C$. **B.** $F(x) = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$. **D.** $F(x) = -2\sin 2x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x) = \int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 159. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C.$ **B.** $\int f'(ax+b)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\cdot f(x) + C.$

C. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f''(x) + C.$ **D.** $\int f'(x)\mathrm{d}x = a\cdot f(ax+b) + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 160. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = 12x^5$.

A. $y = 12x^6 + 5$. **B.** $y = 2x^6 + 3$. **C.** $y = 12x^4$. **D.** $y = 60x^4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int 12x^5\,\mathrm{d}x = 12\dfrac{x^6}{6} + C = 2x^6 + C.$

Chọn đáp án B □

Câu 161. Tính nguyên hàm $I = \int \left(2^x + 3^x\right)\mathrm{d}x.$

A. $I = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \dfrac{3^x}{\ln 3} + C.$ **B.** $I = \dfrac{\ln 2}{2^x} + \dfrac{\ln 3}{3^x} + C.$ **C.** $I = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} + C.$ **D.** $I = -\dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{\ln 3}{3} + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int \left(2^x + 3^x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} + \dfrac{3^x}{\ln 3} + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 162. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\int [f(x)\cdot g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\mathrm{d}x\,.$ **B.** $\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x\,.$

C. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C\,.$ **D.** $\int [k\cdot f(x)]\mathrm{d}x = k\cdot \int f(x)\mathrm{d}x\,.$

✍ **Lời giải.**

Theo tính chất của nguyên hàm, ta suy ra $\int [f(x)\cdot g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\mathrm{d}x$ là khẳng định sai.

Chọn đáp án A □

Câu 163. Tìm $H = \int \sqrt[4]{2x-1}\,\mathrm{d}x.$

A. $H = \dfrac{2}{5}(2x-1)^{\frac{5}{4}} + C.$ **B.** $H = (2x-1)^{\frac{5}{4}} + C.$ **C.** $H = \dfrac{1}{5}(2x-1)^{\frac{5}{4}} + C.$ **D.** $H = \dfrac{8}{5}(2x-1)^{\frac{5}{4}} + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $H = \int \sqrt[4]{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int (2x-1)^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x-1)^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + C = \dfrac{2}{5}(2x-1)^{\frac{5}{4}} + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 164. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$.
B. $\int [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$.
C. $\int [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$.
D. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int (2\cdot x)\,\mathrm{d}x = x^2 + C$, còn $\int 2\,\mathrm{d}x \cdot \int x\,\mathrm{d}x = 2x\cdot\dfrac{x^2}{2} + C$ nên $\int (2\cdot x)\,\mathrm{d}x \neq \int 2\,\mathrm{d}x \cdot \int x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 165. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.
B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.
C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức nguyên hàm $\int \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 166. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$.

A. $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos 3x}{3} + C$.
B. $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\cos 3x}{3} + C$.
C. $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\sin 3x}{3} + C$.
D. $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\cos 3x + C$.

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức cơ bản $\int \sin kx\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 167. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$.

A. $\ln|3x+1| + C$.
B. $\dfrac{1}{3}\ln|3x+1| + C$.
C. $\dfrac{1}{3}\ln(3x+1) + C$.
D. $\ln(3x+1) + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \dfrac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\ln|3x+1| + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 168. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

A. $-3\sin 3x + C$.
B. $-\dfrac{1}{3}\sin 3x + C$.
C. $-\sin 3x + C$.
D. $\dfrac{1}{3}\sin 3x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int \cos 3x\,\mathrm{d}(3x) = \dfrac{1}{3}\sin 3x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 169. Tìm tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \dfrac{x}{2}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{4} + C$.
B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + \dfrac{x^2}{2} + C$.
C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + \dfrac{x^2}{4} + C$.
D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^3 + \dfrac{x^2}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + \dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = 3\int x^2\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = x^3 + \dfrac{x^2}{4} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 170. Nguyên hàm $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $\cos 2x+C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $-\cos 2x+C$.

✍ **Lời giải.**

Chú ý rằng $\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 171. Nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{-3x+1}$ là

A. $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **B.** $-3\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **C.** $-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **D.** $3\mathrm{e}^{-3x+1}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int \mathrm{e}^{-3x+1}\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 172. Cho hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2x}\mathrm{e}^{2x}+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}(2x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 173. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$.

A. $\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+C$. **B.** $\int x^2\,\mathrm{d}x=2x+C$. **C.** $\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+C$. **D.** $\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 174. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là **sai**?

A. $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ với $k\in\mathbb{R}$.

B. $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$ với $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$ với $\alpha\neq -1$.

D. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$.

✍ **Lời giải.**

Khẳng định $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ chỉ đúng với $k\neq 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 175. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2}$.

A. $\int\dfrac{2x^2+x-1}{x^2}\mathrm{d}x=2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\mathrm{C}$. **B.** $\int\dfrac{2x^2+x-1}{x^2}\mathrm{d}x=2x+\dfrac{1}{x}+\ln|x|+\mathrm{C}$.

C. $\int\dfrac{2x^2+x-1}{x^2}\mathrm{d}x=x^2+\ln|x|+\dfrac{1}{x}+\mathrm{C}$. **D.** $\int\dfrac{2x^2+x-1}{x^2}\mathrm{d}x=x^2-\dfrac{1}{x}+\ln|x|+\mathrm{C}$.

✍ **Lời giải.**

$$\int\frac{2x^2+x-1}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=2x+\ln|x|+\frac{1}{x}+\mathrm{C}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 176. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+\sin x$ là

A. $F(x)=\mathrm{e}^x+\cos x+C$.
B. $F(x)=\mathrm{e}^x-\sin x+C$.
C. $y=\mathrm{e}^x+\sin x+C$.
D. $y=\mathrm{e}^x-\cos x+C$.

Lời giải.

Ta có $\int\left(\mathrm{e}^x+\sin x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-\cos x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 177. Nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3x+\dfrac{1}{x}$ là

A. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}-\ln|x|+C$.
B. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{1}{x^2}+C$.
C. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+\ln x+C$.
D. $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$.

Lời giải.

Ta có $\int\left(x^2-3x+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 178. Công thức nguyên hàm nào sau đây **không** đúng?

A. $\int a^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C(0<a\neq 1)$.
B. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\tan x+C$.
C. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$.
D. $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq -1)$.

Lời giải.

Ta có $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\tan x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 179. Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của hàm số $y=\cos x$

A. $y=-\sin x$.
B. $y=x-\sin x$.
C. $y=x+\sin x$.
D. $y=\sin x$.

Lời giải.

Ta có $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 180. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3$ là.

A. $\dfrac{x^4}{4}$.
B. $\dfrac{x^3}{3}+C$.
C. $3x^2+C$.
D. $\dfrac{x^4}{4}+C$.

Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int x^3\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+C.$$

Chọn đáp án D □

1.1 ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. B	4. C	5. C	6. B	7. D	8. D	9. A	10. D
11. D	12. D	13. C	14. B	15. A	16. B	17. A	18. A	19. D	20. D
21. C	22. C	23. A	24. D	25. D	26. B	27. A	28. D	29. B	30. D
31. A	32. D	33. C	34. B	35. C	36. B	37. A	38. C	39. D	40. C
41. B	42. B	43. D	44. A	45. D	46. B	47. C	48. A	49. B	50. C
51. D	52. C	53. C	54. D	55. D	56. C	57. C	58. B	59. D	60. A
61. B	62. A	63. C	64. C	65. A	66. D	67. B	68. B	69. A	70. B
71. D	72. C	73. D	74. C	75. C	76. D	77. D	78. B	79. D	80. A
81. A	82. D	83. A	84. A	85. B	86. C	87. C	88. C	89. A	90. B
91. A	92. B	93. D	94. D	95. C	96. A	97. D	98. B	99. C	100. D

101. A	102. A	103. D	104. C	105. D	106. B	107. A	108. A	109. D	110. B
111. D	112. D	113. B	114. A	115. D	116. A	117. A	118. A	119. B	120. D
121. B	122. A	123. C	124. D	125. C	126. B	127. A	128. C	129. C	130. B
131. A	132. C	133. A	134. A	135. C	136. C	137. A	138. D	139. B	140. B
141. C	142. A	143. B	144. C	145. D	146. B	147. C	148. C	149. B	150. B
151. A	152. C	153. B	154. D	155. D	156. C	157. A	158. C	159. A	160. B
161. A	162. A	163. A	164. B	165. A	166. A	167. B	168. D	169. C	170. A
171. C	172. B	173. C	174. A	175. B	176. D	177. D	178. B	179. D	180. D

2 THÔNG HIỂU

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=-\cos x$ và $f(0)=2019$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)=-\sin x+2019$. **B.** $f(x)=2019+\cos x$.

C. $f(x)=\sin x+2019$. **D.** $f(x)=2019-\cos x$.

Lời giải.

Do $f'(x)=-\cos x$ nên $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int(-\cos x)\,\mathrm{d}x=-\sin x+C$.

Do $f(0)=2019$ nên $-\sin 0+C=2019\Leftrightarrow C=2019$.

Vậy $f(x)=-\sin x+2019$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Khi tính nguyên hàm $\int\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **B.** $\int\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **C.** $\int\left(u^2-3\right)\mathrm{d}u$. **D.** $\int 2u\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

Lời giải.

Với $u=\sqrt{x+1}$ ta có $u^2=x+1\Rightarrow 2u\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ và $x=u^2-1$.

Từ đó $\int\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{u^2-1-3}{u}\cdot 2u\,\mathrm{d}u=\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x(1+\ln x)$ là

A. $2x^2\ln x+3x^2$. **B.** $2x^2\ln x+x^2$. **C.** $2x^2\ln x+3x^2+C$. **D.** $2x^2\ln x+x^2+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=1+\ln x\\ \mathrm{d}v=4x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=2x^2.\end{cases}$

Khi đó $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2x^2(1+\ln x)-\int 2x\,\mathrm{d}x=2x^2(1+\ln x)-x^2+C=2x^2\ln x+x^2+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x$ là

A. x^4+x^2+C. **B.** $4x^3+1+C$. **C.** x^5+x^2+C. **D.** $\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{2}x^2+C$.

Lời giải.

Ta có $\int\left(x^4+x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{2}x^2+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x^2$ là

A. x^4+x^3+C. **B.** $\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3+C$. **C.** $3x^2+2x+C$. **D.** x^3+x^2+C.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(x^3+x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Nguyên hàm $I=\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ là

A. $I=\dfrac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}+C$. **B.** $I=\dfrac{2}{3}\sqrt{(2x+1)^3}+C$.

C. $I=\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}}+C$. **D.** $I=\dfrac{1}{4\sqrt{2x+1}}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\dfrac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}(2x+1)=\dfrac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}+C$, với C là hằng số tùy ý.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Nguyên hàm $F(x)$ trên $(-\infty;0)$ của hàm số $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ thỏa mãn điều kiện $F(-1)=\dfrac{1}{e}$ là

A. $F(x)=e^{\frac{1}{x}}$. **B.** $F(x)=\dfrac{2}{e}-e^{\frac{1}{x}}$. **C.** $F(x)=2e^{\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{e}$. **D.** $F(x)=-2e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{3}{e}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)=e^{\frac{1}{x}}+C$.

$F(-1)=\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow e^{-1}+C=\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow C=0$.

Vậy $F(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\cot x+\tan x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\cot x-\tan x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln\sin^2 x+\ln\cos^2 x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\cot x-\tan x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Do đó, $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x=\tan x-\cot x+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{5+2x^4}{x^2}$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{5}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2x^3-\dfrac{5}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{5}{x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}+5\ln x^2+C$.

✍ **Lời giải.**

Rút gọn $f(x)$ ta được $f(x)=\dfrac{5}{x^2}+2x^2$.

Khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2x^2\mathrm{d}x+\int\dfrac{5}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{5}{x}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)\ln x$. Tính $F''(x)$.

A. $F''(x)=1+\dfrac{1}{x}$. **B.** $F''(x)=\dfrac{1}{x}$. **C.** $F''(x)=1+\dfrac{1}{x}+\ln x$. **D.** $F''(x)=x+\ln x$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int(x+1)\ln x\,\mathrm{d}x\Rightarrow F'(x)=(x+1)\ln x\Rightarrow F''(x)=1+\dfrac{1}{x}+\ln x$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+x$ là

A. e^x+x^2+C. **B.** $\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **C.** $\dfrac{1}{x+1}\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}x^2+C$. **D.** e^x+1+C.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^x + x\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x^2 + C$

Chọn đáp án B □

Câu 12. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1+\ln x)$ là

A. $2x^2\ln x + 3x^2$. **B.** $2x^2\ln x + x^2$. **C.** $2x^2\ln x + 3x^2 + C$. **D.** $2x^2\ln x + x^2 + C$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int 4x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x &= \int (1+\ln x)\,\mathrm{d}(2x^2)\\ &= 2x^2(1+\ln x) - \int 2x^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= 2x^2(1+\ln x) - x^2 + C\\ &= 2x^2\ln x + x^2 + C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 13. Hàm số $F(x) = x^2\ln(\sin x - \cos x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x - \cos x}$. **B.** $f(x) = 2x\ln(\sin x - \cos x) + \dfrac{x^2}{\sin x - \cos x}$.

C. $f(x) = 2x\ln(\sin x - \cos x) + \dfrac{x^2(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x}$. **D.** $f(x) = \dfrac{x^2(\sin x + cosx)}{\sin x - \cos x}$.

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên

$$f(x) = F'(x) = 2x\cdot\ln(\sin x - \cos x) + x^2\cdot\frac{(\sin x - \cos x)'}{\sin x - \cos x} = 2x\cdot\ln(\sin x - \cos x) + x^2\cdot\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - xf(x) = 0, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của$f(1)$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **B.** $\dfrac{1}{e}$. **C.** $\sqrt{e}$. **D.** e.

✍ **Lời giải.**

Từ giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = x \Rightarrow \int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln[f(x)] = \dfrac{1}{2}x^2 + C$ (do $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Do đó $\ln[f(0)] = \dfrac{1}{2}\cdot 0^2 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow f(1) = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \sin^2 2x\cdot\sin x$. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm $f(x)$.

A. $y = \dfrac{4}{3}\cos^3 - \dfrac{4}{5}\sin^5 x + C$. **B.** $y = -\dfrac{4}{3}\cos^3 x + \dfrac{4}{5}\cos^5 x + C$.

C. $y = \dfrac{4}{3}\sin^3 x - \dfrac{4}{5}\cos^5 x + C$. **D.** $y = -\dfrac{4}{3}\sin^3 x + \dfrac{4}{5}\sin^5 x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 2x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = 4\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&= -4\int \sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\mathrm{d}(\cos x) = -4\int \left(1-\cos^2 x\right)\cdot\cos^2 x\cdot\mathrm{d}(\cos x)\\ &= -4\int \left(\cos^2 x - \cos^4 x\right)\cdot\mathrm{d}(\cos x) = -\frac{4}{3}\cos^3 x + \frac{4}{5}\cos^5 x + C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 16. Tìm họ nguyên hàm $F(x)=\int \dfrac{1}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

A. $F(x)=-\dfrac{1}{4(2x+1)^2}+C$. **B.** $F(x)=-\dfrac{1}{6(2x+1)^2}+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{1}{4(2x+1)^3}+C$. **D.** $F(x)=-\dfrac{1}{6(2x+1)^3}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int (2x+1)^{-3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{4(2x+1)^2}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{3}{2}$. $F(x)$ bằng

A. $F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+\dfrac{5}{2}$. **B.** $F(x)=\mathrm{e}^x+x^2-\dfrac{1}{2}$. **C.** $F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+\dfrac{3}{2}$. **D.** $F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+\dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int \left(\mathrm{e}^x+2x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+x^2+C$.

Do $F(0)=\dfrac{3}{2}$ nên $\mathrm{e}^0+0^2+C=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow C=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $F(x)=\mathrm{e}^x+x^2+\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 18. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ thỏa mãn $F(2)=4$. Giá trị $F(-1)$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x+2}+C$.

Theo đề bài $F(2)=4$ nên $2\sqrt{2+2}+C=4\Leftrightarrow C=0\Rightarrow F(-1)=2\sqrt{-1+2}=2$.

Vậy $F(-1)=2$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Cho biết $\displaystyle\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x=a\ln|x+1|+b\ln|x-2|+C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

✍ **Lời giải.**

Giả sử $2x-13=A(x+1)+B(x-2)\Leftrightarrow 2x-13=(A+B)x+A-2B$.

Đồng nhất thức hai vế ta có hệ $\begin{cases}A+B=-2\\A-2B=-13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-3\\B=5.\end{cases}$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x &= \int \frac{-3(x+1)+5(x-2)}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{-3}{x-2}\mathrm{d}x+\int \frac{5}{x+1}\mathrm{d}x\\ &= -3\ln|x-2|+5\ln|x+1|+C.\end{aligned}$$

Suy ra $a=5$, $b=-3$, vậy $a-b=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ là

A. $2\sqrt{1-2x}+C$. **B.** $-2\sqrt{1-2x}+C$. **C.** $\sqrt{1-2x}+C$. **D.** $-\sqrt{1-2x}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\int (1-2x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-2x) = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-2x} + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 21. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}$ là

A. $\sqrt[3]{3x+1} + C$. **B.** $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1} + C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + C$. **D.** $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int (3x+1)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}(3x+1) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$. **B.** $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$.

C. $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$. **D.** $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$.

✍ **Lời giải.**

$f(x) = \displaystyle\int (3 - 5\sin x)\,\mathrm{d}x = 3x + 5\cos x + C.$

$f(0) = 10 \Rightarrow 5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$. Vậy hàm số cần tìm: $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$. **B.** $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$.

C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$. **D.** $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = -\cos x + \sin x + C$. Mà $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$ nên $C = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(2x-1)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 15$. **B.** $2 + \ln 15$. **C.** $3 + \ln 15$. **D.** $\ln 15$.

✍ **Lời giải.**

<u>Cách 1</u>: dùng bài toán tìm nguyên hàm có điều kiện trên 1 khoảng K

<u>Chú ý</u>: $g(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ xác định trên $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ nên mỗi nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$ chỉ được xét trên từng

khoảng con của $\mathscr{D}$, **không được** xét trên cả tập xác định $\mathscr{D}$.

. . . . . .

Trên từng khoảng của $\mathscr{D}$, ta có $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|2x-1|+C$

— Xét trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$, ta có $f(0)=1$, suy ra $C=1$.

Do đó, $f(x)=\ln|2x-1|+1$, với mọi $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$. Suy ra $f(-1)=1+\ln 3$.

— Xét trên khoảng $(\dfrac{1}{2};+\infty)$, ta có $f(1)=2$, suy ra $C=2$.

Do đó, $f(x)=\ln|2x-1|+2$, với mọi $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Suy ra $f(3)=2+\ln 5$.

Vậy $f(-1)+f(3)=3+\ln 3+\ln 5=3+\ln 15$.

Cách 2: dùng định nghĩa tích phân xác định trên đoạn mà hàm số liên tục

Chú ý: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên K (một khoảng, một đoạn hoặc nửa khoảng) chứa a và b thì $F(b)=F(a)+\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

. . . . . .

Do $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$ liên tục trên mỗi đoạn $[-1;0]$ và $[1;3]$ nên

$$\begin{cases}f(-1)=f(0)+\displaystyle\int_0^{-1}f'(x)\,\mathrm{d}x\\ f(3)=f(1)+\displaystyle\int_1^{3}f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(-1)=1+\displaystyle\int_0^{-1}\frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x=1+\ln 3\\ f(3)=2+\displaystyle\int_1^{3}\frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x=2+\ln 5\end{cases}$$

Vậy $f(-1)+f(3)=3+\ln 3+\ln 5=3+\ln 15$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x$ là

A. x^4+x^2+C. **B.** $4x^3+1+C$. **C.** x^5+x^2+C. **D.** $\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{2}x^2+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\left(x^4+x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2+C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x^2$ là

A. x^4+x^3+C. **B.** $\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{3}x^3+C$. **C.** $3x^2+2x+C$. **D.** x^3+x^2+C.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(x^3+x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Giả sử $\displaystyle\int e^{2x}\left(2x^3+5x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)e^{2x}+C$. Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int e^{2x}\left(2x^3+5x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)e^{2x}+C$ nên:

$\left(\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)e^{2x}+C\right)'=\left(3ax^2+2bx+c\right)e^{2x}+2e^{2x}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$

$=\left(2ax^3+(3a+2b)x^2+(2b+2c)x+c+2d\right)e^{2x}$

$=(2x^3+5x^2-2x+4)e^{2x}$

Do đó $\begin{cases} 2a=2 \\ 3a+2b=5 \\ 2b+2c=-2 \\ c+2d=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \\ d=3 \end{cases}$. Vậy $a+b+c+d=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int \cos 4x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin 4x}{4}+C$.

B. $\int \dfrac{1}{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\tan 2x}{2}+C$.

C. $\int \dfrac{1}{ex}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\ln|x|}{\mathrm{e}}+C$.

D. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = 2\sin 2x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin 2x}{2}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 30. Tìm nguyên hàm $I=\int \dfrac{1}{\sqrt{5x+2}}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(5x+2)^3}+C$.

B. $I=\dfrac{2}{5}\sqrt{5x+2}+C$.

C. $I=\dfrac{1}{5}\sqrt{5x+2}+C$.

D. $I=\dfrac{2}{5}\sqrt{(5x+2)^3}+C$.

✍ **Lời giải.**

$I=\int \dfrac{1}{\sqrt{5x+2}}\,\mathrm{d}x=\int (5x-2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2\cdot(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{5}+C=\dfrac{2}{5}\sqrt{5x-2}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$, thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$. Tính giá trị của $S=F(0)+2F(\pi)$.

A. $S=4$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=0$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$

Theo giả thiết ta có $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow-\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2}+C=2\Rightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=-\cos x+\sin x+1$, $S=F(0)+2F(\pi)=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2}$ là

A. $F(x)=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x}}+C$.

B. $F(x)=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+1\right)}{x^2}+C$.

C. $F(x)=\dfrac{1+2\sqrt{x}}{x}+C$.

D. $F(x)=\dfrac{2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+C$.

✍ **Lời giải.**

$$\int \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x=2x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}+C$$
$$=2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C=2\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C=\frac{2x-2}{\sqrt{x}}+C.$$

□

Câu 33. $\int \dfrac{3\cos x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3\sin x}{(2+\sin x)^2}+C$. **B.** $-3\ln|2+\sin x|+C$. **C.** $3\ln(2+\sin x)+C$. **D.** $\dfrac{3\sin x}{(2+\sin x)^2}+C$.

✍ **Lời giải.**

.

Đặt $t=2+\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$. $I=\displaystyle\int\frac{3\,\mathrm{d}t}{t}=3\ln|t|=3\ln(2+\sin x)+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Công thức nào dưới đây là **sai**?

A. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$.

B. $\displaystyle\int\sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$.

C. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}+C$.

D. $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C,(0<a\neq 1)$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$. □

Câu 35. Tìm $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ có kết quả là

A. $\dfrac{x^2}{2}(\ln x-1)+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$. **C.** $\ln|\ln x|+C$. **D.** $\ln\dfrac{x^2}{2}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\frac{\ln^2 x}{2}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2018$, $f(2)=2019$. Giá trị của $f(3)-f(-1)$ bằng

A. 1. **B.** $\ln 4$. **C.** $\ln 4037$. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Cách 1:

Có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$, suy ra $f(x)=\begin{cases}\ln(x-1)+C_1 \ khi\ x>1\\ \ln(1-x)+C_2 \ khi\ x<1.\end{cases}$

Do $f(0)=2018$, $f(2)=2019$ nên $C_2=2018$, $C_1=2019$.

Khi đó $f(3)-f(-1)=\ln 2+C_1-(\ln 2+C_2)=C_1-C_2=1$.

Cách 2: Sử dụng MTCT

Ta có

$$\begin{aligned}f(3)-f(-1) &= f(3)-f(2)+f(0)-f(-1)+f(2)-f(0)\\ &= \int_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^0 f'(x)\,\mathrm{d}x+f(2)-f(0)+1\\ &= \int_2^3\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+f(2)-f(0)=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 37. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$. **B.** $\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)}+C$. **C.** $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)}+C$. **D.** $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 38. Cho $F(x)=(ax^2+bx-c)\mathrm{e}^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2018x^2-3x+1)\mathrm{e}^{2x}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tính $T=a+2b+4c$.

A. $T=-3035$. **B.** $T=1007$. **C.** $T=-5053$. **D.** $T=1011$.

✍ Lời giải.

Vì $F(x)=(ax^2+bx-c)\mathrm{e}^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2018x^2-3x+1)\mathrm{e}^{2x}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ nên ta có: $(F(x))'=f(x)$, với mọi $x\in(-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow \left(2ax^2+x(2b+2a)-2c+b\right)\mathrm{e}^{2x}=\left(2018x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$, với mọi $x\in(-\infty;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2018 \\ 2b+2a=-3 \\ -2c+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1009 \\ b=-\dfrac{2021}{2} \\ c=-\dfrac{2023}{4}. \end{cases}$$

Vậy $T=a+2b+4c=1009+2\cdot\left(-\dfrac{2021}{2}\right)+4\cdot\left(-\dfrac{2023}{4}\right)=-3035$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ là

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ln|1-2x|+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-2\ln|1-2x|+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2\ln|1-2x|+C$.

✍ Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{1-2x}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x}=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 40. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\displaystyle\int x^e\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+C$. **B.** $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C$. **C.** $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+C$. **D.** $\displaystyle\int x^7\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}x^8+C$.

✍ Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C\Rightarrow$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$ là

A. $\dfrac{1}{2}\ln(2x+3)+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln|2x+3|+C$. **C.** $\ln|2x+3|+C$. **D.** $\dfrac{1}{\ln 2}\ln|2x+3|+C$.

✍ Lời giải.

Áp dụng công thức nguyên hàm mở rộng: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 42. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=x\cdot\mathrm{e}^{x^2}$. Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$?

A. $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+2$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x^2}+5\right)$. **C.** $F(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$. **D.** $F(x)=-\dfrac{1}{2}\left(2-\mathrm{e}^{x^2}\right)$.

✍ Lời giải.

Ta thấy ở đáp án C thì $\left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C\right)'=-x\mathrm{e}^{x^2}\neq x\mathrm{e}^{x^2}$ nên hàm số ở đáp án C không là một nguyên hàm của hàm $y=x\cdot\mathrm{e}^{x^2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{-3x+1}$ là

A. $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **B.** $-3\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **C.** $-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **D.** $3\mathrm{e}^{-3x+1}+C$.

✍ Lời giải.

Ta có:

$$\int \mathrm{e}^{-3x+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{-3x+1}\mathrm{d}(-3x+1)=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$, biết $F(0)=1$.

A. $F(x)=\mathrm{e}^{2x}$. **B.** $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\dfrac{1}{2}$. **C.** $F(x)=2\mathrm{e}^{2x}-1$. **D.** $F(x)=\mathrm{e}^{x}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có:

$$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C.$$

Theo giả thiết: $F(0)=1\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$. Vậy $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f'(x)=x+\sin x$ và $f(0)=1$. Tìm $f(x)$.

A. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x+2$. **B.** $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x-2$.

C. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\cos x$. **D.** $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\cos x+\dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(x)=x+\sin x\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x+C$; $f(0)=1\Leftrightarrow -1+C=1\Leftrightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\cos x+2$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Cho $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-2}^{1}[2f(x)-1]\,\mathrm{d}x$.

A. -9. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

$$I=\int_{-2}^{1}[2f(x)-1]\,\mathrm{d}x=2\int_{-2}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-2}^{1}\mathrm{d}x=6-x\Big|_{-2}^{1}=3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 47. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{5+2x^4}{x^2}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{5}{x}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2x^3-\frac{5}{x}+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}+\frac{5}{x}+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}+5\ln x^2+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(2x^2+\frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{5}{x}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 48. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)\ln x$. Tính $F''(x)$.

A. $F''(x)=1+\dfrac{1}{x}$. **B.** $F''(x)=\dfrac{1}{x}$. **C.** $F''(x)=1+\dfrac{1}{x}+\ln x$. **D.** $F''(x)=x+\ln x$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(x+1)\ln x\,\mathrm{d}x\Rightarrow F'(x)=(x+1)\ln x\Rightarrow F''(x)=1+\frac{1}{x}+\ln x$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x^2$ là:

A. $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+c$. **B.** x^4+x^3. **C.** $3x^2+2x$. **D.** $\dfrac{1}{3}x^4+\dfrac{1}{4}x^3$.

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản ta có:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (x^3+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+c.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 50. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ thỏa mãn $F(\mathrm{e}+1)=4$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=2\ln(x-1)+2$. **B.** $F(x)=\ln(x-1)+3$.

C. $F(x)=4\ln(x-1)$. **D.** $F(x)=\ln(x-1)-3$.

✍ **Lời giải.**

Gọi $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}=\ln(x-1)+C$ với $x\in(1;+\infty)$

Lại có $F(\mathrm{e}+1)=4\Rightarrow 4=1+C\Rightarrow C=3$. Do đó $F(x)=\ln(x-1)+3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 51. Họ nguyên hàm của hàm số $y=3x(x+\cos x)$ là

A. $x^3+3(x\sin x+\cos x)+C$. **B.** $x^3-3(x\sin x+\cos x)+C$.

C. $x^3+3(x\sin x-\cos x)+C$. **D.** $x^3-3(x\sin x-\cos x)+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int 3x(x+\cos x)\,\mathrm{d}x=\int \left(3x^2+3x\cos x\right)\mathrm{d}x=x^3+3\int x\cos x\,\mathrm{d}x.$

Tính $J=\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}x=u\\ \cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ \sin x=v\end{cases}$

$\Rightarrow J=x\sin x-\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$. Vậy $I=x^3+3(x\sin x+\cos x)+C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x+1$ là

A. $\dfrac{\sin^2 x}{2}+x+C$. **B.** $-\cos x+x+C$. **C.** $\cos x+x+C$. **D.** $-\cos x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(\sin x+1)\,\mathrm{d}x=-\cos x+x+C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{3x}$, biết $F(0)=1$.

A. $F(x)=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{2}{3}$. **B.** $F(x)=\mathrm{e}^{3x}+1$. **C.** $F(x)=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{1}{3}$. **D.** $F(x)=3\mathrm{e}^{3x}-2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+c=F(x)$.

Mặt khác, $F(0)=\dfrac{1}{3}\cdot 1+c=1\Leftrightarrow c=\dfrac{2}{3}$.

Nên $F(x)=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=10^x$ là

A. $\dfrac{10^x}{\ln 10}+C$. **B.** $\dfrac{10^{x+1}}{x+1}+C$. **C.** $\dfrac{10^x}{11}+C$. **D.** $10^x\cdot\ln 10+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int 10^x\,\mathrm{d}x=\frac{10^x}{\ln 10}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$ là

A. $-\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{2}{x}+C$. **B.** $-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}+C$. **C.** $\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{2}{x}+C$. **D.** $\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{x}.\end{cases}$

Khi đó: $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C'$.

Mặt khác, $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+C''$.

Do đó, $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+C=-\frac{2}{x}-\frac{\ln x}{x}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 56. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x+1)\ln x$ là

A. $(x^2+x)\ln x-\dfrac{x^2}{2}+x+C$. **B.** $(x^2+x)\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x+C$.

C. $(x^2+1)\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x+C$. **D.** $2\ln x+\dfrac{1}{x}+C$.

✍ **Lời giải.**

Xét $F(x)=\displaystyle\int(2x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=(2x+1)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=x^2+x.\end{cases}$

$\Rightarrow F(x)=(x^2+x)\ln x-\displaystyle\int(x+1)\mathrm{d}x=(x^2+x)\ln x-\frac{x^2}{2}-x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ là

A. $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+\ln x+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$. **C.** $\ln^2 x+C$. **D.** $\ln(\ln x)+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\displaystyle\int\frac{f'\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}f\left(\sqrt{x}\right)+C$. **B.** $f\left(\sqrt{x}\right)+C$. **C.** $-2f\left(\sqrt{x}\right)+C$. **D.** $2f\left(\sqrt{x}\right)+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $I=\displaystyle\int\frac{f'\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Đặt $\sqrt{x}=t$, ta có $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Do đó: $I=\displaystyle\int f'(t)2\,\mathrm{d}t=2f(t)+C=2f\left(\sqrt{x}\right)+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3-5\sin x$ và $f(0)=10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)=3x+5\cos x+2$. **B.** $f(x)=3x-5\cos x+15$.

C. $f(x)=3x+5\cos x+5$. **D.** $f(x)=3x-5\cos x+2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (3-5\sin x)\,\mathrm{d}x = 3x+5\cos x+C$.

Mà $f(0)=10 \Leftrightarrow 3\cdot 0+5\cos 0+C=10 \Leftrightarrow C=5$.

Vậy $f(x)=3x+5\cos x+5$.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+\sin x$ thỏa mãn $F(0)=0$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=-\mathrm{e}^{-x}-\cos x+2$. **B.** $F(x)=-\mathrm{e}^{-x}-\cos x$.

C. $F(x)=-\mathrm{e}^{-x}+\cos x-2$. **D.** $F(x)=-\mathrm{e}^{x}-\cos x+2$.

✍ **Lời giải.**

Có: $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+\sin x \Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}-\cos x+C$.

Mà $F(0)=0 \Rightarrow -1-1+C=0 \Rightarrow C=2$.

Khi đó $F(x)=-\mathrm{e}^{-x}-\cos x+2$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln(2x)}{x^2}$.

A. $F(x)=-\dfrac{1}{x}(\ln 2x-1)+C$. **B.** $F(x)=-\dfrac{1}{x}(\ln 2x+1)+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{1}{x}(1-\ln 2x)+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{x}(\ln 2x+1)+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=\ln(2x) \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=-\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{\ln(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(2x)}{x}+\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(2x)}{x}-\frac{1}{x}+C \\ &= -\frac{1}{x}(\ln(2x)+1)+C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 62. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$ là

A. $\dfrac{1}{2}\ln(2x+3)+C$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln|2x+3|+C$. **C.** $\ln|2x+3|+C$. **D.** $2\ln|2x+3|+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \dfrac{1}{2x+3}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|2x+3|+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 63. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\tan^2 x$.

A. $x\tan x+\ln|\cos x|-\dfrac{x^2}{2}+C$. **B.** $x\tan x-\ln|\cos x|-\dfrac{x^2}{2}+C$.

C. $x\tan x+\ln|\cos x|+\dfrac{x^2}{2}+C$. **D.** $-x\tan x+\ln|\cos x|-\dfrac{x^2}{2}+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=x \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\tan^2 x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v=-x+\tan x. \end{cases}$

Khi đó $\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x = x(-x+\tan x) - \int(-x+\tan x)\,\mathrm{d}x = -x^2 + x\tan x + \dfrac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C$

Hay $\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x = x\tan x + \ln|\cos x| - \dfrac{x^2}{2} + C.$

Biết rằng $\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \dfrac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 64. Cho $I = \int x\left(1-x^2\right)^{10}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u = 1-x^2$, khi đó viết I theo u và $\mathrm{d}u$ ta được

A. $I = -\dfrac{1}{2}\int u^{10}\,\mathrm{d}u.$ **B.** $I = -2\int u^{10}\,\mathrm{d}u.$ **C.** $I = \int 2u^{10}\,\mathrm{d}u.$ **D.** $I = \dfrac{1}{2}\int u^{10}\,\mathrm{d}u.$

✍ **Lời giải.**

Đặt $u = 1-x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$. Vậy $I = -\dfrac{1}{2}\int u^{10}\,\mathrm{d}u.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 65. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 3x - 5\cos x + 5.$ **B.** $f(x) = 3x + 5\cos x + 5.$

C. $f(x) = 3x + 5\cos x - 4.$ **D.** $f(x) = 3x - 5\cos x + 15.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int(3 - 5\sin x)\,\mathrm{d}x = 3x + 5\cos x + C.$

Ta có $f(0) = 1 \Leftrightarrow 3\cdot 0 + 5\cos 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = -4.$

Vậy $f(x) = 3x + 5\cos x - 4.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 66. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos x\sqrt{\sin x + 1}$.

A. $F(x) = \dfrac{1}{3}(\sin x + 1)\sqrt{\sin x + 1} + C.$ **B.** $F(x) = \dfrac{1 - 2\sin x - 3\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x + 1}}.$

C. $F(x) = \dfrac{2}{3}(\sin x + 1)\sqrt{\sin x + 1} + C.$ **D.** $F(x) = \dfrac{1}{3}\sin x\sqrt{\sin x + 1} + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \cos x\sqrt{\sin x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\sin x + 1}\,\mathrm{d}(\sin x + 1) = \dfrac{2}{3}(\sin x + 1)\sqrt{\sin x + 1} + C.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 67. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ và $F(1) = 2$. Tính $F(2)$.

A. $F(2) = 2 - \ln 2.$ **B.** $F(2) = 2\ln 2.$ **C.** $F(2) = 3.$ **D.** $F(2) = \ln 2 + 2.$

✍ **Lời giải.**

Theo giả thiết, $F(x) = \ln|x| + C$. Do $F(1) = 2$ nên $C = 2$. Vậy $F(2) = \ln 2 + 2.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 68. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x - \sin x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \cos x + C.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 - \cos x + C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \cos x + C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + \cos x + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int(2x - \sin x)\,\mathrm{d}x = x^2 + \cos x + C.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Hàm số nào dưới đây là nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3x+2)\mathrm{e}^{2x+3}$?

A. $F(x)=\dfrac{1}{2}(3x+1)\mathrm{e}^{2x+3}$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{3}(2x+3)\mathrm{e}^{2x+3}$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{4}(6x+1)\mathrm{e}^{2x+3}$. **D.** $F(x)=(3x-1)\mathrm{e}^{2x+3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(3x+2)\mathrm{e}^{2x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt

$$\begin{cases}u=3x+2\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{2x+3}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=3\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3}.\end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\int(3x+2)\mathrm{e}^{2x+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(3x+2)\mathrm{e}^{2x+3}-\frac{3}{2}\int\mathrm{e}^{2x+3}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}(3x+2)\mathrm{e}^{2x+3}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{2x+3}+C\\ &= \left(\frac{3}{2}x+1-\frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{2x+3}+C\\ &= \frac{1}{4}(6x+1)\mathrm{e}^{2x+3}+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 70. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$.

A. $\displaystyle\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=2\cos 2x+C$. **B.** $\displaystyle\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{\cos 2x}{2}+C$.

C. $\displaystyle\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\cos 2x+C$. **D.** $\displaystyle\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos 2x}{2}+C$.

✍ **Lời giải.**

Tính $\displaystyle\int\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x\Rightarrow\mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$. Khi đó, $\displaystyle\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin t}{2}\,\mathrm{d}t=-\frac{\cos t}{2}+C=-\frac{\cos 2x}{2}+C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{3x+1}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+1}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{3x+1}+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+1}$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+1}+C$.

✍ **Lời giải.**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+1}+C.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Trong các khẳng định dưới đây, có bao nhiêu khẳng định đúng?

① Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có đạo hàm trên $[a;b]$.

② Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ đều có nguyên hàm trên $[a;b]$.

③ Mọi hàm số có đạo hàm trên $[a;b]$ đều có nguyên hàm trên $[a;b]$.

④ Mọi hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a;b]$.

A. 2. **B**. 3. **C**. 1. **D**. 4.

✍ **Lời giải.**

a) và *b*) sai, lấy VD là hàm $y=|x|$.

c) đúng vì hàm số có đạo hàm trên $[a;b]$ thì liên tục trên $[a;b]$. Do đó hàm số có nguyên hàm trên $[a;b]$.

d) đúng vì hàm số liên tục trên $[a;b]$ thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các điểm cực trị hoặc hai đầu mút.

Chọn đáp án A □

Câu 73. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}-1$ trên $(0;+\infty)$?

A. $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}-x+1$. **B**. $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+2$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **D**. $F(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-x$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int\left(\sqrt{x}-1\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+C$.

Cho $C=2$ ta được $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+2$.

Chọn đáp án B □

Câu 74. Mệnh đề nào trong bốn mệnh đề sau **sai**?

A. $\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$. **B**. $\displaystyle\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

C. $\displaystyle\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$. **D**. $\displaystyle\int 0\,\mathrm{d}x=C$.

✍ **Lời giải.**

Mệnh đề $\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$ sai vì $\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x$ là

A. $\tan x+C$. **B**. $\cot x+C$. **C**. $-\sin x+C$. **D**. $\sin x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{-2018x}$ là

A. $\dfrac{-1}{2018}\mathrm{e}^{2018x}+C$. **B**. $\dfrac{-1}{2018}\mathrm{e}^{-2018x}+C$. **C**. $2018\mathrm{e}^{-2018x}+C$. **D**. $\mathrm{e}^{-2018x}+C$.

✍ **Lời giải.**

$$\int\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2018}\int\mathrm{e}^{-2018x}\mathrm{d}(-2018x)=\frac{-1}{2018}\mathrm{e}^{-2018x}+C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 77. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x^3+x+1$.

A. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{2}+C$. **B**. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+x+C$.

C. $F(x)=x^4+\dfrac{x^3}{2}+x+C$. **D**. $F(x)=3x^3+C$.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 78. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$ là

A. $2x\mathrm{e}^x+C$. **B.** $x\mathrm{e}^x+C$. **C.** $(x-1)\mathrm{e}^x+C$. **D.** $(x+2)\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x.\end{cases}$

Khi đó $\int f(x)\,\mathrm{d}x=(x+1)\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 79. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3+2018$ là

A. $x^4+2018x+C$. **B.** $\dfrac{x^4}{3}+2018x+C$. **C.** $12x^2+C$. **D.** x^4+C.

Lời giải.

$\int(4x^3+2018)\,\mathrm{d}x=x^4+2018x+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 80. Tích phân $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x+2)}$ bằng

A. $\ln 2$. **B.** $\ln\dfrac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** $\ln 3$.

Lời giải.

Đặt $t=\ln x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận $x=1$ thì $t=2$ và $x=\mathrm{e}$ thì $t=3$.

$\Rightarrow\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x+2)}=\int_2^3\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|\Big|_2^3=\ln\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 81. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$ có $f'(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4}$ thỏa mãn $f(0)=1$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. $1-\ln 2$. **B.** 2. **C.** $1+3\ln 2$. **D.** $-1+3\ln 2$.

Lời giải.

Ta có: $f(x)=\displaystyle\int\frac{2x-5}{x^2-5x+4}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-1|+\ln|x-4|+\mathrm{C}$ với $\mathrm{C}\in\mathbb{R}$.

Do $f(0)=1$ nên $\mathrm{C}=1-2\ln 2$ hay $f(x)=\ln|x-1|+\ln|x-4|+1-2\ln 2$.

Khi đó: $f(2)=1-\ln 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$ là

A. e^x+C. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}+C$. **C.** $\mathrm{e}^{2x}+C$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+C$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 83. Họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2+\mathrm{e}^x-\cos 3x$ là

A. $\dfrac{1}{3}\left(x^3+3\mathrm{e}^x-\sin 3x\right)+C$. **B.** $\dfrac{1}{3}\left(x^3+\mathrm{e}^x-\sin 3x\right)+C$.

C. $\dfrac{1}{3}\left(x^3+3\mathrm{e}^x+\sin 3x\right)+C$. **D.** $\dfrac{1}{3}\left(x^3+\mathrm{e}^x+\sin 3x\right)+C$.

Lời giải.

$$\int (x^2+\mathrm{e}^x-\cos 3x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+\mathrm{e}^x-\frac{1}{3}\sin 3x+C=\frac{1}{3}\left(x^3+3\mathrm{e}^x-\sin 3x\right)+C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 84. Hàm số $y=\ln x+\dfrac{1}{x}$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $y=\ln x+1$. **B.** $y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x-\dfrac{1}{x^2}$. **C.** $y=\dfrac{1}{2}\ln^2 x-\dfrac{1}{x}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$.

✍ **Lời giải.**

$y'=\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)'=(\ln x)'+\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\sqrt{x}+x^{2018}$ là

A. $\sqrt{x}+\dfrac{x^{2019}}{673}+C$. **B.** $2\sqrt{x^3}+\dfrac{x^{2019}}{2019}+C$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{x^{2019}}{673}+C$. **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+6054x^{2017}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(3\sqrt{x}+x^{2018}\right)\mathrm{d}x\\ &= 3\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x+\int x^{2018}\,\mathrm{d}x\\ &= 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{2019}}{2019}+C\\ &= 2\sqrt{x^3}+\frac{x^{2019}}{2019}+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 86. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(2x)\,\mathrm{d}x=2F(2x)+C$. **B.** $\int f(2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}F(2x)+C$.

C. $\int f(2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}F(x)+C$. **D.** $\int f(2x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$.

✍ **Lời giải.**

$$\int f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(2x)\,\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}F(2x)+C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 87. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{2x+1}$.

A. $(2x+1)3^{2x}+C$. **B.** $\dfrac{3^{2x+1}}{\ln 3}+C$. **C.** $3^{2x+1}\ln 3+C$. **D.** $\dfrac{3^{2x+1}}{\ln 9}+C$.

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức $\int a^{bx+c}\,\mathrm{d}x=\dfrac{a^{bx+c}}{b\ln a}+C$ ta được $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^{2x+1}}{2\ln 3}+C=\dfrac{3^{2x+1}}{\ln 9}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$ trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $F(x)=\ln(-3x-1)+C$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{3}\ln(3x+1)+C$.

C. $F(x)=\dfrac{1}{3}\ln(-3x-1)+C$. **D.** $F(x)=\ln|3x+1|+C$.

✍ **Lời giải.**

Vì $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$ nên ta có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C = \frac{1}{3}\ln(-3x-1) + C.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 89. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ xác định trên K. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\left(x\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f'(x)$.

B. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

C. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = F'(x)$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F'(x) = f(x)$.

Suy ra $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) = F'(x)$ và $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 90. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1$ thỏa mãn $F(0) = 0$ và $F(3) = 7$. Khi đó, giá trị của tham số m bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1\right)\mathrm{d}x = \sqrt{x+1} + (m-1)x + C$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(3) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + 1 = 0 \\ C + 3m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -1 \\ m = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 91. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4^x + \sin^2 x$ là

A. $\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

B. $4^x \ln x + \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

C. $4^x \ln x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

D. $\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (4^x + \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \int \left(4^x + \frac{1-\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \int \left(4^x + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 92. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ là

A. $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + \frac{1}{15}$.

B. $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x + \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{15}$.

C. $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{15}$.

D. $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x + \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{4}{15}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\cos 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \cos 2x\,\mathrm{d}x$.

Ta có $F(x) = \int \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int t^2\cdot\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\int \left(t^2 - t^4\right)\mathrm{d}t$

$= \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{10}t^5 + C = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + C$.

Mà từ giả thiết ta được $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\sin^3\frac{\pi}{2}-\frac{1}{10}\sin^5\frac{\pi}{2}+C=0 \Leftrightarrow C=-\frac{1}{15}$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 93. Cho $\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x=A(3x-2)^8+B(3x-2)^7+C$ với $A,B\in\mathbb{Q}$ và $C\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng

A. $\frac{23}{252}$. **B.** $\frac{241}{252}$. **C.** $\frac{52}{9}$. **D.** $\frac{7}{9}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=3x-2\Rightarrow x=\frac{t+2}{3}\Rightarrow \frac{1}{3}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Ta có $\int 2x(3x-2)^6\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int\frac{t+2}{3}\cdot t^6\,\mathrm{d}t=\frac{2}{9}\int\left(t^7+2t^6\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{9}\cdot\frac{t^8}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{t^7}{7}+C$

$=\frac{1}{36}\cdot(3x-2)^8+\frac{4}{63}\cdot(3x-2)^7+C$.

Suy ra $A=\frac{1}{36}, B=\frac{4}{63}$.

Giá trị của biểu thức $12A+7B=12\cdot\frac{1}{36}+7\cdot\frac{4}{63}=\frac{7}{9}$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+\cos x$ là

A. $\frac{\mathrm{e}^x+1}{x+1}+\sin x+C$. **B.** $\mathrm{e}^x-\sin x+C$. **C.** $\mathrm{e}^x+\sin x+C$. **D.** $\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}-\sin x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\left(\mathrm{e}^x+\cos x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\sin x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathscr{K}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in\mathscr{K}$.

B. Nếu $f(x)$ liên tục trên $\mathscr{K}$ thì nó có nguyên hàm trên $\mathscr{K}$.

C. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$.

D. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì hàm số $F(-x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$.

✍ **Lời giải.**

Khẳng định "Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$ thì hàm số $F(-x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathscr{K}$" là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án D □

Câu 96. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{x^2}$ là

A. $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{x}+C$. **B.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{x}+C$. **C.** $\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{x}+C$. **D.** $\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{x}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{x}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x+\cos x$ là

A. $-\cos 2x+\sin x+C$. **B.** $\cos^2 x-\sin x+C$. **C.** $\sin^2 x+\sin x+C$. **D.** $\cos 2x-\sin x+C$.

✍ **Lời giải.**

Do $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\sin 2x + \cos x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x + C = \sin^2 x + \sin x + C - \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Tìm họ nguyên $F(x)$ của hàm số $y = f(x) = \sin 2x + 2x$.

A. $F(x) = \dfrac{\cos 2x}{2} + x^2 + C$.
B. $F(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2} + x^2 + C$.
C. $F(x) = \cos 2x + 2 + C$.
D. $F(x) = -\cos 2x + x^2 + C$.

✍ **Lời giải.**

$\int (\sin 2x + 2x)\,\mathrm{d}x = \int \sin 2x\,\mathrm{d}x + \int 2x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos 2x}{2} + x^2 + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) + C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x = 6\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) + C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) + C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x = 3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) + C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 100. Nguyên hàm $\int \dfrac{1 + \ln x}{x}\,\mathrm{d}x\ (x > 0)$ bằng

A. $x + \ln^2 x + C$.
B. $\ln^2 x + \ln x + C$.
C. $\dfrac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + C$.
D. $x + \dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u = 1 + \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$. Do đó

$$\int \frac{1 + \ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(1 + \ln x)^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + \ln x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 101. Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}$ là

A. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + \ln x + C$.
B. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$.
C. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 + \ln x + C$.
D. $F(x) = 2x - 3 - \dfrac{1}{x} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int \left(x^2 - 3x + \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 102. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x + 2$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 3x^2 + 2x + C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}x^2 - 2x + C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 3x^2 - 2x + C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 103. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x + 3}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x\sqrt{2x+3}+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2x+3}+C$.

✍ **Lời giải.**

Xét $I = \int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{2x+3}$, suy ra $t^2 = 2x+3$. Khi đó $t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Ta có

$$I = \int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 104. Cho $F(x) = \cos 2x - \sin x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tính $f(\pi)$.

A. $f(\pi) = -3$. **B.** $f(\pi) = 1$. **C.** $f(\pi) = -1$. **D.** $f(\pi) = 0$.

✍ **Lời giải.**

$f(x) = F'(x) = -2\sin 2x - \cos x$, suy ra $f(\pi) = 1$.

Chọn đáp án B □

Câu 105. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos(2x+3)$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\sin(2x+3)+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin(2x+3)+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin(2x+3)+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin(2x+3)+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin(2x+3)+C$

Chọn đáp án D □

Câu 106. Biết $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \sin^2 x + \ln x + C$, tìm nguyên hàm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2\dfrac{x}{2} + \ln x + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} + 2\ln x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin^2 x + 2\ln x - \ln 2 + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sin^2 2x + 2\ln x - \ln 2 + C$.

✍ **Lời giải.**

Gọi $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$.

Khi đó $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{F(2x)}{2} + C = \sin^2 x + \ln x + C$.

$\Rightarrow F(2x) = 2\sin^2 x + 2\ln x + C = 2\sin^2\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right) + 2\ln\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right) + C$.

$\Rightarrow F(x) = 2\sin^2\dfrac{x}{2} + 2\ln\dfrac{x}{2} + C = 2\sin^2\dfrac{x}{2} + 2\ln x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 107. Tìm hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\sin x(4\cos x + 1)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

A. $F(x) = \cos 2x + \cos x - 1$. **B.** $F(x) = -2\cos 2x + \cos x - 3$.

C. $F(x) = \cos 2x + \cos x$. **D.** $F(x) = -\cos 2x - \cos x - 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int [-\sin x(4\cos x + 1)]\,\mathrm{d}x = -\int (2\sin 2x + \sin x)\,\mathrm{d}x = \cos 2x + \cos x + C$.

Ta có $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\pi + \cos\dfrac{\pi}{2} + C = -1 \Leftrightarrow C = 0$.

Vậy $F(x) = \cos 2x + \cos x$.

Chọn đáp án C □

Câu 108. Mệnh đề nào trong bốn mệnh đề sau **sai**?

A. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$.

B. $\int 0\,\mathrm{d}x = C$.

C. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

D. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

✍ **Lời giải.**

Mệnh đề $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$ sai.

Chọn đáp án A □

Câu 109. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{2-3x}$ là

A. $\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C$. **B.** $-3\ln|2-3x| + C$. **C.** $-\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C$. **D.** $\ln|2-3x| + C$.

✍ **Lời giải.**

$$\int \frac{1}{2-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2-3x}\,\mathrm{d}(2-3x) = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 110. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x$, biết $F(0) = 4$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \mathrm{e}^x + 2$. **B.** $F(x) = \mathrm{e}^x + 3$. **C.** $F(x) = \mathrm{e}^x + 4$. **D.** $F(x) = \mathrm{e}^x + 1$.

✍ **Lời giải.**

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \mathrm{e}^x$ nên $F(x) = \mathrm{e}^x + C$. Lại có $F(0) = 4$ nên $C = 3$ hay $F(x) = \mathrm{e}^x + 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 111. Biết $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^4} f(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 4$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 8$. **B.** $I = 16$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 4$.

✍ **Lời giải.**

Xét tích phân $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^4} f(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 4$. Đặt $\ln x = t$ khi đó ta có $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Tại $x = \mathrm{e}$ thì $t = 1$; tại $x = \mathrm{e}^4$ thì $t = 4$.

Khi đó tích phân đã cho trở thành $\int\limits_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 112. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số k và mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$, với mọi hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với mọi hằng số $k \neq 0$ và mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án C □

Câu 113. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int \frac{1}{1-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$.

B. $\int \frac{1}{1-2x}\,\mathrm{d}x = \ln|1-2x| + C$.

C. $\int \frac{1}{1-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|4x-2| + C$.

D. $\int \frac{1}{1-2x}\,\mathrm{d}x = 2\ln\frac{1}{|1-2x|} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \dfrac{1}{1-2x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\ln|1-2x| + C_1$.

Chú ý rằng C, C_1 là một hằng số bất kì nên

$$-\frac{1}{2}\ln|4x-2| + C = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| - \frac{1}{2}\ln 2 + C = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C_1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 114. Cho hàm số $f(x) = \sin 3x$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\cos 3x + C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\cos 3x + C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -3\cos 3x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 115. Cho số thực $a > 0$, $a \neq 1$. Khẳng định nào dưới đây **đúng?**

A. $\int a^x\,\mathrm{d}x = a^x \ln a + C$.

B. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x+1}}{x+1} + C$.

C. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\log a} + C$.

D. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 116. Cho $x > 0$. Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x} + \ln x + C$.

A. $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$. **B.** $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x^2}$. **C.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$. **D.** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$.

✍ **Lời giải.**

Vì $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x} + \ln x + C$ nên

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x + C\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 117. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = x\mathrm{e}^x$.

A. $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x + C$.

B. $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$.

C. $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

D. $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Khi đó $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 118. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x\ln x$ là

A. $x^2(2\ln x + 1) + C$. **B.** $4x^2(2\ln x - 1) + C$. **C.** $x^2(2\ln x - 1) + C$. **D.** $x^2(8\ln x - 16) + C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = 4x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = 2x^2. \end{cases}$

Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần. Ta được

$$\int 4x\ln x\,\mathrm{d}x = 2x^2\ln x - \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2(2\ln x - 1) + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 119. Xác định $f(x)$ biết $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x + C$.

A. $f(x) = \ln|x| + \mathrm{e}^x$. **B.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \mathrm{e}^x$. **C.** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \mathrm{e}^x$. **D.** $f(x) = \ln x + \mathrm{e}^x$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\left(\dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x + C\right)' = -\dfrac{1}{x^2} + \mathrm{e}^x$.

Chọn đáp án C □

Câu 120. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{98}{(2x+1)^{50}}$ là

A. $-\dfrac{1}{(2x+1)^{49}} + C$. **B.** $-\dfrac{2}{(2x+1)^{49}} + C$. **C.** $\dfrac{1}{51(2x+1)^{51}} + C$. **D.** $\dfrac{2}{(2x+1)^{51}} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int \frac{98}{(2x+1)^{50}}\mathrm{d}x = \frac{98}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{-49}}{-49} + C = -\frac{1}{(2x+1)^{49}} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 121. Cho $f(x) = 3^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\ln 3}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x) = 3^{\sqrt{x}} + C$. **B.** $F(x) = 2\cdot 3^{\sqrt{x}} + C$.

C. $F(x) = 2\cdot\left(3^{\sqrt{x}} - 1\right) + C$. **D.** $F(x) = 2\cdot\left(3^{\sqrt{x}} + 1\right) + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta xét $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 3^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln 3}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{d}\left(3^{\sqrt{x}}\right) = 2\cdot 3^{\sqrt{x}} + C$, với C là hằng số tùy ý.

Chọn đáp án B □

Câu 122. Hàm số $F(x)$ nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$?

A. $F(x) = 2\ln|x+3| - \ln|x+1| + C$. **B.** $F(x) = \ln(2|x+1|)$.

C. $F(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right| + 2$. **D.** $F(x) = \ln[(x+1)(x+3)]$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x = \int \frac{x+3}{(x+3)(x+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1| + C'$$

Chọn $C = \ln 2$ suy ra $\ln|x+1| + C = |x+1| + \ln 2 = \ln 2|x+1|$.

Chọn đáp án B □

Câu 123. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$ là

A. $-\dfrac{1}{3}\cdot\sin 3x + C$. **B.** $\dfrac{1}{3}\cdot\sin 3x + C$. **C.** $3\sin 3x + C$. **D.** $-3\sin 3x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\displaystyle\int \cos 3x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\sin 3x + c$

Chọn đáp án B □

Câu 124. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f(x)=\dfrac{4}{1+2x}$ và $F(0)$=2. Tìm $F(2)$.

A. $4\ln 5+2$. **B.** $5(1+\ln 2)$. **C.** $2\ln 5+4$. **D.** $2(1+\ln 5)$.

Lời giải.

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int \frac{4}{1+2x}\mathrm{d}x=2\ln|1+2x|+C$.

Mặt khác $F(0)=2\Leftrightarrow C=2$.

Do đó $F(2)=2\ln 5+2=2(1+\ln 5)$.

Chọn đáp án D □

Câu 125. $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x+4}{x^2},(x\neq 0)$, biết rằng $F(1)=1$. $F(x)$ là biểu thức nào sau đây

A. $F(x)=2x+\dfrac{4}{x}-5$. **B.** $F(x)=3\ln|x|-\dfrac{4}{x}+5$.

C. $F(x)=F(3x-\dfrac{4}{x}+3$. **D.** $F(x)=3\ln|x|-\dfrac{4}{x}+3$.

Lời giải.

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x=3\ln|x|-\frac{4}{x}+C$.

Mà $F(1)=1\Leftrightarrow 3\ln 1-\dfrac{4}{1}+C=1\Leftrightarrow C=5$.

Vậy $F(x)=3\ln|x|-\dfrac{4}{x}+5$.

Chọn đáp án B □

Câu 126. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=10^x$.

A. $\displaystyle\int 10^x\mathrm{d}x=\frac{10^x}{\ln 10}+C$. **B.** $\displaystyle\int 10^x\mathrm{d}x=10^x\ln 10+C$.

C. $\displaystyle\int 10^x\mathrm{d}x=10^{x+1}+C$. **D.** $\displaystyle\int 10^x\mathrm{d}x=\frac{10^{x+1}}{x+1}+C$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\displaystyle\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$ với $a>0$.

Chọn đáp án A □

Câu 127. Tính $\displaystyle\int x(x^2+7)^{15}\mathrm{d}x$.

A. $\displaystyle\int x(x^2+7)^{15}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2+7)^{16}+C$. **B.** $\displaystyle\int x(x^2+7)^{15}\mathrm{d}x=\frac{1}{32}(x^2+7)^{16}+C$.

C. $\displaystyle\int x(x^2+7)^{15}\mathrm{d}x=-\frac{1}{32}(x^2+7)^{16}+C$. **D.** $\displaystyle\int x(x^2+7)^{15}\mathrm{d}x=\frac{1}{16}(x^2+7)^{16}+C$.

Lời giải.

Ta có

$$\int x(x^2+7)^{15}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int 2x(x^2+7)^{15}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(x^2+7)^{15}\mathrm{d}(x^2+7)=\frac{1}{32}(x^2+7)^{16}+C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 128. Tính $F(x)=\displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

A. $F(x)=\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$.

C. $F(x)=\dfrac{x^2\sin 2x}{4}+C$. **D.** $F(x)=\sin 2x+C$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x\cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}\sin 2x \\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 129. Cho $f(x) = \dfrac{4m}{\pi} + \sin^2 x$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tìm m để $F(0) = 1$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{8}$.

A. $m = -\dfrac{3}{4}$. **B.** $m = \dfrac{3}{4}$. **C.** $m = -\dfrac{4}{3}$. **D.** $m = \dfrac{4}{3}$.

✍ **Lời giải.**

$F(x) = \dfrac{4m}{\pi}x + \displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{4m}{\pi}x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

$$\begin{cases} F(0) = 1 \\ F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ m + \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4} + C = \dfrac{\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 130. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos 4x$ là

A. $-\dfrac{1}{4}\sin 4x + C$. **B.** $\dfrac{1}{4}\sin 4x + C$. **C.** $\sin 4x + C$. **D.** $\dfrac{1}{4}\sin x + C$.

✍ **Lời giải.**

Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos 4x$ là $F(x) = \dfrac{1}{4}\sin 4x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 131. Hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = xe^x$ là

A. $(x-1)e^x + C$. **B.** $x^2 + \dfrac{e^{x+1}}{x+1} + C$. **C.** $x^2e^x + C$. **D.** $(x+1)e^x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int xe^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = e^x \end{cases}$. Do đó $f(x) = uv - \displaystyle\int v\,\mathrm{d}u = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 132. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x - \cos x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ là

A. $-\cos x - \sin x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\cos x - \sin x - \sqrt{2}$. **C.** $\cos x - \sin x$. **D.** $-\cos x - \sin x + \sqrt{2}$.

✍ **Lời giải.**

$F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x = -\cos x - \sin x + C.$

Ta có $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = \sqrt{2}$.

Vậy $F(x) = -\cos x - \sin x + \sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 133. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=xe^x$.

A. $\int f(x)\,dx=(x+1)e^x+C$. **B.** $\int f(x)\,dx=(x-1)e^x+C$.

C. $\int f(x)\,dx=xe^x+C$. **D.** $\int f(x)\,dx=x^2e^x+C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=e^x\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=e^x\end{cases}$.

Khi đó, ta có

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 134. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F'(x)=\sin 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

A. $F(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}$. **B.** $F(x)=2x-\pi+1$.

C. $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$. **D.** $F(x)=-\cos 2x$.

Lời giải.

Ta có

$$F(x)=\int F'(x)\,dx=\int \sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ nên $-\frac{1}{2}\cos(\pi)+C=1\Rightarrow C=\frac{1}{2}$.

Vậy $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 135. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$ và đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Lời giải.

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int \sin x\,dx=-\cos x+C$.

$F(0)=1\Leftrightarrow -\cos 0+C=1\Leftrightarrow C=2$. Do đó $F(x)=-\cos x+2$. Vậy $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 136. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Tính $I=F(e)-F(1)$.

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{1}{e}$. **C.** $I=e$. **D.** $I=\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}\,dx$.

Khi đó $F(x)=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

$I=F(e)-F(1)=\frac{1}{2}\ln^2 e=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 137. Cho bốn mệnh đề sau

(I) $\int \cos^2 x\,dx=\frac{\cos^3 x}{3}+C$.

(II) $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x+2018}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+x+2018)+C.$

(III) $\int 3^x(2^x+3^{-x})\,\mathrm{d}x = \dfrac{6^x}{\ln 6}+C.$

(IV) $\int 3^x\,\mathrm{d}x = 3^x\ln 3+C.$

Có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A. $-2-\sqrt{3}$. **B.** $-2+\sqrt{3}$. **C.** 0. **D.** -2.

✍ Lời giải.

Ta có

(I) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}(x+\dfrac{1}{2}\sin 2x)+C \neq \dfrac{\cos^3 x}{3}+C \Rightarrow$ (I) sai.

(II) $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x+2018}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+x+2018)+C \Rightarrow$ (II) đúng.

(III) $\int 3^x(2^x+3^{-x})\,\mathrm{d}x = \int(6^x+1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{6^x}{\ln 6}+x+C \neq \dfrac{6^x}{\ln 6}+C \Rightarrow$ (III) sai.

(IV) $\int 3^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{3^x}{\ln 3}+C \neq 3^x\ln 3+C \Rightarrow$ (IV) sai.

Vậy có 3 mệnh đề sai.

Chọn đáp án B □

Câu 138. Tìm nguyên hàm $I = \int x\ln x\,\mathrm{d}x$?

A. $I = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{1}{2}\right)+C.$ **B.** $I = \dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{2}+C.$

C. $I = x^2\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C.$ **D.** $I = x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2}+C.$

✍ Lời giải.

Ta có $I = \int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{x^2}{2}\ln x-\int \dfrac{x^2}{2x}\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{1}{2}\right)+C.$

Chọn đáp án A □

Câu 139. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$ và $F(\pi)=1$. Tính $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=2.$ **B.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=0.$ **C.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=3.$ **D.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-1.$

✍ Lời giải.

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên

$$F(x) = \int \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = -2\cos\frac{x}{2}+C.$$

Do $F(\pi)=1=C$ nên $F(x)=-2\cos\dfrac{x}{2}+1$. Vậy $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=0.$

Chọn đáp án B □

Câu 140. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=6x+\sin 3x$, biết $F(0)=\dfrac{2}{3}$.

A. $F(x)=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}+\dfrac{2}{3}.$ **B.** $F(x)=3x^2-\dfrac{\cos 3x}{3}-1.$

C. $V = F(x) = 3x^2 + \dfrac{\cos 3x}{3} + 1$. **D.** $F(x) = 3x^2 - \dfrac{\cos 3x}{3} + 1$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (6x + \sin 3x)\,\mathrm{d}x = 3x^2 - \dfrac{\cos 3x}{3} + C$.

Từ $F(0) = \dfrac{2}{3}$ suy ra $-\dfrac{1}{3} + C = \dfrac{2}{3}$ hay $C = 1$.

Vậy $F(x) = 3x^2 - \dfrac{\cos 3x}{3} + 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 141. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{2x}$.

A. $F(x) = 2\mathrm{e}^{2x}(x-2) + C$. **B.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(x-2) + C$.

C. $F(x) = 2\mathrm{e}^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + C$. **D.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}. \end{cases}$

Khi đó

$$I = \int x \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x \cdot \mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 142. Tìm hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{6}{3-2x}$ và $f(2) = 0$.

A. $f(x) = -3\ln|3-2x|$. **B.** $f(x) = 2\ln|3-2x|$. **C.** $f(x) = -2\ln|3-2x|$. **D.** $f(x) = 3\ln|3-2x|$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x) = \displaystyle\int \frac{6}{3-2x}\,\mathrm{d}x = -3\ln|3-2x| + C$.

Mà $f(2) = 0$ nên $C = 0$, do đó $f(x) = -3\ln|3-2x|$.

Chọn đáp án A □

Câu 143. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 8(1-2x)^3$. Tính $I = F(1) - F(0)$.

A. $I = 2$. **B.** $I = -2$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = -16$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \displaystyle\int 8(1-2x)^3\,\mathrm{d}x = -(1-2x)^4 + C$, suy ra $F(1) - F(0) = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 144. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x \ln 9$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = 12 \cdot \ln^2 3$. **B.** $F(1) = 3$. **C.** $F(1) = 6$. **D.** $F(1) = 4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \displaystyle\int 3^x \ln 9\,\mathrm{d}x = \ln 9 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C = 2 \cdot 3^x + C$ và $F(0) = 2$ nên $C = 0$. Do đó $F(1) = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 145. Biết hàm số $F(x) = ax^3 + (a+b)x^2 + (2a - b + c)x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$. Tổng $a + b + c$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3ax^2+2(a+b)x+(2a-b+c)=3x^2+6x+2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\begin{cases}3a=3\\2(a+b)=6\\2a-b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\c=2\end{cases}\Rightarrow a+b+c=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 146. Đặt $t=\sqrt{1+\tan x}$ thì $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ trở thành nguyên hàm nào?

A. $\displaystyle\int 2t\,\mathrm{d}t$. **B.** $\displaystyle\int t^2\,\mathrm{d}t$. **C.** $\displaystyle\int \mathrm{d}t$. **D.** $\displaystyle\int 2t^2\,\mathrm{d}t$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+\tan x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\sqrt{1+\tan x}\,\mathrm{d}(\tan x+1)=\int t\,\mathrm{d}t^2=\int 2t^2\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án D □

Câu 147. Biết $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2x}+x^5\right)\mathrm{d}x=a\ln|x|+bx^6+C$ với $(a,b\in\mathbb{Q},C\in\mathbb{R})$. Tính a^2+b?

A. $\dfrac{7}{6}$. **B.** $\dfrac{7}{13}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{5}{12}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\left(\frac{1}{2x}+x^5\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{6}x^6+C$.

Vậy $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{6}\Rightarrow a^2+b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{12}$.

Chọn đáp án D □

Câu 148. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 3x$.

A. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=3\cos 3x+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=-3\cos 3x+C$.

✍ **Lời giải.**

Có $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sin 3x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 149. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là mệnh đề **sai**?

A. $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}+C$. **B.** $\displaystyle\int\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$.

C. $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$. **D.** $\displaystyle\int 2x\ln x\,\mathrm{d}x=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u=\ln x\Rightarrow\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ và $\mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}$.

$\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$.

Vậy $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}+C$ là mệnh đề **sai**.

Chọn đáp án A □

Câu 150. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ và $F(2)=3+\dfrac{1}{2}\ln 3$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\dfrac{1}{2}\ln 5+5$. **B.** $F(3)=\dfrac{1}{2}\ln 5+3$. **C.** $F(3)=-2\ln 5+5$. **D.** $F(3)=2\ln 5+3$.

✍ **Lời giải.**

Có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

Ta có $F(2)=3+\dfrac{1}{2}\ln 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln 3+C=3+\dfrac{1}{2}\ln 3 \Leftrightarrow C=3$.

Vậy ta có $F(3)=\dfrac{1}{2}\ln 5+3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 151. Họ nguyên hàm của hàm số $y=2x(1+3x^3)$ là

A. $F(x)=x^2(x+x^3)+C$. **B.** $F(x)=2x(x+x^3)+C$.

C. $F(x)=x^2(1+3x^2)+C$. **D.** $F(x)=x^2\left(1+\dfrac{6x^3}{5}\right)+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int 2x(1+3x^3)\,\mathrm{d}x=\int\left(2x+6x^4\right)\mathrm{d}x=x^2+\dfrac{6}{5}x^5+C=x^2\left(1+\dfrac{6x^3}{5}\right)+C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 152. Nếu $F(x)+C$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+2x-3}$ và $F(0)=0$ thì hằng số C bằng

A. $\dfrac{3}{2}\ln 3$. **B.** $-\dfrac{2}{3}\ln 3$. **C.** $\dfrac{2}{3}\ln 3$. **D.** $-\dfrac{3}{2}\ln 3$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int\frac{x-3}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{2(x+3)}-\frac{1}{2(x-1)}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln|x+3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$.

Theo giả thiết $F(0)=0$ nên ta có $\dfrac{3}{2}\ln 3+C=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{3}{2}\ln 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 153. Họ nguyên hàm của hàm số $y=(1+\sin x)^2$ là

A. $F(x)=\dfrac{2}{3}x-2\cos x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$. **B.** $F(x)=\dfrac{3}{2}x-2\cos x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

C. $F(x)=\dfrac{3}{2}x+2\cos x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{3}{2}x-2\cos x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int(1+\sin x)^2\,\mathrm{d}x &= \int\left(1+2\sin x+(\sin x)^2\right)\mathrm{d}x\\ &= \int\left(\frac{3}{2}+2\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 154. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$. **B.** $\int\sin x\,\mathrm{d}x=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+C$.

C. $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+C$. **D.** $\int\sin x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

Mặt khác, ta có $\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\pi\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 155. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$. Hàm số nào sau đây **không** phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$. **B.** $F(x)=-\dfrac{1}{2}(2-\mathrm{e}^{x^2})$. **C.** $F(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x^2}+2)$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x^2}+5)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 156. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

A. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}$. **B.** $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} - 1$.

C. $F(x) = 3x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + 1$. **D.** $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int (6x + \sin 3x)\mathrm{d}x = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + C$.

Mà $F(0) = \frac{2}{3}$ nên $C = 1 \Rightarrow F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 157. Tìm nguyên hàm $I = \int \sin^4 x \cos x\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\sin^5 x}{5} + C$. **B.** $\frac{\cos^5 x}{5} + C$. **C.** $-\frac{\sin^5 x}{5} + C$. **D.** $-\frac{\cos^5 x}{5} + C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $I = \int t^4\,\mathrm{d}t = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 158. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$, biết đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $(1;-2)$.

A. $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} + 3$. **B.** $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} + 1$. **C.** $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{x} - 1$. **D.** $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} - 3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int \frac{x-1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \ln|x| + \frac{1}{x} + C$

Theo giả thiết $F(1) = -2 \Leftrightarrow \ln 1 + \frac{1}{1} + C = -2 \Leftrightarrow C = -3$.

Suy ra $F(x) = \ln|x| + \frac{1}{x} - 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 159. Cho $a \in \mathbb{R}$, hàm số nào sau đây **không** phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$?

A. $F(x) = \sin x$. **B.** $F(x) = 2\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}$.

C. $F(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + a\right)\cos\left(\frac{x}{2} - a\right)$. **D.** $F(x) = 2\sin\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}$.

✍ **Lời giải.**

$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$.

Ta có $2\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2} = \cos x + \cos a$. Đây không phải là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 160. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2^x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x - \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{2^x}{\ln 2} + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x - 2^x \ln 2 + C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (x^2 - 2^x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 161. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)^2$.

A. $F(x)=2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+x+C$.

C. $F(x)=\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+x+C$. **D.** $F(x)=2\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)^2=\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+1\Rightarrow F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+x+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 162. Tìm $\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

A. $\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}+C$. **B.** $\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}+C$. **C.** $\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2x}+C$. **D.** $\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\ln x^2+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 163. Hàm số $F(x)=x^2+\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\cos x$. **B.** $f(x)=2x+\cos x$. **C.** $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\cos x$. **D.** $f(x)=2x-\cos x$.

✍ **Lời giải.**

$F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$.

Ta có $F'(x)=2x+\cos x$.

Vậy hàm số $F(x)=x^2+\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+\cos x$.

Chọn đáp án B □

Câu 164. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{10}f(x)\mathrm{d}x=7$, $\displaystyle\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $P=\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_6^{10}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $P=4$. **B.** $P=5$. **C.** $P=7$. **D.** $P=-4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^{10}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x+\int_6^{10}f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_6^{10}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{10}f(x)\mathrm{d}x-\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Chọn đáp án A □

Câu 165. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\displaystyle\int\ln|x|\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}+C$. **B.** $\displaystyle\int(x+1)^{-3}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(x+1)^{-2}+C$.

C. $\displaystyle\int(x+1)^3\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}(x+1)^4+C$. **D.** $\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{2x+1}=\ln|2x+1|+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int(x+1)^3\,\mathrm{d}x=\int(x+1)^3\,\mathrm{d}(x+1)=\dfrac{1}{4}(x+1)^4+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 166. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 3x$.

A. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=3\cos 3x+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=-3\cos 3x+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\cos 3x + C$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin 3x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int \sin 3x\,\mathrm{d}(3x) = -\dfrac{1}{3}\cos 3x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 167. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \dfrac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{1}{2}$. **B.** $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{5}{2}$. **C.** $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{3}{2}$. **D.** $F(x) = 2\mathrm{e}^x + x^2 - \dfrac{1}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (e^x + 2x)\,\mathrm{d}x = e^x + x^2 + C$.

Do $F(0) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 1 + C = \dfrac{3}{2} \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}$.

Từ đó ta có $F(x) = e^x + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 168. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^{-x})$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + 1 + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x + x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x + 1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 169. Cho biết $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x - \dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x\cos ax$.

A. $x\sin x - \cos x + C$. **B.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$.

C. $x\sin x + \cos x + C$. **D.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$.

✍ Lời giải.

Ta có:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow \frac{(x^2+1)^2}{x^2} = \frac{(x^2+a)^2}{x^2} \Rightarrow a = 1.$$

Do đó: $g(x) = \int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x. \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x) = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 170. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$ là

A. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$. **B.** $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \sin 2x + C$. **D.** $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 171. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x^3+2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+x^2+\sqrt{x}+C$.
B. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+2x+\sqrt{x}+C$.
C. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=x^4+x^2+\sqrt{x}+C$.
D. $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=12x^2+2-\frac{1}{4x\sqrt{x}}+C$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int\left(4x^3+2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=x^4+x^2+\sqrt{x}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 172. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=1+2x+3x^2$ thỏa mãn $F(1)=2$. Tính $F(0)+F(-1)$.

A. -3. **B.** -4. **C.** 3. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int(1+2x+3x^2)\mathrm{d}x=x+x^2+x^3+C$.

Do $F(1)=2$ nên $C=-1$. Suy ra $F(x)=x+x^2+x^3-1$, từ đó ta có $F(0)+F(-1)=-3$.

Chọn đáp án A □

Câu 173. Tìm $\displaystyle\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$.
B. $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-4\ln|x|+C$.
C. $-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$.
D. $\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x=\int x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x+4\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+4\ln|x|+C=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 174. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ là

A. $-\dfrac{1}{x}+C$. **B.** x^3+C. **C.** $-\dfrac{1}{3x^2}$. **D.** $\dfrac{1}{x}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int x^{-2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 175. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=5x^4-3x^2$ trên tập số thực thỏa mãn $F(1)=3$ là

A. x^5-x^3+2x+1. **B.** x^5-x^3+3. **C.** x^5-x^3+5. **D.** x^5-x^3.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=x^5-x^3+C$, do $F(1)=C=3$ nên $F(x)=x^5-x^3+3$.

Chọn đáp án B □

2.1 ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. D	5. B	6. A	7. A	8. A	9. A	10. C
11. B	12. D	13. C	14. C	15. B	16. A	17. D	18. D	19. D	20. D
21. C	22. A	23. D	24. B	25. C	26. D	27. B	28. B	29. D	30. B
31. A	33. C	35. B	36. A	37. D	38. A	39. A	40. C	41. B	42. C
43. C	44. B	45. A	46. C	47. A	48. C	49. A	50. B	51. A	52. B
53. A	54. A	55. B	56. B	57. B	58. D	59. C	60. D	61. B	62. B
63. A	64. A	65. C	66. C	67. D	68. D	69. C	70. D	71. A	72. A
73. B	74. A	75. D	76. B	77. B	78. B	79. A	80. B	81. A	82. D

83. A	84. D	85. B	86. B	87. D	88. C	89. A	90. B	91. D	92. C
93. D	94. C	95. D	96. B	97. C	98. B	99. C	100. C	101. B	102. D
103. B	104. B	105. D	106. B	107. C	108. A	109. C	110. B	111. D	112. C
113. C	114. B	115. D	116. D	117. B	118. C	119. C	120. A	121. B	122. B
123. B	124. D	125. B	126. A	127. B	128. B	129. A	130. B	131. A	132. D
133. B	134. C	135. A	136. D	137. B	138. A	139. B	140. D	141. D	142. A
143. C	144. C	145. A	146. D	147. D	148. C	149. A	150. B	151. D	152. D
153. D	154. D	155. A	156. D	157. A	158. D	159. B	160. C	161. B	162. B
163. B	164. A	165. C	166. C	167. A	168. B	169. C	170. D	171. C	172. A
173. A	174. A	175. B							

3 VẬN DỤNG THẤP

Câu 1. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\sin x-\cos x}$.

A. $F(x)=x+\ln|\sin x+\cos x|+C$.
B. $G(x)=x+\dfrac{1}{|\sin x-\cos x|}+C$.
C. $H(x)=\ln|\sin x-\cos x|+C$.
D. $T(x)=x+\ln|\sin x-\cos x|+C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x&=\int\frac{2\sin x}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x+\sin x+\cos x-\cos x}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&=x+\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}=x+\ln|\sin x-\cos x|+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 2. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị của biểu thức $T=F(0)+F(1)+F(2)+\cdots+F(2017)+F(2018)+F(2019)$.

A. $T=1009\cdot\dfrac{2^{2019}+1}{\ln 2}$. **B.** $T=2^{2019\cdot 2020}$. **C.** $T=\dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}$. **D.** $T=\dfrac{2^{2020}-1}{\ln 2}$.

Lời giải.

Có $F(x)=\displaystyle\int 2^x\,\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}+C$.

Lại có $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}\Rightarrow\dfrac{1}{\ln 2}+C=\dfrac{1}{\ln 2}\Rightarrow C=0$.

Vậy $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}$.

$$\begin{aligned}T&=F(0)+F(1)+F(2)+\cdots+F(2017)+F(2018)+F(2019)\\&=\frac{1}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 2}+\frac{2^2}{\ln 2}+\cdots+\frac{2^{2017}}{\ln 2}+\frac{2^{2018}}{\ln 2}+\frac{2^{2019}}{\ln 2}\\&=\frac{1}{\ln 2}\cdot\left(1+2+2^2+\cdots+2^{2017}+2^{2018}+2^{2019}\right)\\&=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^{2020}-1}{2-1}=\frac{2^{2020}-1}{\ln 2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 3. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0)=2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6-\dfrac{15}{\mathrm{e}}$. **B.** $4-\dfrac{10}{\mathrm{e}}$. **C.** $\dfrac{15}{\mathrm{e}}-4$. **D.** $\dfrac{10}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, suy ra $F(x)=\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ (1).

Đặt $t=\sqrt[3]{x}\Rightarrow t^3=x\Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Suy ra (1) trở thành $F(t)=\int 3\mathrm{e}^t\cdot t^2\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=3t^2\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=6t\,\mathrm{d}t\\ v=\mathrm{e}^t.\end{cases}$

$F(t)=3t^2\cdot\mathrm{e}^t-\int 6t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

Đặt $\begin{cases}u_1=6t\\ \mathrm{d}v_1=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u_1=6\,\mathrm{d}t\\ v_1=\mathrm{e}^t.\end{cases}$

$F(t)=3t^2\cdot\mathrm{e}^t-(6t\cdot\mathrm{e}^t-\int 6\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t)=3t^2\mathrm{e}^t-6t\mathrm{e}^t+6\mathrm{e}^t+C.$

Thay $t=\sqrt[3]{x}$ ta được $F(x)=\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}(3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+6)+C$.

Theo bài ra $F(0)=2\Rightarrow 6+C=2\Rightarrow C=-4$.

Vậy $F(x)=\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}(3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+6)-4$. Suy ra

$F(-1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}(3+6+6)-4=\dfrac{15}{\mathrm{e}}-4.$

Chọn đáp án C □

Câu 4. Biết rằng $x\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của $f(1-x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)\mathrm{e}^x$ thỏa mãn $F(3)=1$, giá trị của $F(1)$ bằng

A. $2\mathrm{e}-1$. **B.** $2\mathrm{e}+1$. **C.** $\mathrm{e}+1$. **D.** $4\mathrm{e}+1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(1-x)=(x\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x,\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Đặt $t=1-x$, ta có $f(t)=\mathrm{e}^{1-t}+(1-t)\mathrm{e}^{1-t}=(2-t)\mathrm{e}^{1-t},\forall t\in(-\infty;+\infty)$.

Hay $f(x)=(2-x)\mathrm{e}^{1-x},\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Do đó $f'(x)=\left[(2-x)\mathrm{e}^{1-x}\right]'=(x-3)\mathrm{e}^{1-x}\Rightarrow f'(x)\mathrm{e}^x=(x-3)\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{e}^x=(x-3)\mathrm{e}$.

Bởi vậy $F(x)=\int(x-3)\mathrm{e}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}}{2}(x-3)^2+C$.

Lại có $F(3)=1\Leftrightarrow C=1$. Vậy $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}}{2}(x-3)^2+1\Rightarrow F(1)=2\mathrm{e}+1$.

Chọn đáp án B □

Câu 5. Biết rằng e^x là một nguyên hàm của $f(2x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $[f'(x)]^2$ thỏa mãn $F(0)=1$, giá trị của $F(1)$ bằng

A. 1. **B.** $4\mathrm{e}-3$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}+1}{4}$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}+3}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(2x)=(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x,\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Đặt $t=2x$, ta có $f(t)=\mathrm{e}^{\frac{t}{2}},\forall t\in(-\infty;+\infty)$.

Hay $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}},\forall x\in(-\infty;+\infty)$.

Do đó $f'(x)=\left[\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right]'=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Rightarrow[f'(x)]^2=\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^x$.

Bởi vậy $F(x)=\dfrac{1}{4}\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^x+C$.

Lại có $F(0)=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}+C=1\Leftrightarrow C=\dfrac{3}{4}$.

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^x+\dfrac{3}{4}\Rightarrow F(1)=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{\mathrm{e}+3}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

A. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=-x^2+2x+C$. **B.** $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=-x^2+x+C$.

C. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=x^2-2x+C$. **D.** $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=-2x^2+2x+C$.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow 2x=f(x)\mathrm{e}^{2x}$.

Đặt $\begin{cases}u=\mathrm{e}^{2x}\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2e^{2x}\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

$\Rightarrow\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{e}^{2x}-2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=2x-2x^2+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho $F(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

A. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=(4-2x)\mathrm{e}^x+C$. **B.** $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2-x}{2}\mathrm{e}^x+C$.

C. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=(2-x)\mathrm{e}^x+C$. **D.** $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=(x-2)\mathrm{e}^x+C$.

✍ **Lời giải.**

- Ta có $f(x)\mathrm{e}^{2x}=F'(x)=x\mathrm{e}^x$.
- Suy ra $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}.f(x)-2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-2(x-1)\mathrm{e}^x=(2-x)\mathrm{e}^x+C$

Chọn đáp án C □

Câu 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1+8^x}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(1+8^x)^2}+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{8^x\ln 8}{1+8^x}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x+\dfrac{\ln(1+8^x)}{\ln 8}+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x-\dfrac{\ln(1+8^x)}{\ln 8}+C$.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{1+8^x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1+8^x-8^x}{1+8^x}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{8^x}{1+8^x}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x-\int\frac{8^x}{1+8^x}\,\mathrm{d}x$

$F(x)=x-\dfrac{1}{\ln 8}\displaystyle\int\frac{d(1+8^x)}{1+8^x}=x-\frac{1}{\ln 8}\ln(1+8^x)+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 9. Tính nguyên hàm $\displaystyle\int\frac{x^2-x+3}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

A. $2x+5\ln|x+1|+C$. **B.** $\dfrac{x^2}{2}-2x-5\ln|x-1|+C$.

C. $\dfrac{x^2}{2}-2x+5\ln|x+1|+C$. **D.** $x+5\ln|x+1|+C$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int\frac{x^2-x+3}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int(x-2+\frac{5}{x+1})\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-2x+5\ln|x+1|+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Gọi $F(x)$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=8\sin 3x\cos x$. Biết rằng $F(x)$ có dạng $F(x)=a\cos 4x+b\cos 2x+C$. Khi đó, $a-b$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int 8\sin 3x\cos x\,\mathrm{d}x=4\int(\sin 4x+\sin 2x)\,\mathrm{d}x=-\cos 4x-2\cos 2x+C$.

Suy ra $a=-1$, $b=-2$. Vậy $a-b=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 11. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=1$ và $f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}f(x)$. Khi đó hiệu $T=f\left(2\sqrt{2}\right)-2f(1)$ thuộc khoảng nào?

A. $(2;3)$. **B.** $(7;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(9;12)$.

✍ Lời giải.

Ta có:

$$f'(x)=\frac{x}{x^2+1}f(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\ln|f(x)|=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C\Rightarrow\ln f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}+C\ (\text{ vì } f(x)\text{ luôn dương trên }\mathbb{R}\ ).$$

Mà $f(0)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow T=f\left(2\sqrt{2}\right)-2f(1)=3-2\sqrt{2}\in(0;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 12. Cho $\displaystyle\int_2^3\frac{5x+12}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x=a\ln2+b\ln5+c\ln6$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị $3a+2b+c$ bằng

A. 3. **B.** -14. **C.** -2. **D.** -11.

✍ Lời giải.

Ta có: $\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}=\dfrac{5x+12}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}=\dfrac{(A+B)x+3A+2B}{x^2+5x+6}$.

Khi đó: $\begin{cases}A+B=5\\3A+2B=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=3.\end{cases}$

Nên

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{5x+12}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x&=\int_2^3\frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{3}{x+3}\,\mathrm{d}x\\&=2\ln|x+2|\Big|_2^3+3\ln|x+3|\Big|_2^3\\&=3\ln6-\ln5-2\ln4\\&=-4\ln2-\ln5+3\ln6.\end{aligned}$$

Vậy $a=-4$, $b=-1$, $c=3\Rightarrow3a+2b+c=-11$.

Chọn đáp án D □

Câu 13. Cho $f(x)=\dfrac{x}{\cos^2x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $x\cdot f'(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$?

A. $\dfrac{\pi^2}{36}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln2$. **B.** $\dfrac{4\pi^2}{9}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln2$. **C.** $\dfrac{4\pi^2}{9}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln2$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{36}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln2$.

✍ Lời giải.

Ta có $F(x)=\displaystyle\int x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}(f(x))=x\cdot f(x)-\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{\cos^2x}-\int\frac{x}{\cos^2x}\,\mathrm{d}x$.

Mà $\displaystyle\int\frac{x}{\cos^2x}\,\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}(\tan x)=x\cdot tanx-\int\tan x\,\mathrm{d}x=x\cdot\tan x+\ln(\cos x)+C$, (vì $\cos x>0$).

Do đó $F(x)=\dfrac{x^2}{\cos^2x}-x\tan x-\ln(\cos x)+C$. Mà $F(0)=0$ nên $C=0$.

Vậy $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{4\pi^2}{9}-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}+\ln2$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^9+3x^5}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3x^4} + \dfrac{1}{36}\ln\left|\dfrac{x^4}{x^4+3}\right| + C.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{12x^4} - \dfrac{1}{36}\ln\left|\dfrac{x^4}{x^4+3}\right| + C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3x^4} - \dfrac{1}{36}\ln\left|\dfrac{x^4}{x^4+3}\right| + C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{12x^4} + \dfrac{1}{36}\ln\left|\dfrac{x^4}{x^4+3}\right| + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^9+3x^5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^5(x^4+3)} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{(x^4+3)-x^4}{x^5(x^4+3)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^4+3)}\right) = \frac{1}{3}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5} - \frac{1}{3}\int \frac{(x^4+3)-x^4}{x(x^4+3)}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5} - \frac{1}{9}\left[\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^4+3}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5} - \frac{1}{9}\left[\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x^4+3)}{x^4+3}\right] \\
&= -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+3}\right| + C.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2$ và $F(e) = \ln 2$. Giá trị của biểu thức $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F(\mathrm{e}^2)$ bằng

A. $3\ln 2 + 2.$ **B.** $\ln 2 + 2.$ **C.** $\ln 2 + 1.$ **D.** $2\ln 2 + 1.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}(\ln x) = \ln|\ln x| + C = \begin{cases} \ln(\ln x) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + C_2 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

Theo đầu bài $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2 \Rightarrow \ln\left(-\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\right) + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2.$

Và $F(e) = \ln 2 \Rightarrow \ln(\ln x) + C_1 = \ln 2 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2.$

Từ đó ta có $F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + \ln 2 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + 2 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

Từ đó suy ra $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F(\mathrm{e}^2) = \ln\left(-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + 2 + \ln\left(\ln \mathrm{e}^2\right) + \ln 2 = 3\ln 2 + 2.$

Vậy $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right) + F(\mathrm{e}^2) = 3\ln 2 + 2.$

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho biết $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x - \dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{(x^2+a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $g(x) = x\cos ax$.

A. $x\sin x - \cos x + C.$ **B.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + C.$

C. $x\sin x + \cos x + C.$ **D.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+2x-\dfrac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{(x^2+a)^2}{x^2}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad F'(x)=f(x), \quad \forall x\neq 0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+2+\frac{1}{x^2}=\frac{x^4+2ax^2+a^2}{x^2}, \quad \forall x\neq 0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+2+\frac{1}{x^2}=x^2+2a+\frac{a^2}{x^2}, \quad \forall x\neq 0\\
&\Leftrightarrow \quad a=1
\end{aligned}$$

Suy ra $g(x)=x\cos x$

Suy ra $\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x=\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x\end{cases}\Rightarrow\displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x=x\sin x-\int\sin x\,\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C.$

Chọn đáp án C ☐

Câu 17. Biết $F(x)=\log_2\left|\dfrac{2^x+a}{2^x-2}\right|+b$ $(a,b\in\mathbb{Z})$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2^x+6\cdot 2^{-x}-5}$ thỏa mãn $F(2)=2018$. Tính $P=a+b$.

A. $P=2017$. **B.** $P=2019$. **C.** $P=2016$. **D.** $P=2022$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
F(x)=\int\frac{1}{2^x+6\cdot 2^{-x}-5}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{2^x}{2^{2x}-5\cdot 2^x+6}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{1}{2^{2x}-5\cdot 2^x+6}\,\mathrm{d}(2^x)\\
&=\frac{1}{\ln 2}\int\left(\frac{1}{2^x-3}-\frac{1}{2^x-2}\right)\mathrm{d}(2^x)\\
&=\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\left|\frac{2^x-3}{2^x-2}\right|+C\\
&=\log_2\mathrm{e}\cdot\ln\left|\frac{2^x-3}{2^x-2}\right|+C\\
&=\log_2\left|\frac{2^x-3}{2^x-2}\right|+C.
\end{aligned}$$

Vì $F(2)=2018$ nên $\log_2\dfrac{1}{2}+C=2018\Leftrightarrow C=2019$.

Do đó $F(x)=\log_2\left|\dfrac{2^x-3}{2^x-2}\right|+2019$. Vậy $a=-3$, $b=2019$ và $P=a+b=-3+2019=2016$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 18. Cho $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{2x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{4x^2}{\sqrt{2x-1}}$ trên $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=2$. **B.** $S=\dfrac{9}{5}$. **C.** $S=\dfrac{28}{15}$. **D.** $S=1$.

✍ **Lời giải.**

Theo giả thiết ta có

$$\frac{4x^2}{\sqrt{2x-1}}=F'(x)=\frac{5ax^2+(3b-2a)x-b+c}{\sqrt{2x-1}}.$$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases}5a=4\\ 3b-2a=0\\ -b+c=0\end{cases}$, suy ra $a=\dfrac{4}{5}$, $b=c=\dfrac{8}{15}$. Vậy $S=\dfrac{28}{15}$.

Chọn đáp án C □

Câu 19. Biết $\int \dfrac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}\,\mathrm{d}x = \ln|(x-1)^m(x-2)^n(x-3)^p| + C$. Tính $4(m+n+p)$.

A. 5. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \ln|x-1 - 5\ln|x-2| + 5\ln|x-3| + C = \ln|(x-1)(x-2)^{-5}(x-3)^5| + C.$$

Suy ra $m=1, n=-5, p=5$. Vậy $4(m+n+p)=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ thoả mãn $F(5)=2$ và $F(0)=1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $F(-1) = 2-\ln 2$. **B.** $F(2) = 2-2\ln 2$. **C.** $F(3) = 1+\ln 2$. **D.** $F(-3) = 2$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \begin{cases} \ln|x-1| + C_1 & \text{với } x>1 \\ \ln|x-1| + C_2 & \text{với } x<1 \end{cases}$.

Với $F(5)=2$ và $F(0)=1$ ta có $F(x) = \begin{cases} \ln|x-1| + 2 - 2\ln 2 & \text{với } x>1 \\ \ln|x-1| + 1 & \text{với } x<1 \end{cases}$.

Từ đó ta có $F(2) = 2-2\ln 2$ là đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-2x}$. Biết rằng $f(-2)+f(4)=0$ và $f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2018$. Tính $T = f(-1)+f(1)+f(5)$.

A. $T = \dfrac{1}{2}\ln 5 + 1009$. **B.** $T = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5} + 1009$. **C.** $T = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5} + 2018$. **D.** $T = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + C$.

Suy ra $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right| + C_1 \text{ khi } x<0 \\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right| + C_2 \text{ khi } 0<x<2 \\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right| + C_3 \text{ khi } x>2. \end{cases}$

Do $f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2018 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\ln 3 + \ln\dfrac{1}{3}\right) + 2C_2 = 2018 \Leftrightarrow C_2 = 1009$.

Lại có $f(-2)+f(4)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(\ln 2 + \ln\dfrac{1}{2}\right) + C_1 + C_3 = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_3 = 0$.

Do đó $T = f(-1)+f(1)+f(5) = \dfrac{1}{2}\left(\ln 3 + \ln 1 + \ln\dfrac{3}{5}\right) + C_1 + C_2 + C_3 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5} + 1009$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5} + C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là

A. $\dfrac{x+3}{2\left(x^2+4\right)} + C$. **B.** $\dfrac{x+3}{x^2+4} + C$. **C.** $\dfrac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)} + C$. **D.** $\dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)} + C$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = 2\,\mathrm{d}t$.

Khi đó $\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \int 2f(t)\mathrm{d}t.$

Mà $\int \frac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5}+C$ nên $\int 2f(t)\mathrm{d}t = \frac{2(t+3)}{t^2+4}+C.$

Khi đó

$$\begin{aligned} & \int f(t)\mathrm{d}t = \frac{t+3}{t^2+4}+C \\ \Leftrightarrow\ & \int f(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2t+3}{4t^2+4}+C \\ \Leftrightarrow\ & \int f(2x)\mathrm{d}x = \frac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)}+C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 23. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2)+F(1)=0$. Giá trị của $F(-1)+F(2)$ bằng

A. $\frac{7}{3}\ln 2$. **B.** $\frac{2}{3}\ln 2+\frac{3}{6}\ln 5$. **C.** $\frac{10}{3}\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5$. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\int \frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x,\ (x>-3).$

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+3) \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{x+3}\mathrm{d}x \\ v=-\frac{1}{x} \end{cases}.$

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{x}\ln(x+3)+\int \frac{1}{x(x+3)}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C. \end{aligned}$$

Suy ra

$$F(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln\frac{x}{x+3}+C_1 \text{ khi } x>0 \\ -\frac{1}{x}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln\frac{-x}{x+3}+C_2 \text{ khi } -3<x<0. \end{cases}$$

Khi đó

$F(-2)=\frac{1}{3}\ln 2+C_2.$

$F(1)=-\ln 4+\frac{1}{3}\ln\frac{1}{4}+C_1.$

$F(-2)+F(1)=0\Rightarrow C_1+C_2=\frac{7}{3}\ln 2.$

$F(-1)=\ln 2+\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_2.$

$F(2)=-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}+C_1.$

$\Rightarrow F(-1)+F(2)=\ln 2+\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}+C_1+C_2=\frac{10}{3}\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5.$

Chọn đáp án C □

Câu 24. Biết $\int(\sin 2x-\cos 2x)^2\mathrm{d}x = x+\frac{a}{b}\cos 4x+C$, với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C\in\mathbb{R}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

✍ Lời giải.

Ta có $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \,\mathrm{d}x = \int (1 - 2\sin 2x \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \int (1 - \sin 4x)\,\mathrm{d}x = x + \dfrac{1}{4}\cos 4x + C$.

Mà $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 \,\mathrm{d}x = x + \dfrac{a}{b}\cos 4x + C$ nên $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Tính $I = \displaystyle\int_0^{2018} \dfrac{\ln(1+2^x)}{(1+2^{-x})\log_4 e}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \ln^2\left(1+2^{2018}\right) - \ln^2 2$.
B. $I = \ln^2\left(1+2^{2018}\right) - \ln 4$.
C. $I = \ln\left(1+2^{2018}\right) - \ln 2$.
D. $I = \ln^2\left(1+2^{-2018}\right) - \ln^2 2$.

✍ Lời giải.

Đặt $t = \ln(1+2^x)$, ta có $\mathrm{d}t = \dfrac{2^x \ln 2}{1+2^x} = \dfrac{\ln 2}{1+2^{-x}}\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \ln 2$; $x = 2018 \Rightarrow t = \ln\left(1+2^{2018}\right)$.

Khi đó $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln(1+2^{2018})} \dfrac{t}{\ln 2.\log_4 e}\,\mathrm{d}t = \left(\dfrac{1}{\log_4 2}\cdot\dfrac{t^2}{2}\right)\Big|_{\ln 2}^{\ln(1+2^{2018})} = \ln^2\left(1+2^{2018}\right) - \ln^2 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $y = 4\cos^4 x - 3\cos^2 x$. $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $F(x) = \dfrac{\cos 4x}{8} + \dfrac{\cos 2x}{4} + C$.
B. $F(x) = \sin^3 x \cos x + C$.
C. $F(x) = -\sin x \cos^3 x + C$.
D. $F(x) = \dfrac{\sin 4x}{8} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

✍ Lời giải.

Ta có $4\cos^4 x - 3\cos^2 x = \dfrac{\cos 4x}{2} + 2\cos 2x + \dfrac{3}{2} - \dfrac{3(\cos 2x + 1)}{2} = \dfrac{\cos 4x}{2} + \dfrac{\cos 2x}{2}$.

$F(x) = \displaystyle\int \left(\dfrac{\cos 4x}{2} + \dfrac{\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{\sin 4x}{8} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0) = 2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6 - \dfrac{15}{\mathrm{e}}$.
B. $4 - \dfrac{10}{\mathrm{e}}$.
C. $\dfrac{15}{\mathrm{e}} - 4$.
D. $\dfrac{10}{\mathrm{e}}$.

✍ Lời giải.

Xét $I = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt[3]{x}$ suy ra $t^3 = x$ nên $3t^2\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ khi đó $I = \displaystyle\int 3t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Theo công thức tích phân từng phần

$$I = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\int 2t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\left(2t\mathrm{e}^t - \int 2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) = 3t^2\mathrm{e}^t - 3\left(2t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t\right) + C$$

Suy ra $I = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sqrt[3]{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 3\left(2\sqrt[3]{x}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 2\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right) + C$

hay $F(x) = 3\sqrt[3]{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 3\left(2\sqrt[3]{x}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}} - 2\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\right) + C$.

Do $F(0) = 2$ suy ra $6 + C = 2 \Leftrightarrow C = -4$. Khi đó $F(-1) = \dfrac{3}{\mathrm{e}} - 3\left(-\dfrac{2}{\mathrm{e}} - \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right) - 4 = \dfrac{15}{\mathrm{e}} - 4$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và $f\left(\dfrac{1}{3}\right) + f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(-5) + f(0) + f(2)$.

A. $T=5-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **B.** $T=6-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **C.** $T=5+\dfrac{1}{2}\ln 2$. **D.** $T=6+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$ nên

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & \text{khi } x\in(1;+\infty),\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & \text{khi } x\in(-\infty;-1),\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_3 & \text{khi } x\in(-1;1).\end{cases}$$

Theo đề bài ta có

$$f(-3)=\frac{1}{2}\ln 2+C_2,$$
$$f(3)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C_1.$$

Mà

$$f(3)+f(-3)=4\Leftrightarrow C_1+C_2=4. \qquad (1)$$

Tương tự

$$f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(-\frac{1}{3}\right)=2\Leftrightarrow 2C_3=2\Leftrightarrow C_3=1.$$

Ta có $\begin{cases}f(-5)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}+C_2\\ f(0)=1\\ f(2)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}+C_1\end{cases}\Rightarrow f(-5)+f(0)+f(2)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+1+C_1+C_2.$

Từ (1) suy ra $f(-5)+f(0)+f(2)=-\dfrac{1}{2}\ln 2+1+C_1+C_2=-\dfrac{1}{2}\ln 2+5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 29. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ và $F(0)=2018$. Tính $F(-2)$.

A. $F(-2)$ không xác định. **B.** $F(-2)=2$.

C. $F(-2)=2018$. **D.** $F(-2)=2020$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|+C$.

Ta có $F(0)=2018$ nên $C=2018$.

Suy ra $F(-2)=2020$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30. Biết $F(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x^2+5x+5)\mathrm{e}^x$. Giá trị của $2a+3b+c$ là

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 13.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F'(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x+(2ax+b)\mathrm{e}^x=(ax^2+(2a+b)x+b+c)\mathrm{e}^x$.

Từ giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=5 \\ b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=2. \end{cases}$$

Vậy $2a+3b+c=13$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 31. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x-1$ thỏa mãn $F(0)=-1$. Đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm chung?

A. Không có. **B**. 1. **C**. 2. **D**. Vô số.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(4x-1)\,\mathrm{d}x=2x^2-x+C.$$

Vì $F(0)=-1$ nên

$$2\cdot 0^2-0+C=-1\Leftrightarrow C=-1.$$

Vậy $F(x)=2x^2-x-1$. Số điểm chung của hai đồ thị $y=f(x)$ và $y=F(x)$ bằng số nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} & 2x^2-x-1=4x-1 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2-5x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=F(x)$ có 2 điểm chung.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32. Đặt $A=\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x$, $B=\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Xác định $A-B$.

A. $A-B=-\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x+C$. **B**. $A-B=-\cos 2x+C$.

C. $A-B=-2\cos 2x+C$. **D**. $A-B=\dfrac{1}{2}\cdot\sin 2x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $A-B=\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^{2x}$.

A. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=2x^2-2x+C$. **B**. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=-x^2+2x+C$.

C. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=-2x^2+2x+C$. **D**. $\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=-x^2+x+C$.

✍ **Lời giải.**

Vì $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ nên ta có $f(x)\mathrm{e}^{2x}=F'(x)=2x$.

Đặt $\begin{cases} u=\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$. Khi đó, ta có

$$\int f'(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}\cdot f(x)-2\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=2x-2x^2+C.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Xét hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$, $f(-3)+f(3)=f(-1)+f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(0)+f(4)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

✍ Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{4}{x^2-4}\mathrm{d}x=4\int\frac{1}{(x-2)(x+2)}\mathrm{d}x=4\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x$

$=\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+c$

Khi đó ta có $f(-3)+f(3)=\ln 5+c+\ln\dfrac{1}{5}+c=2\Rightarrow 2c=2\Rightarrow c=1$.

Suy ra $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|+1$.

Do đó $f(-4)+f(0)+f(4)=\ln 3+1+\ln 1+1+\ln\dfrac{1}{3}+1=3$. Vậy $f(-4)+f(0)+f(4)=3$

Chọn đáp án (D) □

Câu 35. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}+m$ thoả mãn $F(0)=0$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$. Giá trị của m bằng

A. $\dfrac{4}{\pi}$. **B.** $-\dfrac{4}{\pi}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$F(x)=\int\frac{1}{\cos^2 x}+m\,\mathrm{d}x=\tan x+mx+C.$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases}F(0)=0\\F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\tan 0+C=0\\\tan\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}m+C=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=0\\1+\dfrac{\pi}{4}m=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=0\\m=\dfrac{4}{\pi}.\end{cases}$$

Vậy $m=\dfrac{4}{\pi}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36. Biết $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{x}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{\sqrt{x}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Tính tổng $S=5a+4b+3c$.

A. $S=14$. **B.** $S=12$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

✍ Lời giải.

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên $F'(x)=f(x),\forall x\in(0;+\infty)$.

Ta có

$$F'(x)=(2ax+b)\sqrt{x}+\frac{ax^2+bx+c}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{5ax^2+3bx+c}{2\sqrt{x}}$$

Vì $F'(x)=f(x),\forall x\in(0;+\infty)$, nên $\dfrac{5ax^2+3bx+c}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2x^2-3x+2}{\sqrt{x}},\forall x\in(0;+\infty)$. Hay

$$5ax^2+3bx+c=4x^2-6x+4,\forall x\in(0;+\infty).$$

Đồng nhất các hệ số, được $\begin{cases}a=\dfrac{4}{5}\\b=-2\\c=4\end{cases}$. Vậy $S=5\cdot\dfrac{4}{5}+4\cdot(-2)+3\cdot 4=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 37. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^3 x$ có dạng là $F(x)=-\dfrac{a}{b}\sin^5 x+\dfrac{c}{d}\sin^3 x$, với $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{c}{d}$ là phân số tối giản và a,b,c,d là các số nguyên dương. Tính $T=a+b+c+d$.

A. Đáp án khác. **B.** $T=11$. **C.** $T=10$. **D.** $T=9$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sin^2 x\cdot\cos^3 x\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sin^2 x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)\mathrm{d}(\sin x) \\ &= \int \left(\sin^2 x-\sin^4 x\right)\mathrm{d}(\sin x) \\ &= -\frac{1}{5}\sin^5 x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C. \end{aligned}$$

Vậy $a=1$, $b=5$, $c=1$, $d=3\Rightarrow T=a+b+c+d=10$.

Chọn đáp án C □

Câu 38. Xét hàm số $f(x)=x^2+ax+\ln|bx+1|+c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$. Biết $f'(x)=\dfrac{4x^2+4x+3}{2x+1}$ và $f(0)=1$. Tính giá trị $S=c(2a-b)^2$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{4x^2+4x+3}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(2x+1+\frac{2}{2x+1}\right)\mathrm{d}x=x^2+x+\ln|2x+1|+C.$

Suy ra $a=1$, $b=2$.

Lại có: $f(0)=1\Rightarrow C=1$ hay $c=1$. Vậy $S=c(2a-b)^2=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Tìm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\mathrm{e}^x-1$, biết $F(0)=2$.

A. $F(x)=6x+\mathrm{e}^x-x-1$. **B.** $F(x)=x^3+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}-x+1$.

C. $F(x)=x^3+\mathrm{e}^x-x+1$. **D.** $F(x)=x^3+\mathrm{e}^x-x-1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int(3x^2+\mathrm{e}^x-1)\,\mathrm{d}x=x^3+\mathrm{e}^x-x+C$.

Mặt khác $F(0)=2\Rightarrow C=1\Rightarrow F(x)=x^3+\mathrm{e}^x-x+1$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$ là

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int\frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$

Chọn đáp án D □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\dfrac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2017)+f(2018)=\dfrac{a}{b}$ với $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*)$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{a}{b}<-1$. **B.** $\dfrac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$f'(x)=(2x+3)f^2(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+3)\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C.$$

Vì $f(0)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2017)+f(2018)=\dfrac{1}{2020}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1009}{2020}$.

Vậy $a=-1009$; $b=2020$. Do đó $b-a=3029$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1-\sin^3x}{\sin^2x}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Có bao nhiêu số thực $x\in(0;2018\pi)$ để $F(x)=1$.

A. 2018. **B.** 1009. **C.** 2017. **D.** 2016.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2x}-\sin x$, suy ra $F(x)=-\cot x+\cos x+C$.

Do $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $C=1$, khi đó $F(x)=-\cot x+\cos x+1$.

Vậy $F(x)=1\Leftrightarrow\cot x-\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Do $x\in(0;2018\pi)\Rightarrow 0<\dfrac{\pi}{2}+k\pi<2018\pi\Rightarrow 0<\dfrac{1}{2}+k$, từ đó suy ra có 2018 số thực thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Biết $\displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=ax\sin 2x+b\cos 2x+C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab.

A. $ab=\dfrac{1}{8}$. **B.** $ab=\dfrac{1}{4}$. **C.** $ab=-\dfrac{1}{8}$. **D.** $ab=-\dfrac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\left\{\begin{array}{l}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{\sin 2x}{2}\end{array}\right.$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.\end{aligned}$$

Suy ra $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{4}\Rightarrow ab=\dfrac{1}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 44. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+1$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=(2x+1)^2+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(2x+1)^2+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}(2x+1)^2 + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2(2x+1)^2 + C$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int (2x+1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x+1)^2}{2} + C = \dfrac{1}{4}(2x+1)^2 + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = 2\sin x\cos 3x$ và $F(0) = 0$, khi đó

A. $F(x) = \cos 4x - \cos 2x$. **B.** $F(x) = \dfrac{\cos 2x}{4} - \dfrac{\cos 4x}{8} - \dfrac{1}{8}$.

C. $F(x) = \dfrac{\cos 2x}{2} - \dfrac{\cos 4x}{4} - \dfrac{1}{4}$. **D.** $F(x) = \dfrac{\cos 4x}{4} - \dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int 2\sin x\cos 3x\,\mathrm{d}x = \int (-\sin 2x + \sin 4x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\cos 2x}{2} - \dfrac{\cos 4x}{4} + C$.

Vì $F(0) = 0$, suy ra $C = -\dfrac{1}{4}$.

Vậy $F(x) = \dfrac{\cos 2x}{2} - \dfrac{\cos 4x}{4} - \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 46. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3^x - 2x$ là

A. $F(x) = \dfrac{3^x}{\ln 3} - x^2 - 1$. **B.** $F(x) = \dfrac{3^x}{\ln 3} - 2$. **C.** $F(x) = \dfrac{3^x}{\ln 3} - \dfrac{x^2}{2}$. **D.** $F(x) = 3^x\ln 3 - x^2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int (3^x - 2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3^x}{\ln 3} - x^2 + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 47. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C$. **B.** $x^3 + \sin x + C$. **C.** $x^3 - \cos x + C$. **D.** $x^3 - \sin x + C$.

✍ **Lời giải.**

$\int (3x^2 + \sin x)\,\mathrm{d}x = x^3 - \cos x + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\int [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int 2f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int g(x)\,\mathrm{d}x$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án D □

Câu 49. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^{4x}$.

A. $\int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} + C$. **B.** $\int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}^{x} + C$. **C.** $\int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{4x} + C$. **D.** $\int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}^{4x} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} + C$.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Biết $\int (x-2)\sin 3x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{(x-a)\cos 3x}{b} + \dfrac{1}{c}\sin 3x + 2017$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó $S = ab + c$ bằng

A. $S = 15$. **B.** $S = 10$. **C.** $S = 14$. **D.** $S = 3$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ \mathrm{d}v = \sin 3x\,\mathrm{d}x \end{cases}$. Khi đó $\begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x. \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned} \int (x-2)\sin 3x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3}(x-2)\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C \\ &= -\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + 2017 \text{ (với } C = 2017). \end{aligned}$$

Như vậy $a = 2$, $b = 3$, $c = 9$. Do đó $S = 2\cdot 3 + 9 = 15$.

Chọn đáp án A □

Câu 51. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ là

A. $20x^3 - 12x + C$. **B.** $x^5 - 2x^3 + x + C$. **C.** $20x^5 - 12x^3 + x + C$. **D.** $\dfrac{x^4}{4} + 2x^2 - 2x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \left(5x^4 - 6x^2 + 1\right)\mathrm{d}x = x^5 - 2x^3 + x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Cho số thực $x > 0$. Chọn đẳng thức **đúng** trong các khẳng định sau

A. $\int \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln x + C$. **B.** $\int \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln^2 x + C$.

C. $\int \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln^2 x + C$. **D.** $\int \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$.

Chọn đáp án D □

Câu 53. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 2\cos x$ biết $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ là

A. $F(x) = 2\sin x - \cos x + 2$. **B.** $F(x) = 2\sin x - \cos x - 2$.

C. $F(x) = -2\sin x - \cos x + 2$. **D.** $F(x) = \sin x - 2\cos x - 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int (\sin x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x = -\cos x + 2\sin x + C$.

Do $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C = -2$. Vậy $F(x) = 2\sin x - \cos x - 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos(2x+1)$ là

A. $2\sin(2x+1) + C$. **B.** $\sin(2x+1) + C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\sin(2x+1) + C$. **D.** $-\dfrac{1}{2}\sin(2x+1) + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \cos(2x+1)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \cos(2x+1)\mathrm{d}(2x+1) = \dfrac{1}{2}\sin(2x+1) + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x - C$.

B. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + 3C$.

C. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C$.

D. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x - 5 + C$.

✍ **Lời giải.**

$\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C$ sai vì $(\cos x + C)' = -\sin x$.

Các nguyên hàm:

$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x - C$ đúng vì $(\sin x - C)' = \cos x$.

$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \cot x - 3C$ đúng vì $(-\cot x + 3C)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x - 5 + C$ đúng vì $(\tan x - 5 + C)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Xét nguyên hàm $I = \int x\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t = \sqrt{x+2}$ thì ta được

A. $I = \int (t^4 - 2t^2)\,\mathrm{d}t$. **B.** $I = \int (4t^4 - 2t^2)\,\mathrm{d}t$. **C.** $I = \int (2t^4 - 4t^2)\,\mathrm{d}t$. **D.** $I = \int (2t^4 - t^2)\,\mathrm{d}t$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow t^2 = x + 2$. Vi phân hai vế ta được $2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Khi đó $I = \int (t^2 - 2)\cdot t \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int (2t^4 - 4t^2)\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án C □

Câu 57. Họ các nguyên hàm của hàm số $y = x\sin x$ là

A. $-x\cos x + C$. **B.** $-x\cos x + \sin x + C$. **C.** $-x\sin x + \cos x + C$. **D.** $x^2 \sin\dfrac{x}{2} + C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u = x, v' = \sin x$ ta có $u' = 1, v = -\cos x$. Khi đó áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có $I = \int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x + C = -x\cos x + \sin x + C$.

Chọn đáp án B □

Câu 58. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1 + \cos 4x}{2}$ là

A. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{8}\sin 2x + C$. **B.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sin 4x + C$. **C.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{8}\sin 4x + C$. **D.** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 4x + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sin 4x}{8} + C$.

Chọn đáp án C □

Câu 59. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\mathrm{e}^x} + C$.

B. $\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = -2\cos 2x + C$.

C. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$.

D. $\int 2^x\,\mathrm{d}x = 2^x \cdot \ln 2 + C$.

✍ **Lời giải.**

Bằng cách so sánh hàm dưới dấu nguyên hàm với đạo hàm của các hàm ở vế phải tương ứng ở các phương án, ta thấy chỉ có một trường hợp cho kết quả đúng, là $\left(2\sqrt{\mathrm{e}^x} + C\right)' = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{4}{1-4x}$ trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$ thỏa mãn $F(0) = 10$. Tính $F(-1)$.

A. $F(-1)=10-4\ln 5$. **B.** $F(-1)=10+4\ln 5$. **C.** $F(-1)=10+\ln 5$. **D.** $F(-1)=10-\ln 5$.

✍ **Lời giải.**

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{4}{1-4x}$ nên $F(x)$ có dạng $F(x)=-\ln|1-4x|+C$. Lại có $F(0)=10$ nên $C=10$. Vậy $F(-1)=-\ln 5+10$.

Chọn đáp án D □

Câu 61. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{3x}\left(1-3\mathrm{e}^{-5x}\right)$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^{-2x}+C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^{3x}+6\mathrm{e}^{-2x}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\mathrm{e}^{3x}\left(1-3\mathrm{e}^{-5x}\right)=\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^{-2x}$. Do đó, $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 62. Xét trên khoảng $(0;+\infty)$, hàm số nào dưới đây không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$?

A. $F_1(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x}$. **B.** $F_2(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$. **C.** $F_3(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x}$. **D.** $F_4(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$.

✍ **Lời giải.**

Do $(F_4(x))'=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)'=1+\dfrac{1}{x^2}$, trong khi $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ nên $F_4(x)$ không phải là một nguyên hàm của $f(x)$.

Chọn đáp án D □

Câu 63. Hàm số $F(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x)=x^2\mathrm{e}^{x^2}+3$. **B.** $f(x)=2x^2\mathrm{e}^{x^2}+C$. **C.** $f(x)=2x\mathrm{e}^{x^2}$. **D.** $f(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F'(x)=\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)'=(x^2)'\cdot\mathrm{e}^{x^2}=2x\mathrm{e}^{x^2}$.

Vậy $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x\mathrm{e}^{x^2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{-3x+1}$ là

A. $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **B.** $-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **C.** $3\mathrm{e}^{-3x+1}+C$. **D.** $-3\mathrm{e}^{-3x+1}+C$.

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax+b}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b}+C$, ta được

$$\int \mathrm{e}^{-3x+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+1}+C.$$

Chọn đáp án B □

Câu 65. Họ nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{2x^4+3}{x^2}$ là

A. $\dfrac{2x^3}{3}-3\ln|x|+C$. **B.** $\dfrac{2x^3}{3}+3\ln x+C$. **C.** $\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{3}{x}+C$. **D.** $\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{3}{x}+C$.

✍ **Lời giải.**

$$\int \frac{2x^4+3}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(2x^2+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}-\frac{3}{x}+C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 66. Để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$ thì giá trị của m là

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F'(x)=3mx^2+2(3m+2)x-4$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì

$$3mx^2+2(3m+2)x-4=3x^2+10x-4,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Đồng nhất hai vế, thu được $m=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 67. Họ nguyên hàm $\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C$. **B.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C$. **C.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$. **D.** $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Tính $I=\int 8\sin 3x\cos x\,\mathrm{d}x=a\cos 4x+b\cos 2x+C$. Khi đó $a-b$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=4\int(\sin 4x+\sin 2x)\,\mathrm{d}x=-\cos 4x-2\cos 2x+C\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases}\Rightarrow a-b=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3}{3x+1}$ là

A. $\ln|3x+1|+C$. **B.** $\dfrac{1}{3x+1}+C$. **C.** $\dfrac{9}{(3x+1)^2}+C$. **D.** $3\ln|3x+1|+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\dfrac{3}{3x+1}\,\mathrm{d}x=\ln|3x+1|+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

A. $\int\dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{(x+1)^3}+C$. **B.** $\int\dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{-1}{x+1}+C$.

C. $\int\dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x+1}+C$. **D.** $\int\dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{-2}{(x+1)^3}+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int\dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}(x+1)=\dfrac{-1}{x+1}+C$.

Chọn đáp án B □

Câu 71. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ và $u(x)\in[\alpha;\beta]$, $\forall x\in[a;b]$, hơn nữa $f(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$. **B.** $\int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.

C. $\int\limits_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$. **D.** $\int\limits_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}u$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án C □

Câu 72. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2^{2x}$.

A. $F(x)=2^{2x}\cdot\ln 2$. **B.** $F(x)=\dfrac{2^{2x}}{\ln 2}+C$. **C.** $F(x)=\dfrac{4^x}{\ln 4}+C$. **D.** $F(x)=4^x\cdot\ln 4+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int 2^{2x}\,\mathrm{d}x=\int 4^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{4^x}{\ln 4}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 73. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|1-2x|+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-2\ln|1-2x|+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln|1-2x|+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

✍ **Lời giải.**

$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1-2x}=-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x}=-\dfrac{1}{2}\ln|1-2x|+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin(2x+1)$ là

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\cos(2x+1)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\sin(2x+1)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Chọn công thức đúng trong các công thức dưới đây.

A. $\int\dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=2\ln x+C$. **B.** $\int\dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=2\ln^2 x+C$.

C. $\int\dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\ln^2 x+C$. **D.** $\int\dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{\ln^2 x}{2}+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 76. $F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)\mathrm{e}^{-x}+2018\mathrm{e}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(-2x^3+3x^2+7x-2)\mathrm{e}^{-x}$. Khi đó

A. $a+b+c+d=4$. **B.** $a+b+c+d=6$. **C.** $a+b+c+d=5$. **D.** $a+b+c+d=7$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F'(x)=\mathrm{e}^{-x}(-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+c-d)$ và $F'(x)=f(x)$ suy ra $a=2;b=3;c=-1;d=1$, do đó $a+b+c+d=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 77. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{2018}$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $F(x)=2017\cdot x^{2018}+C,(C\in\mathbb{R})$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2019}x^{2019}+C,(C\in\mathbb{R})$.

C. $F(x)=x^{2019}+C,(C\in\mathbb{R})$. **D.** $F(x)=2018\cdot x^{2017}+C,(C\in\mathbb{R})$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int x^{2018}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2019}x^{2019} + C, (C \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \dfrac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{5}{2}$. **B.** $F(x) = 2\mathrm{e}^x + x^2 - \dfrac{1}{2}$. **C.** $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{3}{2}$. **D.** $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + x^2 + C$.

Theo bài ra $F(0) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow C + 1 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $F(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Hàm số $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln^4 x + C$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $f(x) = \dfrac{\ln^3 x}{x}$. **B.** $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^3 x}$. **C.** $f(x) = \dfrac{x}{\ln^3 x}$. **D.** $f(x) = \dfrac{x\ln^3 x}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F'(x) = \dfrac{1}{x}\ln^3 x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 80. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \mathrm{e}^x + \cos x + 2018$ là

A. $F(x) = \mathrm{e}^x + \sin x + 2018x + C$. **B.** $F(x) = \mathrm{e}^x - \sin x + 2018x + C$.

C. $F(x) = \mathrm{e}^x + \sin x + 2018x$. **D.** $F(x) = \mathrm{e}^x + \sin x + 2018 + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^x + \cos x + 2018\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + \sin x + 2018x + C.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 81. Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ và $F(1) = 1$.

A. $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$. **B.** $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}$. **C.** $F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2}$. **D.** $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - \dfrac{5}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Xét $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$ và $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$. Khi đó $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ trở thành $\int t \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}t^3 + C$.

Như vậy $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C \Rightarrow F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

Vì $F(1) = 1$ nên $C = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 82. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3\sqrt{x} + x$.

A. $\int \left(3\sqrt{x} + x\right)\mathrm{d}x = x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2} + C$. **B.** $\int \left(3\sqrt{x} + x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2} + C$.

C. $\int \left(3\sqrt{x} + x\right)\mathrm{d}x = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2} + C$. **D.** $\int \left(3\sqrt{x} + x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2} + C$.

✍ **Lời giải.**

$$\int \left(3\sqrt{x}+x\right)\mathrm{d}x = \int \left(3x^{\frac{1}{2}}+x\right)\mathrm{d}x = 2x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}+C = 2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 83. Cho bốn mệnh đề sau

I) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\cos^3 x}{3}+C.$

II) $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x+2018}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+x+2018)+C.$

III) $\int 3^x\left(2^x+3^{-x}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{6^x}{\ln 6}+x+C.$

IV) $\int 3^x\,\mathrm{d}x = 3^x\cdot\ln 3+C.$

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

A. 3. **B**. 1. **C**. 2. **D**. 4.

✍ **Lời giải.**

Ta lần lượt xét 4 mệnh đề đã cho

— Mệnh đề (I) sai vì $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{\sin 2x}{2}\right)+C.$

— Mệnh đề (II) đúng vì $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x+2018}\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}(x^2+x+2018)}{x^2+x+2018} = \ln(x^2+x+2018)+C.$

— Mệnh đề (III) đúng vì $\int 3^x\left(2^x+3^{-x}\right)\mathrm{d}x = \int \left(6^x+1\right)\mathrm{d}x = \dfrac{6^x}{\ln 6}+x+C.$

— Mệnh đề (IV) sai vì $\int 3^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{3^x}{\ln 3}+C.$

Vậy có 2 mệnh đề đúng.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số: $f(x)=x^2-3x$.

A. $F(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+C.$ **B**. $F(x)=x^3-3x^2+C.$

C. $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2+C.$ **D**. $F(x)=2x-3+C.$

✍ **Lời giải.**

Họ nguyên hàm của hàm $f(x)=x^2-3x$ là $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+C.$

Chọn đáp án C □

Câu 85. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Nếu $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$ thì $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u)+C.$

B. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)=G(x)$.

C. $\int [f_1(x)+f_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x+\int f_2(x)\,\mathrm{d}x.$

D. $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (k là hằng số và $k\neq 0$).

Câu 86. Cho hàm số $f(x)=x^3-x^2+2x-1$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết rằng $F(1)=4$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x.$ **B.** $F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+1.$

C. $F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2.$ **D.** $F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+\dfrac{49}{12}.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+C.$

$F(1)=4\Rightarrow C=\dfrac{49}{12}.$

Vậy $F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+\dfrac{49}{12}.$

Chọn đáp án D □

Câu 87. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=ax+\dfrac{b}{x^2}(x\neq 0)$ biết rằng $F(-1)=1$; $F(1)=4$; $f(1)=0$.

A. $F(x)=\dfrac{3x^2}{4}+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{7}{4}.$ **B.** $F(x)=\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{3}{2x}-\dfrac{7}{4}.$

C. $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{3}{4x}-\dfrac{7}{4}.$ **D.** $F(x)=\dfrac{3x^2}{2}-\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2}.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(ax+\frac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{ax^2}{2}-\frac{b}{x}+c.$

Từ đó $\begin{cases}F(-1)=1\\F(1)=4\\f(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{2}+b+c=1\\\dfrac{a}{2}-b+c=4\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=-\dfrac{3}{2}\\c=\dfrac{7}{4}\end{cases}.$

Vậy $F(x)=\dfrac{3x^2}{4}+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{7}{4}.$

Chọn đáp án A □

Câu 88. Một nguyên hàm của $f(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ là $F(x)=\left(ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$. Tính tổng $a+b+c+d$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}F'(x)&=\left(2ax+b-\frac{d}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}+\left(ax^2+bx+c+\frac{d}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)\\&=\left(2ax+(b-a)-\frac{b}{x}-\frac{c+d}{x^2}-\frac{d}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x}}\\&=f(x).\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases}2a=2\\b-a=-1\\b=0\\c+d=0\\d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=0\\d=0\end{cases}\Rightarrow a+b+c+d=1.$

Chọn đáp án A □

Câu 89. Nếu $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}+\ln|5x|+C$ với $x\in(0;+\infty)$ thì hàm số $f(x)$ là

A. $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{5x}.$ **B.** $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{5x}.$ **C.** $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}.$ **D.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\ln(5x).$

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=\left(\dfrac{1}{x}+\ln|5x|+C\right)'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Tìm m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0$.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+10x-4\right)\mathrm{d}x=x^3+5x^2-4x+C$.

Khi đó $\begin{cases}m=1\\C=3.\end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 91. Tính $\displaystyle\int\dfrac{1}{2x^2+5x+2}\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x+2}{2x+1}\right|+C$. **B.** $\ln\left|\dfrac{x+2}{2x+1}\right|+C$. **C.** $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{2x+1}{x+2}\right|+C$. **D.** $\ln\left|2x^2+5x+2\right|+C$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\text{Ta có }\int\frac{1}{2x^2+5x+2}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{(2x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int\frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C\\&=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2x+1}{x+2}\right|+C.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 92. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin(2x+1)$ là

A. $\cos(2x+1)+C$. **B.** $-\cos(2x+1)+C$. **C.** $\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$. **D.** $-\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u=2x+1\Rightarrow\mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x$.

Khi đó, ta có $\displaystyle\int\sin(2x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin u\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\cos u+C=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 93. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=-2\sin 2x+C$. **B.** $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=2\sin 2x+C$.

C. $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **D.** $\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\cos 2x\,\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

A. $\displaystyle\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos x-\int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^x\cos x-\int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

+ Đặt $\begin{cases} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ v = -\cos x. \end{cases}$

+ Suy ra $\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án B □

Câu 95. Khi tính nguyên hàm $\int \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào dưới đây?

A. $\int 2(u^2-4)u\,\mathrm{d}u.$ **B.** $\int (u^2-4)\mathrm{d}u.$ **C.** $\int 2(u^2-4)\mathrm{d}u.$ **D.** $\int (u^2-3)\mathrm{d}u.$

✍ Lời giải.

Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow 2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Thay vào ta được

$$\int \frac{u^2-1-3}{u}\cdot 2u\,\mathrm{d}u = 2(u^2-4)\mathrm{d}u.$$

Chọn đáp án C □

Câu 96. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan 2x$.

A. $\int \tan 2x\,\mathrm{d}x = 2\left(1+\tan^2 2x\right)+C.$ **B.** $\int \tan 2x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos 2x|+C.$

C. $\int \tan 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2 2x\right)+C.$ **D.** $\int \tan 2x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C.$

✍ Lời giải.

Ta có $\int \tan 2x\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{-\mathrm{d}(\cos 2x)}{\cos 2x} = -\dfrac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C.$

Chọn đáp án D □

Câu 97. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^{2x}$.

A. $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\dfrac{5^{2x}}{\ln 5}+C.$ **B.** $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{25^x}{2\ln 5}+C.$

C. $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = 2\cdot 5^{2x}+C.$ **D.** $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\dfrac{25^{x+1}}{x+1}+C.$

✍ Lời giải.

Ta có $\int 5^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int 5^{2x}\,\mathrm{d}(2x) = \dfrac{5^{2x}}{2\ln 5}+C = \dfrac{25^x}{2\ln 5}+C.$

Chọn đáp án B □

Câu 98. Tìm nguyên hàm của hàm số $F(x) = \int (4x+1)\ln x\,\mathrm{d}x.$

A. $F(x) = \left(2x^2+x\right)\ln x + x^2 + x + C.$ **B.** $F(x) = \left(3x^2+2x\right)\ln x + C.$

C. $F(x) = \left(2x^2+x\right)\ln x - x^2 - x + C.$ **D.** $F(x) = x^2\ln x + C.$

✍ Lời giải.

$F(x) = \int (4x+1)\ln x\,\mathrm{d}x = \int (2x^2+x)'\ln x\,\mathrm{d}x = (2x^2+x)\ln x - \int (2x^2+x)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

$= (2x^2+x)\ln x - \int (2x+1)\,\mathrm{d}x = (2x^2+x)\ln x - x^2 - x + C.$

Chọn đáp án C □

Câu 99. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos 2x$ là

A. $F(x) = -4\sin 2x.$ **B.** $F(x) = 4\sin 2x.$ **C.** $F(x) = -\sin 2x.$ **D.** $F(x) = \sin 2x.$

✍ Lời giải.

$\int 2\cos 2x\,\mathrm{d}x = \int \cos 2x\mathrm{d}(2x) = \sin 2x + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 100. Nguyên hàm $\int e^x(e^x-1)^3\,\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}(e^x-1)^m+C$ (với $a,b\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tìm $H=a^2+b-m$.

A. $H=-4$. **B.** $H=-1$. **C.** $H=4$. **D.** $H=1$.

Lời giải.

$\int e^x(e^x-1)^3\,\mathrm{d}x=\int(e^x-1)^3\,\mathrm{d}\left(e^x-1\right)=\dfrac{1}{4}\left(e^x-1\right)^4+C$.

Suy ra $a=1$, $b=4$, $m=4$ nên $H=a^2+b-m=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 101. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+8\sin x$ và thỏa mãn $F(0)=2010$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=6x-8\cos x+2018$. **B.** $F(x)=6x+8\cos x$.

C. $F(x)=x^3-8\cos x+2018$. **D.** $F(x)=x^3-8\cos x+2019$.

Lời giải.

Ta có $F(x)=\int\left(3x^2+8\sin x\right)\mathrm{d}x=x^3-8\cos x+C$.

Mặt khác $F(0)=2010\Leftrightarrow-8+C=2010\Leftrightarrow C=2018$.

Vậy $F(x)=x^3-8\cos x+2018$.

Chọn đáp án C □

Câu 102. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$ là

A. $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$. **B.** $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2$.

C. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2$.

Lời giải.

Ta có $\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}(1+x^2)=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 103. Tính nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$, biết $F(0)=1$.

A. $F(x)=\mathrm{e}^{2x}$. **B.** $F(x)=\mathrm{e}^{2x}-1$. **C.** $F(x)=\mathrm{e}^x$. **D.** $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$F(x)=\int\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{2x}+C$. Vì $F(0)=1$ nên $C=\dfrac{1}{2}$. Vậy $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 104. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sin x$ là

A. $F(x)=-x\cos x-\sin x+C$. **B.** $F(x)=x\cos x-\sin x+C$.

C. $F(x)=-x\cos x+\sin x+C$. **D.** $F(x)=x\cos x+\sin x+C$.

Lời giải.

$F(x)=\int x\sin x\,\mathrm{d}x$, đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-\cos x.\end{cases}$

Khi đó $F(x)=-x\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 105. Hàm số $F(x)=\cos 3x$ là nguyên hàm của hàm số

A. $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{3}$. **B.** $f(x)=-3\sin 3x$. **C.** $f(x)=3\sin 3x$. **D.** $f(x)=\sin 3x$.

Lời giải.

$F'(x)=f(x)=-3\sin 3x$

Chọn đáp án B □

Câu 106. Cho nguyên hàm $I=\int x\sqrt{1+2x^2}\,\mathrm{d}x$, khi thực hiện đổi biến $u=\sqrt{1+2x^2}$ thì ta được nguyên hàm theo biến mới u là

A. $I=\dfrac{1}{2}\int u^2\,\mathrm{d}u$. **B.** $I=\int u^2\,\mathrm{d}u$. **C.** $I=2\int u\,\mathrm{d}u$. **D.** $I=\int u\,\mathrm{d}u$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $u=\sqrt{1+2x^2}$ suy ra $u^2=1+2x^2$.

Do đó $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u=x\mathrm{d}x$. Suy ra $I=\dfrac{1}{2}\int u^2\,\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án A □

Câu 107. Tìm m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$.

A. $m=3$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

✍ **Lời giải.**

Nguyên hàm của $f(x)$ là x^3+5x^2-4x+C.

Do đó, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ khi và chỉ khi $m=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 108. Tính $F(x)=\int x\sin 2x\mathrm{d}x$. Chọn kết quả đúng?

A. $F(x)=\dfrac{1}{4}(2x\cos 2x+\sin 2x)+C$. **B.** $F(x)=-\dfrac{1}{4}(2x\cos 2x+\sin 2x)+C$.

C. $F(x)=-\dfrac{1}{4}(2x\cos 2x-\sin 2x)+C$. **D.** $F(x)=\dfrac{1}{4}(2x\cos 2x-\sin 2x)+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\sin 2x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$

Suy ra $\int x\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$.

Vậy: $F(x)=-\dfrac{1}{4}(2x\cos 2x-\sin 2x)+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 109. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 2-1$. **B.** $F(3)=\ln 2+1$. **C.** $F(3)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $F(3)=\dfrac{7}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\displaystyle\int\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$.

Theo đề $F(2)=1\Leftrightarrow\ln 1+C=1\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(3)=\ln 2+1$.

Chọn đáp án B □

Câu 110. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4m}{\pi}+\sin^2 x$. Tìm m để nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{8}$.

A. $m=-\dfrac{4}{3}$. **B.** $m=-\dfrac{3}{4}$. **C.** $m=\dfrac{4}{3}$. **D.** $m=\dfrac{3}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{4m}{\pi}+\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-F(0)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{4m}{\pi}x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{8}-1\Leftrightarrow m+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi}{8}-1\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{4}.$

Chọn đáp án B □

Câu 111. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin 2x$.

A. $\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x=\sin^2 x+C.$ **B.** $\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\cos 2x+C.$

C. $\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x=\cos 2x+C.$ **D.** $\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x=-2\cos 2x+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x=2\cdot\dfrac{-\cos 2x}{2}+C=-\cos 2x+C.$

Chọn đáp án B □

Câu 112. Họ nguyên hàm $\int\dfrac{x^3-2x^2+5}{x^2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{x^2}{2}-2x-\dfrac{5}{x}+C.$ **B.** $-2x+\dfrac{5}{x}+C.$ **C.** $x^2-2x-\dfrac{5}{x}+C.$ **D.** $x^2-x-\dfrac{5}{x}+C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\dfrac{x^3-2x^2+5}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x-2+\dfrac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}-2x-\dfrac{5}{x}+C.$

Chọn đáp án A □

Câu 113. Họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x^2-1$ là

A. $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C.$ **B.** $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+x+C.$ **C.** $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-x+C.$ **D.** $F(x)=2x+C.$

✍ **Lời giải.**

Có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(x^2-1)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}-x+C.$

Chọn đáp án C □

Câu 114. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là hàm số $f'(x)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-f'(x)+C.$ **B.** $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=-f(x)+C.$

C. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=f'(x)+C.$

✍ **Lời giải.**

Theo định nghĩa, hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ khi và chỉ khi $F'(x)=f(x)$.

Vậy ta có $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$ nên $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C.$

Chọn đáp án C □

Câu 115. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $F(3)=1$. Tính giá trị của $F(2)$.

A. $F(2)=-1-\ln 2.$ **B.** $F(2)=1-\ln 2.$ **C.** $F(2)=-1+\ln 2.$ **D.** $F(2)=1+\ln 2.$

✍ **Lời giải.**

Có $F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$, mà $F(3)=1\Leftrightarrow C=1-\ln 2.$

Vậy $F(x)=\ln|x-1|+1-\ln 2\Rightarrow F(2)=1-\ln 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 116. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{14}{3}$ thì

A. $F(x)=\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{13}{3}.$ **B.** $F(x)=-\dfrac{1}{3}\sin 3x+5.$

C. $F(x)=\dfrac{1}{3}\sin 3x+5.$ **D.** $F(x)=-\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{13}{3}.$

✍ **Lời giải.**

$F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\cos 3x$ nên $F(x)=\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$.

Mà $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{14}{3}$ nên $\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+C=\dfrac{14}{3}\Leftrightarrow C=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 117. Nếu $\int f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{x}+\ln|2x|+C$ với $x\in(0;+\infty)$ thì hàm số $f(x)$ là

A. $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$. **B.** $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2x}$. **C.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\ln(2x)$. **D.** $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2x}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\left[\dfrac{1}{x}+\ln|2x|+C\right]'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$.

Chọn đáp án A □

Câu 118. Tính $F(x)=\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ ta được kết quả

A. $F(x)=x\sin x-\cos x+C$. **B.** $F(x)=-x\sin x-\cos x+C$.

C. $F(x)=x\sin x+\cos x+C$. **D.** $F(x)=-x\sin x+\cos x+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x\end{cases}\Rightarrow F(x)=x\sin x-\int\sin x\,\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 119. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x$ và đồ thị hàm số $y=F(x)$ đi qua điểm $M(0;1)$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-F(0)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-1\Rightarrow F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x+1=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+1=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 120. Trong các khẳng định sau, hãy chọn khẳng định đúng.

A. $\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^{2x}}{\ln 3}+C$. **B.** $\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{9^{x}}{\ln 3}+C$.

C. $\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^{2x}}{\ln 9}+C$. **D.** $\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{3^{2x+1}}{2x+1}+C$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int 3^{2x}\,\mathrm{d}(2x)=\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$.

Chọn đáp án C □

Câu 121. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x^3-9$ là

A. $\dfrac{1}{2}x^4-9x+C$. **B.** $4x^4-9x+C$. **C.** $\dfrac{1}{4}x^4-9x+C$. **D.** $4x^3-9x+C$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int(2x^3-9)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^4-9x+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 122. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{2x+1}+C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2x+1}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}(2x+1) = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 123. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2018x}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = e^{2018x} + C.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2018}\cdot \mathrm{e}^{2018x} + C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2018\mathrm{e}^{2018x} + C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2018x}\cdot \ln 2018 + C.$

Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2018}\cdot \mathrm{e}^{2018x}\,\mathrm{d}(2018x) = \frac{1}{2018}\cdot \mathrm{e}^{2018x} + C$$

Chọn đáp án B □

Câu 124. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x + \sin 3x$, biết $F(0) = \dfrac{2}{3}$.

A. $F(x) = 3x^2 - \dfrac{\cos 3x}{3} + \dfrac{2}{3}.$ **B.** $F(x) = 3x^2 - \dfrac{\cos 3x}{3} - 1.$

C. $F(x) = 3x^2 + \dfrac{\cos 3x}{3} + 1.$ **D.** $F(x) = 3x^2 - \dfrac{\cos 3x}{3} + 1.$

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int (6x + \sin 3x)\,\mathrm{d}x = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + C$. Mà $F(0) = \dfrac{2}{3}$ nên $C = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 125. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^{x^4+1}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^4+1} + C.$ **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}^{x^4+1} + C.$

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^4}{4}\mathrm{e}^{x^4+1} + C.$ **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{x^4+1} + C.$

Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{x^4+1}\,\mathrm{d}\left(x^4+1\right) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x^4+1} + C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 126. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$ **B.** $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C.$

C. $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$ **D.** $\int \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C.$

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 127. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin 2x$.

A. $x^2 - \dfrac{1}{2}\cos 2x + C.$ **B.** $x^2 + \dfrac{1}{2}\cos 2x + C.$ **C.** $x^2 - 2\cos 2x + C.$ **D.** $x^2 + 2\cos 2x + C.$

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int 2x + \sin 2x = x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 128. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\cos 2x$.

A. $\dfrac{x\sin 2x}{2} - \dfrac{\cos 2x}{4} + C.$ **B.** $x\sin 2x - \dfrac{\cos 2x}{2} + C.$

C. $x\sin 2x + \dfrac{\cos 2x}{2} + C.$ **D.** $\dfrac{x\sin 2x}{2} + \dfrac{\cos 2x}{4} + C.$

✍ **Lời giải.**

Đặt $u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\sin 2x$. Suy ra

$I = \displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 129. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là:

A. $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + C.$ **B.** $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x}(x-2) + C.$ **D.** $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \displaystyle\int x.e^{2x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = e^{2x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases} \Rightarrow F(x) = \dfrac{xe^{2x}}{2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}(x - \frac{1}{2}) + C.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 130. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C.$ **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C.$

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 1) + C.$ **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C.$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{cases}.$

Ta có $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 131. Trong các hàm số sau: (I) $f(x) = \tan^2 x + 2$, (II) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x}$, (III) $f(x) = \tan^2 x + 1$. Hàm số nào có nguyên hàm là hàm số $g(x) = \tan x$?

A. Chỉ (II). **B.** Chỉ (III). **C.** Chỉ (II), (III). **D.** (I), (II), (III).

✍ **Lời giải.**

Cách 1:

Ta có $\displaystyle\int \left(\tan^2 x + 2\right)\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = x + \tan x + C.$

Và $\displaystyle\int \frac{2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2\tan x + C.$

Và $\displaystyle\int \left(\tan^2 x + 1\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C.$

Cách 2:

Ta có $g'(x) = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 132. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$. Biết $F(-1) = 2$. Tính $F(1)$ kết quả là

A. $\ln 8 + 1.$ **B.** $4\ln 2 + 1.$ **C.** $2\ln 3 + 2.$ **D.** $2\ln 4.$

✍ **Lời giải.**

Ta có: $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x+2| + C.$

$F(-1) = 2 \Leftrightarrow 2\ln|-1+2| + C = 2 \Leftrightarrow C = 2.$

Suy ra $F(x)=2\ln|x+2|+2$.

Vậy $F(1)=2\ln|1+2|+2=2\ln 3+2$.

Chọn đáp án C □

Câu 133. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3x+1)^{2019}$ là

A. $\dfrac{(3x+1)^{2018}}{6054}+C$. **B.** $\dfrac{(3x+1)^{2018}}{2018}+C$. **C.** $\dfrac{(3x+1)^{2020}}{6060}+C$. **D.** $\dfrac{(3x+1)^{2020}}{2020}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\displaystyle\int(3x+1)^{2019}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(3x+1)^{2019}\mathrm{d}(3x+1)=\frac{(3x+1)^{2020}}{6060}+C$.

Chọn đáp án C □

3.1 ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. C	4. B	5. D	6. D	7. C	8. D	9. C
10. C	11. C	12. D	13. C	14. B	15. A	16. C	17. C	18. C
19. D	20. B	21. B	22. C	23. C	24. A	25. A	26. D	27. C
28. A	29. D	30. D	31. C	32. D	33. C	34. D	35. A	36. D
37. C	38. D	39. C	40. D	41. D	42. A	43. A	44. C	45. C
46. A	47. C	48. D	49. A	50. A	51. B	52. D	53. B	54. C
55. C	56. C	57. B	58. C	59. A	60. D	61. A	62. D	63. C
64. B	65. C	66. D	67. C	68. C	69. A	70. B	71. C	72. C
73. D	74. A	75. D	76. C	77. B	78. D	79. A	80. A	81. B
82. C	83. C	84. C	85. B	86. D	87. A	88. A	89. C	90. B
91. C	92. D	93. D	94. B	95. C	96. D	97. B	98. C	99. D
100. D	101. C	102. A	103. D	104. C	105. B	106. A	107. C	108. C
109. B	110. B	111. B	112. A	113. C	114. C	115. B	116. C	117. A
118. C	119. C	120. C	121. A	122. D	123. B	124. D	125. D	126. D
127. A	128. D	129. D	130. D	131. B	132. C	133. C		

4 VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$. Tính $f(2)$.

A. 5. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 15.

✍ **Lời giải.**

Với $x\in[1;2]$ ta có

$$\begin{aligned} f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2 &\Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=2x+3\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=2x+3\\ &\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=x^2+3x+C. \end{aligned}$$

Do $f(1)=4$ nên $C=0\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2$.

Vậy $f(2)=2^3+3\cdot 2^2=20$.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ thỏa mãn $f'(x)=\cot x, f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$ và $f\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)=1$. Giá trị của biểu thức $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-f\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)$ bằng

A. $1+\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $3+\ln\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $1-\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\ln\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C = f(x)$.

Xét trên khoảng $(-2\pi;-\pi)$ ta có:

$f\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \ln\left|\sin\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)\right| + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 1 - \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f(x) = \ln|\sin x| + 1 - \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$F\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right) = \ln\left|\sin\left(-\dfrac{-7\pi}{4}\right)\right| + 1 - \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Xét trên khoảng $(0;\pi)$ ta có:

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \ln\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 2 - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f(x) = \ln|\sin x| + 2 - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \ln\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right| + 2 - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \ln\dfrac{1}{2} + 2 - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - f\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right) = 1 + \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Tính $f(0)$, biết rằng $f(3) = 1$.

A. e^6 . **B.** e^3 . **C.** 1. **D.** e^4 .

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -2$, lấy nguyên hàm hai vế ta được $\ln|f(x)| = -2x + C$, suy ra $f(x) = A\mathrm{e}^{-2x}$ với $A > 0$. Do $f(3) = A\mathrm{e}^{-6} = 1$ nên $A = \mathrm{e}^6$. Vậy $f(0) = \mathrm{e}^6 \cdot \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Cho nguyên hàm $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2018} + \sqrt{x+2017}} = m(x+2018)\sqrt{x+2018} + n(x+2017)\sqrt{x+2017} + C$. Khi đó $4m - n$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

✍ Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+2018} + \sqrt{x+2017}} = \int \left(\sqrt{x+2018} - \sqrt{x+2017}\right)\mathrm{d}x$

$= \dfrac{2}{3}(x+2018)\sqrt{x+2018} - \dfrac{2}{3}(x+2017)\sqrt{x+2017} + C$.

Vậy $4m - n = \dfrac{10}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 15$. **B.** $3 + \ln 15$. **C.** $2 + \ln 15$. **D.** $\ln 15$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(2x-1)}{2x-1} = \ln|2x-1| + C.$$

Vì $f(0) = 1$ nên $\ln|2\cdot 0 - 1| + C = 1$ hay $C = 1$. Do vậy $f(x) = \ln|2x-1| + 1$. Suy ra

$$f(-1) + f(3) = \ln 3 + 1 + \ln 5 + 1 = 2 + \ln 15.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 6. Hàm số nào sau đây là nguyên hàm của hàm số $f(x)=|2x-4|$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$, ở đó C,C' là các hằng số tùy ý?

A. $F(x)=\left|x^2-4x\right|+C$.

B. $F(x)=\begin{cases}x^2-4x+2C & \text{khi } x\geq 2\\ -x^2+4x+2C-8 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

C. $F(x)=\left|x^2-4x+C\right|$.

D. $F(x)=\begin{cases}x^2-4x+C & \text{khi } x\geq 2\\ -x^2+4x+C' & \text{khi } x<2\end{cases}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=|2x-4|=\begin{cases}2x-4 & \text{khi } x\geq 2\\ -2x+4 & \text{khi } x<2\end{cases}$.

Xét hàm số $F(x)=\begin{cases}x^2-4x+C & \text{khi } x\geq 2\\ -x^2+4x+C' & \text{khi } x<2\end{cases}$.

— Với $x>2$, ta có $F'(x)=2x-4=f(x)$.

— Với $x<2$, ta có $F'(x)=-2x+4=f(x)$.

— Xét tại $x=2$, ta có $f(2)=0$,
$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{F(x)-F(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-4x+C-(C-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$,
$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{F(x)-F(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x^2+4x+C'-(C-4)}{x-2}$.
Do $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$ nên điều kiện cần để $F'(2)=f(2)=0$ là $\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^2+4x+C'-C+4)=0$
$\Leftrightarrow C'-C+8=0\Leftrightarrow C'=C-8$.
Ngược lại, với $C'=C-8$ ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{F(x)-F(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x^2+4x-4}{x-2}=0$.

Vậy nếu chọn hằng số là $2C$ thì $F(x)=\begin{cases}x^2-4x+2C & \text{khi } x\geq 2\\ -x^2+4x+2C-8 & \text{khi } x<2\end{cases}$ là nguyên hàm của $f(x)=|2x-4|$ trên $(-\infty;+\infty)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[-1;2]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f^2(x)\cdot f'(x)=3x^2+2x-2$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=1$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Vì hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[-1;2]$ nên ta có
$\int f^2(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x=\int f^2(x)\mathrm{d}(f(x))=\int(3x^2+2x-2)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}f^3(x)=x^3+x^2-2x+C$.
Vì $f(0)=1$ suy ra $C=\dfrac{1}{3}$.
Ta có $f(x)=1\Leftrightarrow f^3(x)=1\Leftrightarrow 3(x^3+x^2-2x)+1=1\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$ hoặc $x=-2$ (loại vì $x=-2\notin[-1;2]$).

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Biết $\int f(x)\mathrm{d}x=-x^2+2x+C$. Tính $\int f(-x)\mathrm{d}x$.

A. x^2+2x+C'. **B.** $-x^2+2x+C'$. **C.** $-x^2-2x+C'$. **D.** x^2-2x+C'.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = -x^2+2x+C \Rightarrow f(x) = -2x+2 \Rightarrow f(-x) = 2x+2$

$\Rightarrow \int f(-x)\,\mathrm{d}x = x^2+2x+C'.$

Chọn đáp án A □

Câu 9. Một nguyên hàm của hàm số $y = \cos 5x\cos x$ là

A. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)$. **B.** $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 4x\right)$.

C. $-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4}\right)$. **D.** $\frac{1}{5}\sin 5x\sin x$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\cos 5x\cos x = \frac{1}{2}[\cos(6x)+\cos(4x)]$.

$$\Rightarrow \int \cos 5x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int [\cos(6x)+\cos(4x)]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos 6x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 4x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

Chọn đáp án A □

Câu 10. Hàm số $f(x) = x\sqrt{x+1}$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Nếu $F(0) = 2$ thì $F(3)$ bằng

A. $\frac{116}{15}$. **B.** $\frac{146}{15}$. **C.** $\frac{886}{105}$. **D.** 3.

✍ **Lời giải.**

Cách 1. Ta có $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1$. Suy ra $x = t^2-1$ và $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

$$F(x) = \int (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int (2t^4-2t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + C.$$

Từ

$$F(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + C = 2 \Leftrightarrow C = \frac{34}{15}.$$

Vậy $F(x) = \frac{2(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + \frac{34}{15}$ nên $F(3) = \frac{2\cdot 4^2\cdot 2}{5} - \frac{2\cdot 4\cdot 2}{3} + \frac{34}{15} = \frac{146}{15}$.

Cách 2. Ta có $F(3) - F(0) = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ nên $F(3) = F(0) + \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + \int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Tính tích phân $I = \int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1$. Suy ra $x = t^2-1$ và $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$
$$x = 3 \Rightarrow t = 2.$$

Từ đó

$$I = \int\limits_1^2 (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^2 (2t^4-2t^2)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{116}{15}.$$

Vậy $F(3) = 2 + \frac{116}{15} = \frac{146}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho $f(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $x\cdot f'(x)$ thỏa mãn $F(0)=0$. Biết $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\tan\alpha=3$. Tính $F(\alpha)-10\alpha^2+3\alpha$.

A. $-\dfrac{1}{2}\ln 10$. **B.** $-\dfrac{1}{4}\ln 10$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln 10$. **D.** $\ln 10$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức tích phân từng phần ta có

$$\int x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=x\cdot f(x)-\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cũng theo công thức tích phân từng phần lại có

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int x\cdot(\tan x)'\,\mathrm{d}x=x\cdot\tan x-\int\tan x\,\mathrm{d}x=x\cdot\tan x+\ln|\cos x|+C.$$

Do đó

$$F(x)=\int x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=x\cdot f(x)-x\cdot\tan x-\ln|\cos x|+C.$$

Mà $F(0)=0$ nên $F(x)=x\cdot f(x)-x\cdot\tan x-\ln|\cos x|$. Lại có $\tan\alpha=3$ nên $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=10$. Từ đó $F(\alpha)-10\alpha^2+3\alpha=-\ln\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{2}\ln 10$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$. **B.** $\ln 80+1$. **C.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{4}{5}+\ln 2+1$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}+1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{(x+2)(x-1)}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_1,\forall x\in(-\infty;-2)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_2,\forall x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C_3,\forall x\in(1;+\infty)\end{cases}$.

— Trên khoảng $(-\infty;-2)$, ta có $f(-3)=\dfrac{1}{3}\ln 4+C_1$.

— Trên khoảng $(-2;1)$, ta có $f(0)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow C_2=\dfrac{1}{3}(1+\ln 2)$.
Do đó $f(-1)=\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$.

— Trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có $f(3)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}+C_3$.
Theo giả thiết $f(-3)-f(3)=0\Leftrightarrow C_1-C_3=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{10}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}f(-4)+f(-1)-f(4)&=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+C_1+\frac{2}{3}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}-C_3\\&=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln\frac{1}{10}\\&=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3}{x+1}$; $f(0)=1$ và $f(1)+f(-2)=2$. Giá trị $f(-3)$ bằng

A. $1+2\ln 2$. **B.** $1-\ln 2$. **C.** 1. **D.** $2+\ln 2$.

✍ Lời giải.

Trên khoảng $(-\infty;-1)$ nguyên hàm của $f(x)$ là $3\ln|x+1|+C_1$.

Trên khoảng $(-1;+\infty)$ nguyên hàm của $f(x)$ là $3\ln|x+1|+C_2$.

$f(0)=1$ nên $3\ln 1+C_2=1\Rightarrow C_2=1$.

$f(1)+f(-2)=2$ nên $3\ln 2+1+3\ln 1+C_1=2\Rightarrow C_1=1-3\ln 2$.

$f(-3)=3\ln 2+1-3\ln 2=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 14. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=f(2\sqrt{2})-2f(1)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$. **B.** $(7;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(9;12)$.

✍ Lời giải.

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}\Rightarrow\displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

Do hàm số $y=\ln x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $\ln f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}+C$.

Theo bài ra $f(0)=1\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Vậy $f(2\sqrt{2})-2f(1)=3-2\sqrt{2}\in(0;1)$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Tìm nguyên hàm $J=\displaystyle\int(x+1)\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

A. $J=\dfrac{1}{3}(x+1)\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}+C$. **B.** $J=\dfrac{1}{3}(x+1)\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+C$.

C. $J=(x+1)\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+C$. **D.** $J=\dfrac{1}{3}(x+1)\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}+C$.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\end{cases}$.

Suy ra $J=\dfrac{x+1}{3}\mathrm{e}^{3x}-\displaystyle\int\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x+1}{3}\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 16. Cho $F(x)=\dfrac{a}{x}(\ln x+b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$, trong đó a, b là các số nguyên. Tính $S=a+b$.

A. $S=-2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=0$.

✍ Lời giải.

Xét $I=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1+\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=1+\ln x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}$. Khi đó

$I=-\dfrac{1}{x}(1+\ln x)+\displaystyle\int\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}(1+\ln x)-\dfrac{1}{x}+C=-\dfrac{1}{x}(\ln x+2)+C\Rightarrow a=-1;b=2$.

Vậy $S=a+b=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 17. Biết $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(3x-1)+C$ với $x \in \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(9x-1)+C$.
B. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 6x\ln(3x-1)+C$.
C. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 6x\ln(9x-1)+C$.
D. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 3x\ln(9x-1)+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $x = 3t \Rightarrow \mathrm{d}x = 3\mathrm{d}t$. Ta có:
$\int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int f(3t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot 3t\ln(3\cdot 3t-1)+C \Rightarrow \int f(3t)\,\mathrm{d}t = 2t\ln(9t-1)+C \Rightarrow \int f(3x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(9x-1)+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Khi đó $F(0)$ là

A. $-\frac{2}{3}\ln 2+2$. **B.** $-\frac{1}{3}\ln 2-2$. **C.** $-\frac{1}{3}\ln 2+2$. **D.** $-\frac{2}{3}\ln 2-2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \int \dfrac{\sin x}{1+3\cos x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \dfrac{\mathrm{d}(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$.
$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+2$.
Suy ra $F(0) = -\frac{1}{3}\ln 4+2 = -\frac{2}{3}\ln 2+2$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2018^x\ln 2018 - \cos x$ và $f(0) = 2$. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

A. $f(x) = 2018^x + \sin x + 1$.
B. $f(x) = \dfrac{2018^x}{\ln 2018} + \sin x + 1$.
C. $f(x) = \dfrac{2018^x}{\ln 2018} - \sin x + 1$.
D. $f(x) = 2018^x - \sin x + 1$.

✍ **Lời giải.**

Vì $\int \left(2018^x\ln 2018 - \cos x\right)\mathrm{d}x = 2018^x - \sin x + C$. Do $f(0) = 2$ nên $C = 1$.
Vậy $f(x) = 2018^x - \sin x + 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = \dfrac{2017x}{\left(x^2+1\right)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m = -\frac{1}{2}$. **B.** $m = \dfrac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. **C.** $m = \dfrac{2^{2017}+1}{2^{2018}}$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int \frac{2017x}{\left(x^2+1\right)^{2018}}\,dx = \frac{2017}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^{2018}} = -\frac{1}{2\left(x^2+1\right)^{2017}}+C.$$

Do đó ta có thể viết $F(x) = -\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)^{2017}}+C$. Vì $F(1) = 0$ nên $C = \dfrac{1}{2^{2018}}$. Suy ra

$$F(x) = \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2\left(x^2+1\right)^{2017}} \geq \frac{1}{2^{2017}} - \frac{1}{2} = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$. Vậy $m = \dfrac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 21. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{x(2+x)}{(x+1)^2}$?

A. $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có biến đổi: $\dfrac{x(2+x)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Suy ra, $\displaystyle\int\dfrac{x(2+x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=x+\dfrac{1}{x+1}+C=\dfrac{x^2+(C+1)x+C+1}{x+1}$.

— Với $C=-2$, ta được $y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$;

— Với $C=0$, ta được $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$;

— Với $C=-1$, ta được $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

Vậy hàm số không phải là nguyên hàm của hàm số đã cho là $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=x\ln x$. Tính $F''(x)$.

A. $F''(x)=1-\ln x$. **B.** $F''(x)=\dfrac{1}{x}$. **C.** $F''(x)=1+\ln x$. **D.** $F''(x)=x+\ln x$.

✍ **Lời giải.**

$F'(x)=f(x)$, $F''(x)=f'(x)=1+\ln x$.

Chọn đáp án C □

Câu 23. Cho các hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ với $x>\dfrac{3}{2}$. Gọi $(a;b;c)$ là bộ số thỏa mãn $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó $a+b+c$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 7.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$f(x)=10x\sqrt{2x-3}+\dfrac{7}{\sqrt{2x-3}}=5(2x-3)\sqrt{2x-3}+15\sqrt{2x-3}+\dfrac{7}{\sqrt{2x-3}}$$
$$=5(2x-3)^{\frac{3}{2}}+15(2x-3)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{7}{\sqrt{2x-3}}.$$

Suy ra $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=(2x-3)^{\frac{5}{2}}+5(2x-3)^{\frac{3}{2}}+7\sqrt{2x-3}+C=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}+C$.

Suy ra $F(x)=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}$ hay $a=4,b=-2,c=1\Rightarrow a+b+c=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 24. Tìm $\displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{2}x\sin 2x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$. **B.** $x\sin 2x+\cos 2x+C$.

C. $\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **D.** $\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x\sin 2x-\dfrac{1}{2}\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$.

Chọn đáp án D □

Câu 25. Biết $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(3x-1)+C$ với $x\in\left(\frac{1}{9};+\infty\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(9x-1)+C$. **B.** $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 6x\ln(3x-1)+C$.

C. $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 6x\ln(9x-1)+C$. **D.** $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 3x\ln(9x-1)+C$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=3t \Rightarrow \mathrm{d}x = 3\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int f(3t)\,\mathrm{d}t = 6t\cdot\ln(9t-1)+C$

$\Rightarrow \int f(3t)\,\mathrm{d}t = 2t\cdot\ln(9t-1)+C$.

Mà nguyên hàm không phụ thuộc vào biến số nên $\int f(3x)\,\mathrm{d}x = 2x\ln(9x-1)+C$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tìm các họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\tan^3 x - 2\tan x - \frac{1}{\tan^2 x}+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\tan^4 x + 2\tan x - \frac{1}{\tan x}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\tan^3 x + 2\tan^2 x - \frac{1}{\tan x}+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\tan^3 x + 2\tan x - \frac{1}{\tan x}+C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x) = \dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^4 x} = \dfrac{1}{\cos^4 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}(\tan^2 x+1) + \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$. Nên

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + \tan x - \cot x + C = \frac{1}{3}\tan^3 x + 2\tan x - \frac{1}{\tan x}+C.$$

Chọn đáp án D □

Câu 27. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(2019)$ bằng

A. $\dfrac{2019}{2020}$. **B.** $\dfrac{2019\cdot 2021}{2020}$. **C.** $2018\dfrac{1}{2020}$. **D.** $-\dfrac{2019}{2020}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x) = \displaystyle\int \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2+x)^2}\mathrm{d}(x^2+x) = -\frac{1}{x^2+x}+C$.

Mà $F(1)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}+C \Leftrightarrow C=1 \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{x^2+x}+1 = \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}+1$.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= F(1)+F(2)+F(3)+\cdots+F(2019) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2019}+1\right)\\ &= 2019+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2020}-\frac{1}{2019}\right) = 2019-\frac{1}{1}+\frac{1}{2020} = 2018\frac{1}{2020}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị (C). Biết rằng $f'(x+2)=2x+\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}-1$ và tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(a;1)$ thuộc (C) song song với đường thẳng $y=x+1$. Có bao nhiêu hàm số $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

A. vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

— Từ giả thiết, ta có $f'(u)=2u-5+\sqrt{u+1}-\sqrt{3u-5}$. Suy ra

$$f(u) = \int (2u-5+\sqrt{u+1}-\sqrt{3u-5})\mathrm{d}u = u^2-5u+\frac{2}{3}\sqrt{(u+1)^3}-\frac{2}{9}\sqrt{(3u-5)^3}+C$$

với C là hằng số.

— Tiếp tuyến tại điểm $M(a;1)$ thuộc đồ thị song song với đường thẳng $y=x+1$ nên $f'(a)=1$.
Với $u<2$ thì $f'(a)<-1+\sqrt{3}+0=\sqrt{3}-1<1$ nên phương trình $f'(u)=1$ không có nghiệm trên $\left[\frac{5}{3};2\right)$. Với $u>2$ thì $f''(u)=2+\frac{1}{2\sqrt{u+1}}-\frac{3}{2\sqrt{3u-5}}>0$ nên phương trình $f'(u)=1$ có không quá 1 nghiệm. Do đó phương trình $f'(u)=1$ có 1 nghiệm duy nhất $u=3$.

— Như vậy có duy nhất điểm $M(3;1)$ thỏa mãn điều kiện. Do $M\in(C)$ nên $f(3)=1$ nên tồn tại duy nhất 1 giá trị C thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy có đúng 1 hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án D □

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{11}{6}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{2}{9}$. **D.** $-\frac{7}{6}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(x)=x[f(x)]^2\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x$.

Do đó,

$$\begin{aligned}&\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow\ &-\int\mathrm{d}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\int x\,\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow\ &-\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{2}x^2+C\\ \Leftrightarrow\ &f(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+C}.\end{aligned}$$

Theo giả thuyết, $f(2)=-\frac{1}{3}\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+1}$.

Suy ra $f(1)=-\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{11}{6}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{2}{9}$. **D.** $-\frac{7}{6}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(x)=x[f(x)]^2\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x$.

Do đó,

$$\begin{aligned}&\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow\ &-\int\mathrm{d}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\int x\,\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow\ &-\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{2}x^2+C\\ \Leftrightarrow\ &f(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+C}.\end{aligned}$$

Theo giả thuyết, $f(2)=-\frac{1}{3}\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+1}$.

Suy ra $f(1)=-\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f''(x)\cdot f^2(x)+2[f'(x)]^2\cdot f(x)=2x-3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(0)=f'(0)=1$. Tính giá trị $P=f^3(2)$.

A. $P=-\dfrac{11}{3}$. **B.** $P=-6$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=-\dfrac{23}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f''(x)\cdot f^2(x)+2[f'(x)]^2\cdot f(x)=2x-3,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[f'(x)\cdot f^2(x)\right]'=2x-3$ (1).

Lấy nguyên hàm hai vế ta có

$(1)\Rightarrow\displaystyle\int\left[f'(x)\cdot f^2(x)\right]'\mathrm{d}x=\int(2x-3)\mathrm{d}x\Leftrightarrow f'(x)\cdot f^2(x)=x^2-3x+C.$

Với $x=0\Rightarrow f'(0)\cdot f^2(0)=C\Leftrightarrow C=1\Rightarrow f'(x)\cdot f^2(x)=x^2-3x+1.$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có

$f'(x)\cdot f^2(x)=x^2-3x+1\Rightarrow\displaystyle\int f'(x)\cdot f^2(x)\mathrm{d}x=\int(x^2-3x+1)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\dfrac{1}{3}f^3(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+x+C.$

Với $x=0\Rightarrow\dfrac{1}{3}f^3(0)=C\Rightarrow C=\dfrac{1}{3}\Rightarrow f^3(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+3x+1\Rightarrow f^3(2)=-3.$

Chọn đáp án C □

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)-f(x)=6x^3\sqrt{x}$. Biết $f(1)=a$, hãy tìm $f(4)$ theo a.

A. $2a+126$. **B.** $4a+252$. **C.** $2a+63$. **D.** $a+63$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $2xf'(x)-f(x)=6x^3\sqrt{x}\Leftrightarrow\dfrac{2xf'(x)-f(x)}{2x\sqrt{x}}=3x^2\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\right)'=3x^2$

$\Rightarrow\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=x^3+a-1$ (do $f(1)=a$).

$\Rightarrow f(4)=2a+126.$

Chọn đáp án A □

Câu 33. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}(x^3+3x)$. Hàm số $F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

✍ **Lời giải.**

$F(x)=\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x^2+3)\mathrm{e}^{x^2+1}\cdot x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Khi đó $F(t)=\displaystyle\int(t+2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

Đặt $\begin{cases}u=t+2\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=\mathrm{e}^t\end{cases}$ ta có $F(t)=(t+2)\mathrm{e}^t-\displaystyle\int\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=(t+2)\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t+C=(t+1)\mathrm{e}^t+C.$

Vậy $F(x)=(x^2+2)\mathrm{e}^{x^2+1}+C$, từ đó ta có $F'(x)=2x\mathrm{e}^{x^2+1}(x^2+3)=0\Leftrightarrow x=0.$

Hàm số $F'(x)$ đổi dấu khi qua $x=0$, suy ra hàm số $F(x)$ có 1 cực trị.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và $f(x)>0$ trên đoạn $[0;2]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=1$, $f(0)=2$ và $f(x)\cdot f''(x)+\left[\dfrac{f(x)}{x+2}\right]^2=\left[f'(x)\right]^2$. Tính $f^2(1)+f^2(2)$?

A. 20. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 25.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} & f(x)\cdot f''(x)+\left[\frac{f(x)}{x+2}\right]^2=\left[f'(x)\right]^2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{f(x)\cdot f''(x)-\left[f'(x)\right]^2}{[f(x)]^2}=-\frac{1}{(x+2)^2} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=-\frac{1}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Lấy nguyên hàm hai vế $\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x+2}+C$.

Cho $x=0\Rightarrow \dfrac{f'(0)}{f(0)}=\dfrac{1}{2}+C\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=0$.

Khi đó $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x+2}\Rightarrow \displaystyle\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x\Rightarrow \ln|f(x)|=\ln|x+2|+C$.

Cho $x=0\Rightarrow \ln|f(0)|=\ln 2+C\Leftrightarrow C=0$.

Do đó $\ln|f(x)|=\ln|x+2|\Leftrightarrow |f(x)|=|x+2|$.

Vì $f(x)>0$ trên đoạn $[0;2]$ nên $f(x)=x+2,\forall x\in[0;2]$.

Ta có $f(1)=3$, $f(2)=4\Rightarrow f^2(1)+f^2(2)=3^3+4^2=25$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $f'(x)-2018f(x)=x\cdot \mathrm{e}^{2019x}$. Biết $f(0)=-1$, tính $f(1)$.

A. e^{2018}. **B.** e^{2019}. **C.** 0. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

Từ $f'(x)-2018f(x)=x\cdot \mathrm{e}^{2019x}$. Nhân hai vế cho e^{-2018x} ta được

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{-2018x}\cdot f'(x)-2018\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)=x\cdot \mathrm{e}^{x} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)\right)'=xe^{x} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)=\int xe^{x}\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)=xe^{x}-e^{x}+C. \end{aligned}$$

Thay $x=0$ ta được $1\cdot f(0)=0\cdot \mathrm{e}^0-\mathrm{e}^0+C\Rightarrow C=0$. Do đó $\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)=x\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x}$.

Thay $x=1$ ta có $\mathrm{e}^{-2018}\cdot f(1)=1\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^1\Rightarrow f(1)=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Biết $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\cdot \mathrm{e}^{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(x^2+5x+5\right)\mathrm{e}^{x}$. Giá trị của $2a+3b+c$ là

A. 6. **B.** 13. **C.** 8. **D.** 10.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F'(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{x}+(2ax+b)\,\mathrm{e}^{x}=\left(ax^2+(2a+b)x+b+c\right)\mathrm{e}^{x}$.

Từ giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=5 \\ b+c=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=2. \end{cases}$$

Vậy $2a+3b+c=13$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho $I_n = \int \tan^n x\,\mathrm{d}x$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \cdots + I_8) + I_9 + I_{10}$ bằng

A. $\sum\limits_{r=1}^{9} \dfrac{(\tan x)^r}{r} + C$. **B.** $\sum\limits_{r=1}^{9} \dfrac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$. **C.** $\sum\limits_{r=1}^{10} \dfrac{(\tan x)^r}{r} + C$. **D.** $\sum\limits_{r=1}^{10} \dfrac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$.

✍ **Lời giải.**

Có $I_n = \int \tan^n x\,\mathrm{d}x = \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int \tan^{n-2} x \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \mathrm{d}x$

$= \int \tan^{n-2} x\,\mathrm{d}(\tan x) - I_{n-2} = \dfrac{(\tan x)^{n-1}}{n-1} - I_{n-2} + C.$

Suy ra $I_{n-2} + I_n = \dfrac{(\tan x)^{n-1}}{n-1} + C$ (*)

Từ đẳng thức (*), cho n nhận lần lượt các giá trị $2, 3, \ldots, 10$ rồi cộng vế với vế các đẳng thức thu được, ta có kết quả $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \cdots + I_8) + I_9 + I_{10} = \sum\limits_{r=1}^{9} \dfrac{(\tan x)^r}{r} + C.$

Chọn đáp án A □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + x^4}$, $f(1) = a$ và $f(-2) = b$. Giá trị của biểu thức $f(-1) - f(2)$ bằng

A. $a + b$. **B.** $b - a$. **C.** $a - b$. **D.** $-a - b$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x^2 + x^4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2 + 1}\right) \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} - \arctan x + C.$

Do hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên liên tục trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$. Do đó, hàm số $f(x)$ có dạng $\begin{cases} -\dfrac{1}{x} - \arctan x + C_1, & \text{nếu } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} - \arctan x + C_2, & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$

Thay $x = 1$, ta được $a = -\dfrac{1}{1} - \arctan 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = a + 1 + \dfrac{\pi}{4}$.

Thay $x = -2$, ta được $b = -\dfrac{1}{-2} - \arctan(-2) + C_1 \Rightarrow C_1 = b - \dfrac{1}{2} - \arctan 2$.

Do đó

$f(-1) - f(2) = \left[-\dfrac{1}{-1} - \arctan(-1) + b - \dfrac{1}{2} - \arctan 2\right] - \left[-\dfrac{1}{2} - \arctan 2 + a + 1 + \dfrac{\pi}{4}\right]$

$= b - a.$

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5} + C$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$.

A. $\dfrac{x+3}{2\left(x^2+4\right)} + C$. **B.** $\dfrac{x+3}{x^2+4} + C$. **C.** $\dfrac{2x+3}{4\left(x^2+1\right)} + C$. **D.** $\dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int \dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int 2f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right) = \dfrac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\sqrt{x+1}^2+4} + C,$

suy ra $\int f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}\right) = \dfrac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt{x+1}^2+4} + C$

Từ đó suy ra $\int f(2x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int f(2x)\,\mathrm{d}(2x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x+3}{(2x)^2+4} + C = \dfrac{2x+3}{8\left(x^2+1\right)} + C.$

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2<f(5)<3$. **B.** $4<f(5)<5$. **C.** $1<f(5)<2$. **D.** $3<f(5)<4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \displaystyle\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$.

Suy ra $\displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\int (3x+1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C \Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$.

Mà $f(1)=1 \Rightarrow 1=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C} \Rightarrow C=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow f(5)\approx 3{,}793$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=2x^2-x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

A. 28. **B.** 22. **C.** $\dfrac{19}{2}$. **D.** 10.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
&[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=2x^2-x+1\\
\Leftrightarrow\ &\left[f(x)\cdot f'(x)\right]'=2x^2-x+1\\
\Leftrightarrow\ &f(x)\cdot f'(x)=\int(2x^2-x+1)\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+C.
\end{aligned}$$

Thay $x=0$ ta được $f(0)\cdot f'(0)=C \Leftrightarrow C=9$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
&f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+9\\
\Leftrightarrow\ &\int f(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+9\right)\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &\int f(x)\mathrm{d}[f(x)]=\dfrac{1}{6}x^4-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+9x+C_1\\
\Leftrightarrow\ &\dfrac{1}{2}f^2(x)=\dfrac{1}{6}x^4-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+9x+C_1\\
\Leftrightarrow\ &f^2(x)=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+18x+2C_1.
\end{aligned}$$

Thay $x=0$ ta được $f^2(0)=2C_1 \Leftrightarrow C_1=\dfrac{9}{2}$.

Vậy $f^2(x)=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+18x+9$, nên $f^2(1)=28$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ và $f(1)=-2\ln 2$ biết $f(2)=a+b\ln 3$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Từ giả thiết $\dfrac{x}{x+1}f'(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow\left[\dfrac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]'=\dfrac{x}{x+1}$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta có

$$\dfrac{x}{x+1}\cdot f(x)=\int\dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C.$$

Mà $f(1)=-2\ln 2$ nên $C=-1\Rightarrow f(x)\cdot\dfrac{x}{x+1}=x-\ln|x+1|-1$.

Cho $x=2\Rightarrow f(2)\cdot\dfrac{2}{3}=2-\ln 3-1\Rightarrow f(2)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3$.

Vậy $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow a^2+b^2=\dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=|1+x|-|1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1)=3$. Tính tổng $T=F(0)+F(2)+F(-3)$.

A. 8. **B**. 12. **C**. 14. **D**. 10.

✍ **Lời giải.**

Ta viết lại hàm số $f(x)$ đã cho

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{nếu } x>1\\ 2x & \text{nếu } -1\le x\le 1\\ -2 & \text{nếu } x<-1\end{cases}.$$

Xét trên các khoảng $(-\infty;-1),(-1;1),(1;+\infty)$ hàm số $f(x)$ có nguyên hàm là

$$F(x)=\begin{cases}2x+C_1 & \text{nếu } x>1\\ x^2+C_2 & \text{nếu } -1<x<1\\ -2x+C_3 & \text{nếu } x<-1\end{cases}.$$

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó $F(x)$ liên tục tại các điểm $x=-1$ và $x=1$. Để có điều này trước hết phải có

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}F(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}F(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=C_3\\ C_2=C_1+1\end{cases}.$$

Lại có $F(1)=3$ nên $C_1=1$ khi đó ta có

$$F(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{nếu } x>1\\ x^2+2 & \text{nếu } -1\le x\le 1\\ -2x+1 & \text{nếu } x<-1\end{cases}.$$

Vậy $T=F(0)+F(2)+F(-3)=14$.

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2+f(x)\cdot f''(x)=15x^4+12x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B**. $\dfrac{5}{2}$. **C**. 10. **D**. 8.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}&\left(f'(x)\right)^2+f(x)\cdot f''(x)=15x^4+12x\\ \Leftrightarrow\ &\left[f'(x)\cdot f(x)\right]'=15x^4+12x\\ \Leftrightarrow\ &f'(x)\cdot f(x)=3x^5+6x^2+C_1.\end{aligned}$$

Do $f(0)=f'(0)=1$ nên ta có $C_1=1$. Do đó:

$$\begin{aligned} & f'(x)\cdot f(x)=3x^5+6x^2+1 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=3x^5+6x^2+1 \\ \Leftrightarrow\ & f^2(x)=x^6+4x^3+2x+C_2. \end{aligned}$$

Mà $f(0)=1$ nên ta có $C_2=1$. Vậy $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1$ suy ra $f^2(1)=8$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)\setminus\{\mathrm{e}\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x(\ln x-1)}$, $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=\ln 6$ và $f\left(\mathrm{e}^2\right)=3$. Giá trị của biểu thức $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)+f\left(\mathrm{e}^3\right)$ bằng

A. $3(\ln 2+1)$. **B.** $2\ln 2$. **C.** $3\ln 2+1$. **D.** $\ln 2+3$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x(\ln x-1)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x-1)}{\ln x-1}=\ln|\ln x-1|+C$

$$=\begin{cases}\ln(\ln x-1)+C_1 & \text{khi}\quad x>\mathrm{e}\\ \ln(1-\ln x)+C_2 & \text{khi}\quad 0<x<\mathrm{e}\end{cases}.$$

Vì $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=\ln 6\Rightarrow\ln\left(1-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+C_2=\ln 6\Rightarrow\ln 3+C_2=\ln 6\Rightarrow C_2=\ln 6-\ln 3=\ln 2$.

Vì $f\left(\mathrm{e}^2\right)=3\Rightarrow\ln\left(\ln\mathrm{e}^2-1\right)+C_1=3\Rightarrow C_2=3$.

Do đó $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)+f\left(\mathrm{e}^3\right)=\ln\left(1-\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)+\ln 2+\ln\left(\ln\mathrm{e}^3-1\right)+3=2\ln 2+\ln 2+3=3(\ln 2+1)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+3)f^2(x)=0$, $f(x)>0$ với mọi $x>0$ và $f(1)=\dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P=1+f(1)+f(2)+\cdots+f(2017)$

A. $\dfrac{6059}{4038}$. **B.** $\dfrac{6055}{4038}$. **C.** $\dfrac{6053}{4038}$. **D.** $\dfrac{6047}{4038}$.

Lời giải.

$f'(x)+(2x+3)f^2(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-2x-3$. Lấy nguyên hàm hai vế ta có $-\dfrac{1}{f(x)}=-x^2-3x+C$. Do $f(1)=\dfrac{1}{6}$ nên $C=-2$.

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

Do đó $P=1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}=\dfrac{6055}{4038}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính $T=f(-2)+f(0)+f(4)$.

A. $T=1+\ln\dfrac{9}{5}$. **B.** $T=1+\ln\dfrac{6}{5}$. **C.** $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **D.** $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6}{5}$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

— Với $x\in(-\infty;-1)$ ta có $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1$.

— Với $x\in(1;+\infty)$ ta có $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_3$.

Mà $f(-3)+f(3)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{-3-1}{-3+1}\right|+C_1+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3-1}{3+1}\right|+C_3=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2 + C_1 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + C_3 = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_3 = 0.$$

Do đó $f(-2) = \frac{1}{2}\ln 3 + C_1$; $f(4) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5} + C_3$.

— Với $x \in (-1;1)$ ta có $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C_2$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}\right| + C_2 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right| + C_2 = 2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 3 + C_2 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 1.$$

Do đó với $x \in (-1;1)$: $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 1 \Rightarrow f(0) = 1$.

Vậy $T = f(-2) + f(0) + f(4) = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$, hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Theo bài ra ta có $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int (2-2x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln|f(x)| = 2x - x^2 + C$. (1)

Thay $x = 0$ vào (1) ta được $C = 0$, từ đó suy ra $\ln|f(x)| = 2x - x^2 \Leftrightarrow f(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2}$.

Phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình $m = \mathrm{e}^{2x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt tương đương với $-x^2 + 2x - \ln m = 0$ có hai nghiệm phân biệt tương đương với $\Delta' = 1 - \ln m > 0 \Leftrightarrow 0 < m < \mathrm{e}$, từ đó suy ra $m = 1$ hoặc $m = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m > e$. **B.** $0 < m \leqslant 1$. **C.** $0 < m < e$. **D.** $1 < m < e$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int (2-2x)\,\mathrm{d}x. \Leftrightarrow \ln f(x) = 2x - x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = A.e^{2x-x^2}$.

Mà $f(0) = 1$ suy ra $f(x) = e^{2x-x^2}$.

Ta có $2x - x^2 = 1 - \left(x^2 - 2x + 1\right) = 1 - (x-1)^2 \leqslant 1$.

Suy ra $0 < e^{2x-x^2} \leqslant e$ và ứng với một giá trị thực $t < 1$ thì phương trình $2x - x^2 = t$ sẽ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $0 < m < e^1 = e$.

Chọn đáp án C □

Câu 50. Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$. **B.** $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$.

C. $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\ln x}{x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + C.$ **D.** $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\ln x}{x^3} + \dfrac{1}{5x^5} + C.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $F'(x) = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^4} = \dfrac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^3}.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra

$$\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot\ln x - \int \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x^3} - F(x) + C = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$$

Chọn đáp án B □

4.1 ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. D	5. C	6. B	7. D	8. A	9. A
10. B	11. C	12. A	13. C	14. C	15. A	16. B	17. A	18. A
19. D	20. B	21. A	22. C	23. C	24. D	25. A	26. D	27. C
28. D	29. B	30. B	31. C	32. A	33. A	34. D	35. C	36. B
37. A	38. B	39. D	40. D	41. A	42. B	43. C	44. D	45. A
46. B	47. C	48. B	49. C	50. B				

BÀI 2. TÍCH PHÂN

A KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1 KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

1.1 Định nghĩa tích phân

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.
Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$

Vậy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a).$

Nhận xét.

① *Tích phân chỉ phụ thuộc vào f và các cận a,b mà không phụ thuộc vào biến số x hay biến t.*

② *Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số $f(x)$ liên túc trên đoạn $[a;b]$, thì $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b$.*

1.2 Tính chất của tích phân

① $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k là hằng số).

② $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

③ $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

④ $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

⑤ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \ (a<c<b).$

⑥ $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b,\ \int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(x)\Big|_a^b, \ldots.$

2 PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

2.1 Phương Pháp Đổi Biến Số

Dạng 1. Giả sử cần tính $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ta thực hiện các bước sau

① Đặt $x = u(t)$ (với $u(t)$ là hàm có đạo hàm liên tục trên $[\alpha;\beta]$, $f[u(t)]$ xác định trên $[\alpha;\beta]$ và $u(\alpha)=a, u(\beta)=b$) và xác định α,β.

② Thay vào, ta có $I = \int_\alpha^\beta f[u(t)]\cdot u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t = G(t)\big|_\alpha^\beta = G(\beta)-G(\alpha).$

Dấu hiệu	Cách chọn
• $\sqrt{a^2-x^2}$	• $\begin{bmatrix} x=\lvert a\rvert\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x=\lvert a\rvert\cos t, t\in[0;\pi] \end{bmatrix}$
• $\sqrt{x^2-a^2}$	• $\begin{bmatrix} x=\frac{\lvert a\rvert}{\sin t}, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\} \\ x=\frac{\lvert a\rvert}{\cos t}, t\in[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{bmatrix}$
• x^2+a^2	• $x=\lvert a\rvert\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Dạng 2: Tương tự như nguyên hàm, ta có thể tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số (ta gọi là loại 2) như sau:

Để tính tích phân $I=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nếu $f(x)=g[u(x)]\cdot u'(x)$, ta có thể thực hiện phép đổi biến như sau

① Đặt $t=u(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=u'(x)\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=a\Rightarrow t=u(a)\\ x=b\Rightarrow t=u(b).\end{cases}$

② Thay vào ta có $I=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} g(t)\,\mathrm{d}t=G(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)}$.

2.2 Phương Pháp Tích Phân Từng Phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Khi đó

$$\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

❸ CÁC DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

3.1 Tích phân cơ bản và tính chất tính phân

Dùng định nghĩa tích phân và các tính chất để giải bài toán.

3.1.1 Ví dụ và bài tập

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau

① Tính $\int\limits_1^3(3x^2-4x+5)\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** 20

Lời giải: $\int\limits_1^3(3x^2-4x+5)\,\mathrm{d}x=\left(x^3-2x^2+5x\right)\Big|_1^3=24-4=20.$

② Tính $\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)^3}$. **ĐS:** $\dfrac{3}{8}$

Lời giải: $\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x)^3}=\int\limits_0^1(1+x)^{-3}\,\mathrm{d}x=-\dfrac{(1+x)^{-2}}{2}\Big|_0^1=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}.$

Ví dụ 2. Tìm số thực m thỏa mãn

① $\int\limits_{-1}^m \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^2-1$. **ĐS:** $m=1$

Lời giải: $\int\limits_{-1}^m \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+1}\Big|_{-1}^m=\mathrm{e}^{m+1}-1.$

Theo đề bài ta suy ra

$$\mathrm{e}^2-1=\mathrm{e}^{m+1}-1\Leftrightarrow m=1.$$

Vậy $m=1$.

② $\int\limits_0^m(2x+5)\,\mathrm{d}x=6$. **ĐS:** $m=1,\ m=-6$

Lời giải: $\displaystyle\int_0^m (2x+5)\,\mathrm{d}x = \left(x^2+5x\right)\Big|_0^m = m^2+5m.$

Theo đề bài ta suy ra

$$m^2+5m=6 \Leftrightarrow m=1 \text{ hoặc } m=-6.$$

Vậy $m=1$ hoặc $m=-6$.

Bài 1. Tính các tích phân sau

① $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $\dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$ □

② $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}.$ **ĐS:** $\sqrt{3}-1$

✍ **Lời giải.**

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}-1.$$ □

Bài 2. Tính các tính phân

① $\displaystyle\int_{-2}^{-5}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x}}$. **ĐS:** $\dfrac{2\sqrt{7}-8}{3}$

Lời giải.

$$\int_{-2}^{-5}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x}}=-\frac{2}{3}\sqrt{1-3x}\Big|_{-2}^{-5}=-\frac{8}{3}+\frac{2\sqrt{7}}{3}=\frac{2\sqrt{7}-8}{3}.$$

□

② $\displaystyle\int_{2}^{7}\frac{4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$. **ĐS:** $\dfrac{64\sqrt{2}-12\sqrt{3}-24\sqrt{6}+4}{3}$

Lời giải.

$$\int_{2}^{7}\frac{4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\int_{2}^{7}\frac{4\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\mathrm{d}x}{x+1-x+1}$$

$$=\int_{2}^{7}2\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x-\int_{2}^{7}2\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Ta có $\displaystyle\int_{2}^{7}2\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{7}=\frac{64\sqrt{2}}{3}-4\sqrt{3}$,

$\displaystyle\int_{2}^{7}2\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{7}=\frac{24\sqrt{6}}{3}-\frac{4}{3}$.

Vậy $\displaystyle\int_{2}^{7}\frac{4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{64\sqrt{2}-12\sqrt{3}-24\sqrt{6}+4}{3}$.

□

Bài 3. Tính các tích phân sau

① Tính $\displaystyle\int_{-2}^{3}(4x^3-3x^2+10)\,\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: 80

Lời giải.

$$\int_{-2}^{3}(4x^3-3x^2+10)\,\mathrm{d}x=(x^4-x^3+10x)\Big|_{-2}^{3}=84-4=80.$$

□

② Tính $\displaystyle\int_{1}^{4}(x^2+3\sqrt{x})\,\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: 35

Lời giải.

$$\int_{1}^{4}\frac{4}{(1-2x)^2}\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+2x\sqrt{x}\right)\Big|_{1}^{4}=\frac{112}{3}-\frac{7}{3}=35.$$

□

③ Tính $\displaystyle\int_{0}^{2}x(x+1)^2\,\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: $\dfrac{34}{3}$

Lời giải.

$$\int_0^2 x(x+1)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^3+2x^2+x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{34}{3}-0=\frac{34}{3}.$$ □

④ Tính $\int_2^4 \left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x =$ .....

ĐS: $6+\ln 2$

✍ **Lời giải.**

$$\int_2^4 \left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big|_2^4 = 8+\ln 4-2-\ln 2 = 6+\ln 2.$$ □

⑤ Tính $\int_1^3 \left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x =$ .....

ĐS: $3\ln 3-\frac{2}{3}$

✍ **Lời giải.**

$$\int_1^3 \left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(3\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^3 = 3\ln 3+\frac{1}{3}-0-1 = 3\ln 3-\frac{2}{3}.$$ □

⑥ Tính $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x =$ .....

ĐS: $\frac{1}{3}\mathrm{e}^3-\frac{1}{3}$

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^3-\frac{1}{3}.$$ □

⑦ Tính $\int_0^{2018} 7^x\,\mathrm{d}x =$ .....

ĐS: $\frac{7^{2018}-1}{\ln 7}$

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^{2018} 7^x\,\mathrm{d}x = \frac{7^x}{\ln 7}\Big|_0^{2018} = \frac{7^{2018}}{\ln 7}-\frac{1}{\ln 7} = \frac{7^{2018}-1}{\ln 7}.$$ □

⑧ Tính $\int_0^6 \frac{\mathrm{d}x}{x+6} =$ .....

ĐS: $\ln 2$

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^6 \frac{\mathrm{d}x}{x+6} = \ln(x+6)\Big|_0^6 = \ln 12-\ln 6 = \ln 2.$$ □

⑨ Tính $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{1-3x} =$ .....

ĐS: $-\dfrac{1}{3}\ln 4$

✍ **Lời giải.**

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{1-3x} = -\frac{1}{3}\ln(3x-1)\Big|_1^3 = -\frac{1}{3}\ln 8 + \frac{1}{3}\ln 2 = -\frac{1}{3}\ln 4.$$ □

⑩ Tính $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(4x-1)^2} =$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{21}$

✍ **Lời giải.**

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(4x-1)^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4x-1}\Big|_1^2 = -\frac{1}{28} + \frac{1}{12} = \frac{1}{21}.$$ □

⑪ Tính $\displaystyle\int_1^4 \frac{4}{(1-2x)^2}\,\mathrm{d}x =$ .....

ĐS: $\dfrac{12}{7}$

✍ **Lời giải.**

$$\int_1^4 \frac{4}{(1-2x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{1-2x}\Big|_1^4 = -\frac{2}{7} + 2 = \frac{12}{7}.$$ □

Bài 4. Tìm các số thực m thỏa mãn

① $\displaystyle\int_2^5 m^2(5-x^3)\,\mathrm{d}x = -549.$

ĐS: $m = \pm\dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_2^5 m^2(5-x^3)\,\mathrm{d}x = m^2\left(5x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^5 = m^2\cdot\left(-\frac{549}{4}\right). \quad (1)$$

Từ (1) suy ra

$$m^2\cdot\left(-\frac{549}{4}\right) = -549 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}.$$

Vậy $m = \pm\dfrac{1}{2}$. □

② $\displaystyle\int_m^2 (3-2x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{122}{5}.$ **ĐS:** $m = 0$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_m^2 (3-2x)^4\,\mathrm{d}x = -\frac{(3-2x)^5}{10}\Big|_m^2 = \frac{1}{10}+\frac{(3-2m)^5}{10}. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra

$$\frac{1}{10}+\frac{(3-2m)^5}{10}=\frac{122}{5} \Leftrightarrow \frac{(3-2m)^5}{10}=\frac{243}{10} \Leftrightarrow 3-2m=3 \Leftrightarrow m=0.$$

Vậy $m=0$. □

③ $\int_0^m (3x^2-12x+11)\,\mathrm{d}x = 6.$

ĐS: $m=1,\ m=2,\ m=3$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_0^m (3x^2-12x+11)\,\mathrm{d}x = (x^3-6x^2+11x)\Big|_0^m = m^3-6m^2+11m. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra

$$m^3-6m^2+11m=6 \Leftrightarrow m^3-6m^2+11m-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=2\\ m=3. \end{array}\right.$$

Vậy $m=1,\ m=2,\ m=3$. □

④ $\int_1^2 \left(m^2+(4-4m)x+4x^3\right)\mathrm{d}x = \int_2^4 2x\,\mathrm{d}x.$

ĐS: $m=3$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_1^2 \left(m^2+(4-4m)x+4x^3\right)\mathrm{d}x = \left(m^2x+(2-2m)x^2+x^4\right)\Big|_1^2 = m^2-6m+21. \quad (1)$$

Mà

$$\int_2^4 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_2^4 = 12. \quad (1)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$m^2-6m+21=12 \Leftrightarrow m^2-6m+9=0 \Leftrightarrow m=3.$$

Vậy $m=3$. □

Bài 5. Tính các tính phân sau

① Tính $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{d}x =$ .....

ĐS: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sin\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$ □

② Tính $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: $1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}$

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=(\tan x-x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}.$$ □

③ Tính $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x\,\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: $1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}$

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)x\,\mathrm{d}x=(-\cot x-x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}+1+\frac{\pi}{4}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}.$$ □

④ Tính $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x\sin x\,\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: $\frac{1}{12}$

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 4x-\cos 6x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{12}-0=\frac{1}{12}.$$ □

⑤ Tính $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin 4x\cos x\,\mathrm{d}x=$ .....

ĐS: $\frac{\sqrt{3}}{20}+\frac{4}{15}$

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin 4x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}(\sin 5x+\sin 3x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{20}+\frac{4}{15}.$$ □

⑥ Tính $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 6x \cos 2x \,\mathrm{d}x =$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{4}$

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 6x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 8x + \sin 4x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}.$$ □

⑦ Tính $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \cos x \,\mathrm{d}x =$ .....

ĐS: $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 4x + \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{16} - 0 = \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$ □

⑧ Tính $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 6x \cos 2x \,\mathrm{d}x =$ .....

ĐS: $\dfrac{\sqrt{3}}{32}$

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 6x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 8x + \cos 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{32} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$ □

⑨ Tính $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \,\mathrm{d}x =$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3\pi}{8} - 1\right)$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4}\cdot\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right).$$

Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{8} - 1\right).$$

□

Bài 6. ① Biết $\int\limits_0^a \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}$. Tìm a.

ĐS: $a = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^a \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^a \frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^a = -\cos 2a + \frac{1}{4}.$$

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} -\cos 2a + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \cos 2a = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow a = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vậy $a = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. □

② Có bao nhiêu số nguyên $m \in (0;2018)$ thỏa $\int\limits_0^m \cos 2x\,\mathrm{d}x = 0$?

ĐS: 1284

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^m \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^m = \frac{1}{2}\sin 2m.$$

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sin 2m = 0 &\Leftrightarrow \sin 2m = 0 \\ &\Leftrightarrow 2m = k\pi \\ &\Leftrightarrow m = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vì $m \in (0;2018) \Leftrightarrow 0 < k\dfrac{\pi}{2} < 2018 \Leftrightarrow 0 < k < 1284{,}6$.

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1,2,3,\ldots,1284$. Vậy có 1284 số nguyên $m \in (0;2018)$ thỏa mãn đề. □

③ Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x\,\mathrm{d}x = a + b\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ với $a,\ b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị $P = ab + b - a$.

ĐS: $\dfrac{1}{25}$

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $a = b = \dfrac{1}{5}$ nên $P = ab + b - a = \dfrac{1}{25}$. □

④ Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-c}{2}$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương. Tính giá trị $P = a^2+b^2+abc$.

ĐS: 25

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \sin x\right)\mathrm{d}x = (-\cot x + \cos x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}.$$

Suy ra $a=3,\ b=2,\ c=2$ hoặc $a=2,\ b=3,\ c=2$ và $P = a^2+b^2+abc = 25$. □

⑤ Biết $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x \sin^2 x} = a + b\sqrt{3}$ với $a,\ b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị $P = ab - a + b$.

ĐS: $\dfrac{2}{3}$

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x = (\tan x - \cot x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0 + \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Suy ra $a=0,\ b=\dfrac{2}{3}$ và $P = ab - a + b = \dfrac{2}{3}$. □

⑥ Biết $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \sin 2x\,\mathrm{d}x = a + \frac{b\sqrt{2}}{10}$ với $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Tính $a+b$.

ĐS: 3

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \cos 5x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{1}{5}\sin 5x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

Suy ra $a=0,\ b=3$ và $a+b=3$. □

Bài 7. Tính các tích phân sau

① Tính $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{5+3x}\,\mathrm{d}x =$ .....

ĐS: $4 - \dfrac{5\sqrt[3]{5}}{4}$

✍ Lời giải.

$$\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{5+3x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} (5+3x)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(5+3x)\Big|_{0}^{1} = 4 - \frac{5\sqrt[3]{5}}{4}.$$ □

② Tính $\displaystyle\int_3^5 \frac{4x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+1}} =$ .....

ĐS: $\dfrac{104\sqrt{26}}{15}+\dfrac{512}{45}-\dfrac{40\sqrt{10}}{9}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{4x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+1}} &= \int_3^5 \frac{4x\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x+1}\right)}{5x+1-3x-1}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_3^5 \left((5x+1)^{\frac{1}{2}}+(3x+1)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\left(\frac{2}{15}(5x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_3^5\\ &= \frac{104\sqrt{26}}{15}+\frac{512}{45}-\frac{40\sqrt{10}}{9}.\end{aligned}$$

□

③ Tính $\displaystyle\int_1^5 \frac{5x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x+1}} =$ .....

ĐS: $\dfrac{41\sqrt{41}}{12}-\dfrac{529}{36}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{5x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x+1}} &= \int_1^5 \frac{5x\left(\sqrt{8x+1}-\sqrt{3x+1}\right)}{8x+1-3x-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^5 \left((8x+1)^{\frac{1}{2}}-(3x+1)^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{1}{12}(8x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^5\\ &= \frac{41\sqrt{41}}{12}-\frac{529}{36}.\end{aligned}$$

□

④ Tính $\displaystyle\int_1^6 \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{x}-x\sqrt{x+3}} =$ .....

ĐS: $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int_1^6 \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{x}-x\sqrt{x+3}} &= \int_1^6 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+3)}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)}\\ &= \int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{3\sqrt{x(x+3)}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\int_1^6 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+3}\right)\Big|_1^6 \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

□

⑤ Tính $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x+2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ĐS: $8-2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x+2}} &= \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+2)(x+1)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)} \\ &= \int_2^3 \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+2)(x+1)}}\mathrm{d}x \\ &= \int_2^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\Big|_2^3 \\ &= 8-2\sqrt{5}-2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

. □

Bài 8. ① Biết $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{a}-1}{b}$ với a, b là số nguyên dương. Tính $a-b^3$.

ĐS: 0

✍ **Lời giải.**

$$\int_1^2 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (2x-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \sqrt{3}-\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{27}-1}{3}.$$

Suy ra $a=27$, $b=3$ và $a-b^3=0$. □

② Biết $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{8-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{3}$ với a, b là số nguyên dương. Tính $P=ab+a+b$.

ĐS: 1952

✍ **Lời giải.**

$$\int_1^3 \sqrt{8-2x}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 (8-2x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(8-2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{6\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{216}-\sqrt{8}}{3}.$$

Suy ra $a=216$, $b=8$ và $ab+a+b=1952$. □

③ Biết $\displaystyle\int_2^3 \sqrt[3]{3x-5}\,\mathrm{d}x = \sqrt[3]{a}-\frac{1}{b}$ với a, b là các số nguyên. Tính $P=ab+a-b$.

ĐS: 16

✍ Lời giải.

$$\int_2^3 \sqrt[3]{3x-5}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 (3x-5)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(3x-5)^{\frac{4}{3}}\Big|_2^3 = \sqrt[3]{4} - \frac{1}{4}.$$

Suy ra $a=4,\ b=4$ và $P = ab + a - b = 16$. □

④ Biết $\displaystyle\int_2^6 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên dương. Tính $P = ab + a + b$.

ĐS: 584

✍ Lời giải.

$$\int_2^6 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}} = 2\int_2^6 \frac{2\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{2x-1}} = 2\sqrt{2x-1}\Big|_2^6 = 2\sqrt{11} - 2\sqrt{3} = \sqrt{44} - \sqrt{12}.$$

Suy ra $a=44,\ b=12$ và $P = ab + a + b = 584$. □

⑤ Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

ĐS: 46

✍ Lời giải.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2 \\
&= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 \\
&= \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2.
\end{aligned}$$

Suy ra $a=32,\ b=12,\ c=2$ và $P = a + b + c = 46$. □

3.2 Tích phân hàm số phân thức hữu tỉ

Phương pháp giải:

Chú ý nguyên hàm của một số hàm phân thức hữu tỉ thường gặp.

① $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$, với $a \neq 0$.

② $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\frac{-1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$, với $a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

③ $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$, với $a \neq b$.

3.2.1 Ví dụ và bài tập

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau

① Tính $\int\limits_0^1 \dfrac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\ln 2 - \dfrac{1}{2}$ ② $\int\limits_0^1 \dfrac{x}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\ln\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{36}$

Lời giải:

① Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x+1-1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x = \left[\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right]\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

② Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x+2-2}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^3}\right]\mathrm{d}x = \left[\ln|x+2| + \frac{1}{(x+2)^2}\right]\Big|_0^1 = \ln\frac{3}{2} - \frac{5}{36}.$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

① Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{3x-1} = \dfrac{1}{a}\ln b$ với $b>0$. Tính $S = a^2 + b$. **ĐS:** $\dfrac{47}{18}$

② Biết $\int\limits_0^2 \dfrac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = a + \ln b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = 2a + b + 2^b$. **ĐS:** 11

Lời giải:

① Ta có $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{3x-1} = \dfrac{1}{3}\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}(3x-1)}{3x-1} = \dfrac{1}{3}\ln|3x-1||_1^2 = \dfrac{1}{3}(\ln 5 - \ln 2) = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}$.

Suy ra $a = 3, b = \dfrac{5}{2}$. Do đó $S = \dfrac{1}{9} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{47}{18}$.

② Ta có

$$\int\limits_0^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right]\Big|_0^2 = \ln 3 = 0 + \ln 3.$$

Suy ra $a = 0, b = 3$ nên $S = 2\cdot 0 + 3 + 2^3 = 11$.

Bài 1. Tính các tích phân sau

① Biết $\int\limits_0^1 \dfrac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + 2b + 2^a - 2^b$. . . . . .

ĐS: $\dfrac{523}{4}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{2x+3}{2-x} = -\dfrac{2(x-2)+7}{x-2} = -2 - \dfrac{7}{x-2}$. Do đó

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-2 - \frac{7}{x-2}\right)\mathrm{d}x = [-2x - 7\ln|x-2|]_0^1 = -2 + 7\ln 2 = 7\ln 2 - 2.$$

Do đó, $a = 7, b = -2$. Vậy $P = 7 + 2\cdot(-2) + 2^7 - 2^{-2} = \dfrac{523}{4}$. □

② Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = ab - a + b$. .....

ĐS: -11

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2(x+1)-3}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2 - \frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x = (2x - 3\ln|x+1|)|_0^1 = 2 - 3\ln 2.$
Vậy $a = 2, b = -3$, suy ra $P = -6 - 2 - 3 = -11$. □

Bài 2. Tính các tích phân sau

① Tính $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x = 3\ln\frac{a}{b} - \frac{5}{6}$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2^a + 2^b - ab$. .....

ĐS: 12

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{3x-1}{x^2+6x+9} = \frac{3(x+3)-10}{(x+3)^2} = \frac{3}{x+3} - \frac{10}{(x+3)^2}.$$

Do đó

$$\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{3}{x+3} - \frac{10}{(x+3)^2}\right]\mathrm{d}x = \left[3\ln|x+3| + \frac{10}{x+3}\right]\Big|_0^1 = 3\ln\frac{4}{3} - \frac{5}{6}.$$

Suy ra $a = 4, b = 3$ nên $P = 2^4 + 2^3 - 4\cdot 3 = 12$. □

② Biết $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b - ab^2$. .....

ĐS: -1

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = [\ln|x+1| - \ln|x+2|]_0^1 = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Big|_0^1 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3} = 2\ln 2 - \ln 3.$$

Suy ra $a = 2, b = -1$ nên $S = 2 + (-1) - 2\cdot(-1)^2 = -1$. □

Bài 3. Tính các tích phân sau

① Biết $\int\limits_0^1 \dfrac{x^3}{x+2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{3} + b\ln 3 + c\ln 2$, với $a,b,c \in \mathbb{Q}$. Tính $S = 2a + 4b^2 + 3c^3$. .....

ĐS: -1388

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x^2(x+2) - 2x(x+2) + 4(x+2) - 8}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x+2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\ln|x+2|\right]\Big|_0^1 = \frac{10}{3} - 8\ln 3 - 8\ln 2 = \frac{10}{3} + (-8)\ln 3 + (-8)\ln 2.$$

Suy ra $a = 10, b = -8, c = -8$ nên $S = 2\cdot 10 + 4\cdot(-8)^2 + 3\cdot(-8)^3 = -1388$. □

② Biết $\int\limits_{-1}^0 \dfrac{3x^2+5x-1}{x-2}\,\mathrm{d}x = a\ln\dfrac{2}{3} + b$ với $a,b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của $S = a + 4b$. .....

ĐS: -29

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{3x^2+5x-1}{x-2} = \dfrac{3(x^2-4) + 5(x-2) + 21}{x-2} = (3x+11) + \dfrac{21}{x-2}$.

Do đó: $\int\limits_{-1}^0 \dfrac{3x^2+5x-1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-}^{0} 1^0 \left[3x + 11 + \dfrac{21}{x-2}\right]\mathrm{d}x = \left[\dfrac{3}{2}x^2 + 11x + 21\ln|x-2|\right]\Big|_{-1}^0 = -\dfrac{25}{2} + 21\ln\dfrac{2}{3}$.

Khi đó $a = 21, b = -\dfrac{25}{2}$ nên $S = 21 + 4\cdot\left(-\dfrac{25}{2}\right) = -29$. □

③ Biết $\int\limits_3^5 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-x} = a\ln 5 + b\ln 3 + c\ln 2$ với $a,b,c \in \mathbb{Q}$. Tính $S = -2a + b + 3c^2$. .....

ĐS: 6

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}.$$

Khi đó

$$\int\limits_3^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x} = \int\limits_3^5 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = [\ln|x-1| - \ln|x|]\Big|_3^5 = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\Big|_3^5 = \ln\frac{4}{5} - \ln\frac{2}{3} = \ln 2 + \ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra rằng $a = -1, b = 1, c = 1$ nên $S = -2\cdot(-1) + 1 + 3\cdot 1^2 = 6$. □

④ Tính $\int\limits_1^5 \dfrac{3}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2$ với $a,b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b - ab$. .....

ĐS: 1

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{3}{x^2+3x} = \frac{(x+3)-x}{x(x+3)} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right).$$

Khi đó

$$\int_1^5 \frac{3}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x}{x+3}\right|\Big|_1^5 = \ln\frac{5}{8}-\ln\frac{1}{4} = \ln 5-3\ln 2+2\ln 2 = \ln 5-\ln 2.$$

Suy ra $a=1, b=-1$ nên $S=1+(-1)-1\cdot(-1)=1$. □

⑤ Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x+1)(2x+1)}\,\mathrm{d}x = a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $S=a+b+c$. . . . . .

ĐS: 0

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{(2x+1)-(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}.$$

Do đó

$$\int_1^2 \frac{x}{(x+1)(2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = \left[\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]\Big|_1^2 = -\ln 2+\frac{3}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 5.$$

Suy ra $a=-1, b=\dfrac{3}{2}, c=-\dfrac{1}{2}$ nên $S=-1+\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$. □

⑥ Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+6} = a\ln 2+b\ln 3$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b$. . . . . .

ĐS: -1

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}.$$

Khi đó

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+6} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)\mathrm{d}x = [\ln|x-2|-\ln|x-3|]\Big|_0^1 = -2\ln 2+\ln 3$$

Suy ra $a=-2, b=1$ nên $S=a+b=-2+1=-1$. □

⑦ Tính $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{-2x^2+3x-1} = a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $S=2a+b^2+2^c$. . . . . .

ĐS: 1

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{1}{-2x^2+3x-1} = -\frac{2(x-1)+(-2x+1)}{(-2x+1)(x-1)} = \frac{-2}{-2x+1}-\frac{1}{x-1}.$$

Khi đó

$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}}{-2x^2+3x-1} = \int_2^3 \left(\frac{-2}{-2x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = [\ln|-2x+1|-\ln|x-1|]\Big|_2^3 = -\ln 2-\ln 3+\ln 5.$$

Suy ra $a=-1, b=-1, c=1$ nên $S=2\cdot(-1)+(-1)^2+2^1=1$. □

⑧ Tính $\int\limits_0^1 \dfrac{5-2x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với $a,b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = 2^a - 3ab$. . . . . .

ĐS: 65968

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{5-2x}{x^2+3x+2} = \frac{-9(x+1)+7(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{-9}{x+2} + \frac{7}{x+1}.$$

Khi đó

$$\int\limits_0^1 \frac{5-2x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\frac{-9}{x+2} + \frac{7}{x+1}\right)\mathrm{d}x = [-9\ln|x+2| + 7\ln|x+1|]\Big|_0^1 = 16\ln 2 - 9\ln 3.$$

Suy ra $a = 16, b = -9$ nên $S = 2^{16} - 3\cdot 16\cdot(-9) = 65968$. □

⑨ Tính $\int\limits_0^2 \dfrac{x-1}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 3$ với $a,b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = ab + 3^a - a$. . . . . .

ĐS: 1

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{x-1}{x^2+4x+3} = \frac{2(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1}.$$

Khi đó

$$\int\limits_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = [2\ln|x+3| - \ln|x+1|]\Big|_0^2 = 2\ln 5 - 3\ln 3.$$

Suy ra $a = 2, b = -3$ nên $S = ab + 3^a - a = 2\cdot(-3) + 3^2 - 2 = 1$. □

⑩ Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{1}{x^2(x+1)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{a}{b}$ với $a,b \in \mathbb{Z}^+$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + 2^b$. . . . . .

ĐS: 19

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{x+1-x}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

Khi đó

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} + \ln|x+1| - \ln|x|\right]\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln\frac{3}{4}.$$

Suy ra $a = 3, b = 4$ nên $S = a + 2^b = 3 + 2^4 = 19$. □

3.3 Tính chất của tích phân

① $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

② $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)|_a^b = f(b)-f(a)$, $\int\limits_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(x)\big|_a^b = f(b)-f(a)$,....

3.3.1 Ví dụ và bài tập

Ví dụ 1.

① Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$ và $\int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** 4

② Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ với $a < b < c$. Tính $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ **ĐS:** -1

③ Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2017$ và $\int\limits_4^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$. Tính $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** -1

Lời giải:

① Ta có

$$7 = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hay là

$$7 = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 3 + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow P = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7-3 = 4.$$

② Ta có

$$\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = 2-3 = -1.$$

③ Ta có

$$\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_4^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2017-2018 = -1.$$

Ví dụ 2.

① Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $\int\limits_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x=9$. Tính $\int\limits_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.

ĐS: 12

② Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=4$ và $\int\limits_2^6 f(t)\,\mathrm{d}t=-3$. Tính $\int\limits_0^2[f(v)-3]\,\mathrm{d}v$.

ĐS: 1

Lời giải:

① Ta có

$$\int\limits_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x=3+9=12.$$

② Ta có

$$\int\limits_0^2 f(v)\,\mathrm{d}v=\int\limits_0^6 f(v)\,\mathrm{d}v-\int\limits_2^6 f(v)\,\mathrm{d}v=\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x=4-(-3)=7.$$

Hay là

$$\int\limits_0^2 f(v)\,\mathrm{d}v=7\Rightarrow\int\limits_0^2[f(v)-3]\,\mathrm{d}v=\int\limits_0^2 f(v)\,\mathrm{d}v-\int\limits_0^2 3\,\mathrm{d}v=7-3v|_0^2=1.$$

Ví dụ 3.

① Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f'(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** 1

② Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$, $f(1)=1$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=2$. Tính $f(4)$. **ĐS:** 3

③ Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;3]$, $f(3)=5$ và $\int\limits_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=6$. Tính $f(1)$. **ĐS:** -1

Lời giải:

① Ta có $\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)|_1^2=f(2)-f(1)=2-1=1.$

② Ta có $2=\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)|_1^4=f(4)-f(1)=f(4)-1\Rightarrow f(4)=3.$

③ Ta có $6=\int\limits_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)|_1^3=f(3)-f(1)=5-f(1)\Rightarrow f(1)=-1.$

Bài 1. Bài toán sử dụng tính chất $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

① Cho $\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính tích phân $\int\limits_2^4 [3f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: 5

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_2^4 [3f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x = 3\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x - 5\int\limits_2^4 g(x)\,\mathrm{d}x = 3\cdot 10 - 5\cdot 5 = 5.$$

□

② Cho $\int\limits_{-1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\int\limits_4^5 f(t)\,\mathrm{d}t = -2$ và $\int\limits_{-1}^4 g(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{3}$. Tính $I = \int\limits_{-1}^4 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $\dfrac{22}{3}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_4^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 5 - (-2) = 7.$$

Khi đó

$$I = \int\limits_{-1}^4 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^4 g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^4 g(u)\,\mathrm{d}u = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}.$$

□

③ Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = a$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{f(x)\cos^2 x - 5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ theo a. . . . . .

ĐS: $a - 5$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)\cos^2 x - 5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(f(x) - \frac{5}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = a - 5\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a - 5.$$

□

④ Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x]\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: 7

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + 2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = 5 - 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5 - 2(0 - 1) = 7.$$

□

Bài 2. Bài toán sử dụng tính chất $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\big|_a^b = f(b)-f(a)$, $\int\limits_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(x)\big|_a^b = f(b)-f(a)$,...

① Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[1;3]$, $f'(1)=1$ và $f'(3)=m$. Tìm m để $\int\limits_1^3 f''(x)\,\mathrm{d}x = 5$. .....

ĐS: 6

✍ **Lời giải.**

Ta có $5 = \int\limits_1^3 f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(x)\big|_1^3 = f'(3)-f'(1) = m-1 \Rightarrow m = 6$. □

② Biết $f(1)=12$, $f'(x)$ là hàm số liên tục trên $[1;4]$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 17$. Tính $f(4)$. .....

ĐS: 29

✍ **Lời giải.**

Ta có $17 = \int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\big|_1^4 = f(4)-f(1) = f(4)-12 \Rightarrow f(4) = 29$. □

Bài 3. Bài toán sử dụng tính chất $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

① Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^2 [x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $\dfrac{35}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I = \int\limits_{-1}^2 [x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x = I = \int\limits_{-1}^2 x\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^2 + 2\cdot 5 - 3\cdot(-2) = \frac{35}{2}.$$

□

② Cho $\int\limits_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \int\limits_6^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: -12

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I = \int\limits_6^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^6 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x = -10-2 = -12.$$

□

③ Cho $\int\limits_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$. Tính tích phân $I = \int\limits_3^6 [x^2 - f(x)]\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: 56

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I=\int_3^6[x^2-f(x)]\,\mathrm{d}x=\int_3^6 x^2\,\mathrm{d}x-\int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_3^6-7=63-7=56.$$

□

④ Cho $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=1$ và $\int_0^2\left[\mathrm{e}^x-f(x)\right]\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-b$. Tìm a,b. .....

ĐS: $a=b=2$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_0^2\left[\mathrm{e}^x-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\big|_0^2-1=\mathrm{e}^2-2.$$

Suy ra $a=2,b=2$. □

Bài 4. Bài toán sử dụng tính chất $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)|_a^b=f(b)-f(a)$, $\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x=f'(x)\big|_a^b=f(b)-f(a)$,....

① Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[-3;5]$, $f(-3)=1$ và $f(5)=9$. Tính $\int_{-3}^5 4f'(x)\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: 32

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_{-3}^5 4f'(x)\,\mathrm{d}x=4\,f(x)|_{-3}^5=4\cdot[f(5)-f(-3)]=4(9-1)=32.$ □

② Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 3 trên $[-3;2]$, $f''(-3)=4$ và $f''(2)=6$. Tính giá trị của tích phân $\int_{-3}^2 f'''(x)\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: 2

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_{-3}^2 f'''(x)\,\mathrm{d}x=f''(x)\big|_{-3}^2=f''(2)-f''(-3)=6-4=2.$ □

Bài 5. Tính các tích phân sau bằng phương pháp biến đổi hàm ẩn:

① Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2017$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos 2x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{2017}{2}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sin 2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\cos 2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow\cos 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1.\end{cases}$

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2017}{2}.$ □

② Cho $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 16$. Tính $\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: 8

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 2 \Rightarrow t = 4. \end{cases}$

Khi đó $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$. □

③ Cho $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^{2017} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 f(2017x)\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $\dfrac{1}{2017}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 2017x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2017\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2017}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2017. \end{cases}$

Khi đó $I = \dfrac{1}{2017}\displaystyle\int\limits_0^{2017} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2017}\int\limits_0^{2017} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2017}$. □

④ Cho $\displaystyle\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1 f(4x)\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $\dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 4x \Rightarrow \mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 4. \end{cases}$

Khi đó $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{4}\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$. □

⑤ Biết $\displaystyle\int\limits_1^3 f(3x-1)\,\mathrm{d}x = 20$. Tính $\displaystyle\int\limits_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: 60

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 3x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 3 \Rightarrow t = 8. \end{cases}$

Khi đó, ta có $20 = \displaystyle\int\limits_1^3 f(3x-1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int\limits_2^8 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}\int\limits_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 60$. □

⑥ Cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 10$ và $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln 2$. Biết rằng hàm số $f(x) > 0, \forall x \in [1;2]$. Tính $f(2)$. .....

ĐS: 20

✍ Lời giải.

Đặt $u = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = f(1) \\ x = 2 \Rightarrow u = f(2). \end{cases}$

Khi đó

$$10 = \int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(1)}^{f(2)} \mathrm{d}u = u|_{f(1)}^{f(2)} = f(2) - f(1) \quad (1).$$

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{f(1)}^{f(2)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u||_{f(1)}^{f(2)} = \ln|f(2)| - \ln|f(1)|.$$

Vì $f(x) > 0, \forall x \in [1;2]$ nên $f(1) > 0$ và $f(2) > 0$. Do đó: $\ln f(2) - \ln f(1) = \ln 2 \Leftrightarrow \dfrac{f(2)}{f(1)} = 2 \Leftrightarrow f(2) = 2f(1) \quad (2)$.

Từ (1) và (2), suy ra $f(2) = 20$. □

Bài 6. Tính các tích phân bằng phương pháp đổi biến hàm ẩn:

① Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$, $f(2) = 2$ và $f(4) = 2018$. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 f'(2x)\,\mathrm{d}x$.... **ĐS:** $I = 1008$.

✍ Lời giải.

Xét $I = \displaystyle\int_1^2 f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$, $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{1}{2} \cdot f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot f(t)|_2^4 = \frac{1}{2}[f(4) - f(2)] = 1008$. □

② Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(2x) - \sin x]\,\mathrm{d}x$.. **ĐS:** $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(2x) - \sin x]\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Xét $H = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$.

Khi đó $H = \dfrac{1}{2} \cdot \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Xét $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $I = H - K = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. □

③ Cho tích phân $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = a$. Hãy tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 xf\left[x^2+1\right]\mathrm{d}x$ theo a. . . . . **ĐS:** $\dfrac{1}{2}a$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $I = \displaystyle\int_1^2 f(t)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a$. □

④ Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\displaystyle\int_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4$ và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $I = 4$.

✍ **Lời giải.**

Xét $H = \displaystyle\int_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = 9 \Rightarrow t = 3$.

Khi đó $H = \displaystyle\int_1^3 f(t)\cdot 2\,\mathrm{d}t = 4 \Rightarrow \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Rightarrow \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Xét $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Khi đó $K = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Vậy $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + 2 = 4$. □

⑤ Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = 6$.

✍ **Lời giải.**

Xét $H = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = \left(1 + \tan^2 x\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$.

Khi đó $H=\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=4\Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=4$.

Xét $K=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \left[\frac{(x^2+1)f(x)}{x^2+1}-\frac{f(x)}{x^2+1}\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow 2=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-4$

$\Rightarrow I=6$. □

⑥ Cho $f(x)$ là hàm liên tục và $a>0$. Giả sử rằng với mọi $x\in[0;a]$ ta có $f(x)>0$ và $f(x)\cdot f(a-x)=1$. Tính $I=\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{a}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Do $f(x)\cdot f(a-x)=1\Rightarrow f(a-x)=1-f(x)$.

Xét $I=\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=a$, $x=a\Rightarrow t=0$.

$I=\displaystyle\int_a^0 \frac{-\mathrm{d}t}{1+f(a-t)}=\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+\dfrac{1}{f(t)}}=\int_0^a \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{1+f(t)}=\int_0^a \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

Mặt khác, $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int_0^a \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int_0^a \mathrm{d}x=a$.

$\Rightarrow 2I=a\Leftrightarrow I=\dfrac{a}{2}$. □

Bài 7. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần của hàm ẩn:

① Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa $f(1)=0$, $f(2)=2$ và $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. Tính $I=\displaystyle\int_1^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $I=3$.

✍ **Lời giải.**

Từ $I=\displaystyle\int_1^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x$ chọn $\begin{cases} u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=f(x)\end{cases}$.

Khi đó $I=xf(x)\Big|_1^2-\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2f(2)-1=3$.

⚠ ***Lưu ý:*** *Tùy vào bài toán mà ta cần chọn u và $\mathrm{d}v$ sao cho $\displaystyle\int_a^b v\,\mathrm{d}u$ đơn giản nhất.*

□

② Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm là $F(x)$ trên $[1;2]$, $F(2)=1$ và $\displaystyle\int_1^2 F(x)\,\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\displaystyle\int_1^2 (x-1)f(x)\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=-4$.

✍ Lời giải.

Từ $I=\int\limits_1^2(x-1)f(x)\,\mathrm{d}x$ chọn $\begin{cases}u=x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=f(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=F(x)\end{cases}$.

$I=(x-1)F(x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2F(x)\,\mathrm{d}x=F(2)-5=1-5=-4.$ □

③ Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int\limits_0^2f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^1xf'(2x)\,\mathrm{d}x\ldots$ **ĐS:** $I=7$.

✍ Lời giải.

Xét $I=\int\limits_0^1xf'(2x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^2tf'(t)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}J.$

Xét $J=\int\limits_0^2tf'(t)\,\mathrm{d}t.$

Chọn $\begin{cases}u=t\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}v=f'(t)\,\mathrm{d}t\Rightarrow v=f(t)\end{cases}$.

Khi đó $J=tf(t)\Big|_0^2-\int\limits_0^2f(t)\,\mathrm{d}t=2f(2)-\int\limits_0^2f(x)\,\mathrm{d}x=32-4=28.$

Vậy $I=\dfrac{1}{4}J=7.$ □

④ Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $\int\limits_0^2f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $f(2)=2$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^4f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **ĐS:** $I=2$.

✍ Lời giải.

Xét $I=\int\limits_0^4f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=4\Rightarrow t=2$. Ta được

$$I=\int\limits_0^2f'(t)\cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

Chọn $\begin{cases}u=2t\Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}v=f'(t)\,\mathrm{d}t\Rightarrow v=f(t)\end{cases}$. Khi đó $I=2t\cdot f(t)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 2f(t)\mathrm{d}t=2\cdot 2\cdot 2-2\int\limits_0^2f(x)\mathrm{d}x=8-2\cdot 3=2.$

□

⑤ Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa $\int\limits_1^2 f'(x)\ln[f(x)]\,\mathrm{d}x = 1$ và $f(1)=1$, $f(2)>1$.

Tính $f(2)$. . . . . **ĐS:** $f(2)=\mathrm{e}$.

✍ **Lời giải.**

Xét $I = \int\limits_1^2 f'(x)\ln[f(x)]\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}t = f'(x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t = f(1)=1$, $x=2 \Rightarrow t=f(2)$.

Khi đó $I = \int\limits_1^{f(2)} \ln t\,\mathrm{d}t$. Chọn $\begin{cases} u = \ln t \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}t \Rightarrow v = t. \end{cases}$

Ta được $I = t\ln t\Big|_1^{f(2)} - \int\limits_1^{f(2)} \mathrm{d}t = f(2)\ln f(2) - [f(2)-1]$.

Do $I=1$ và $f(2)>1$ nên

$$f(2)\ln f(2) - [f(2)-1] = 1 \Leftrightarrow f(2)\cdot[\ln f(2)-1] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(2)=0 & \text{(loại)} \\ \ln f(2)=1 \Rightarrow f(2)=\mathrm{e}. \end{array}\right.$$

Vậy $f(2)=\mathrm{e}$. □

⑥ Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = 10$ và $2f(1)-f(0)=2$.

Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=-8$.

✍ **Lời giải.**

Với $H = \int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x$, chọn $\begin{cases} u = x+1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$.

Ta được $H = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2f(1) - f(0) - I$.

$\Rightarrow I = 2-10 = -8$. □

⑦ Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai và liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn các điều kiện $\int\limits_0^1 x^2 f''(x)\mathrm{d}x = 12$ và $2f(1)-f'(1)=-2$. tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=5$.

✍ **Lời giải.**

Với $H = \int\limits_0^1 x^2 f''(x)\mathrm{d}x$, chọn $\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f''(x)\mathrm{d}x \Rightarrow v = f'(x) \end{cases}$. Ta được $H = x^2 f'(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 2xf'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $f'(1) - 2K = 12$ với $K = \int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

Chọn $\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$. Ta được $K = xf(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(1) - I$.

Do đó $f'(1) - 2(f(1) - I) = 12 \Rightarrow f'(1) - 2f(1) + 2I = 12 \Rightarrow I = 5$. □

⑧ Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^3 x\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x = 8$ và $f(3) = \ln 3$. Tính $I = \int\limits_0^3 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$... **ĐS:** $I = 1$.

✍ **Lời giải.**

$H = \int\limits_0^3 x\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x = 8$. Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^{f(x)} \end{cases}$. Do đó

$$H = x\mathrm{e}^{f(x)}\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x = 3\cdot\mathrm{e}^{f(3)} - I.$$

$$\Rightarrow \quad I = 3\cdot 3 - 8 = 1.$$

□

⑨ Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$, $\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \dfrac{223}{10}$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = -\dfrac{203}{5}$.

✍ **Lời giải.**

$H = \int\limits_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{223}{10}$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Do đó

$$H = \frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}I.$$

$$\Rightarrow \quad I = f(1) - 2H = 4 - \frac{223}{5} = -\frac{203}{5}.$$

□

⑩ Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = -1$.

✍ **Lời giải.**

$H = \int\limits_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$. Do đó

$$H = \frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^3}{3}f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f(1) - \frac{1}{3}I.$$

$$\Rightarrow \quad I = f(1) - 3H = 0 - 3\cdot\frac{1}{3} = -1.$$

□

(11) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=2$, $\displaystyle\int_0^3 x^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5461}{120}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^3 x^4 f'(x)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=-\dfrac{601}{30}$.

✍ Lời giải.

$H=\displaystyle\int_0^3 x^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5461}{120}$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=x^3\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^4}{4}\end{cases}$. Do đó

$$H=\frac{x^4}{4}f(x)\Big|_0^3-\int_0^3\frac{x^4}{4}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{3^4}{4}f(3)-\frac{1}{4}I$$

$$\Rightarrow\quad I=3^4\cdot f(3)-4H=2\cdot 3^4-4\cdot\frac{5461}{120}=-\frac{601}{30}.$$

□

(12) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int_a^b xf''(x)\mathrm{d}x=4$, $f'(a)=-2$, $f'(b)=3$ với a, b là các số thực dương và $f(a)=f(b)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4a^2}{3b+1}+\dfrac{9b^2}{2a+3}$. . . . . **ĐS:** $\dfrac{1}{32}$.

✍ Lời giải.

$H=\displaystyle\int_a^b xf''(x)\mathrm{d}x=4$. Đặt $\begin{cases}u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=f''(x)\mathrm{d}x\Rightarrow v=f'(x)\end{cases}$. Do đó

$$H=xf'(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=bf'(b)-af'(a)-f(x)\Big|_a^b=3b+2a.$$

$$\Rightarrow\quad 2a+3b=4\Leftrightarrow a=\frac{4-3b}{2}.\quad (*)$$

Thay $(*)$ vào P ta được

$$P=\frac{(4-3b)^2}{3b+1}+\frac{9b^2}{7-3b}=8\cdot\frac{18b^2-27b+14}{-9b^2+18b+8}.$$

Lại có $a>0$, $b>0$ nên $0<b<\dfrac{4}{3}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{18x^2-27x+14}{-9x^2+18x+7}$ trên $\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{81x^2+504x-441}{\left(-9x^2+18x+7\right)^2}$. Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-7\\ x=\dfrac{7}{9}.\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{7}{9}$		$\frac{4}{3}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{2}{3}$

Do đó giá trị nhỏ nhất của $y=f(x)$ trên $\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$ là $\dfrac{1}{4}$ tại $x=\dfrac{7}{9}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $8\cdot\dfrac{1}{4}=2$ tại $b=\dfrac{7}{9}$. Khi đó $a=\dfrac{5}{6}$. □

Bài 8. ① Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=7$ và $\displaystyle\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $\dfrac{7}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{1}{3}=\displaystyle\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x$. Chọn $\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=x^2\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{1}{3}x^3.\end{cases}$

Suy ra $\dfrac{1}{3}=\displaystyle\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3f(x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 x^3f'(x)\,\mathrm{d}x=-1.$

Ta lại có $\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=7\\ 2\displaystyle\int_0^1 7x^3f'(x)\,\mathrm{d}x=-14\Rightarrow\int_0^1 [f'(x)+7x^3]^2\,\mathrm{d}x=0.\\ \displaystyle\int_0^1 (7x^3)^2\,\mathrm{d}x=7\end{cases}$

Mà $[f'(x)+7x^3]^2\ge 0\Rightarrow\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 [f'(x)+7x^3]^2\,\mathrm{d}x\ge 0\\ \\ \displaystyle\int_0^1 [f'(x)+7x^3]^2\,\mathrm{d}x=0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=-7x^3.$

Ta có $f(x)=\displaystyle\int -7x^3\,\mathrm{d}x=-\dfrac{7}{4}x^4+C.$

Vì $f(1)=0$ nên $-\dfrac{7}{4}+C=0\Leftrightarrow C=\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{7}{4}x^4+\dfrac{7}{4}.$

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\dfrac{7}{4}x^4+\dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{7x^5}{20}+\dfrac{7x}{4}\right)\Big|_0^1=\dfrac{7}{5}.$ □

② Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa $f(1)=4$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=36$ và $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}$.

Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $\dfrac{5}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}$. Chọn $\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}.\end{cases}$

Suy ra $\dfrac{1}{5}=\dfrac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{18}{5}.$

Do đó, $\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 36 \\ \displaystyle 2\int_0^1 -(6x^2)f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{216}{5} \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)-6x^2]^2\,\mathrm{d}x = 0. \\ \displaystyle\int_0^1 (6x^2)^2\,\mathrm{d}x = \frac{36}{5} \end{cases}$

Suy ra $f'(x)-6x^2=0 \Leftrightarrow f'(x)=6x^2 \Rightarrow f(x)=2x^3+C$.

Mà $f(1)=4$ nên $C+2=4 \Rightarrow C=2 \Rightarrow f(x)=2x^3+2$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^3+2)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$. □

③ Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 9$ và $\displaystyle\int_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng . . . . . **ĐS:** $\dfrac{5}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4 f(x)}{4}\bigg|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = -1$, do đó ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 [f'(x)+9x^4]^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x + 18\int_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x + 81\int_0^1 x^8\,\mathrm{d}x \\ &= 9-18+9=0.\end{aligned}$$

Do đó $f'(x)=-9x^4$, kết hợp với $f(1)=1$, suy ra $f(x)=-\dfrac{9x^5}{5}+\dfrac{14}{5}$. Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$. □

④ Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1)=1, \int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{9}{5} \text{ và } \int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}.$$

Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{1}{4}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x \Rightarrow \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=1$.

Suy ra

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{5}.$$

Do đó $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}$.

Mặt khác

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2}f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow \int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}.$$

Ta tính được $\int_0^1 \left(3x^2\right)^2\mathrm{d}x = \frac{9}{5}$.

Do đó

$$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x - 2\int_0^1 3x^2 f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(3x^2\right)^2\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x) - 3x^2\right)^2\mathrm{d}x = 0.$$

Suy ra

$$f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + C.$$

Vì $f(1) = 1$ nên $f(x) = x^3$.

Vậy $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$. □

⑤ Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(0) = 1,\ \int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{1}{30},\ \int_0^1 (2x-1)f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{30}.\ \text{Tính}\ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

. . . . . **ĐS:** $\frac{11}{12}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $-\frac{1}{30} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^2-x) = (x^2-x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x^2-x)f'(x)\mathrm{d}x.$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (x^2-x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{30}.$

Ta có $0 = \int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x - 2\int_0^1 f'(x)(x^2-x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^2-x)^2\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(f'(x) - (x^2-x)\right)^2\mathrm{d}x.$

Do vậy, $f'(x) - (x^2-x) = 0 \Rightarrow f'(x) = x^2 - x \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C.$

Mà $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{11}{12}.$ □

Bài 9. Cho hàm số $f(x)$ **liên tục và lẻ** trên đoạn $[-a;a]$. Chứng minh rằng $I = \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$. Xét tích phân $\int\limits_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$, ta có:

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases}x=-a\Rightarrow t=a\\ x=0\Rightarrow t=0.\end{cases}$

Vì $f(x)$ là hàm số lẻ và liên tục trên $[-a;a]$ nên $f(-x)=-f(x)\Rightarrow f(-t)=-f(t)$.

Do đó, $\int\limits_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{a}^{0}f(-t)\mathrm{d}t=-\int\limits_{a}^{0}[-f(t)]\,\mathrm{d}t=\int\limits_{a}^{0}f(t)\mathrm{d}t=-\int\limits_{0}^{a}f(t)\mathrm{d}t=-\int\limits_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy $I=\int\limits_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$. □

① Cho $f(x)$ là hàm số lẻ thỏa mãn $\int\limits_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** -2.

✍ **Lời giải.**

Vì $y=f(x)$ là hàm số lẻ nên $y=f(x)$ cũng là hàm số lẻ trên $[-2;2]$.

Do đó, $\int\limits_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=0$.

Suy ra $\int\limits_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-2$. □

② Tính tích phân $I=\int\limits_{-2017}^{2017}x^{2019}\sqrt{x^4+2018}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** 0

✍ **Lời giải.**

Với mọi $x\in[-2017;2017]$, ta có $f(-x)=(-x)^{2019}\sqrt{(-x)^4+2018}=-x^{2019}\sqrt{x^4+2018}=-f(x)$, do đó, hàm số $y=x^{2019}\sqrt{x^4+2018}$ là hàm số lẻ trên $[-2017;2017]$.

Suy ra $I=\int\limits_{-2017}^{2017}x^{2019}\sqrt{x^4+2018}\,\mathrm{d}x=0$. □

③ Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\sqrt{1+x^{2018}}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** 0

✍ **Lời giải.**

Với mọi $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$, ta có $f(-x)=\sin(-x)\cdot\sqrt{1+(-x)^{2018}}=-\sin x\cdot\sqrt{1+x^{2018}}=-f(x)$, do đó, hàm số $y=\sin x\cdot\sqrt{1+x^2018}$ là hàm số lẻ trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Suy ra $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\sqrt{1+x^{2018}}\,\mathrm{d}x=0$. □

④ Biết $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi\sqrt{b}-\sqrt{a}}{4}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $T=ab$. . . **ĐS:** 64

✍ **Lời giải.**

Vì $\sqrt{1+x^2}-x>0, \forall x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ nên $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\left[\sqrt{1+x^2}-x\right]\mathrm{d}x=-\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x\sin x\,\mathrm{d}x$

(vì hàm số $y=\sin x\sqrt{1+x^2}$ là hàm số lẻ trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ nên $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=0$).

Đặt $\begin{cases}u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=-\sin x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\cos x\end{cases}$. Do đó, $I=x\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}-\sqrt{32}}{4}$.

Suy ra $a=32$, $b=2$.

Vậy $T=ab=64$. □

Bài 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và chẵn trên đoạn $[-a;a]$. Chứng minh rằng

$\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{-a}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$ (1) và $\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+b^x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$ (2)

Chứng minh

1. Ta đi chứng minh công thức (1): $\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{-a}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ta có $I=\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=A+B$.

Xét $A=\int\limits_{-a}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases}x=-a\Rightarrow t=a.\\ x=0\Rightarrow t=0.\end{cases}$

Do $f(x)$ là hàm chẵn và liên tục trên $[-a;a]$ nên $f(-x)=f(x)\Rightarrow f(-t)=f(t)$.

Khi đó: $A=-\int\limits_{a}^{0}f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{a}f(-t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{a}f(-x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=B$.

Suy ra $A=B=\frac{1}{2}I$ nên $I=\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{-a}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Ta đi chứng minh công thức (2): $\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+b^x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$ với $0<b\neq 1$ và $a\in\mathbb{R}^+$.

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases}x=-a\Rightarrow t=a\\ x=0\Rightarrow t=0.\end{cases}$

Ta có

$$I=-\int\limits_{a}^{-a}\frac{f(-t)}{1+b^{-t}}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(t)}{1+\frac{1}{b^t}}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-a}^{a}\frac{b^t\cdot f(t)}{1+b^t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-a}^{a}\frac{b^x\cdot f(x)}{1+b^x}\,\mathrm{d}x.$$

Cộng hai vế cho $I\Rightarrow 2I=\int\limits_{-a}^{a}\frac{b^x\cdot f(x)}{1+b^x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+b^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{a}\frac{(b^x+1)f(x)}{1+b^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$.

① Cho hàm số $f(x)$ là hàm chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $I=\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}=6$.

i) Tính $A=\int\limits_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $A=6$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=-3\Rightarrow t=3.\end{cases}$

Vậy $A=-\int\limits_3^0 f(-t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^3 f(t)\mathrm{d}t=6.$ □

ii) Tính $B=\int\limits_{-1}^{1} f(3x)\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $B=4$

✍ **Lời giải.**

Ta có $B=\int\limits_{-1}^0 f(3x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x.$

Đặt $I=\int\limits_{-1}^0 f(3x)\mathrm{d}x$ và $J=\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x.$

Ta đi tính $I=\int\limits_{-1}^0 f(3x)\mathrm{d}x.$

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=-1\Rightarrow t=1.\end{cases}$

Vậy $I=-\int\limits_1^0 f(-3t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(-3t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x=J.$

Vậy $B=2\int\limits_0^1 f(3x)\mathrm{d}x.$

Đặt $t=3x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=3.\end{cases}$

Vậy $B=\dfrac{2}{3}\int\limits_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}\cdot 6=4.$ □

iii) Tính $C=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot f(3\sin x)\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $C=4$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$C = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(3\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(3\sin x)\,\mathrm{d}(\sin x) = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(3\sin x)\,\mathrm{d}(3\sin x)$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4.$$

□

② Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}x = 3$.

Tính tích phân $\int_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: 14

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $I = \int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 1 \\ x = 6 \Rightarrow t = 3. \end{cases}$

Suy ra $\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_1^3 f(2t)\,\mathrm{d}t = 2\int_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 3 = 6.$

Vậy $\int_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 8 + 6 = 14.$ □

③ Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-1;1]$ thỏa mãn $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính tích phân $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{2^x+1}\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: 2

✍ **Lời giải.**

Áp dụng tính chất trên, ta có $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{2^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2.$ □

④ Tính tích phân $\int_{-3}^{3} \frac{x^{2018}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $\frac{1}{2019}\cdot 3^{2019}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_{-3}^{3}\frac{x^{2018}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}x^{2018}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2019}x^{2019}\Big|_0^3=\frac{1}{2019}\cdot 3^{2019}$. □

⑤ Tính tích $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{(2018^x+1)\left(x^2-4\right)}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $-\dfrac{1}{4}\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(2018^x+1)\left(x^2-4\right)}=\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x-2}-\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x+2}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|\Big|_0^1=-\dfrac{1}{4}\ln 3.$ □

⑥ Tính $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{2017^x+1}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{2017^x+1}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

⑦ Tính tích phân $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{5\pi}{32}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(1-3\sin^2 x\cos^2 x\right)\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x-\frac{3}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x+\frac{3}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 4x\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{32}+\dfrac{3}{32}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{5\pi}{32}.$ □

Bài 11. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Chứng minh rằng

① Nếu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=k$ thì $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x=k$.

② Nếu $f(a+b-x)=-f(x)$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

③ Nếu $f(a+b-x)=f(x)$ thì $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Chứng minh

① Nếu $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = k$ thì $\int\limits_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = k$.

Đặt $t = a+b-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = b$ và $x = b \Rightarrow t = a$.

Suy ra $\int\limits_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = k$.

② Nếu $f(a+b-x) = -f(x)$ thì $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Đặt $t = a+b-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = b$ và $x = b \Rightarrow t = a$.

Suy ra $\int\limits_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Mà $f(a+b-x) = -f(x)$ nên ta có $\int\limits_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x =$

$-\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

③ Nếu $f(a+b-x) = f(x)$ thì $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = a+b-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = b$ và $x = b \Rightarrow t = a$.

Khi đó $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a (a+b-t)f(a+b-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b (a+b-t)f(a+b-t)\,\mathrm{d}t$

$= \int\limits_a^b (a+b-x)f(a+b-x)\,\mathrm{d}x \overset{f(a+b-x)=f(x)}{=} (a+b)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x$

Suy ra $2\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = (a+b)\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

① Cho tích phân $\int\limits_1^{2018} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[1;2018]$. Tính tích phân

$I = \int\limits_1^{2018} f(2019-x)\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: 5

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 2019-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 2018 \\ x = 2018 \Rightarrow t = 1. \end{cases}$

Vậy $I = -\int\limits_{2018}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^{2018} f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. □

② Cho tích phân $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 10$ trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-1;2]$. Tính tích phân

$I = \int\limits_{-1}^{2} f(1-x)\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: 10

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = -1. \end{cases}$

$\Rightarrow I = -\displaystyle\int_2^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 10.$ □

③ Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_a^b f(x) = 7\,\mathrm{d}x$. Tính $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: 7

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = a + b - x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = b \\ x = b \Rightarrow t = a. \end{cases}$

Vậy $I = -\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 7.$ □

④ Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\ln c$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $c > 0$. Tính $a + 9b - c$. . . . . .

ĐS: $\pi + 70$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(1+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\frac{1}{\cos^2 x\cdot(1+\tan x)}\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{\pi}{4}\ln 2 - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x.$

Ta đi tính tích phân $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x.$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}$, có : $f\left(\dfrac{\pi}{4}+0-x\right) = \dfrac{1+\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)} = f(x)$

Vì vậy $J = \dfrac{\pi}{8}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x(1+\tan x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan x}\,\mathrm{d}(1+\tan x)$

$= \dfrac{\pi}{8}\ln|1+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{8}\ln 2.$

Vậy $a = \pi, b = 8, c = 2 \Rightarrow a + 9b - c = \pi + 72 - 2 = \pi + 70.$ □

⑤ Biết $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cdot\sin^6 x\,\mathrm{d}x = \frac{a\cdot\pi^6}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tìm phần nguyên của $a + 2\pi + 10b - c$. . . . . **ĐS:**

✍ **Lời giải.**

Xét hàm số $f(x) = \sin^6 x$. Có : $f(\pi + 0 - x) = f(\pi - x) = \sin^6(\pi - x) = \sin^6 x = f(x)$.

Ta có $\int\limits_0^{\pi} x\sin^6 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin^6 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 \mathrm{d}x.$

$= \dfrac{\pi}{64}\int\limits_0^{\pi} (-\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10)\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{\pi}{64}\left(-\dfrac{1}{6}\sin 6x + \dfrac{3}{2}\sin 4x - \dfrac{15}{2}\sin 2x + 10x\right)\Big|_0^{\pi} = \dfrac{5\pi^2}{32}.$

$\Rightarrow a = 5, b = 2, c = 32.$

Do đó $a + 2\pi + 10b - c = 5 + 2\pi + 20 - 32 = 2\pi - 7 \Rightarrow [a + 2\pi + 10b - c] = 1.$ □

⑥ Biết $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\pi$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: 4

✍ **Lời giải.**

Xét hàm số $g(x) = f(\sin x)$. Ta có $g(0 + \pi - x) = f(\sin(\pi - x)) = f(\sin x)$.

Suy ra $I = \dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \Rightarrow \int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 4.$ □

⑦ Biết $\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS:

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}.$

$\Rightarrow I = \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{\pi}{3}.$ □

⑧ Chứng minh rằng $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^n x\,\mathrm{d}x}{\sin^n x + \cos^n x} = \dfrac{\pi}{4}$ với $n \in \mathbb{R}^+$ .....

ĐS: $\dfrac{\pi}{4}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $x = \dfrac{\pi}{2} - t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

Như vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^n x}{\cos^n x + \sin^n x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^n t}{\sin^n t + \cos^n t}\,\mathrm{d}t.$

Đặt $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t}\,\mathrm{d}x$ và $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,\mathrm{d}x$. Ta có $\begin{cases} I = J \\ I + J = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I = J = \dfrac{\pi}{4}.$ □

⑨ Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sin x + 1}$. .....

ĐS: π

✍ Lời giải.

Hàm số $g(x)=\dfrac{1}{\sin x+1}$ thỏa mãn $g(\pi-x)=\dfrac{1}{\sin(\pi-x)+1}=\dfrac{1}{\sin x+1}=g(x)$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x}{\sin x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sin x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi}=\pi.$ □

Bài 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn: $mf(-x)+nf(x)=g(x)$ thì $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{m+n}\int_{-a}^{a}g(x)\,\mathrm{d}x$.

Hệ quả 1. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thì

$$1)\quad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}x\cdot f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$2)\quad \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}x\cdot f(\cos x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}f(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

① Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2017f(x)=\cos x$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $\dfrac{1}{1009}$

✍ Lời giải.

Ta có $f(-x)+2017f(x)=\cos x\quad(1)$

Thay x bởi $-x$, ta có $f(x)+2017f(-x)=\cos x\quad(2)$.

Lấy $(1)-(2)$, ta được

$f(x)+2017f(-x)=f(-x)+2017f(x)\Leftrightarrow 2016f(-x)=2016f(x)\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$.

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(-x)+2017f(x)]\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2018\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

$\Rightarrow\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2018}$

Vậy $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1009}$ □

② Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+5f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $\dfrac{\pi}{28}$

✍ Lời giải.

Ta có $2f(x)+5f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$ (1).

Thay x bởi $-x$, ta có $2f(-x)+5f(x)=\dfrac{1}{4+x^2}$ (2).

Lấy (1) $-$ (2), ta được $f(-x)=f(x)$. Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) suy ra $7f(x)=\dfrac{1}{4+x^2}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{7\left(4+x^2\right)}$.

Suy ra $I=\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int\limits_{-2}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}$. (1)

Ta đi tính tích phân $J=\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$.

Đặt $x=2\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=-2\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{4}\\ x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

Suy ra $J=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{4\cos^2 t\left(1+\tan^2 t\right)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$.

Thay vào (1), suy ra $I=\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{28}$. □

③ Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$.....

ĐS: 6

✍ Lời giải.

Áp dụng công thức trên, ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}2|\cos x|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos x|\,\mathrm{d}x\\ &= -\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= -\sin x\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.\end{aligned}$$

□

Bài 13. Cho tích phân $\displaystyle\int\limits_{a}^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=k$ với $f(x)$ là hàm xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì tích phân $\displaystyle\int\limits_{0}^{T}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=k$.

Chứng minh

Ta có $I=\int\limits_{a}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{T}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{T}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x.$

Xét tích phân $J=\int\limits_{a}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=x-T$.

Đổi cận $\begin{cases}x=T\Rightarrow t=0\\x=a+T\Rightarrow t=a.\end{cases}$

Khi đó: $J=\int\limits_{T}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{a}f(t+T)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{a}f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int\limits_{a}^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{T}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{T}f(x)\mathrm{d}x=k$

⚠ *Hàm số $f(x)$ có chu kỳ T thì $f(x+T)=f(x)$ với T là số nguyên dương nhỏ nhất*

① Cho tích phân $I=\int\limits_{a}^{a+\pi}f(x)\mathrm{d}x=2018$, với $f(x)$ là hàm xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ π. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$ .....

ĐS: 2018

✍ **Lời giải.**

Cho $a=0$ ta suy ra $I=\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=2018.$ □

② Tính tích phân $I=\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x\mathrm{d}x}{\cos^4x+\sin^4x}$ .....

ĐS: $\dfrac{\pi}{4}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{\sin^4x+\cos^4x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\dfrac{2\tan x}{\cos^2x\left(1+\tan^4x\right)}\mathrm{d}x=\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\dfrac{2\tan x}{1+\tan^4x}\mathrm{d}(\tan x).$

Đặt $t=\tan^2x\Rightarrow\mathrm{d}t=2\tan x\,\mathrm{d}(\tan x).$

Đổi cận: $\begin{cases}x=\pi\Rightarrow t=0\\x=\dfrac{5\pi}{4}\Rightarrow t=1.\end{cases}$

Do đó $\int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\dfrac{2\tan x}{1+\tan^4x}\mathrm{d}(\tan x)=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$ (1)

Ta đi tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

Đặt $t=\tan u\Rightarrow\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\cos^2u}\mathrm{d}u.$

Đổi cận $\begin{cases} t=0 \Rightarrow u=0 \\ t=1 \Rightarrow u=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u \cdot \left(1+\tan^2 u\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}u = u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$

Vậy $I = \displaystyle\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x\,\mathrm{d}x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{\pi}{4}.$ □

③ Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{2017\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $4034\sqrt{2}$

✍ **Lời giải.**

Vì hàm số $f(x) = \sqrt{1-\cos 2x}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ π nên

$\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \ldots = \int_{2016\pi}^{2017\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2017\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x = 2017\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= -2017\sqrt{2}\left(\cos x\Big|_0^{\pi}\right) = -2017\sqrt{2}(-1-1) = 4034\sqrt{2} \end{aligned}$$

□

3.4 Tích phân hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Phương pháp giải

Sử dụng tính chất của tích phân

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_c^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

đến đây ta có 2 cách để phá dấu giá trị tuyệt đối

- **Cách 1.** Xét dấu biểu thức $f(x)$ để khử dấu trị tuyệt đối.
- **Cách 2.** Giải phương trình $f(x)=0$ trên $(a;b)$. Giả sử trên khoảng $(a;b)$ phương trình có nghiệm $a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$. Do hàm số $f(x)$ không đổi dấu trên mỗi khoảng $(x_i;x_{i+1})$ nên ta có

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_a^{x_1} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{x_n}^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \left|\int_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \end{aligned}$$

3.4.1 Ví dụ và bài tập

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau:

① Tính tích phân $I=\int\limits_0^2|1-x|\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** 1

Lời giải: Cách 1. Ta có $1-x=0\Leftrightarrow x=1$

Và $1-x\geq 0,\ \forall x\in(0;1)$

Do đó $I=\int\limits_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(x-1)\,\mathrm{d}x=\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=1.$

Cách 2. phương trình $1-x=0\Leftrightarrow x=1\in(0;2)$, nên ta có

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_0^2|1-x|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1|1-x|\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2|1-x|\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_1^2(1-x)\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|1-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}-1\right|=1\end{aligned}$$

② Tính tích phân $I=\int\limits_0^2|x^2-x|\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** 1

Lời giải: Ta có $x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$

Do đó

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_0^2|x^2-x|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1|x^2-x|\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2|x^2-x|\,\mathrm{d}x\\&=\left|\int\limits_0^1(x^2-x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_1^2(x^2-x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1\end{aligned}$$

Bài 1.

① Tính tích phân $I=\int\limits_0^2|x^2-x|\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: 1

✍ **Lời giải.**

Ta có: $x^2-x=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

Bảng xét dấu x^2-x trên đoạn $[0;2]$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra: $I=\int\limits_0^1\left(-x^2+x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=1.$ □

② Tính tích phân $\int\limits_0^3\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{8}{3}$

✍ Lời giải.

Phương trình $f(x)=0$ có các nghiệm lần lượt là $x=0$ và $x=2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vì vậy $I=\displaystyle\int_0^3 |x^2-2x|\,\mathrm{d}x=\int_0^2 (2x-x^2)\,\mathrm{d}x+\int_2^3 (x^2-2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{8}{3}$ □

③ Tính tích phân $\displaystyle\int_0^4 \left|x^2+4x-5\right|\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{116}{3}$

✍ Lời giải.

Nghiệm của phương trình $x^2-4x+5=0$ lần lượt là $x=1$ và $x=-5$. Do đó

$\displaystyle\int_0^4 \left|x^2+4x-5\right|\mathrm{d}x=-\int_0^1 (x^2+4x-5)\,\mathrm{d}x+\int_1^4 (x^2+4x-5)\,\mathrm{d}x=\dfrac{8}{3}+36=\dfrac{116}{3}$ □

④ Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{8}{15}+\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$

✍ Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int_0^3 \sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^3 \sqrt{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (1-x)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^3 (x-1)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{8}{15}+\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$ □

⑤ Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\cos x\right|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{4}{3}$

✍ Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$

Ta đi tính hai tích phân sau: $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$ và $I_2=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Tính $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{\sin x} \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1. \end{cases}$

Suy ra

$$I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2t^2\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}. \qquad (1)$$

Tương tự $I_2=-\dfrac{2}{3}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $I=\dfrac{4}{3}$. □

⑥ Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $4\sqrt{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-1+2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x-\sqrt{2}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$

$=-\sqrt{2}(-1-1)+\sqrt{2}(1+1)=4\sqrt{2}$. □

⑦ Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $-2\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left|\tan x-\cot x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left|\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right|\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left|\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left|\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right|\mathrm{d}(2x).$

Đặt $t=2x$. Khi đó

$I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left|\frac{\cos t}{\sin t}\right|\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t=\ln|\sin t|\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-\ln|\sin t|\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}=-2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$ □

⑧ Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $-\dfrac{3}{\ln 2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left|2^x-2^{-x}\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|\mathrm{d}x$

$$= \int_{-1}^{0} \left(2^{-x} - 2^{x}\right) \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left(2^{x} - 2^{-x}\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{x}}{\ln 2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{2^{x}}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\right)_{0}^{1} = -\frac{3}{\ln 2}.$$ □

⑨ Tính tích phân $I = \int_{-2}^{2} \left|2x - |x+1|\right| \mathrm{d}x$ .....

ĐS: 6

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int_{-2}^{2} \left|2x - |x+1|\right| \mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} \left|2x - |x+1|\right| \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \left|2x - |x+1|\right| \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^{1} \left(\left|x+1\right| - 2x\right) \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \left(2x - \left|x+1\right|\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{1} |x+1| \,\mathrm{d}x - 2\int_{-2}^{1} x \,\mathrm{d}x + 2\int_{1}^{2} 2x \,\mathrm{d}x - \int_{1}^{2} |x+1| \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-2}^{-1} (x+1) \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} (x+1) \,\mathrm{d}x - 2\int_{-2}^{1} x \,\mathrm{d}x + 2\int_{1}^{2} x \,\mathrm{d}x - \int_{1}^{2} (x+1) \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{(x+1)^2}{2}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{1} - x^2\Big|_{-2}^{1} + x^2\Big|_{1}^{2} - \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_{1}^{2} = 6.
\end{aligned}$$

□

3.5 Phương pháp đổi biến số

$$\int_{a}^{b} [f(x)]\,u'(x)\,\mathrm{d}x = F[u(x)]\Big|_{a}^{b} = F[u(b)] - F[u(a)].$$

① Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow \mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$.

② Đổi cận $\begin{cases} x = b \Rightarrow t = u(b) \\ x = a \Rightarrow t = u(a) \end{cases}$.

③ Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

3.5.1 Ví dụ và bài tập

Dạng: $I = \int f(ax+b)^n x \,\mathrm{d}x$

$I_1 = \int f(ax+b)^n x \,\mathrm{d}x \longrightarrow$ Đặt $t = ax+b \Rightarrow \mathrm{d}t = a\mathrm{d}x$.

$I_2 = \int \left(\frac{x^n}{x^{n+1}+1}\right)^m \mathrm{d}x \longrightarrow$ Đặt $t = x^{n+1}+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = (n+1)x^n \mathrm{d}x$.

$I_3 = \int f(ax^2+b)^n x \mathrm{d}x \longrightarrow$ Đặt $t = ax^2+b \Rightarrow \mathrm{d}t = 2ax\mathrm{d}x$.

Ví dụ 1. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x(1-x)^{19}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{1}{420}$

Lời giải: Đặt $t=1-x\Rightarrow x=1-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=0\end{cases}$.

Khi đó $I=-\int\limits_1^0(1-t)t^{19}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1\left(t^{19}-t^{20}\right)\mathrm{d}t=\left(\dfrac{t^{20}}{20}-\dfrac{t^{21}}{21}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{20}-\dfrac{1}{21}=\dfrac{1}{420}$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1\dfrac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 2$

Lời giải: Đặt $t=1+x^2\Rightarrow x^2=t-1\Rightarrow 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Khi đó $I=\int\limits_0^1\dfrac{x^2}{1+x^2}x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2\dfrac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2\left(1-\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}(t-\ln|t|)\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Ví dụ 3. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1\dfrac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{2^{100}-1}{900}$

Lời giải: Ta có $I=\int\limits_0^1\left(\dfrac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}\cdot\dfrac{1}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\dfrac{7x-1}{2x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{9}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{1}{(2x+1)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{9}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=-1\\ x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{9}\int\limits_{-1}^2 t^{99}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{t^{100}}{100}\Big|_{-1}^2=\dfrac{2^{100}-1}{900}$.

Bài 1. Tính các tích phân sau:

① $I=\int\limits_1^2 x(1-x)^{50}\,\mathrm{d}x$ ..... **ĐS:** $\dfrac{103}{2652}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1-x\Rightarrow x=1-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=0\\ x=2\Rightarrow t=-1\end{cases}$.

Khi đó $I=-\int\limits_0^{-1}(1-t)t^{50}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^0\left(t^{50}-t^{51}\right)\mathrm{d}t=\left(\dfrac{t^{51}}{51}-\dfrac{t^{52}}{52}\right)\Big|_{-1}^0=\dfrac{103}{2652}$. □

② $I=\int\limits_0^1 x\left(1+x^2\right)^4\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{31}{10}$

✍ Lời giải.

Đặt $t=1+x^2 \Rightarrow x^2=t-1 \Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2 t^4\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t^5}{5}\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2^5}{5}-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{31}{10}$. □

Bài 2. Tính các tích phân sau:

① $I=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{2}\left(\ln 2-\dfrac{1}{2}\right)$

✍ Lời giải.

Đặt $t=x^2+1 \Rightarrow x^2=t-1 \Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^4}{x^2+1}x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_1^2 \dfrac{(t-1)^2}{t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_1^2\left(t-2+\dfrac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t^2}{2}-2t+\ln|t|\right)\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}\left(\ln 2-\dfrac{1}{2}\right)$.

□

② $I=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^3}{\left(1+x^2\right)^3}\,\mathrm{d}x$.....

ĐS: $\dfrac{1}{16}$

✍ Lời giải.

Đặt $t=1+x^2 \Rightarrow x^2=t-1 \Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_1^2 \dfrac{t-1}{t^3}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_1^2\left(\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{2t^2}\right)\Big|_1^2=\dfrac{1}{16}$. □

Bài 3. Tính $I=\displaystyle\int_2^3 \dfrac{x^{2017}}{(x-1)^{2019}}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{2^{2018}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2018}}{2018}$

✍ Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int_2^3 \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2017}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\dfrac{x}{x-1} \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{-1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=2 \Rightarrow t=2 \\ x=3 \Rightarrow t=\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Khi đó $I=-\displaystyle\int\limits_2^{\frac{3}{2}} t^{2017}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{3}{2}}^{2} t^{2017}\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^{2018}}{2018}\Big|_{\frac{3}{2}}^{2}=\dfrac{2^{2018}-\left(\frac{3}{2}\right)^{2018}}{2018}$. □

Bài 4. Tính các tích phân sau:

① $I=\displaystyle\int\limits_0^1 x^5\left(1-x^3\right)^6\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{168}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1-x^3 \Rightarrow x^3=1-t \Rightarrow x^2\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$.

Khi đó $I=-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int\limits_1^0 \left[(1-t)\cdot t^6\right]\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 \left(t^6-t^7\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{t^7}{7}-\dfrac{t^8}{8}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{168}$. □

② $I=\displaystyle\int\limits_0^1 (1+3x)\left(1+2x+3x^2\right)^{10}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{6^{11}-1}{22}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+2x+3x^2 \Rightarrow (1+3x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=6 \end{cases}$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_1^6 t^{10}\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^{11}}{22}\Big|_1^6=\dfrac{6^{11}-1}{22}$. □

Bài 5. Tính các tích phân sau:

① $I=\displaystyle\int\limits_0^1 2\left[x\left(1-x^2\right)\right]^5\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{168}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1-x^2 \Rightarrow x^2=1-t \Rightarrow 2x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$.

Khi đó

$I=\displaystyle\int\limits_0^1 \left[\left(x^2\right)^2\left(1-x^2\right)^5\right]2x\,\mathrm{d}x=-\int\limits_1^0 \left[(1-t)^2\cdot t^5\right]\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 \left(t^7-2t^6+t^5\right)\mathrm{d}t=\left(\dfrac{t^8}{8}-\dfrac{2}{7}t^7+\dfrac{t^6}{6}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{168}$.

□

② $I=\int\limits_{-1}^{0}x^2(x+1)^{15}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{2448}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=x+1\Rightarrow x=t-1\Rightarrow \mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=0\\ x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$.

Khi đó $I=\int\limits_{0}^{1}\left[(t-1)^2\cdot t^{15}\right]\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{1}\left(t^{17}-2t^{16}+t^{15}\right)\mathrm{d}t=\left(\dfrac{t^{18}}{18}-\dfrac{2}{17}t^{17}+\dfrac{t^{16}}{16}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2448}$. □

③ $I=\int\limits_{0}^{1}x^2\left(1+x^3\right)^n\,\mathrm{d}x,\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ .....

ĐS: $\dfrac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+x^3\Rightarrow x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{3}\int\limits_{1}^{2}t^n\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^{n+1}}{3(n+1)}\Big|_1^2=\dfrac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$. □

④ $I=\int\limits_{0}^{1}x\left(1-x^2\right)^n\,\mathrm{d}x,\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{2(n+1)}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1-x^2\Rightarrow x^2=t-t\Rightarrow x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=0\end{cases}$.

Khi đó $I=-\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{0}t^n\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}t^n\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2(n+1)}$. □

Bài 6. Tính các tích phân sau:

① $I=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{4x^3}{\left(x^4+2\right)^3}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{5}{72}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x^4 + 2 \Rightarrow 4x^3\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ x = 1 \Rightarrow t = 3 \end{cases}$.

Khi đó $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2t^2}\Big|_2^3 = \frac{5}{72}$. □

② $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^3}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{3}{16}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$.

Khi đó $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{4t^2}\Big|_1^2 = \frac{3}{16}$. □

Bài 7. Tính các tích phân sau:

① $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{(x+2)^{2017}}{x^{2019}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{3^{2018} - 2^{2018}}{4036}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2017} \cdot \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \dfrac{x+2}{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{-2}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 3 \\ x = 2 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$.

Khi đó $I = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_3^2 t^{2017}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_2^3 t^{2017}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{2018}}{2\cdot 2018}\Big|_2^3 = \frac{3^{2018} - 2^{2018}}{4036}$. □

Bài 8. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^{2001}}{\left(1+x^2\right)^{1002}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{\left(\frac{4}{5}\right)^{1001} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1001}}{2002}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = t - 1 \Rightarrow x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = 5 \end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\left(x^2\right)^{1000}}{\left(1+x^2\right)^{1002}}\cdot x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_2^5 \frac{(t-1)^{1000}}{t^{1002}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_2^5 \left(\frac{t-1}{t}\right)^{1000}\cdot\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

Đặt $u=\dfrac{t-1}{t}\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$

Đổi cận $\begin{cases} t=2\Rightarrow u=\dfrac{1}{2} \\ t=5\Rightarrow u=\dfrac{4}{5} \end{cases}.$

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} u^{1000}\,\mathrm{d}u=\frac{u^{1001}}{2002}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}}=\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{1001}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1001}}{2002}.$ □

Dạng: $I=\displaystyle\int\limits_a^b \sqrt[n]{f(x)}f'(x)\,\mathrm{d}x\longrightarrow$ Đặt $t=\sqrt[n]{f(x)}\Rightarrow t^n=f(x)\Rightarrow nt^{n-1}\mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x.$

Ví dụ 4. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $-\dfrac{468}{7}$

Lời giải: Đặt $t=\sqrt[3]{1-x}\Rightarrow t^3=1-x\Rightarrow \begin{cases} x=1-t^3 \\ \mathrm{d}x=-3t^2\mathrm{d}t. \end{cases}$

Đổi cận $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=0 \\ x=9\Rightarrow t=-2. \end{cases}$

Khi đó $I=-\displaystyle\int\limits_0^{-2}(1-t^3)\cdot t\cdot 3t^2\,\mathrm{d}t=3\int\limits_{-2}^{0}\left(t^3-t^6\right)\mathrm{d}t=3\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^7}{7}\right)\Big|_{-2}^{0}=-\frac{468}{7}.$

Bài 9. Tính các tích phân sau:

① $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $2\left(\sqrt{3}-1\right)$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x^2+x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases} x=-1\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=\sqrt{3} \end{cases}.$

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}} 2\,\mathrm{d}t=2t\Big|_1^{\sqrt{3}}=2\left(\sqrt{3}-1\right).$ □

② $I=\displaystyle\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{4}{15}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow x=1-t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=0 \end{cases}$.

Khi đó $I=-2\displaystyle\int_1^0(1-t^2)t^2\,\mathrm{d}t=2\int_0^1(t^2-t^4)\,\mathrm{d}t=2\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{4}{15}$. □

Bài 10. Tính các tích phân sau:

① $I=\displaystyle\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\frac{8}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=3\Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $I=2\displaystyle\int_1^2(t^2-1)\,\mathrm{d}t=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^2=\frac{8}{3}$. □

② $I=\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{2-x^2}\Rightarrow x^2=2-t^2\Rightarrow 2x\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t\Rightarrow x\mathrm{d}x=-t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=1\Rightarrow t=1 \end{cases}$.

Khi đó $I=-\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^1 t^2\,\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{2}}t^2\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. □

③ $I=\displaystyle\int_1^3 x\sqrt[3]{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: 6

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2-1}\Rightarrow x^2=t^3+1\Rightarrow 2x\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t\Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}t^2\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=0 \\ x=3\Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $I=\frac{3}{2}\displaystyle\int_0^2 t^3\,\mathrm{d}t=\frac{3t^4}{8}\Big|_0^2=6$. □

④ $I=\displaystyle\int_0^{\sqrt{7}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{45}{8}$

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[3]{1+x^2} \Rightarrow x^2=t^3-1 \Rightarrow 2x\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t \Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}t^2\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\sqrt{7} \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $I=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_1^2 t^3\,\mathrm{d}t=\dfrac{3t^4}{8}\Big|_1^2=\dfrac{45}{8}$. □

⑤ $I=\displaystyle\int_{-1}^{0}(x-1)^2\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{142}{105}$

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow x=t^2-1 \Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=0 \\ x=0 \Rightarrow t=1 \end{cases}$.

Khi đó $I=2\displaystyle\int_0^1\left(t^2-2\right)^2t^2\,\mathrm{d}t=2\int_0^1\left(t^6-4t^4+4t^2\right)\mathrm{d}t=2\left(\dfrac{t^7}{7}-\dfrac{4}{5}t^5+\dfrac{4}{3}t^3\right)\Big|_0^1=\dfrac{142}{105}$. □

⑥ $I=\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{2\sqrt{2}+2}{15}$

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2=t^2-1 \Rightarrow x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)t^2\,\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{2}}\left(t^4-t^2\right)\mathrm{d}t=\left(\dfrac{t^5}{5}-\dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}+2}{15}$. □

⑦ $I=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{848}{105}$

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2=t^2-1 \Rightarrow x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_1^2\left(t^2-1\right)^2t^2\,\mathrm{d}t=\int_1^2\left(t^6-2t^4+t^2\right)\mathrm{d}t=\left(\dfrac{t^7}{7}-\dfrac{2}{5}t^5+\dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2=\dfrac{848}{105}$. □

⑧ $I=\displaystyle\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{141}{20}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+1}\Rightarrow x^2=t^3-1\Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}t^2\mathrm{d}t.$

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=\sqrt{7}\Rightarrow t=2\end{cases}.$

Khi đó $I=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_1^2\left(t^3-1\right)t\,\mathrm{d}t=\dfrac{3}{2}\int_1^2\left(t^4-t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{t^5}{5}-\dfrac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2=\dfrac{141}{20}.$ □

⑨ $I=\displaystyle\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{29}{270}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+3x^8}\Rightarrow x^8=\dfrac{1}{3}\left(t^2-1\right)\Rightarrow x^7\mathrm{d}x=\dfrac{1}{12}t\mathrm{d}t.$

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=2\end{cases}.$

Khi đó $I=\dfrac{1}{36}\displaystyle\int_1^2\left(t^2-1\right)t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{36}\int_1^2\left(t^4-t^2\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{36}\left(\dfrac{t^5}{5}-\dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2=\dfrac{29}{270}.$ □

Bài 11. Tính các tích phân sau:

① $I=\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow x=\sqrt{t^2-4}\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-4}}\mathrm{d}t.$

Đổi cận $\begin{cases}x=\sqrt{5}\Rightarrow t=3\\ x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=4\end{cases}.$

Khi đó $I=\displaystyle\int_3^4\frac{1}{(t-2)(t+2)}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}\int_3^4\left(\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}\left(\ln|t-2|-\ln|t+2|\right)\Big|_3^4=\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right).$ □

② $I=\displaystyle\int_{\sqrt{7}}^4\frac{1}{x\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{7}{4}\right)$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow x=\sqrt{t^2-9}\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-9}}\mathrm{d}t.$

Đổi cận $\begin{cases}x=\sqrt{7}\Rightarrow t=4\\ x=4\Rightarrow t=5\end{cases}.$

Khi đó $I=\displaystyle\int_4^5\dfrac{1}{(t-3)(t+3)}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{6}\int_4^5\left(\dfrac{1}{t-3}-\dfrac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{6}\left(\ln|t-3|-\ln|t+3|\right)\Big|_4^5=\dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{7}{4}\right).$ □

③ $I=\displaystyle\int_1^2\dfrac{1}{x\sqrt{x^3+1}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow x=\sqrt[3]{t^2-1}\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2t}{3\sqrt[3]{(t^2-1)^2}}\mathrm{d}t.$

Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\\ x=2\Rightarrow t=3\end{cases}.$

Khi đó $I=\dfrac{2}{3}\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^3\dfrac{1}{(t-1)(t+1)}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^3\left(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)\Big|_{\sqrt{2}}^3=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}.$

□

④ $I=\displaystyle\int_1^5\dfrac{1}{x\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}\left(t^2-1\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}t\mathrm{d}t.$

Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\ x=5\Rightarrow t=4\end{cases}.$

Khi đó $I=\displaystyle\int_2^4\dfrac{2}{(t-1)(t+1)}\mathrm{d}t=\int_2^4\left(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)\Big|_2^4=\ln\left(\dfrac{9}{5}\right).$ □

Bài 12. Tính $I=\displaystyle\int_1^6\dfrac{\sqrt{x+3}+1}{x+2}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $2(1+\ln 2)$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x+3}\Rightarrow x+2=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t.$

Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\ x=6\Rightarrow t=3\end{cases}.$

Khi đó $I=2\displaystyle\int_2^3\dfrac{t}{t-1}\mathrm{d}t.$

Đặt $u=t-1\Rightarrow t=u+1\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}u.$

Đổi cận $\begin{cases} t=2 \Rightarrow u=1 \\ t=3 \Rightarrow u=2 \end{cases}$.

Khi đó $I=2\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{u+1}{u}\,\mathrm{d}u=2\int\limits_1^2\left(1+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=2(u+\ln|u|)\Big|_1^2=2(1+\ln 2)$. □

Bài 13. Tính tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_0^6 \frac{2}{\sqrt{4x+1}+1}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $4-\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{4x+1} \Rightarrow t^2=4x+1 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{t^2-1}{4} \\ \mathrm{d}x=\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t. \end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=6 \Rightarrow t=5 \end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{t}{t+1}\mathrm{d}x=t\Big|_1^5-\ln|t+1|\Big|_1^5=4-\ln 3$. □

② $I=\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{34}{3}-10\ln\dfrac{5}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2=2x+1 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{t^2-1}{2} \\ \mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t. \end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=4 \Rightarrow t=3 \end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{2t^3-3t}{t+2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^3\left(2t^2-4t+5\right)\mathrm{d}t-\int\limits_1^3\frac{10}{t+2}\,\mathrm{d}t=\left(\frac{2t^3}{3}-\frac{4t^2}{2}+5t\right)\Big|_1^3-10\ln|t+2|\Big|_1^3=\frac{34}{3}-10\ln\frac{5}{3}$. □

③ $I=\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{1}{x(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\ln\dfrac{16}{9}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x \Rightarrow \begin{cases} x=t^2 \\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t. \end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=4 \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_1^2\frac{2t}{t^2(t+1)}\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t-\int\limits_1^2\frac{2}{t+1}\,\mathrm{d}t=2\ln|t|\Big|_1^2-2\ln|t+1|\Big|_1^2=\ln\dfrac{16}{9}$. □

④ $I=\displaystyle\int\limits_0^2\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $4-\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow\begin{cases}x=t^2\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t.\end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=2\Rightarrow t=\sqrt{2}\end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{\left(\sqrt{2}+t\right)2t}{1+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2t+\sqrt{2}\right)\mathrm{d}t-\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t=\left(t^2+\sqrt{2}t\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}-\ln|\sqrt{2}t+1|\Big|_0^{\sqrt{2}}=4-\ln 3$. □

⑤ $I=\displaystyle\int\limits_1^4\frac{\mathrm{e}^{4\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{\mathrm{e}^9-\mathrm{e}^5}{2}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow\begin{cases}x=t^2\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t.\end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=4\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_1^2\frac{\mathrm{e}^{4t+1}}{t}2t\,\mathrm{d}t=2\int\limits_1^2\mathrm{e}^{4t+1}\,\mathrm{d}t=2\left(\frac{\mathrm{e}^{4t+1}}{4}\right)\Big|_1^2=\dfrac{\mathrm{e}^9-\mathrm{e}^5}{2}$. □

⑥ $I=\displaystyle\int\limits_0^1(x-1)^3\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $-\dfrac{2}{15}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{2x-x^2}\Rightarrow t^2=2x-x^2\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^2=1-t^2\\ (x-1)\mathrm{d}x=-t\,\mathrm{d}t.\end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=1\end{cases}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^1\left(-t^2+t^4\right)\mathrm{d}t=\left(-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=-\dfrac{2}{15}$. □

⑦ $I=\displaystyle\int\limits_1^2\frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{7-3\sqrt{3}}{3}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_1^2 \dfrac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 \left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x^2\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 \left(x\sqrt{x^2-1}\right)\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow t^2=x^2-1\Rightarrow \begin{cases} x^2=t^2-1 \\ x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t. \end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=0 \\ x=2\Rightarrow t=\sqrt{3} \end{cases}.$

Khi đó $I=\dfrac{7}{3}-\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(t^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{7-3\sqrt{3}}{3}.$ □

⑧ $I=\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{5}} \dfrac{x^3}{x+\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $I=-\dfrac{5\sqrt{5}}{4}+\dfrac{253}{60}$

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{5}} \dfrac{x^3}{x+\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{5}} \dfrac{x^3\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)}{-4}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{5}} \dfrac{x^4}{-4}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\sqrt{5}} \dfrac{x^3\sqrt{x^2+4}}{4}\,\mathrm{d}x.$

Ta có:

$I_1=\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{5}} \dfrac{x^4}{-4}\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{\sqrt{5}}=-\dfrac{25}{20}\sqrt{5}.$

$I_2=\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{5}} \dfrac{x^3\sqrt{x^2+4}}{4}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow x^2=t^2-4\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=\sqrt{5}\Rightarrow t=3; x=0\Rightarrow t=2.$

$I_2=\displaystyle\int\limits_2^3 \dfrac{\left(t^2-4\right)\cdot t\cdot t}{4}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{t^5}{5}-4.\dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_2^3=\dfrac{253}{60}.$

Vậy, $I=-\dfrac{5\sqrt{5}}{4}+\dfrac{253}{60}.$ □

⑨ $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{x^3}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$

✍ **Lời giải.**

Ta có:

$I=\displaystyle\int\limits_0^1 \dfrac{x^3}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{5}} \dfrac{x^3\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)}{-1}\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 x^5\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 x^3\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$

$I_1=-\left(\dfrac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1=-\dfrac{1}{6}.$

$I_2 = \int\limits_0^1 x^3\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \sqrt{x^4+1} \Rightarrow t^2 = x^4+1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 4x^3\,\mathrm{d}x \Rightarrow x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}; x = 0 \Rightarrow t = 1.$

Khi đó $I_2 = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \dfrac{1}{2}t\cdot t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{6}.$

Vậy, $I = \dfrac{\sqrt{2}-1}{3}.$ □

Dạng: Đổi biến biểu thức chứa $\ln$, e^x hoặc lượng giác trong dấu căn
Phương pháp giải: Đặt t là căn thức chứa lôgarit hoặc căn thức chứa mũ hoặc căn thức chứa lượng giác.

Ví dụ 5. Tính tích phân $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x$ **ĐS:** $\dfrac{4-2\sqrt{2}}{3}$

Lời giải: Đặt $t = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+\ln x \Rightarrow \begin{cases} \ln x = t^2-1 \\ 2t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}. \end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = \mathrm{e} \Rightarrow t = \sqrt{2}. \end{cases}$

$I = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \dfrac{(t^2-1)\cdot 2t}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)\,\mathrm{d}t = 2\left(\dfrac{t^3}{3} - t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 2\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} - \dfrac{1}{3} + 1\right) = 2\dfrac{2-\sqrt{2}}{3} = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{3}.$

Ví dụ 6. Tính tích phân $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}^3} \dfrac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x+1}}\,\mathrm{d}x$ **ĐS:** $\dfrac{76}{15}$

Lời giải: Đặt $t = \sqrt{\ln x+1} \Rightarrow t^2 = \ln x+1 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = t^2-1 \\ 2t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}. \end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = \mathrm{e}^3 \Rightarrow t = 2. \end{cases}$

$I = \int\limits_1^{2} \dfrac{(t^2-1)^2\cdot 2t}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_1^{2} (t^4-2t^2+1)\,\mathrm{d}t = 2\left(\dfrac{t^5}{5} - 2\dfrac{t^3}{3} + t\right)\Big|_1^2 = \dfrac{76}{15}.$

Ví dụ 7. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 \cos x\sqrt{3\sin x+1}\,\mathrm{d}x$ **ĐS:** $\dfrac{14}{9}$

Lời giải: Đặt $t = \sqrt{3\sin x+1} \Rightarrow t^2 = 3\sin x+1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 3\cos x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2. \end{cases}$

$I = \int\limits_1^2 t\cdot\dfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{14}{9}.$

Ví dụ 8. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$ **ĐS:** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Lời giải: Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}\Rightarrow t^2=\mathrm{e}^x+1\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{e}^x=t^2-1\\2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=\sqrt{2}\\x=\ln 2\Rightarrow t=\sqrt{3}.\end{cases}$

$$I=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\dfrac{(t^2-1)\cdot 2t}{t}\mathrm{d}t=2\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(t^2-1)\,\mathrm{d}t=2\left(\dfrac{t^3}{3}-t\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}=2\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Bài 14. Tính tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x\sqrt{1+3\ln x}}{x}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{116}{135}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow t^2=1+3\ln x\Rightarrow\begin{cases}\ln x=\dfrac{t^2-1}{3}\\2t\,\mathrm{d}t=\dfrac{3\,\mathrm{d}x}{x}.\end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\x=\mathrm{e}\Rightarrow t=2.\end{cases}$

$$I=\int\limits_1^2\dfrac{t^2-1}{3}\cdot t\cdot\dfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{9}\int\limits_1^2(t^4-t^2)\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{t^5}{5}-\dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2=\dfrac{116}{135}.$$ □

② $I=\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2}\mathrm{e}^x\sqrt{5-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{16-6\sqrt{3}}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{5-\mathrm{e}^x}\Rightarrow t^2=5-\mathrm{e}^x\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{e}^x=5-t^2\\2t\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\x=\ln 2\Rightarrow t=\sqrt{3}.\end{cases}$

$$I=\int\limits_2^{\sqrt{3}}t\cdot(-2t)\mathrm{d}t=2\int\limits_{\sqrt{3}}^2t^2\,\mathrm{d}t=2\left(\dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_{\sqrt{3}}^2=2\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{\sqrt{27}}{3}\right)=\dfrac{16-6\sqrt{3}}{3}.$$ □

③ $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{4\sqrt{2}-2}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+\cos x} \Rightarrow t^2=1+\cos x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1 \end{cases}$.

$$I=\int\limits_{\sqrt{2}}^{1} t\cdot(-2t)\,\mathrm{d}t=2\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} t^2\,\mathrm{d}t=2\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}.$$ □

④ $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{34}{27}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow t^2=1+3\cos x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=-3\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1 \end{cases}$.

$$I=\int\limits_{2}^{1} \frac{\left(2\cdot\left(\dfrac{t^2-1}{3}\right)+1\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}t\right)}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{9}\int\limits_{1}^{2}\left(2t^2+1\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{9}\left(\frac{2t^3}{3}+t\right)\Big|_1^2=\frac{2}{9}\left(\frac{16}{3}+2-\frac{2}{3}-1\right)=\frac{34}{27}.$$ □

Bài 15. Tính tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{5}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+2\ln x} \Rightarrow t^2=1+2\ln x \Rightarrow \begin{cases} \ln x=\dfrac{t^2-1}{2} \\ 2t\,\mathrm{d}t=\dfrac{2\,\mathrm{d}x}{x}. \end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}} \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

$$I=\int\limits_1^2 \frac{3-\left(t^2-1\right)}{t}\cdot t\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\left(4-t^2\right)\mathrm{d}t=\left(4t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2=8-\frac{8}{3}-4+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}.$$ □

② $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^3 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{4}{27}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln^2 x} \Rightarrow t^2=1+3\ln^2 x \Rightarrow \begin{cases} \ln^2 x=\dfrac{t^2-1}{3} \\ 2t\,\mathrm{d}t=\dfrac{6\ln x\,\mathrm{d}x}{x}. \end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=\mathrm{e} \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

$$I=\int\limits_1^2 \frac{\left(\dfrac{t^2-1}{3}\right)\cdot\dfrac{2}{6}t\,\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{9}\int\limits_1^2 \left(t^2-1\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^2=\frac{4}{27}.$$ □

③ $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{9\sqrt[3]{3}-6\sqrt[3]{2}}{8}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{2+\ln^2 x}\Rightarrow t^3=2+\ln^2 x\Rightarrow \begin{cases} \ln^2 x=t^3-2 \\ 3t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{2\ln x\,\mathrm{d}x}{x} \end{cases}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\sqrt[3]{2} \\ x=\mathrm{e} \Rightarrow t=\sqrt[3]{3} \end{cases}$.

$$I=\int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} t\cdot\frac{3}{2}t^2\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} t^3\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\left(\frac{t^4}{4}\right)\Big|_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}}=\frac{9\sqrt[3]{3}-6\sqrt[3]{2}}{8}.$$ □

④ $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\sqrt[3]{1+\ln x}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{3\sqrt[3]{4}-3}{2}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{1+\ln x}\Rightarrow t^3=1+\ln x\Rightarrow \begin{cases} \ln x=t^3-1 \\ 3t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x} \end{cases}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=\mathrm{e} \Rightarrow t=\sqrt[3]{2} \end{cases}$.

$$I=\int\limits_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{3t^2}{t}\mathrm{d}t=3\int\limits_1^{\sqrt[3]{2}} t\,\mathrm{d}t=3\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^{\sqrt[3]{2}}=\frac{3\sqrt[3]{4}-3}{2}.$$ □

⑤ $I=\displaystyle\int\limits_0^{\ln 6} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+3}\Rightarrow t^2=\mathrm{e}^x+3\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^x=t^2-3 \\ 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=\ln 6 \Rightarrow t=3 \end{cases}$.

$$I=\int\limits_2^3 \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-3}\,\mathrm{d}t=\int\limits_2^3 \frac{2}{t^2-3}\,\mathrm{d}t=\int\limits_2^3 \frac{2}{(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_2^3 \frac{1}{(t-\sqrt{3})}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_2^3 \frac{1}{(t+\sqrt{3})}\,\mathrm{d}t=$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|t-\sqrt{3}|\Big|_2^3-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|t+\sqrt{3}|\Big|_2^3=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{(3-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}\right|=$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$ □

⑥ $I=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\frac{22}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\Rightarrow t^2=\mathrm{e}^x-1\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{e}^x=t^2+1\\2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases}x=\ln 2\Rightarrow t=1\\x=\ln 5\Rightarrow t=2\end{cases}$.

$$I=\int\limits_1^2\frac{(t^2+1)\cdot 2t}{t}\,\mathrm{d}t=2\int\limits_1^2(t^2+1)\,\mathrm{d}t=2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_1^2=2\left(\frac{8}{3}+2-\frac{1}{3}-1\right)=\frac{22}{3}.$$ □

⑦ $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{(\mathrm{e}^x+1)^3}}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $2\left(-\frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{3}}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}\Rightarrow t^2=\mathrm{e}^x+1\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{e}^x=t^2-1\\2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=\sqrt{2}\\x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{3}+1}}\end{cases}$.

$$I=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{3}+1}}}\frac{2t}{t^2\cdot t}\,\mathrm{d}t=2\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{3}+1}}}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=2\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{3}+1}}}=2\left(-\frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{3}}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$ □

⑧ $I=\int\limits_0^1\frac{5^{\frac{x}{2}}}{(5^x-9)\sqrt{6-5^{1-x}}}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\frac{1}{7}\log_5\frac{2}{9}$

✍ **Lời giải.**

$$I=\int\limits_0^1\frac{5^{\frac{x}{2}}}{(5^x-9)\sqrt{6-\frac{5}{5^x}}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{5^x}{(5^x-9)\sqrt{6\cdot 5^x-5}}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=\sqrt{6\cdot 5^x-5}\Rightarrow t^2=6\cdot 5^x-5\Rightarrow 5^x=\frac{t^2+5}{6}\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=6\cdot 5^x\cdot\ln 5\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=5; x=0\Rightarrow t=1$.

$$I=\int\limits_1^5 \frac{\frac{2}{6\ln 5}}{\left(\frac{(t^2+5)}{6}-9\right)}\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^5 \frac{2}{\ln 5\left(t^2+5-54\right)}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\ln 5}\int\limits_1^5 \frac{1}{t^2-49}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\ln 5}\left(\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}t}{(t-7)(t+7)}\right)$$

$$=\frac{2}{\ln 5}\left(\int\limits_1^5 \frac{1}{14(t-7)}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{14}\int\limits_1^5 \frac{1}{(t+7)}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{7\ln 5}\left(\ln|t-7|\Big|_1^5-\ln|t+7|\Big|_1^5\right)$$ □

$$=\frac{1}{7\ln 5}(\ln 2-\ln 6-\ln 12+\ln 8)=\frac{1}{7\ln 5}\left(\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{8}{12}\right)=\frac{1}{7\ln 5}.\ln\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{12}\right)$$

$$=\frac{1}{7\ln 5}\cdot\ln\frac{2}{9}=\frac{1}{7}\log_5\frac{2}{9}.$$

⑨ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\frac{2}{3}$

✍ **Lời giải.**

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$$

Đặt $t=\sqrt{1+3\sin^2 x}\Rightarrow t^2=1+3\sin^2 x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=6\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2\end{cases}$.

$$I=\int\limits_1^2 \frac{\frac{2}{3}t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}(t)\Big|_1^2=\frac{2}{3}.$$ □

⑩ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{4\cos^2 x+9\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\frac{1}{5}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{4\cos^2 x+9\sin^2 x}\Rightarrow t^2=4+5\sin^2 x\Rightarrow\begin{cases}t^2=4+5\sin^2 x\\ 2t\,\mathrm{d}t=10\sin x\cos x\,\mathrm{d}x.\end{cases}$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=3\end{cases}$.

$$I=\int\limits_2^3 \frac{\frac{1}{5}t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{5}(t)\Big|_2^3=\frac{1}{5}.$$ □

⑪ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sqrt{3\sin x+1}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\frac{2}{3}\left(1-2\ln\frac{4}{3}\right)$

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{3\sin x+1}\Rightarrow t^2=3\sin x+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=3\cos x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=2\end{cases}.$

$$I=\int\limits_1^2\frac{\frac{2}{3}t}{2+t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int\limits_1^2\frac{t}{2+t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\left(\int\limits_1^2\mathrm{d}t-\int\limits_1^2\frac{2}{2+t}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{2}{3}\left(1-2\ln|t+2|\Big|_1^2\right)=\frac{2}{3}\left(1-2\ln\frac{4}{3}\right).$$ □

(12) $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{9}$

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{2+3\tan x}\Rightarrow t^2=2+3\tan x.$

Đổi cận: $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\sqrt{5};x=0\Rightarrow t=\sqrt{2}.$

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t\cdot t}{3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_1^2 t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{9}.$ □

(13) $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{b^2\cos^2 x+c^2\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{1}{c+b}$

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{b^2+(c^2-b^2)\sin^2 x}\Rightarrow t^2=b^2+(c^2-b^2)\sin^2 x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=2(c^2-b^2)\sin x\cdot\cos x.$

Đổi cận: $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=c;x=0\Rightarrow t=b.$

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_b^c\frac{\frac{1}{(c^2-b^2)}t}{t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_b^c\frac{1}{c^2-b^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{c^2-b^2}\cdot t\Big|_b^c=\frac{c-b}{c^2-b^2}=\frac{1}{c+b}.$ □

Dạng: Đổi biến biểu thức chứa hàm ln không nằm trong căn

$$I=\int\limits_a^b f(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

. Phương pháp giải: $\begin{bmatrix}t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ t=m+n\ln x\Rightarrow dt=\dfrac{n}{x}\,\mathrm{d}x.\end{bmatrix}$

Ví dụ 9. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ **ĐS:** $\dfrac{1}{2}$

Lời giải: Đặt $t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 10. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{1+\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ **ĐS:** $\frac{4}{3}$

Lời giải: Đặt $t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \left(1+t^2\right)\mathrm{d}t=\left.\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\right|_0^1=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

Bài 16. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\frac{1}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$. □

② $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{1+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\frac{3}{2}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=2; x=1\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_1^2 t\,\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{2}\right|_1^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. □

③ $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{1+2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: 2

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+2\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{2}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=3; x=1\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.\left.\frac{t^2}{2}\right|_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{2}=2$. □

④ $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{1+\ln^4 x}{x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{6}{5}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=\int\limits_0^1\left(1+t^4\right)\mathrm{d}t=\left(t+\dfrac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=1+\dfrac{1}{5}=\dfrac{6}{5}$. □

⑤ $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2+\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=3; x=1\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int\limits_2^3\dfrac{t-2}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_2^3\dfrac{t}{t^2}\mathrm{d}t-\int\limits_2^3\dfrac{2}{t^2}\mathrm{d}t=\ln|t||_2^3+\left(\dfrac{2}{t}\right)\Big|_2^3=\ln\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}-1=\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}$. □

⑥ $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x-2}{x\ln x+x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $1-3\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\ln x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=2; x=1\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\int\limits_1^2\dfrac{t-3}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\mathrm{d}t-3\int\limits_1^2\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t=1-3\ln|t|\Big|_1^2=1-3\ln 2$. □

Bài 17. Tính các tích phân

① $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln^2 x}{x(1+2\ln x)}\,\mathrm{d}x$.....

ĐS: $I=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+2\ln x\Rightarrow \ln x=\dfrac{1-t}{2}$ và $\dfrac{\mathrm{d}t}{2}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Có $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=\mathrm{e}\Rightarrow t=3.\end{cases}$

Khi đó

$$I=\int\limits_1^3\dfrac{(1-t)^2}{8t}\mathrm{d}t=\left(\dfrac{t^2}{16}-\dfrac{t}{4}+\dfrac{1}{8}\ln t\right)\Big|_1^3=\dfrac{1}{8}\ln 3.$$

□

② $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x+1}{x\ln x+1}\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\ln(\mathrm{e}+1)$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x+1}{x\ln x+1}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}(x\ln x+1)}{x\ln x+1}.$$

Đặt $t=x\ln x+1\Rightarrow I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln t\Big|_1^{\mathrm{e}+1}=\ln(\mathrm{e}+1).$ □

③ $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1+\ln x}{2+x\ln x}\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+2}{2}\right)$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1+\ln x}{2+x\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}(x\ln x+2)}{x\ln x+2}.$$

Đặt $t=x\ln x+2\Rightarrow I=\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}+2}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln t\Big|_2^{\mathrm{e}+2}=\ln\left(\frac{\mathrm{e}+2}{2}\right).$ □

④ $I=\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{x\ln x\cdot\ln \mathrm{e}x}\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\ln\dfrac{4}{3}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{x\ln x\cdot\ln \mathrm{e}x}\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\ln x\cdot(1+\ln x)}\mathrm{d}(\ln x)\\&=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{1+\ln x}\right)\mathrm{d}(\ln x)\end{aligned}$$

Đặt $t=\ln x\Rightarrow I=\displaystyle\int_1^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Big|_1^2=\ln\frac{4}{3}.$ □

⑤ $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{2x+\ln x+1}{x}\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I = 2\mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2x + \ln x + 1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} 2\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(2x + \frac{\ln^2 x}{2} + \ln x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}} \\ &= 2\mathrm{e} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

⑥ $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1 + x\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I = \dfrac{1 + (\ln 2)^2}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1 + x\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{x} + \frac{(\ln^2 x)}{2}\right)\Big|_1^2 \\ &= \frac{1 + (\ln 2)^2}{2}. \end{aligned}$$

□

⑦ $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{4 + \ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I = \dfrac{2}{3}\left(5\sqrt{5} - 8\right)$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{4 + \ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{4 + \ln x}\,\mathrm{d}(\ln x + 4).$$

Đặt $t = \ln x + 4 \Rightarrow I = \displaystyle\int_4^5 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_4^5 = \frac{2}{3}\left(5\sqrt{5} - 8\right)$. □

⑧ $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{14}{9}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+3\ln x}\,\mathrm{d}(3\ln x+1).$$

Đặt $t=3\ln x+1\Rightarrow I=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int\limits_1^4\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{9}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4=\frac{14}{9}$. □

Bài 18. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x\sqrt{1+\ln^2 x}}{x}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{\sqrt{8}-1}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+\ln^2 x}\Rightarrow t^2=1+\ln^2 x\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=\dfrac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x}$.

Có $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=1\\ x=\mathrm{e}\Rightarrow t=\sqrt{2}.\end{cases}$

Khi đó

$$I=\int\limits_1^{\sqrt{2}}t^2\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{8}-1}{3}.$$

□

② $I=\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{\pi}{6}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\,\mathrm{d}(\ln x).\end{aligned}$$

Đặt $t=\ln x$, với $x=1\Rightarrow t=0$; $x=\sqrt{\mathrm{e}}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó

$$I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $t=\sin u \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos u\,\mathrm{d}u$; với $t=0\Rightarrow u=0$; với $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=\dfrac{\pi}{6}$.

Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos u}{\cos u}\mathrm{d}u=\dfrac{\pi}{6}$. □

③ $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{3}{8}\left(3^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{4}{3}}\right)$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{2+\ln^2 x}\Rightarrow t^3=2+\ln^2 x\Rightarrow \dfrac{3t^2\mathrm{d}t}{2}=\dfrac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x}$.

Có $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=\sqrt[3]{2}\\ x=\mathrm{e}\Rightarrow t=\sqrt[3]{3}.\end{cases}$

Khi đó

$$I=\frac{3}{2}\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}}t^3\,\mathrm{d}t=\frac{3t^4}{8}\Big|_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{8}\left(3^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{4}{3}}\right).$$

□

④ $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln^3 x-2\log_2 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{4}{27}-\dfrac{2}{3\ln 2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln^3 x-2\log_2 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}\mathrm{d}x\\&=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln^3 x-2\dfrac{\ln x}{\ln 2}}{\sqrt{1+3\ln^2 x}}\mathrm{d}(\ln x)\end{aligned}$$

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln^2 x}\Rightarrow 1+3\ln^2 x=t^2\Rightarrow \ln^2 x=\dfrac{t^2-1}{3}\Rightarrow \ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{3}t\,\mathrm{d}t$.

Với $x=1\Rightarrow t=1; x=\mathrm{e}\Rightarrow t=2$. Ta có

$$\begin{aligned}I&=\int_1^2\left(\frac{1}{9}\left(t^2-1\right)-\frac{2}{3\ln 2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^2-\frac{2}{3\ln 2}t\Big|_1^2\\&=\frac{4}{27}-\frac{2}{3\ln 2}.\end{aligned}$$

□

⑤ $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\log_2^3 x}{x\sqrt{3+\ln^2 x}}\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{1}{(\ln 2)^3}\left(-\dfrac{10}{3}+2\sqrt{3}\right)$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\log_2^3 x}{x\sqrt{3+\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\left(\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right)^3}{x\sqrt{3+\ln^2 x}}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt{3+\ln^2 x}\Rightarrow t^2=3+\ln^2 x\Rightarrow \ln^2 x=t^2-3\Rightarrow \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t.$

Ta có $x=1\Rightarrow t=\sqrt{3};x=\mathrm{e}\Rightarrow t=2.$

Khi đó

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{(\ln 2)^3}\int\limits_{\sqrt{3}}^{2}\left(t^2-3\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{(\ln 2)^3}\left(\frac{t^3}{3}-3t\right)\Big|_{\sqrt{3}}^{2}\\&=\frac{1}{(\ln 2)^3}\left(-\frac{10}{3}+2\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

□

⑥ $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{x\mathrm{e}^x+1}{x(\mathrm{e}^x+\ln x)}\,\mathrm{d}x.$ . . . . . .

ĐS: $I=\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}+1)-1$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{x\mathrm{e}^x+1}{x(\mathrm{e}^x+\ln x)}\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{\mathrm{e}^x+\ln x}\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x+\ln x\right)\\&=\ln\left|\mathrm{e}^x+\ln x\right|\Big|_1^{\mathrm{e}}\\&=\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{e}}+1)-1.\end{aligned}$$

□

⑦ $I=\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\dfrac{(x^2+1)\ln x+1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x.$ . . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{\mathrm{e}^4}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+1+\ln 2$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{(x^2+1)\ln x+1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x}\\&=\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x|+\ln|\ln x|\right)\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\\&=\frac{\mathrm{e}^4}{2}-\frac{\mathrm{e}^2}{2}+1+\ln 2.\end{aligned}$$

□

⑧ $I=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}^2}\frac{2\ln x-1}{x(8\ln^2 x-8\ln x+3)}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{19}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.
Ta có $x=1\Rightarrow t=0; x=\mathrm{e}^2\Rightarrow t=2$.

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_0^2\frac{2t-1}{8t^2-8t+3}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{8}\int\frac{1}{8t^2-8t+3}\,\mathrm{d}\left(8t^2-8t+3\right)\\&=\frac{1}{8}\ln\left|8t^2-8t+3\right|\Big|_0^2\\&=\frac{1}{8}\ln\frac{19}{3}.\end{aligned}$$

□

⑨ $I=\displaystyle\int\limits_2^5\frac{\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{x-1+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\ln^2 3-\ln^2 2$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^5 \frac{\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{x-1+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_2^5 \frac{\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_2^5 \frac{\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{x-1}+1\right) \\
&= 2\int_2^5 \ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)\,\mathrm{d}\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right) \\
&= \ln^2\left(\sqrt{x-1}+1\right)\Big|_2^5 \\
&= \ln^2 3 - \ln^2 2.
\end{aligned}$$

□

⑩ $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{9-x^2}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I = \dfrac{1}{12}\ln^2 2$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{9-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{(3-x)\ln\dfrac{3+x}{3-x}}{(x+3)(3-x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{3-x}{3+x}\ln\frac{3+x}{3-x}\,\mathrm{d}\left(\frac{3+x}{3-x}\right) \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)\mathrm{d}\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) \\
&= \frac{1}{12}\ln^2\left(\frac{3+x}{3-x}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{12}\ln^2 2.
\end{aligned}$$

□

Dạng:

$$I = \int_a^b f\left(\mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $\begin{cases} t = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ t = m + n\mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x. \end{cases}$

Ví dụ 11. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$

Lời giải: Đặt $t = \mathrm{e}^{x^2} \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2}$.
Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 1 \Rightarrow t = \mathrm{e}$. Khi đó

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{t}{2}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Ví dụ 12. Tính $I = \displaystyle\int_0^2 (2x-1)\mathrm{e}^{x-x^2}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I = 1-\mathrm{e}^{-2}$

Lời giải: Đặt $t = \mathrm{e}^{x-x^2} \Rightarrow \mathrm{d}t = (1-2x)\mathrm{e}^{x-x^2}\,\mathrm{d}x$.
Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 2 \Rightarrow t = \mathrm{e}^{-2}$. Khi đó

$$I = \int_{\mathrm{e}^{-2}}^1 \mathrm{d}t = t\Big|_{\mathrm{e}^{-2}}^1 = 1-\mathrm{e}^{-2}.$$

Bài 19. Tính các tích phân

① $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $I = \dfrac{1}{6}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \mathrm{e}^x + 1$, suy ra $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
Với $x = 0$ thì $t = 2$; với $x = \ln 2$ thì $t = 3$.
Vậy $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t}\Big|_2^3 = \frac{1}{6}$. □

② $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $I = \ln(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+1)-2$

✍ **Lời giải.**

$$I = \int_1^3 \frac{\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-1\right)\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-1) - \int_1^3 \mathrm{d}x.$$

Vậy $I = (\ln(\mathrm{e}^x-1)-x)\Big|_1^3 = \ln(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+1)-2$. □

③ $I = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $I=\dfrac{3\mathrm{e}+6}{5\mathrm{e}}$

✍ **Lời giải.**

$I=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\ln 3}\dfrac{\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x+2)}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\ln 3}\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x\right)$.

Suy ra $I=\dfrac{1}{2}(x-\ln(\mathrm{e}^x+2))\Big|_0^{\ln 3}=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)$. □

④ $I=\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2}\dfrac{2\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\ln\dfrac{5}{2}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\mathrm{e}^x$, suy ra $\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I=\displaystyle\int\limits_1^2\dfrac{2t-1}{t^2+t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\dfrac{\mathrm{d}(t^2+t)}{t^2+t}-2\int\limits_1^2\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln(t^2+t)-2\ln\dfrac{t}{t+1}\right)=\Big|_1^2=\ln\dfrac{27}{16}$. □

⑤ $I=\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{2}$

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}+1)}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+1)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{2}$. □

Bài 20. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-x}-3}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\ln\dfrac{3}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5}\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=\mathrm{e}^x$, suy ra $\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Vậy, $I=\displaystyle\int\limits_3^5\dfrac{1}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t=\int\limits_3^5\left(\dfrac{1}{t-2}-\dfrac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t=(\ln(t-2)-\ln(t-1))\Big|_3^5=\ln\dfrac{3}{2}$. □

② $I=\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{(1+\mathrm{e}^x)^3}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+3\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}+\dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1+3\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-x}+3+3\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x=\left(-\mathrm{e}^{-x}+3x+3\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^2}{2}+3\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}.$ □

③ $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=-\frac{1}{\mathrm{e}}+1-\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x}=\int_0^1 \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{\mathrm{e}}+1-I_1.$

Ta tính $I_1=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\Rightarrow I_1=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Big|_1^{\mathrm{e}}=\ln\left|\frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right|.$

$\Rightarrow I=-\frac{1}{\mathrm{e}}+1-\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}.$ □

④ $I=\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x+2}\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=\ln\frac{27}{16}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\mathrm{e}^x$ ta có $\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Suy ra $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{t+3}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t.=\int_1^2 \left(\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left(2\ln|t+1|-\ln|t+2|\right)\Big|_1^2=\ln\frac{27}{16}.$ □

⑤ $I=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=\frac{20}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\Rightarrow \mathrm{e}^x=t^2+1\Rightarrow \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t.$

Suy ra $I=\displaystyle\int_1^2 2(t^2+1)\,\mathrm{d}t=\left(\frac{2}{3}t^3+2t\right)\Big|_1^2=\frac{20}{3}.$ □

Dạng:

$$\int_a^b f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

Đặt $\begin{bmatrix} t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x \\ t=m+n\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=n\cos x\,\mathrm{d}x. \end{bmatrix}$

Ví dụ 13. Tính $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cot x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{1}{2}\ln 2$

Lời giải:

— Ta có $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cot x\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

— Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Có $\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

— Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{2}\ln 2.$

Ví dụ 14. Tính $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{1}{3}$

Lời giải:

— Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Có $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.\end{cases}$

— Khi đó $I=\int\limits_{0}^{1}t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 15. Tính $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-3\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=-\dfrac{1}{2}$

Lời giải:

— Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Có $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.\end{cases}$

— Khi đó $I=\int\limits_{0}^{1}(1-3t)\,\mathrm{d}t=\left(t-\dfrac{3}{2}t^2\right)\Big|_0^1=-\dfrac{1}{2}$.

Bài 21. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 x\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{5\sqrt{2}}{12}$

✍ **Lời giải.**

— Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Có $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

— Khi đó $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-t^2)\mathrm{d}t=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$.

□

② $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^5 x\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{49\sqrt{3}}{160}$

✍ **Lời giải.**

— Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^4 x\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Có $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$

— Khi đó $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-t^2)^2\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-2t^2+t^4\right)\mathrm{d}t=\left(t-2\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{49\sqrt{3}}{160}$.

□

③ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{1}{2}\ln 3$

✍ **Lời giải.**

— Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

— Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Có $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

— Khi đó $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\ln|1+t|-\ln|1-t|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln 3.$

□

④ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\ln 3$

✍ **Lời giải.**

— Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}\,\mathrm{d}x.$

— Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Có $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow t=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

— Khi đó

$$\begin{aligned} I&=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(1-t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(t^2-1\right)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]^2\mathrm{d}t \\ &=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{2}{(t-1)(t+1)}\right]\mathrm{d}t \\ &=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{(t-1)^2}-\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]\mathrm{d}t \\ &=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}-\ln|t-1|+\ln|t+1|\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3. \end{aligned}$$

□

⑤ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)^2\cos x\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{7}{3}$

✍ **Lời giải.**

— Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Có $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1. \end{cases}$

— Khi đó $I=\displaystyle\int_0^1 (1+t)^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(1+t)^3\Big|_0^1=\frac{7}{3}.$

□

⑥ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\sin x)^3\cos x\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $I=10$

✍ **Lời giải.**

— Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x.$

— Có $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1. \end{cases}$

— Khi đó $I=\displaystyle\int_0^1 (1+2t)^3\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}(1+2t)^4\Big|_0^1=10.$

□

⑦ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sin^3 x\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=\dfrac{2}{5}$

✍ **Lời giải.**

— Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sin^3 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x\sin^3 x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos x\,\mathrm{d}x$

— Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x.$

— Có $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1. \end{cases}$

— Khi đó $I=2\displaystyle\int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t=\frac{2}{5}t^5\Big|_0^1=\frac{2}{5}.$

□

⑧ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(1+\sin^2 x)^3\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=\dfrac{15}{4}$

✍ **Lời giải.**

— Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos x(1+\sin^2 x)^3\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1+\sin^2 x)^3\cos x\,\mathrm{d}x$

— Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Có $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.\end{cases}$

— Khi đó $I=2\displaystyle\int\limits_0^1 t(1+t^2)^3\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}(1+t^2)^4\Big|_0^1=\frac{15}{4}$.

□

⑨ $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\ln 2$

✍ **Lời giải.**

— Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Có $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.\end{cases}$

— Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t=\ln|1+t|\Big|_0^1=\ln 2$.

□

⑩ $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{5-2\sin x}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{1}{2}\ln 5-\dfrac{1}{2}\ln 3$

✍ **Lời giải.**

— Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

— Có $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.\end{cases}$

— Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^1\frac{1}{5-2t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\ln|5-2t|\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 3$.

□

Bài 22. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=2-2\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin x\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\int\limits_0^1\dfrac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1\left(2-\dfrac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t=(2t-2\ln|t+1|)\Big|_0^1=2-2\ln 2.$ □

② $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\dfrac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=2\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\dfrac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\dfrac{2\sin x\cos x}{(2+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $x=-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=-1; x=0\Rightarrow t=0.$

Khi đó $I=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{2t}{(2+t)^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{0}\left(\dfrac{2}{2+t}-\dfrac{4}{(2+t)^2}\right)\mathrm{d}t=\left(2\ln|t+2|+\dfrac{4}{2+t}\right)\Big|_{-1}^{0}=2\ln 2.$ □

③ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(2\sin x-3)\cos x}{2\sin x+1}\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=1-2\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\int\limits_0^1\dfrac{2t-3}{2t+1}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1\left(1-\dfrac{4}{2t+1}\right)\mathrm{d}t=(t-2\ln|2t+1|)\Big|_0^1=1-2\ln 3.$ □

④ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=\dfrac{1}{4}\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sin 2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\cos 2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow \cos 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}\ln|2t+1|\Big|_0^1=\dfrac{1}{4}\ln 3.$ □

⑤ $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=\dfrac{1}{2}$

✍ Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2};x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{1-t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\dfrac{1}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t=\left(-\dfrac{1}{t}-t\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\dfrac{1}{2}.$ □

⑥ $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^3 x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x.$ . . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

✍ Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x\cdot\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(1-\sin^2 x\right)\cdot\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\,\mathrm{d}(\sin x)=\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ □

⑦ $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\mathrm{d}x.$ . . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{5}{12}$

✍ Lời giải.

Ta có $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x.$

Do đó $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\cos 2x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\sin 2x=t\Rightarrow 2\cos 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow\cos 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0;x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{6}t^3\right)\Big|_0^1=\dfrac{5}{12}.$ □

⑧ $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$ . . . . . .

ĐS: $I=\ln\dfrac{10}{9}$

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$.
Khi đó $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{t^2-5t+6}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{t-3}-\dfrac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\dfrac{t-3}{t-2}\right|\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\dfrac{10}{9}$. □

⑨ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{\sin x}+\cos x\right)\cos x\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{4\mathrm{e}+\pi-4}{4}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.
$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x)=e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}-1$.
$I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$.
Vậy $I=I_1+I_2=\dfrac{4\mathrm{e}+\pi-4}{4}$. □

⑩ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x-1\right)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{8}{15}-\dfrac{\pi}{4}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x-1\right)\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.
$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos x\,\mathrm{d}x$
$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x-2\sin^2 x+1\right)\mathrm{d}(\sin x)=\left(\dfrac{1}{5}\sin^5 x-\dfrac{2}{3}\sin^3 x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{8}{15}$.
$I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$.
Vậy $I=I_1-I_2=\dfrac{8}{15}-\dfrac{\pi}{4}$. □

⑪ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{4\sqrt{2}-2}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\sqrt{1+\sin x}=t\Rightarrow 1+\sin x=t^2\Rightarrow \cos x\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=\sqrt{2}$.
Khi đó $I=\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}2t^2\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$. □

12 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $I=\dfrac{14}{9}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\sqrt{3\sin x+1}=t\Rightarrow 3\sin x+1=t^2\Rightarrow \cos x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$.
Khi đó $I=\dfrac{2}{3}\displaystyle\int_1^2 t^2\,\mathrm{d}t=\frac{2}{9}t^3\Big|_1^2=\frac{14}{9}$ □

13 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2+\sqrt{3\sin x+1}}\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $I=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}\ln\dfrac{3}{4}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\sqrt{3\sin x+1}=t\Rightarrow 3\sin x+1=t^2\Rightarrow \cos x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$.
Khi đó $I=\dfrac{2}{3}\displaystyle\int_1^2\frac{t}{2+t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_1^2\left(1-\frac{2}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}(t-2\ln|t+2|)\Big|_1^2=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\ln\frac{3}{4}$. □

Dạng:

$$I=\int_a^b f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Phương pháp giải: Đặt $\left[\begin{array}{l}t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x.\\ t=m+n\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-n\sin x\,\mathrm{d}x\end{array}\right.$.

Ví dụ 16. Tính $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=-\ln\dfrac{1}{2}$

Lời giải: Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.
Đặt $\cos x=t\Rightarrow -\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}; x=0\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\int\limits_{1}^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t=(-\ln|t|)\Big|_{1}^{\frac{1}{2}}=-\ln\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 17. Tính $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\sin x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

Lời giải: Đặt $\cos x=t\Rightarrow-\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{2};x=0\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\int\limits_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-t^2\,\mathrm{d}t=\left(-\dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Ví dụ 18. Tính $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\dfrac{31}{160}$

Lời giải: Đặt $\cos x=t\Rightarrow-\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2};x=0\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\int\limits_{1}^{\frac{1}{2}}-t^4\,\mathrm{d}t=\left(-\dfrac{t^5}{5}\right)\Big|_{1}^{\frac{1}{2}}=\dfrac{31}{160}$.

Bài 23. Tính các tích phân

① $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin^3 x\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $I=\dfrac{5}{24}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\cos x=t\Rightarrow-\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $I=\int\limits_{1}^{\frac{1}{2}}-\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t=\left(t-\dfrac{1}{3}t^3\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\dfrac{5}{24}$ □

② $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin^5 x\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $I=-\dfrac{49\sqrt{3}}{160}+\frac{8}{15}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2 x\right)^2\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\cos x=t\Rightarrow-\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}; x=0\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\left(1-t^2\right)^2\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+1\right)\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}=-\frac{49\sqrt{3}}{160}+\frac{8}{15}.$ □

③ $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=\ln 2$

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\mathrm{d}(1+\cos x)}{1+\cos x}=-\ln|1+\cos x|\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2.$ □

④ $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=1$

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{-\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}}=1.$ □

⑤ $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi}\sin 2x\cos^2 x\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=0$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi}2\sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x=-2\int\limits_{0}^{\pi}\cos^3 x\,\mathrm{d}(\cos x)=-\frac{1}{2}\cos^4 x\Big|_{0}^{\pi}=0.$ □

⑥ $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x(1+\cos x)^2\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=\dfrac{17}{12}$

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x(1+\cos x)^2\,\mathrm{d}x\\&=-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x+2\cos^2 x+\cos x\right)\mathrm{d}(\cos x)\\&=-\left(\frac{1}{4}\cos^4 x+\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{2}\cos^2 x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{17}{12}.\end{aligned}$$

□

⑦ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=2$

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\,\mathrm{d}(\cos x)=\left(2\cos^2 x-4\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$ □

⑧ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan x\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=-\dfrac{3}{8}+\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

$=-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos x}-\cos x\right)\mathrm{d}(\cos x)=\left(\frac{1}{2}\cos^2 x-\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{3}{8}+\ln 2.$ □

⑨ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{2\sqrt{2}-3}{2}+2\ln\dfrac{4}{2+\sqrt{2}}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x}{1+\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x,$

Đặt $\cos x=t\Rightarrow-\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{2};x=0\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=-\displaystyle\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\left(2t-2+\frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(t^2-2t+2\ln|t+1|\right)\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1=\dfrac{2\sqrt{2}-3}{2}+2\ln\dfrac{4}{2+\sqrt{2}}.$ □

Bài 24. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{3\cos^2 x+1}\,\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x}{3\cos^2 x+1}\sin x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\cos x=t\Rightarrow-\sin x\,\mathrm{d}x=t.$

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{2};x=0\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{-2t}{3t^2+1}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\dfrac{\mathrm{d}\left(3t^2+1\right)}{3t^2+1}=\dfrac{1}{3}\ln|3t^2+1|\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}.$ □

② $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{4-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$.....

ĐS: $I=\ln\dfrac{4}{3}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos x}{4-\cos^2 x}\sin x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\cos x=t\Rightarrow-\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0;x=0\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=-\displaystyle\int\limits_{1}^{0}\dfrac{2t}{4-t^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{2t}{4-t^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{1}\left(\dfrac{1}{2-t}-\dfrac{1}{2+t}\right)\mathrm{d}t=(-\ln|2-t|-\ln|2+t|)\Big|_{0}^{1}=\ln\dfrac{4}{3}.$ □

③ Tính $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 4x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$.....

ĐS: $I=2-\dfrac{3}{2}\ln 5$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{4\sin 2x\cos 2x}{3+\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\cos 2x=t\Rightarrow-2\sin 2x=\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1;x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=-1.$

Khi đó $I=-\displaystyle\int\limits_{1}^{-1}\dfrac{2t}{2t+3}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\dfrac{3}{2t+3}\right)\mathrm{d}t=\left(t-\dfrac{3}{2}\ln|2t+3|\right)\Big|_{-1}^{1}=2-\dfrac{3}{2}\ln 5.$ □

④ $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$.....

ĐS: $I=\dfrac{\pi-2}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\cos x=t\Rightarrow-\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0;x=0\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=-\displaystyle\int\limits_{1}^{0}\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}tI=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{1}\left(\dfrac{2}{1+t^2}-1\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}t.$

⑤ $I_1 = \int\limits_0^1 \dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

Đặt $t = \tan u \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \left(1+\tan^2 u\right)\mathrm{d}u.$

Đổi cận $t = 0 \Rightarrow u = 0; t = 1 \Rightarrow u = \dfrac{\pi}{4}.$

Khi đó $I_1 = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}u = 2u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\pi}{2}.$

$I_2 = \int\limits_0^1 \mathrm{d}t = t\Big|_0^1 = 1.$

Vậy $I = I_1 - I_2 = \dfrac{\pi}{2} - 1 = \dfrac{\pi-2}{2}.$ □

⑥ Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan x \tan\dfrac{x}{2}\right)\sin x\,\mathrm{d}x.$ . . . . . .

ĐS: $I = \ln\sqrt{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $1+\tan x\tan\dfrac{x}{2} = 1+\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}} = 1+\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos x} = 1+\dfrac{1-\cos x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x}.$

Suy ra $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \ln\sqrt{2}.$ □

⑦ Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos 2x + 3\cos x + 2}\,\mathrm{d}x.$ . . . . . .

ĐS: $I = \ln\dfrac{3}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2\cos^2 x + 5\cos x + 1}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\cos x = t \rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0.$

Khi đó $I = -\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{2t^2+3t+1} = \int\limits_1^0 \dfrac{\mathrm{d}t}{(2t+1)(t+1)} = \int\limits_0^1 \dfrac{2}{2t+1}\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^1 \dfrac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \ln|2t+1|\Big|_0^1 - \ln|t+1|\Big|_0^1 =$

$\ln\dfrac{3}{2}.$ □

⑧ Tính $I = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos 2x - \cos x}\,\mathrm{d}x.$ . . . . . .

ĐS: $I = -\dfrac{2}{3}\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2\cos^2 x-\cos x-1}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\cos x=t \Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t=\dfrac{1}{2}; x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=0.$

Khi đó $I=-\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2-t-1}=\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)(2t+1)}=\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}-\frac{2}{3}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2t+1}=\frac{1}{3}\ln|t-1|\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\ln|2t+1|\Big|_0^{\frac{1}{2}}=$

$-\dfrac{2}{3}\ln 2$ □

⑨ $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x.$ .....

ĐS: $I=\dfrac{3}{2}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\cos x=t \Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1; x=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t=\dfrac{1}{2}.$

Khi đó $I=-\displaystyle\int\limits_{1}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}=-\frac{1}{2t^2}\Big|_1^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}.$ □

Dạng:

$$I=\int\limits_a^b f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Phương pháp giải: Đặt $t=\tan x \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x.$

Tính $I=\displaystyle\int\limits_a^b f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Phương pháp giải: Đặt $t=\cot x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\left(1+\cot^2 x\right)\mathrm{d}x.$

Ví dụ 19. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan x)^2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $I=\dfrac{7}{3}$

Lời giải: $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan x)^2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan x)^2\,\mathrm{d}(1+\tan x)=\frac{1}{3}(1+\tan x)^3\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{7}{3}.$

Ví dụ 20. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $I=\dfrac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{9}$

Lời giải: Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\sqrt{2+3\tan x}=t \Rightarrow 2+3\tan x=t^2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\sqrt{2}; x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\sqrt{5}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t}{2}\cdot\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{9}t^3\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{9}$.

Ví dụ 21. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\cos x+e^{\tan x}\right)\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $I=\sqrt{2}$

Lời giải: Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x}\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

$I_1=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$.

Tính $I_2=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\tan x=t\Rightarrow\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I_2=\displaystyle\int\limits_0^1 te^t\,\mathrm{d}t=(te^t-e^t)\Big|_0^1=1$.

Vậy $I=I_1+I_2=\sqrt{2}$.

Bài 25. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x$. .....

ĐS: $I=-\dfrac{10}{9\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\cos 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

Nên $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x\left(1+\tan^2 x\right)}{1-\tan^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\tan x=t\Rightarrow\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ hay $\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{t^4}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(-t^2-1+\frac{1}{1-t^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(-t^2-1+\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(-\frac{1}{3}t^3-t-\frac{1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln|1+t|\right)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=-\frac{10}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right).$ □

② Tính $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x}$. . . . . .

ĐS: $I=1+\ln\sqrt{3}$

✍ **Lời giải.**

Chia cả tử và mẫu của hàm dưới dấu tích phân cho $\cos^4 x$ ta được

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{\cos^4 x}}{\tan x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(1+\tan^2 x\right)\left(1+\tan^2 x\right)}{\tan x}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t.$
Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1;x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\sqrt{3}.$
Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{1+t^2}{t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t}+t\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t|+\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}=1+\ln\sqrt{3}.$ □

Bài 26. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{5\cos^2 x-8\sin x\cos x+3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$ . . . . . .

ĐS: $I=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}-5}$

✍ **Lời giải.**

Chia cả tử và mẫu của hàm dưới dấu tích phân cho $\cos^2 x$ ta được

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{5-8\tan x+3\tan^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\tan^2 x}{(\tan x-1)(3\tan x-5)}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t.$
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0;x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$
Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{(t-1)(3t-5)}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left[\frac{3}{2(3t-5)}-\frac{1}{2(t-1)}\right]\mathrm{d}t$

$=\left(\frac{1}{2}\ln|3t-5|-\frac{1}{2}\ln|t-1|\right)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{2}\ln\frac{5\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}-5}.$ □

② $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin^2 x+3\sin x\cos x+1}\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\ln\dfrac{4}{3}$

✍ Lời giải.

Chia cả tử và mẫu của hàm số dưới dấu tích phân cho $\sin^2 x$ ta được

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\sin^2 x}}{1+3\cot x+\dfrac{1}{\sin^2 x}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cot^2 x}{\cot^2 x+3\cot x+2}\mathrm{d}x.$$

Đặt $\cot x=t\Rightarrow-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ hay $-\left(1+\cot^2 x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1;x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=-\displaystyle\int\limits_1^0\frac{1}{t^2+3t+2}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1\frac{1}{t^2+3t+2}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right|\Big|_0^1=\ln\frac{4}{3}$. □

③ $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{2\cos x+5\cos^2 x\sin x}\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\ln\sqrt{3}+\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$

✍ Lời giải.

Chia cả tử và mẫu của hàm số dưới dấu tích phân cho $\cos^3 x$ ta được

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{2}{\cos^2 x}+5\tan x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\left(1+\tan^2 x\right)}{2\tan^2 x+5\tan x+2}\mathrm{d}x.$$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt{3}};x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{t}{2t^2+5t+2}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\frac{t}{(2t+1)(t+2)}\mathrm{d}t$

$=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1\left[\frac{2}{3(t+2)}-\frac{1}{3(2t+1)}\right]\mathrm{d}t=\left(\frac{2}{3}\ln|t+2|-\frac{1}{6}\ln|2t+1|\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1$ □

$=\ln\sqrt{3}+\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$.

④ $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x(2-\sin 2x)}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$. . . . . .

ĐS: $I=\pi-4$

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{\sin x(2-\sin 2x)}{\cos^3 x} = \dfrac{2\sin x - 2\sin^2 x\cos x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} = \left(2\tan x - 2\sin^2 x\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$= \left(2\tan x - 2 + 2\cos^2 x\right)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2\tan x - 2}{\cos^2 x} + 2.$

Suy ra $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{2\tan x - 2}{\cos^2 x} + 2\right)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\tan x - 2)\,\mathrm{d}(\tan x) + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\,\mathrm{d}x$

$= \left(\tan^2 x - 2\tan x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + 2x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi - 4.$ □

Bài 27. Tính các tích phân

① $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan^3 x - 3}{\sin^2 x - \sin 2x - 3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{5}{2} + 7\ln 2 - 6\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{\tan^3 x - 3}{\sin^2 x - \sin 2x - 3\cos^2 x} = \frac{\tan^3 x - 3}{\tan^2 x - 2\tan x - 3}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \left(\tan x + 2 + \frac{6}{\tan x - 3} + \frac{1}{\tan x + 1}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

Đặt $t = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1.$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(t + 2 + \frac{6}{t-3} + \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 6\ln|t-3| + \ln|t+1|\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + 2 + 6\ln 2 + \ln 2 - 6\ln 3 \\ &= \frac{5}{2} + 7\ln 2 - 6\ln 3. \end{aligned}$$

Vậy $I = \dfrac{5}{2} + 7\ln 2 - 6\ln 3.$ □

② $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1 + \sin 2x}{2\sin x\cos^3 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $1 + \dfrac{1}{8}\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1+\sin 2x}{2\sin x\cos^3 x+\cos^4 x}&=\frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x\left(2\sin x\cos x+\cos^2 x\right)}\\&=\frac{\tan^2 x+2\tan x+1}{2\tan x+1}\cdot\frac{1}{cos^2 x}\\&=\left(\frac{1}{2}\tan x+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\tan x+1}\right)\frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{cos^2 x}\mathrm{d}x$
$x=0\Rightarrow t=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$. Khi đó

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2t+1}\right)\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}t+\frac{1}{8}\ln|2t+1|\right)\Big|_0^1\\&=1+\frac{1}{8}\ln 3.\end{aligned}$$

Vậy $I=1+\dfrac{1}{8}\ln 3$. □

③ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^4 x+1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sin^4 x+1}{\cos^4 x}&=\frac{(1-\cos^2 x)^2+1}{\cos^4 x}\\&=1-\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{2}{\cos^4 x}\\&=1-\frac{2}{\cos^2 x}+2\left(1+\tan^2 x\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{2}{\cos^2 x} + 2\left(1+\tan^2 x\right)\cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{2}{\cos^2 x}\right) \mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right)\cdot \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= (x - 2\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}(\tan x) \\
&= \frac{\pi}{4} - 2 + 2\left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4} - 2 + 2\left(1 + \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Vậy $I = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{3}$. □

④ $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{36+8\sqrt{3}}{27}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x \sin^2 x} = \dfrac{1}{cos^4 x} + \dfrac{4}{\sin^2 2x} = \left(1+\tan^2 x\right)\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{4}{\sin^2 2x}$.
Khi đó

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(1+\tan^2 x\right)\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{4}{\sin^2 2x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}(\tan x) + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x \\
&= \left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} - 2\cot 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{36+8\sqrt{3}}{27}.
\end{aligned}$$

□

⑤ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $-\sqrt{2}\ln\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{1}{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2 x-\sin x\cos x}=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1}{1-\tan x}$.

Khi đó $I=\sqrt{2}\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\dfrac{1}{1-\tan x}\right)\mathrm{d}(\tan x)=-\sqrt{2}\ln|1-\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{2}\ln\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$. □

⑥ $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $-2\ln\dfrac{2}{3}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{2}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}+\cot x}$.

Đặt $t=\sqrt{3}+\cot x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=2\sqrt{3}$, $x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó $I=-2\displaystyle\int\limits_{2\sqrt{3}}^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t=-2\ln|t||_{2\sqrt{3}}^{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=-2\ln\dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}}=-2\ln\dfrac{2}{3}$

Cách khác: $I=-2\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+\cot x}\right)\mathrm{d}(\cot x)=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-2\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}\right|=-2\ln\dfrac{2}{3}$.

Vậy $I=-2\ln\dfrac{2}{3}$. □

⑦ $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{3}{8}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}=\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{1}{(1+\cot x)^3}$.

Đặt $t=1+\cot x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{1}{(1+\cot x)^3}\mathrm{d}x=-\int\limits_2^1\dfrac{1}{t^3}\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}t^{-2}\Big|_1^2=\dfrac{3}{8}$. □

Dạng:

$$I=\int\limits_a^b f(\sin x\pm\cos x)\mathrm{d}x$$

Phương pháp: Đặt $t=\sin x\pm\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x\pm\sin x)\,\mathrm{d}x$

Ví dụ 22. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $\dfrac{1}{2}\ln 2$

② $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x+3}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $\ln\dfrac{4}{3+\sqrt{2}}$

Lời giải:

① Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x$
Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\sqrt{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$
Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln|t||_{1}^{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\ln 2.$

② Đặt $t=\sin x+\cos x+3\Rightarrow \mathrm{d}t=-(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x$
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=4$, $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=3+\sqrt{2}$
Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{3+\sqrt{2}}^{4}\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln|t||_{3+\sqrt{2}}^{4}=\ln\dfrac{4}{3+\sqrt{2}}.$

Ví dụ 23. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x+2}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $\sqrt{2}-1+2\ln\dfrac{3}{2+\sqrt{2}}$

② $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 2x}{(\sin x-\cos x+3)^3}\,\mathrm{d}x.$ **ĐS:** $\dfrac{1}{32}$

Lời giải:

① Ta có $\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x+2}=\dfrac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x+2}.$
Đặt $t=\sin x+\cos x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x.$
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=3$, $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=2+\sqrt{2}.$
Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{3}^{2+\sqrt{2}}\dfrac{t-2}{t}\,\mathrm{d}t=(t-2\ln|t|)|_{3}^{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1+2\ln\dfrac{3}{2+\sqrt{2}}.$
Vậy $I=\sqrt{2}-1+2\ln\dfrac{3}{2+\sqrt{2}}.$

② Ta có $\dfrac{\cos 2x}{(\sin x-\cos x+3)^3}=\dfrac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x-\cos x+3)^3}.$
Đặt $t=\sin x-\cos x+3\Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x.$
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=2$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=4.$
Khi đó $I=-\displaystyle\int\limits_{2}^{4}\dfrac{t-3}{t^3}\,\mathrm{d}t=-\int\limits_{2}^{4}\left(\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{3}{t^3}\right)\mathrm{d}t=-\left(-\dfrac{1}{t}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{t^2}|\right)\Big|_{2}^{4}=\dfrac{1}{32}.$
Vậy $I=\dfrac{1}{32}.$

Ví dụ 24. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{(1+\sin 2x)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\sqrt{2}-1$

Lời giải: Ta có $\dfrac{cos2x}{(1+\sin 2x)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1.$

Vậy $I=\sqrt{2}-1$.

Bài 28. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $2-\sqrt{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}&=\frac{1+2\sin x\cos x+(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\\&=\frac{(\cos x+\sin x)^2+(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\\&=2\cos x.\end{aligned}$$

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\,\mathrm{d}x=2\sin x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2-\sqrt{2}.$

Vậy $I=2-\sqrt{2}$. □

② $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)+1}=\dfrac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{(\sin x+\cos x+1)^2}.$

Đặt $t=\sin x+\cos x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=-(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=2$, $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1+\sqrt{2}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{1+\sqrt{2}}^{2}\dfrac{\sqrt{2}}{t^2}\mathrm{d}t=-\dfrac{\sqrt{2}}{t}\Big|_{1+\sqrt{2}}^{3}=\dfrac{4-3\sqrt{2}}{2}.$

Vậy $I=\dfrac{4-3\sqrt{2}}{2}$. □

Bài 29. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2)^3}\mathrm{d}x$ . . . . . **ĐS:** $\dfrac{13-9\sqrt{2}}{18}$

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2)^3}=\dfrac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x+2)^3}$.
Đặt $t=\sin x+\cos x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=3$, $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=2+\sqrt{2}$.
Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_3^{2+\sqrt{2}}\dfrac{t-2}{t^3}\,\mathrm{d}t=\int\limits_3^{2+\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t^3}\right)\mathrm{d}t=\left(-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}|\right)\Big|_3^{2+\sqrt{2}}=\dfrac{13-9\sqrt{2}}{18}$
Vậy $I=\dfrac{13-9\sqrt{2}}{18}$. □

② $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\ln 3$

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}=\dfrac{\sin x+\cos x}{2+(\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{2+2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{2-\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$
Đặt $t=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$
Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=0$.
Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{1}{2-t^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{1}{(\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}+t)}=\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\ln 3$.
Vậy $I=\ln 3$. □

Bài 30. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{5-4\sin x-\cos^2 x}+\cos x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $-\dfrac{14}{3}+12\ln\dfrac{3}{2}$

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{5-4\sin x-\cos^2 x}+\cos x}=\dfrac{2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)\sin 2x}{2+\cos x-\sin x}$.
Đặt $t=2+\cos x-\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=-(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$ và $\sin 2x=-t^2+4t-3$
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=3$; $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=2$
Khi đó

$$\begin{aligned}I&=2\int\limits_2^3\dfrac{(t-2)(-t^2+4t-3)}{t}\,\mathrm{d}t\\&=-2\int\limits_2^3\left(t^2-6t+11-\dfrac{6}{t}\right)\mathrm{d}t\\&=-2\left(\dfrac{t^3}{3}-3t^2-6\ln|t|\right)\Big|_2^3\\&=-\dfrac{14}{3}+12\ln\dfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $I=-\dfrac{14}{3}+12\ln\dfrac{3}{2}$. □

Bài 31. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos^2 x(1+\cos x)-\sin^2 x(1+\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\sqrt{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{\cos^2 x(1+\cos x)-\sin^2 x(1+\sin x)}{\sin x+\cos x}=\left(1+\cos x+\sin x+\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\right)(\cos x-\sin x)$
Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$ và $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}(t^2-1)$.
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\sqrt{2}$.
Khi đó

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(1+t+\dfrac{\dfrac{1}{2}(t^2-1)}{t}\right)\mathrm{d}t\\&=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(1+\dfrac{3}{2}t-\dfrac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t\\&=\left(t+\dfrac{3}{4}t^2-\dfrac{1}{2}\ln|t|\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}\\&=\sqrt{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

Vậy $I=\sqrt{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\ln 2$. □

② $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{26}{3}-12\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{\cos 2x}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}=\dfrac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}$.
Đặt $t=\sqrt{1+\sin x-\cos x}\Rightarrow t^2=1+\sin x-\cos x$
Suy ra $2t\,\mathrm{d}t=(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$ và $\cos x-\sin x=1-t^2$.
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_0^1 \frac{(1-t^2)t}{2-t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 \frac{-t^3+t}{2-t}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^1 \left(t^2+2t+3-\frac{6}{2-t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{t^3}{3}+t^2+3t+6\ln|2-t|\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{26}{3}-12\ln 2.
\end{aligned}$$

□

Bài 32. Tính các tích phân

① $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\cos 2x-\sin 4x}{2-\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{-5+13\sqrt{2}}{3}+6\ln(2-\sqrt{2})$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{3\cos 2x-\sin 4x}{2-\sin x-\cos x} &= \frac{cos2x(3-2\sin 2x)}{2-\cos x-\sin x} \\
&= (\cos x-\sin x)\frac{(\cos x+\sin x)(3-2\left((\cos x+\sin x)^2-1\right)}{2-\sin x-\cos x} \\
&= \left(\frac{-2(\sin x+\cos x)^3+5(\sin x+\cos x)}{2-\sin x-\cos x}\right)(\cos x-\sin x).
\end{aligned}$$

Đặt $t=2-\sin x-\cos x \Rightarrow \sin x+\cos x=2-t$

$\mathrm{d}t=-(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=2-\sqrt{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int_{2-\sqrt{2}}^1 \frac{-2(2-t)^3+5(2-t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{2-\sqrt{2}}^1 \frac{2t^3-12t^2+19t-6}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{2-\sqrt{2}}^1 \left(2t^2-12t+19-\frac{6}{t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{2}{3}t^3-6t^2+19t-6\ln|t|\right)\Big|_{2-\sqrt{2}}^1 \\
&= \frac{-5+13\sqrt{2}}{3}+6\ln(2-\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Vậy $I=\dfrac{-5+13\sqrt{2}}{3}+6\ln(2-\sqrt{2})$. □

② $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{4(\sin x+\cos x)-\cos 2x}{2(\sin x-\cos x-1)-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $-\dfrac{1}{4}\ln 3-\ln 2$

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{4(\sin x+\cos x)-\cos 2x}{2(\sin x-\cos x-1)-\sin 2x}=\dfrac{(\sin x+\cos x)(4+\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x-1)(3+\sin x-\cos x)}$

Đặt $t=\sin x-\cos x-1\Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=-2$; $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=-1$.

Khi đó

$$\begin{aligned}I&=\int_{-2}^{-1}\frac{5+t}{t(t+4)}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{t+4}+\frac{5}{4}\frac{1}{t(t+4)}\right)\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{5}{4}\ln\left|\frac{t}{t+4}\right|+\ln|t+4|\right)\Big|_{-2}^{-1}\\&=-\frac{1}{4}\ln 3-\ln 2.\end{aligned}$$

Vậy $I=-\dfrac{1}{4}\ln 3-\ln 2$. □

Dạng:

$$\int_a^b f\left(\sin^2 x,\cos^2 x\right)\sin 2x\,\mathrm{d}x$$

Phương pháp: Đặt $\left[\begin{array}{l}t=\sin^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=\sin 2x\,\mathrm{d}x\\t=\cos^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin 2x\,\mathrm{d}x\end{array}\right.$

Ví dụ 25. Tính $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ **ĐS:** $\ln 2$

Lời giải: Đặt $t=1+\cos^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin 2x\,\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=2$; $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln|t||_1^2=\ln 2$.

Vậy $I=\ln 2$.

Ví dụ 26. Tính $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2 x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$ **ĐS:** $\mathrm{e}-1$

Lời giải: Đặt $t=\sin^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=\sin 2x\,\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\big|_0^1 = \mathrm{e} - 1$.

Vậy $I = \mathrm{e} - 1$.

Bài 33. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(1+\sin^2 x)^3 \,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{15}{4}$

✍ Lời giải.

Đặt $t = 1 + \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = \sin 2x \,\mathrm{d}x$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $I = \int\limits_1^2 t^3 \,\mathrm{d}t = \dfrac{t^4}{4}\Big|_1^2 = \dfrac{15}{4}$.

Vậy $I = \dfrac{15}{4}$. □

Bài 34. Tính các tích phân

① $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 4x}{1+\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $2 + 6\ln\dfrac{3}{4}$

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{\sin 4x}{1+\cos^2 x} = \dfrac{2\cos 2x}{1+\cos^2 x} \cdot \sin 2x = \dfrac{4\cos^2 x - 2}{1+\cos^2 x} \cdot \sin 2x$.

Đặt $t = 1 + \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin 2x \,\mathrm{d}x$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = \dfrac{3}{2}$.

Khi đó $I = \int\limits_2^{\frac{3}{2}} \dfrac{4(t-1)-2}{t} \,\mathrm{d}t = \int\limits_2^{\frac{3}{2}} \left(4 - \dfrac{6}{t}\right) \mathrm{d}t = (4t - 6\ln|t|)\Big|_1^{\frac{3}{2}} = 2 + 6\ln\dfrac{3}{2}$.

Vậy $I = 2 + 6\ln\dfrac{3}{2}$ □

② $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} \,\mathrm{d}x$ . . . . . .

ĐS: $\dfrac{2}{3}$

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1 + 3\sin^2 x}}$.

Đặt $t = \sqrt{1 + 3\sin^2 x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3\sin^2 x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \sin 2x \,\mathrm{d}x$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $I = \int\limits_1^2 \dfrac{\frac{2}{3}t}{t} \,\mathrm{d}t = \int\limits_1^2 \dfrac{2}{3} \,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}(2-1) = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $I = \dfrac{2}{3}$. □

Bài 35. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{4\cos^2 x+9\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $\dfrac{1}{5}$

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{9\cos^2 x+4\sin^2 x}}=\dfrac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\sqrt{4+5\cos^2 x}}$.

Đặt $t=\sqrt{4+5\cos^2 x}\Rightarrow t^2=4+5\cos^2 x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=-5\sin 2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{5}t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=3$; $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_1^2\dfrac{\frac{1}{5}t}{t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\dfrac{1}{5}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{5}(2-1)$.

Vậy $I=\dfrac{1}{5}$. □

Bài 36. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{b^2\cos^2 x+c^2\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x$.

ĐS: $\dfrac{1}{|c|+|b|}$

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{b^2\cos^2 x+c^2\sin^2 x}}=\dfrac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\sqrt{b^2+(c^2-b^2)\sin^2 x}}$.

Đặt $t=\sqrt{b^2+(c^2-b^2)\sin^2 x}\Rightarrow t^2=b^2+(c^2-b^2)\sin^2 x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=(c^2-b^2)\sin 2x\,\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=|b|$; $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=|c|$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{|b|}^{|c|}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{c^2-b^2}\dfrac{t}{t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_{|b|}^{|c|}\dfrac{1}{c^2-b^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{c^2-b^2}(|c|-|b|)=\dfrac{1}{|c|+|b|}$.

Vậy $I=\dfrac{1}{|c|+|b|}$. □

Dạng:

$$I=\int\limits_a^b f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)x^{2n}\,\mathrm{d}x$$

Phương pháp: Đặt $x=a\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$.

Ví dụ 27. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4}$

② $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{2}}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

③ $I=\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ **ĐS:** π

Lời giải:

① Đặt $x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.
Khi đó $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$.
Vậy $I=\dfrac{\pi}{4}$.

② Đặt $x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{6}; x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.
Khi đó $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.
Vậy $I=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

③ Đặt $x=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.
Khi đó

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 2t\,\mathrm{d}t=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t=2\left(t-\dfrac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

Vậy $I=\pi$.

Bài 37. Tính các tích phân

① $I=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\pi}{16}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.
Khi đó $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\sqrt{1-1\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{8}\left(t-\dfrac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{16}$.
Vậy $I=\dfrac{\pi}{16}$. □

② $I=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$

✍ Lời giải.

Đặt $x=\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{2}(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$.

Vậy $I=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$. □

③ $I=\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

✍ Lời giải.

Đặt $x=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$.

Khi đó

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{4\sin^2 t}{2\cos t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}2(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t=2\left(t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $I=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. □

Bài 38. Tính các tích phân

① $I=\displaystyle\int\limits_0^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\pi}{2}$

✍ Lời giải.

Ta có $2x-x^2=1-(x-1)^2$

Đặt $x-1=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}; x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy $I=\dfrac{\pi}{2}$. □

② $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\pi}{8}$

✍ Lời giải.

Ta có $x-x^2=\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

Đặt $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cos t\,\mathrm{d}t$

Đổi cận $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}$.

Vậy $I=\dfrac{\pi}{8}$. □

③ $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{3+2x-x^2}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $-4+\dfrac{\pi+3\sqrt{3}}{2}$

✍ **Lời giải.**

Ta có $3+2x-x^2=4-(x-1)^2$

Đặt $x-1=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{6};\ x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{(1+2\sin t)^2}{2\cos t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(3+4\sin t-2\cos 2t)\,\mathrm{d}t=(3t-4\cos t-\sin 2t)|_{-\frac{\pi}{6}}^{0}=-4+\dfrac{\pi+3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $I=-4+\dfrac{\pi+3\sqrt{3}}{2}$. □

Dạng:

$$I=\int_\alpha^\beta f\left(\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^m\right)x^{2n}\mathrm{d}x$$

Phương pháp giải: Đặt $x=a\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=a\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$.

Ví dụ 28. Tính các tích phân sau

① $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4}$

② $I=\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{3\sqrt{3}}{x^2+4}\mathrm{d}x$ **ĐS:** $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{8}$

Lời giải:

① Đặt $x=\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$

$x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{1+\tan^2 t}\cdot(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{4}.$$

② Đặt $x=2\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=2(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$

$x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{3\sqrt{3}}{4+4\tan^2 t}\cdot 2(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{8}.$$

Bài 39. Tính các tích phân sau

① $I=\displaystyle\int\limits_2^4\dfrac{1}{x^2-2x+4}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $I=\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int\limits_2^4\dfrac{1}{x^2-2x+4}\mathrm{d}x=\int\limits_2^4\dfrac{1}{(x-1)^2+3}\mathrm{d}x$. Đặt $x-1=\sqrt{3}\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\sqrt{3}(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=4\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$

$x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$.

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{3\tan^2 t+3}\sqrt{3}(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

□

② $I=\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int\limits_0^1\dfrac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\dfrac{1}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\mathrm{d}x$. Đặt $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$

$x=0\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$.

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2 t+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

□

③ $I=\int\limits_0^1\frac{x^3}{1+x^8}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\frac{\pi}{16}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $u=x^4\Rightarrow \mathrm{d}u=4x^3\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow u=1$

$x=0\Rightarrow u=0$.

Ta có $I=\int\limits_0^1\frac{1}{4(1+u^2)}\mathrm{d}u=\int\limits_0^1\frac{1}{4(1+x^2)}\mathrm{d}x$. Đặt $x=\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$x=0\Rightarrow t=0$.

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4(1+\tan^2 t)}(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\,dt=\frac{\pi}{16}$. □

④ $I=\int\limits_0^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}}$ .....

ĐS: $\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})$

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=2\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=2(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$x=0\Rightarrow t=0$.

Ta có

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{4+4\tan^2 t}}\cdot 2(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 t}\,dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t}\,dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt$$

Đặt $u=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}u=\cos t\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$t=0\Rightarrow u=0$.

$$I=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-u^2}\,du=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2}).$$

□

Bài 40. Tính các tích phân sau

① $I=\int\limits_0^1 \sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{4}\ln(3+2\sqrt{2})$

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=\tan t \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$

$x=0\Rightarrow t=0$.

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^3 t}\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\cos^4 t}\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1-\sin^2 t)^2}\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1+\sin t+1-\sin t}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\right.\\
&= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right]^2\mathrm{d}(\sin x)=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{(1-\sin t)^2}+\frac{1}{(1+\sin t)^2}+\frac{2}{(1-\sin t)(1+\sin t)}\right]\mathrm{d}(\sin x)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x+1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\mathrm{d}(\sin x)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)\mathrm{d}(\sin x)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\left(\ln|1+\sin x|-\ln|1-\sin x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}\ln(3+2\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

□

② $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+x^2}}$ .....

ĐS: $-\dfrac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})$

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=\sqrt{3}\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$. Với $x=0\Rightarrow t=0$ và $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{3(1+\tan^2 t)}}\cdot\sqrt{3}\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\sin t-1)(\sin t+1)}\mathrm{d}(\sin t)\\
&= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&= -\frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

□

③ $I=\int\limits_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$.....

ĐS: $-\dfrac{1}{2}\ln(21-12\sqrt{3})$

✍ **Lời giải.**

$$I=\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}}\mathrm{d}x.$$

Đặt $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$. Với $x=0\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$ và $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$. Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{4}(1+\tan^2 t)}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}t\\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}(\sin t)\\
&= -\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(\sin t-1)(\sin t+1)}\mathrm{d}(\sin t)\\
&= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\\
&= -\frac{1}{2}\ln(21-12\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

□

④ $I=\displaystyle\int\limits_0^2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2x+4}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln(21-12\sqrt{3})$

✍ **Lời giải.**

$$I=\int\limits_0^2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2x+4}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(x+1)^2+3}}\mathrm{d}x$$

Đặt $x+1=\sqrt{3}\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$. Với $x=0\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$ và $x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$. Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3(1+\tan^2 t)}}\cdot\sqrt{3}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{\cos t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\cos t}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}t\\
&= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}(\sin t)\\
&= -\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{(\sin t-1)(\sin t+1)}\mathrm{d}(\sin t)\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(21-12\sqrt{3}).$$

□

⑤ $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$. Với $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$ và $x=\sqrt{3}\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}$. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 t)^3}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos t\mathrm{d}t\\ &= \sin t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 41. Tính các tích phân sau

① $I=\displaystyle\int\limits_0^2 x^2\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $6\sqrt{2}+\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=2\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$. Với $x=0\Rightarrow t=0$; và $x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$. Do đó

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}4\tan^2 t\cdot\sqrt{4(1+\tan^2 t)}\cdot\frac{2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}\mathrm{d}t=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t\cdot\cos t}{\cos^6 t}\mathrm{d}t$$

Đặt $u=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}u=\cos t\mathrm{d}t$. Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{16u^2}{(1-u^2)^3}\mathrm{d}u=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{16x^2}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u=16x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{x\mathrm{d}x}{(1-x^2)^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=16\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{4(1-x^2)^2}\end{cases}$. Ta được

$$\begin{aligned} I &= \frac{4x}{(1-x^2)^2}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{4}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}x=8\sqrt{2}-\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{2}{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=8\sqrt{2}-\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)^2\mathrm{d}x\\ &= 8\sqrt{2}-\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2}{(1-x)(1+x)}\right]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= 8\sqrt{2} - \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right]\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2}{(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x$$
$$= 6\sqrt{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$= 6\sqrt{2} + \ln\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

□

② $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{3+x^2}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}\ln(3-2\sqrt{2})$

✍ **Lời giải.**

Đặt $x = \sqrt{3}\tan t \Rightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{3}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$. Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\tan^2 t}{\sqrt{3(1+\tan^2 t)}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\tan^2 t \frac{1}{\cos t}\mathrm{d}t = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t \cdot \cos t}{(1-\sin^2 t)^2}\mathrm{d}t$$

Đặt $u = \sin t$, ta có

$$I = 3\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2}{(1-u^2)^2}\mathrm{d}u = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1}\right)^2 \mathrm{d}u$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{2}{(u-1)(u+1)}\right)^2 \mathrm{d}u$$
$$= \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}\ln(3-2\sqrt{2}).$$

□

Dạng:

$$\int_\alpha^\beta f\left(\sqrt{\frac{a\pm x}{a\mp x}}\right)\mathrm{d}x; \quad \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}};$$

Phương pháp giải:

① $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\left(\sqrt{\frac{a\pm x}{a\mp x}}\right)\mathrm{d}x$ đặt $x = a\cos 2t$.

② $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}}$ đặt $x = \frac{1}{t}$.

③ $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} R\left[\sqrt[s_1]{ax+b},\cdots,\sqrt[s_k]{ax+b}\right]\mathrm{d}x$

đặt $t^n = ax+b$, với n là bội chung nhỏ nhất $\{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$.

④ $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}$ đặt $t = \sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$

Ví dụ 29. Tính các tích phân sau

① $I = \displaystyle\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ **ĐS:** $11+6\ln\dfrac{2}{3}$

② $I = \displaystyle\int_0^{2} \sqrt{\frac{2-x}{x+2}}\mathrm{d}x$ **ĐS:** $\pi-2$

③ $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}\mathrm{d}x$ **ĐS:** $2\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)$

Lời giải:

① Đặt $t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow \mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$. Với $x=1 \Rightarrow t=1$ và $x=64 \Rightarrow t=2$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = \int_1^2 \frac{6t^3}{t+1}\mathrm{d}t = 6\int_1^2 \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)\Big|_1^2 \\ &= 11+6\ln\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

② Đặt $x = 2\cos 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = -4\sin 2t\mathrm{d}t$. Với $x=0 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$ và $x=2 \Rightarrow t=0$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2-2\cos 2t}{2+2\cos 2t}}4\sin 2t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\cdot 4\sin 2t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\sin^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4(1-\cos 2t)\mathrm{d}t \\ &= 4\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi-2. \end{aligned}$$

③ Đặt $t = \sqrt{x+1}+\sqrt{x+3} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}}\mathrm{d}t \Leftrightarrow \dfrac{2}{t}\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$.

Với $x=0 \Rightarrow t=1+\sqrt{3}$ và $x=1 \Rightarrow t=2+\sqrt{2}$

$$I = \int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} \frac{2}{t}\mathrm{d}t = 2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} = 2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Bài 42. Tính các tích phân sau

① $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\pi-\dfrac{8}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[4]{x}\Rightarrow x=t^4\Rightarrow \mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t$. Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=1$.

$$I = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\cdot 4t^3\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{4t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(4t^2-4+\frac{4}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=-\frac{8}{3}+\int_0^1\frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Đặt $x=\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= -\frac{8}{3}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t\\ &= -\frac{8}{3}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\mathrm{d}t\\ &= \pi-\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

□

② $I=\displaystyle\int_1^{27}\frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $4-6\ln 2+\dfrac{\pi}{2}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow t^6=x\Rightarrow \mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$. Với $x=1\Rightarrow t=1$ và $x=27\Rightarrow t=\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^3-2}{t^6+t^4}\cdot 6t^5\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{6t^4-12t}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{3}}\left(6t^2-6+\frac{6-12t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=4+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{6}{t^2+1}\mathrm{d}t-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{12t}{t^2+1}\mathrm{d}t\\ &= 4-6\ln 2+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{6}{x^2+1}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Đặt $x=\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$. Với $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$ và $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$.

$$I = 4-6\ln 2+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{6}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=4-6\ln 2+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}6\mathrm{d}t=4-6\ln 2+\frac{\pi}{2}.$$

□

③ $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{4}\ln(7-4\sqrt{3})$

✍ Lời giải.

Đặt $x=2\cos 2t \Rightarrow \mathrm{d}x=-4\sin 2t\mathrm{d}t$. Với $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$ và $x=2\Rightarrow t=0$.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4\cos^2 2t}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}}\cdot 4\sin 2t\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 2t}\tan t\cdot\sin 2t\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 2t}\mathrm{d}t$$

Đặt $\begin{cases} u=2\sin^2 t \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\cos^2 2t}\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2\sin 2t\mathrm{d}t \\ v=\dfrac{1}{2}\tan 2t \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \sin^2 t\tan 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2t\cdot\frac{\sin 2t}{\cos 2t}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 2t}{1-\sin^2 2t}\cdot\cos 2t\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\sin^2 2t+1}{1-\sin^2 2t}\cos 2t\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1-\frac{1}{1-\sin^2 2t}\right)\mathrm{d}(\sin 2t) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\left[\sin 2t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin 2t-1}{\sin 2t+1}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\ln(74\sqrt{3}). \end{aligned}$$

□

Bài 43. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $3\sqrt[3]{2}-24\sqrt[6]{2}+21+96\ln\dfrac{4+6\sqrt{2}}{5}$

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow t^6=x\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$. Với $x=1\Rightarrow t=1$ và $x=2\Rightarrow t=\sqrt[6]{2}$.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{1}{t^4+4t^3}\cdot 6t^5\mathrm{d}t = \int\limits_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{6t^2}{t+4}\mathrm{d}t = \int\limits_1^{\sqrt[6]{2}} \left(6t-24+\frac{96}{t+4}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left(3t^2-24t+\frac{96}{t+4}\right)\Big|_1^{\sqrt[6]{2}} \\ &= 3\sqrt[3]{2}-24\sqrt[6]{2}+21+96\ln\frac{4+6\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

□

Bài 44. Tính các tích phân sau

① $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $2-\dfrac{\pi}{2}$

✍ Lời giải.

Đặt $\sqrt{x}=\cos 2t \Rightarrow x=\cos^2 2t \Rightarrow \mathrm{d}x=-4\cos 2t\cdot\sin 2t\mathrm{d}t$. Với $x=0\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$ và $x=1\Rightarrow t=0$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}}\cdot 4\sin 2t\cos 2t\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t 4\sin 2t\cos 2t\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(8\sin^2 t-16\sin^2 t\right)\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[4(1-\cos 2t)-16\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}t=(4t-2\sin 2t)|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}4(1-\cos 2t)^2\mathrm{d}t\\ &= \pi-2-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4-8\cos 2t+4\cos^2 2t\right)\mathrm{d}t=2-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2\left(\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\mathrm{d}t\\ &= 2-\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

② $I=\displaystyle\int\limits_0^1\sqrt{\frac{3-x}{1+x}}\mathrm{d}x$ .....

ĐS: $2-\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{3-x}{1+x}}\Rightarrow x=\dfrac{3-t^2}{t^2+1}\Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{8t}{t^2+1}\mathrm{d}t$. Với $x=0\Rightarrow t=\sqrt{3}$ và $x=1\Rightarrow t=1$. Ta có

$$I = \int\limits_1^{\sqrt{3}}t\cdot\frac{8t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{8t^2}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$$

Đặt $\begin{cases} u=4t \\ \mathrm{d}v=\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=4\mathrm{d}t \\ v=-\dfrac{1}{t^2+1} \end{cases}$. Khi đó

$$I = \frac{-4t}{t^2+1}\Big|_1^{\sqrt{3}}+\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{4}{t^2+1}\mathrm{d}t=2-\sqrt{3}+\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{4}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

Đặt $x=\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$. với $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$ và $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} I &= 2-\sqrt{3}+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)\mathrm{d}t\\ &= 2-\sqrt{3}+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}4\mathrm{d}t\\ &= 2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

□

3.6 Tích phân từng phần

Định lý: Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$I = \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \text{ hay } I = \int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

Thực hành:

① **Nhận dạng:** Tích hai hàm khác loại nhân nhau, chẳng hạn: mũ nhân lượng giác, ...

② **Đặt:** $\begin{cases} u = \cdots\cdots \xrightarrow{VP} \mathrm{d}u = \cdots\cdots\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cdots\,\mathrm{d}x \xrightarrow{NH} v = \cdots\cdots \end{cases}$. Suy ra $I = \int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$

③ **Thứ tự ưu tiên chọn u: *loga - đa - lượng - mũ*** và $\mathrm{d}v =$ ***phần còn lại***. Nghĩa là nếu có $\ln x$ hay $\log_a x$ thì chọn $u = \ln x$ hay $u = \log_a x = \dfrac{1}{\ln a}\cdot\ln x$ và $\mathrm{d}v =$ còn lại. Nếu không có ln, log thì chọn $u =$ đa thức và $\mathrm{d}v =$ còn lại. Nếu không có log, đa thức, ta chọn $u =$ lượng giác, ...

⚠ ***Lưu ý:*** *rằng bậc của đa thức và bậc của* ln *tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.*

④ Dạng **mũ nhân lượng giác** là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.

3.6.1 Ví dụ và bài tập

Ví dụ 1. Tính $I = \int_0^1 (x-3)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. ..... **ĐS:** $I = 4 - 3\mathrm{e}$

Lời giải: Chọn $\begin{cases} u = x-3 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Khi đó $I = (x-3)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -2\mathrm{e} + 3 - \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 4 - 3\mathrm{e}.$

Ví dụ 2. Tính $I = \int_0^1 (x^2+2x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. ..... **ĐS:** $I = \mathrm{e}$

Lời giải: Chọn $\begin{cases} u = x^2+2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2(x+1)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Khi đó $I = (x^2+2x)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e} - 2\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e} - 2J.$

Tính J: Chọn $\begin{cases} u_1 = x+1 \Rightarrow \mathrm{d}u_1 = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Khi đó $J = (x+1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e} - 1 - \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{e}.$

Vậy $I = 3\mathrm{e} - 2\mathrm{e} = \mathrm{e}$.

Ví dụ 3. Tính $I = \int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$. ..... **ĐS:** $I = -\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^\pi + 1)$

Lời giải: Chọn $\begin{cases} u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Khi đó $I = \mathrm{e}^x \cos x\Big|_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi \sin x \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^\pi - 1 + J.$

Tính J. Chọn $\begin{cases} u_1 = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u_1 = \cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Khi đó $J = \sin x \mathrm{e}^x\Big|_0^\pi - I = -I.$

Vậy $I = -\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^\pi + 1).$

Bài 1. Tính các tích phân sau:

① $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I = 1$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Khi đó $I = x\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 1.$ □

② $I = \displaystyle\int_0^2 (2x-1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I = \mathrm{e}^2 + 3$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = 2x-1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Khi đó $I = (2x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^2 - 2\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^2 + 1 - 2\mathrm{e}^x\Big|_0^2 = \mathrm{e}^2 + 3.$ □

③ $I = \displaystyle\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I = e + 1$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = 2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Khi đó $I = (2x+1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 2\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e} - 1 - 2\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{e} + 1.$ □

④ $I = \displaystyle\int_0^1 (4x-1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \dfrac{3}{2}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = 4x-1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 4\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}. \end{cases}$

Khi đó $I = \dfrac{1}{2}(4x-1)\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - 2\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^2 + \dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \dfrac{3}{2}$. □

⑤ $I = \displaystyle\int_0^1 (x-1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = x-1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}. \end{cases}$

Khi đó $I = \dfrac{1}{2}(x-1)\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2$. □

⑥ $I = \displaystyle\int_1^3 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = -\dfrac{4}{\mathrm{e}^3} + \dfrac{2}{\mathrm{e}}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\mathrm{e}^{-x}. \end{cases}$

Khi đó $I = -x\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^3 + \displaystyle\int_1^3 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -3\mathrm{e}^{-3} + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x}\Big|_1^3 = -\dfrac{3}{\mathrm{e}^3} + \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} + \dfrac{1}{\mathrm{e}} = -\dfrac{4}{\mathrm{e}^3} + \dfrac{2}{\mathrm{e}}$. □

⑦ $I = \displaystyle\int_0^2 (1-2x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{5}{\mathrm{e}^2} - 1$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = 1-2x \Rightarrow \mathrm{d}u = -2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\mathrm{e}^{-x}. \end{cases}$

Khi đó $I = -(1-2x)\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^2 - 2\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{-2} + 1 + 2\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^2 = \dfrac{3}{\mathrm{e}^2} + 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^2} - 2 = \dfrac{5}{\mathrm{e}^2} - 1$. □

⑧ $I = \displaystyle\int_1^3 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = -\dfrac{17}{\mathrm{e}^3} + \dfrac{5}{\mathrm{e}}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\mathrm{e}^{-x}. \end{cases}$

Khi đó $I = -x^2\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^3 + 2\displaystyle\int_1^3 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{9}{\mathrm{e}^3} + \dfrac{1}{\mathrm{e}} + 2J$.

Tính J. Chọn $\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\mathrm{e}^{-x}. \end{cases}$

Khi đó $J = -xe^{-x}\Big|_1^3 + \int\limits_1^3 e^{-x}\,dx = -3e^{-3} + e^{-1} - e^{-x}\Big|_1^3 = -3e^{-3} + e^{-1} - e^{-3} + e^{-1} = -\dfrac{4}{e^3} + \dfrac{2}{e}$.

Vậy $I = -\dfrac{17}{e^3} + \dfrac{5}{e}$. □

⑨ $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 5e^x \sin 2x\,dx$. . . . . **ĐS:** $I = e^{\frac{\pi}{4}} + 2$

✍ **Lời giải.**

$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 5e^x \sin 2x\,dx = 5\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x\,dx = 5J$.

Chọn $\begin{cases} u = \sin 2x \Rightarrow du = 2\cos 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx \Rightarrow v = e^x. \end{cases}$

Khi đó $J = e^x \sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x e^x\,dx = e^{\frac{\pi}{4}} - 2K$.

Tính K. Chọn $\begin{cases} u = \cos 2x \Rightarrow du = -2\sin 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx \Rightarrow v = e^x. \end{cases}$

Khi đó $K = \cos 2x e^x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2J = -1 + 2J$.

Vậy $I = e^{\frac{\pi}{4}} + 2$. □

⑩ $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx$. . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\,dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x}. \end{cases}$

Khi đó $I = -e^{-x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{-x}\,dx = 1 - J$.

Tính J. Chọn $\begin{cases} u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x}. \end{cases}$

Khi đó $J = -e^{-x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + I = -e^{-\frac{\pi}{2}} + I$.

Vậy $2I = 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I = \dfrac{e^{-\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$. □

⑪ $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\sin 4x\,dx$. . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{4e^{\frac{3\pi}{4}} + 4}{25}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = \sin 4x \Rightarrow du = 4\cos 4x\,dx \\ dv = e^{3x}\,dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{3}e^{3x}. \end{cases}$

Khi đó $I=\dfrac{1}{3}\sin 4x\mathrm{e}^{3x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\dfrac{4}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 4x\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x=0-\dfrac{4}{3}J=-\dfrac{4}{3}J.$

Tính J. Chọn $\begin{cases}u=\cos 4x\Rightarrow \mathrm{d}u=-4\sin 4x\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}.\end{cases}$

Khi đó $J=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\dfrac{4}{3}I=-\dfrac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{4}}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}I.$

Suy ra $I=\dfrac{4\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}}+4}{25}$. □

12 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=-\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases}u=\cos 2x\Rightarrow \mathrm{d}u=-2\sin 2x\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\mathrm{e}^x.\end{cases}$

Khi đó $I=\cos 2x\mathrm{e}^x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1+2J.$

Tính J. Chọn $\begin{cases}u=\sin 2x\Rightarrow \mathrm{d}u=2\cos 2x\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\mathrm{e}^x.\end{cases}$

Khi đó $J=\mathrm{e}^x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2I=-2I.$

Vậy $I=-1-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-4I\Rightarrow I=-\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}$. □

13 $I=\displaystyle\int_0^1\dfrac{3x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=-\dfrac{11}{4\mathrm{e}^2}+\dfrac{5}{4}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases}u=3x+1\Rightarrow \mathrm{d}u=3\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}.\end{cases}$

Khi đó $I=-\dfrac{1}{2}(3x+1)\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^1+\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=-2\mathrm{e}^{-2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^1=-\dfrac{11}{4\mathrm{e}^2}+\dfrac{5}{4}.$ □

Ví dụ 4. Tính $I=\displaystyle\int_1^3\ln x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=3\ln 3-2$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases}u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\Rightarrow v=x.\end{cases}$

Khi đó $I=x\ln x\Big|_1^3-\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x=3\ln 3-x\Big|_1^3=3\ln 3-2.$ □

Ví dụ 5. Tính $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{2\mathrm{e}^3}{9}+\dfrac{1}{9}$

Lời giải: Chọn $\begin{cases} u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3}. \end{cases}$

Khi đó $I=\dfrac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^3}{3}-\dfrac{1}{9}x^3\Big|_1^{\mathrm{e}}=\dfrac{\mathrm{e}^3}{3}-\dfrac{\mathrm{e}^3}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{2\mathrm{e}^3}{9}+\dfrac{1}{9}.$

Ví dụ 6. Tính $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}-\dfrac{1}{4}$

Lời giải: Chọn $\begin{cases} u=\ln^2 x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{2}{x}\ln x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó $I=\dfrac{x^2}{2}\ln^2 x\Big|_1^{e}-\int\limits_1^{e} x\ln x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-J.$

Tính J. Chọn $\begin{cases} u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ dv=x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó $J=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{e}-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^{e} x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{1}{4}x^2\Big|_1^{e}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{1}{4}.$

Vậy $I=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}-\dfrac{1}{4}\Rightarrow I=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}-\dfrac{1}{4}$..

Ví dụ 7. Tính $I=\int\limits_0^{1}(2x-1)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{3}{2}-\ln 4$

Lời giải: Chọn $\begin{cases} u=\ln(x+1)\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=(2x-1)\mathrm{d}x\Rightarrow v=x^2-x. \end{cases}$

Khi đó $I=(x^2-x)\ln(x+1)\Big|_0^{1}-\int\limits_0^{1}\dfrac{x^2-x}{x+1}\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{1}\left(x-2+\dfrac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{x^2}{2}-2x+2\ln|x+1|\right)\Big|_0^{1}=$

$\dfrac{3}{2}-\ln 4.$

Ví dụ 8. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\ln\dfrac{27\sqrt{2}}{8}-\dfrac{\pi}{4}$

Lời giải: Với mọi $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, ta có

$$\frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}=\frac{\ln[\cos x(\tan x+2)]}{\cos^2 x}=\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}+\frac{\ln(\tan x+2)}{\cos^2 x}.$$

Tính $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

Chọn $\begin{cases} u = \ln\cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \tan x. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I_1 &= \tan x \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + (\tan x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Tính $I_2 = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x + 2)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Chọn $\begin{cases} u = \ln(\tan x + 2) \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{\tan x + 2}\,\mathrm{d}(\tan x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \tan x. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I_2 &= \tan x \ln(\tan x + 2)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\tan x + 2}\,\mathrm{d}(\tan x) \\ &= \ln 3 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{2}{\tan x + 2}\right)\mathrm{d}(\tan x) \\ &= \ln 3 - (\tan x - 2\ln|\tan x + 2|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \dfrac{\pi}{4} + 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1 = \ln\dfrac{27\sqrt{2}}{8} - \dfrac{\pi}{4}.$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

① $I = \displaystyle\int\limits_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I = 2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó $I = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \dfrac{x^2}{4}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \dfrac{3}{4}.$ □

② $I=\int\limits_1^2(2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=2\ln 2-\dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases}u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=(2x-1)\mathrm{d}x\Rightarrow v=x^2-x.\end{cases}$

Khi đó $I=(x^2-x)\ln x\Big|_1^2-\int\limits_1^2(x-1)\mathrm{d}x=2\ln 2-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2=2\ln 2-\dfrac{1}{2}$. □

③ $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}(1+x)\ln x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{5}{4}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases}u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=(1+x)\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}+x.\end{cases}$

Khi đó $I=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}}\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}-\left(\dfrac{x^2}{4}+x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}-\mathrm{e}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{5}{4}$. □

④ $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}(x+2)\ln x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{9}{4}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases}u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=(x+2)\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}+2x.\end{cases}$

Khi đó $I=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}}\left(\dfrac{x}{2}+2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+2\mathrm{e}-\left(\dfrac{x^2}{4}+2x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}$

$=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}+2\mathrm{e}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}-2\mathrm{e}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{9}{4}$. □

⑤ $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}x(\ln x+1)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{3\mathrm{e}^2}{4}-\dfrac{1}{4}$

✍ **Lời giải.**

$I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}x(\ln x+1)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^{\mathrm{e}}x\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

Tính I_1. Chọn $\begin{cases}u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ dv=x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}.\end{cases}$

Khi đó $I_1=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^e x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{1}{4}$.

Tính $I_2=\dfrac{x^2}{2}\Big|_1^e=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $I=I_1+I_2=\dfrac{3\mathrm{e}^2}{4}-\dfrac{1}{4}$. □

⑥ $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-2\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\ln 2+\dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3-2\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^2 x\,\mathrm{d}x-2\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-2J=\frac{3}{2}-2J.$

Tính J. Chọn $\begin{cases} u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=x^{-2}\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Khi đó $J=-\dfrac{1}{x}\ln x\Big|_1^2+\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{x}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}+1=\ln 2+\frac{1}{2}.$

Vậy $I=\ln 2+\dfrac{1}{2}$. □

⑦ $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(xe^x)}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{5}{4}\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln 3-\dfrac{1}{6}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u=\ln(xe^x)\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{x+1}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=(x+2)^{-2}\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\dfrac{1}{x+2}. \end{cases}$

Khi đó $I=-\dfrac{1}{x+2}\ln(xe^x)\Big|_1^2+\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\ln(2\mathrm{e}^2)+\frac{1}{3}+J.$

Tính J. Ta có $J=\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x(x+2)}=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x(x+2)|\Big|_1^2=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 3).$

Vậy $I=\dfrac{5}{4}\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln 3-\dfrac{1}{6}$. □

⑧ $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 2x(1-\ln x)\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{\mathrm{e}^2-3}{2}$

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 2x(1-\ln x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}} 2x\,\mathrm{d}x-2\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_1^{\mathrm{e}}-2J=\mathrm{e}^2-1-2J.$

Tính J. Chọn $\begin{cases} u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó $J=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{e}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{e} x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^{e}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}.$

Vậy $I=\mathrm{e}^2-1-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{3}{2}$. □

⑨ $I=\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} (1+\ln x)x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{5\mathrm{e}^4}{4}-\dfrac{3\mathrm{e}^2}{4}$

✍ **Lời giải.**

$$I=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}(1+\ln x)x\,\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}x\ln x\,\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}x\,\mathrm{d}x=J+\frac{x^2}{2}\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}=J+\frac{\mathrm{e}^4}{2}-\frac{\mathrm{e}^2}{2}.$$

Tính J. Chọn $\begin{cases}u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}.\end{cases}$

Khi đó $J=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^4-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}-\dfrac{1}{4}x^2\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}=\dfrac{3\mathrm{e}^4}{4}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}.$

Vậy $I=\dfrac{3\mathrm{e}^4}{4}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{\mathrm{e}^4}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}=\dfrac{5\mathrm{e}^4}{4}-\dfrac{3\mathrm{e}^2}{4}$. □

(10) $I=\displaystyle\int_1^3\frac{1+\ln(x+1)}{x^2}\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\ln 3+\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases}u=\ln(x+1)+1\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=x^{-2}\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\dfrac{1}{x}.\end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{x}(\ln(x+1)+1)\Big|_1^3+\int_1^3\frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{3}+\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{3}+(\ln|x|-\ln|x+1|)\Big|_1^3\\ &= \frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{3}+\ln 3-\ln 4+\ln 2=-\frac{2}{3}\ln 2+\ln 3+\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□

(11) $I=\displaystyle\int_2^3 2x\ln(x-1)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=8\ln 2-\dfrac{7}{2}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases}u=\ln(x-1)\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=x^2.\end{cases}$

Khi đó $I=x^2\ln(x-1)\Big|_2^3-\displaystyle\int_2^3\frac{x^2}{x-1}\mathrm{d}x=9\ln 2-J$. Tính $J=\displaystyle\int_2^3\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|\right)\Big|_2^3=$

$\dfrac{7}{2}+\ln 2$.

Vậy $I=8\ln 2-\dfrac{7}{2}$. □

(12) $I=\displaystyle\int_{-1}^1(4x-5)\ln(2x+3)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=16-15\ln 5$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = \ln(2x+3) \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{2}{2x+3}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = (4x-5)\mathrm{d}x \Rightarrow v = 2x^2-5x. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= (2x^2-5x)\ln(2x+3)\Big|_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1}\frac{2x^2-5x}{2x+3}\mathrm{d}x \\ &= -3\ln 5 - 2\int_{-1}^{1}\left(x-4+\frac{12}{2x+3}\right)\mathrm{d}x = -3\ln 5 - 2\left(\frac{x^2}{2}-4x+6\ln|2x+3|\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= 16-15\ln 5. \end{aligned}$$

□

(13) $I = \displaystyle\int_0^1 x\ln(2+x^2)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = \ln\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = \ln(2+x^2) \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{2x}{x^2+2}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+2)\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{x^3}{x^2+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 3 - \int_0^1\left(x-\frac{2x}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln 3 - \left(\frac{x^2}{2}-\ln(x^2+2)\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} + \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

(14) $I = \displaystyle\int_0^1 (x-5)\ln(2x+1)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = 5 - \dfrac{57}{8}\ln 3$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = \ln(2x+1) \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{2}{2x+1}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = (x-5)\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} - 5x. \end{cases}$

Khi đó $I = \left(\dfrac{x^2}{2}-5x\right)\ln(2x+1)\Big|_0^1 - \displaystyle\int_0^1\frac{x^2-10x}{2x+1}\mathrm{d}x = -\frac{9}{2}\ln 3 - J.$

Tính $J = \displaystyle\int_0^1\frac{x^2-10x}{2x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{1}{2}x - \frac{21}{4} + \frac{21}{4(2x+1)}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{21}{4}x + \frac{21}{8}\ln|2x+1|\right)\Big|_0^1 = -5 + \frac{21}{8}\ln 3.$

Vậy $I = -\dfrac{9}{2}\ln 3 + 5 - \dfrac{21}{8}\ln 3 = 5 - \dfrac{57}{8}\ln 3.$ □

(15) $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x\ln(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = \ln(\mathrm{e}^x+1) \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \Rightarrow v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Khi đó $I = \mathrm{e}^x\ln(\mathrm{e}^x+1)\Big|_0^{\ln 2} - \displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x = 2\ln 3 - \ln 2 - J.$

Tính J. Đặt $t = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \ln 2 \Rightarrow t = 2. \end{cases}$

Khi đó $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{t}{t+1}\mathrm{d}t = \int_1^2\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = (t - \ln|t+1|)\Big|_1^2 = 1 - \ln 3 + \ln 2.$

Vậy $I = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1$. □

16 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{5}{3}\ln 2 - \ln 3$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = \ln(x+1) \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = (x+2)^{-2}\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\dfrac{1}{x+2}. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{x+2}\ln(x+1)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\ln 2 + \int_0^1\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\ln 2 + (\ln|x+1| - \ln|x+2|)\Big|_0^1 = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3. \end{aligned}$$

□

17 $I = \displaystyle\int_2^3 \ln[2 + x(x^2-3)]\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $I = -4\ln 2 + 5\ln 5 - 3$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = \ln(x^3-3x+2) \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+2}\mathrm{d}x = \dfrac{3(x+1)}{(x-1)(x+2)}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \Rightarrow v = x. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= x\ln(x^3-3x+2)\Big|_2^3 - 3\int_2^3 \frac{x^2+x}{(x-1)(x+2)}\mathrm{d}x \\ &= 3\ln 20 - 2\ln 4 - 3\int_2^3\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\right)\mathrm{d}x \\ &= 3\ln 20 - 2\ln 4 - \left(3x + 2\ln\frac{|x-1|}{|x+2|}\right)\Big|_2^3 \\ &= 3\ln 20 - 2\ln 4 - 3 - 2\ln\frac{8}{5} = -4\ln 2 + 5\ln 5 - 3. \end{aligned}$$

□

(18) $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(4x^2+8x+3)}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=-\frac{1}{8}\ln 15+\frac{1}{2}\ln 3+\ln\frac{25}{16}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u=\ln(4x^2+8x+3)\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{8x+8}{4x^2+8x+3}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\dfrac{1}{2(x+1)^2}. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2(x+1)^2}\ln(4x^2+8x+3)\Big|_0^1+\int\limits_0^1\frac{8x+8}{2(4x^2+8x+3)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{8}\ln 15+\frac{1}{2}\ln 3+\int\limits_0^1\frac{4}{(2x+1)(2x+3)(x+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{8}\ln 15+\frac{1}{2}\ln 3+4\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{8}\ln 15+\frac{1}{2}\ln 3+(2\ln|2x+1|+2\ln|2x+3|-4\ln|x+1|)\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{8}\ln 15+\frac{1}{2}\ln 3+\ln\frac{25}{16}. \end{aligned}$$

□

(19) $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log(3\sin x+\cos x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\log\frac{128\sqrt{2}}{27}-\frac{\pi}{4\ln 10}$

✍ **Lời giải.**

Với mọi $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, ta có

$$\frac{\log(3\sin x+\cos x)}{\sin^2 x}=\frac{\log[\sin x(3+\cot x)]}{\sin^2 x}=\frac{\log\sin x}{\sin^2 x}+\frac{\log(3+\cot x)}{\sin^2 x}.$$

Tính $I_1=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$:

Chọn $\begin{cases} u=\log\sin x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{\sin x\cdot\ln 10}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\cot x. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I_1 &= -\cot x \log \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^2 x}{\ln 10}\,\mathrm{d}x \\ &= \log\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\ln 10}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x \\ &= \log\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\ln 10}(-\cot x - x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \log\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\ln 10}\left(-\frac{\pi}{4} + 1\right). \end{aligned}$$

Tính $I_2 = \displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(3+\cot x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$:

Chọn $\begin{cases} u = \log(3+\cot x) \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{(3+\cot x)\ln 10}\,\mathrm{d}(\cot x) \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\cot x. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I_2 &= -\cot x \log(3+\cot x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\ln 10}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{3+\cot x}\,\mathrm{d}(\cot x) \\ &= \log 4 + \frac{1}{\ln 10}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{3}{3+\cot x}\right)\mathrm{d}(\cot x) \\ &= \log 4 + \frac{1}{\ln 10}(\cot x - 3\ln|3+\cot x|)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \log 4 + \frac{1}{\ln 10}\left(3\ln\frac{4}{3} - 1\right). \end{aligned}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \log\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{\ln 10}\left(-\dfrac{\pi}{4}+1\right) + \log 4 + \dfrac{1}{\ln 10}\left(3\ln\dfrac{4}{3} - 1\right) = \log\dfrac{128\sqrt{2}}{27} - \dfrac{\pi}{4\ln 10}$. □

Ví dụ 9. Tính $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = -1$

Lời giải: Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{\sin 2x}{2}. \end{cases}$

Do đó $I = \dfrac{(2x-1)\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1.$

Ví dụ 10. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\left(1+x\mathrm{e}^{-2x}\cos x\right)\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}-3}{2}+\dfrac{\pi}{2}$

Lời giải: Có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\left(1+x\mathrm{e}^{-2x}\cos x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+J=\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2}+J.$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x.\end{cases}$

Do đó $J=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}-1.$

Vậy $I=\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2}+\dfrac{\pi}{2}-1=\dfrac{\mathrm{e}^{\pi}-3}{2}+\dfrac{\pi}{2}.$

Ví dụ 11. Tính $I=\int\limits_1^2\left(2x^3+\ln x\right)x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=2\ln 2+\dfrac{233}{20}$

Lời giải: Có $I=\int\limits_1^2 2x^4\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x=I_1+I_2.$

$+\ I_1=\dfrac{2x^5}{5}\Big|_1^2=\dfrac{62}{5}.$

$+\ I_2=\int\limits_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2}{2}.\end{cases}$

Suy ra $I_2=\dfrac{x^2\ln x}{2}\Big|_1^2-\int\limits_1^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=2\ln 2-\dfrac{x^2}{4}\Big|_1^2=2\ln 2-\dfrac{3}{4}.$

Vậy $I=2\ln 2+\dfrac{233}{20}.$

Ví dụ 12. Tính $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\log_2(3\sin x+\cos x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{1}{\ln 2}\left(\ln 2\sqrt{2}+3\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Lời giải: Có $I=\dfrac{1}{\ln 2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(3\sin x+\cos x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u=\ln(3\sin x+\cos x)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{3\cos x-\sin x}{3\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\ v=-\cot x.\end{cases}$

Suy ra $\ln 2\cdot I=-\cot x\cdot\ln(3\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+J=\ln 2\sqrt{2}+J.$

Với $J=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 x-\sin x\cos x}{3\sin^2 x+\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{3\sin^2 x+\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{(3+\cot x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}$

$=-3\ln|3+\cot x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}=3\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi}{4}.$

Vậy $I=\dfrac{1}{\ln 2}\left(\ln 2\sqrt{2}+3\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right).$

Bài 3. Tính các tích phân sau:

① $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I=1$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases}u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\cos x.\end{cases}$

Khi đó $I=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$ □

② $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2x\cos x\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi+\sqrt{2}-2$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases}u=2x\Rightarrow \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=\sin x.\end{cases}$

Khi đó $I=2x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi+\sqrt{2}-2.$ □

③ $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(x+1)\sin 2x\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I=\dfrac{3}{4}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases}u=x+1\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\sin 2x\,\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x.\end{cases}$

Khi đó $I=-\dfrac{1}{2}(x+1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{4}.$ □

④ $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x-2)\cos x\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I=\dfrac{\pi}{2}-3$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = x-2 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \sin x. \end{cases}$

Khi đó $I = (x-2)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 2 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 3.$ □

⑤ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x\,\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{\pi}{2}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = x-2 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \sin x. \end{cases}$

Khi đó $I = (x+1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + 1 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$ □

⑥ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\sin x\,\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $I = 0$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = x-1 \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\cos x. \end{cases}$

Khi đó $I = -(x-1)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = -1 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$ □

⑦ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\sin x\,\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $I = 3$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = 2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = -\cos x. \end{cases}$

Khi đó $I = -(2x+1)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,\mathrm{d}x = 1 + 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3.$ □

⑧ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $I = -\dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Chọn $\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\sin 2x. \end{cases}$

Khi đó $I = \dfrac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$ □

Bài 4. Tính các tích phân sau:

① $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3-2x)\sin 2x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=1$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=3-2x\\ \mathrm{d}v=\sin 2x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-2\,\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{\cos 2x}{2}.\end{cases}$

Do đó $I=\left(-\dfrac{(3-2x)\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1.$ □

② $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}3x\cos x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{3\pi}{2}-3$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=3x\\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x.\end{cases}$

Do đó $I=3x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin x\,\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{2}+3\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{3\pi}{2}-3.$ □

③ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{1}{4}$

✍ **Lời giải.**

Có $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-x\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}I_1-\dfrac{1}{2}I_2.$

+ $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi^2}{8}.$

+ $I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{\sin 2x}{2}.\end{cases}$

Do đó $I_2=\dfrac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\cos 2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{1}{2}.$

Vậy $I=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{1}{4}.$ □

④ $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{4}$

✍ Lời giải.

Có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x+x\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}I_1+\dfrac{1}{2}I_2.$

$+\ I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi^2}{8}.$

$+\ I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{\sin 2x}{2}. \end{cases}$

Do đó $I_2=\dfrac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\cos 2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{1}{2}.$

Vậy $I=\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{4}.$ □

⑤ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x+2\cos^2 x\right)x\,\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $\dfrac{\pi^3}{81}+\dfrac{\pi^2}{18}+\dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}-\dfrac{3}{8}$

✍ Lời giải.

Có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x+2\cos^2 x\right)x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x^2+x+x\cos 2x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x^2+x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos 2x\,\mathrm{d}x=I_1+I_2.$

$+\ I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x^2+x\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\pi^3}{81}+\dfrac{\pi^2}{18}.$

$+\ I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos 2x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{\sin 2x}{2}. \end{cases}$

Do đó $I_2=\dfrac{x\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}+\dfrac{\cos 2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}-\dfrac{3}{8}.$

Vậy $I=\dfrac{\pi^3}{81}+\dfrac{\pi^2}{18}+\dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}-\dfrac{3}{8}.$ □

⑥ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $I=-\dfrac{1}{2}\ln 2+1-\dfrac{\pi}{4}$

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=\ln(\cos x) \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\dfrac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=-\tan x\,\mathrm{d}x \\ v=\tan x. \end{cases}$

Do đó $I=\tan x\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\ln 2+(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=-\dfrac{1}{2}\ln 2+1-\dfrac{\pi}{4}.$ □

⑦ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2+1\right)\sin x\,\mathrm{d}x.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **ĐS:** $I=\pi-1$

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x^2+1\\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x\\ v=-\cos x.\end{cases}$

Do đó $I=-\left(x^2+1\right)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,\mathrm{d}x=1+2J.$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x.\end{cases}$

Do đó $J=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{2}-1.$

Vậy $I=1+2\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)=\pi-1.$ □

⑧ $I=\int\limits_0^{\pi}x(x-\sin x)\,\mathrm{d}x.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **ĐS:** $I=\dfrac{\pi^3}{3}-\pi$

✍ **Lời giải.**

Có $I=\int\limits_0^{\pi}x(x-\sin x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}-J=\dfrac{\pi^3}{3}-J.$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-\cos x.\end{cases}$

Do đó $J=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x=\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}=\pi.$

Vậy $I=\dfrac{\pi^3}{3}-\pi.$ □

⑨ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos 3x)x\,\mathrm{d}x.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **ĐS:** $I=\dfrac{\pi^3}{24}-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{9}$

✍ **Lời giải.**

Có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos 3x)x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 3x\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+J=\dfrac{\pi^3}{24}+J.$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos 3x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{\sin 3x}{3}.\end{cases}$

Do đó $J = \dfrac{x\sin 3x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\cos 3x}{9}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{9}$.

Vậy $I = \dfrac{\pi^3}{24} - \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{9}$. □

(10) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin 2x)\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{\pi^2}{32} + \dfrac{1}{4}$

✍ **Lời giải.**

Có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{32} + J$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{\cos 2x}{2}. \end{cases}$

Do đó $J = -\dfrac{x\cos 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $I = \dfrac{\pi^2}{32} + \dfrac{1}{4}$. □

(11) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(x - 2\sin x)\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{\pi}{2} - 2$

✍ **Lời giải.**

Có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(x-2\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,\mathrm{d}x = J + \dfrac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = J - 1$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x. \end{cases}$

Do đó $J = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2} - 1$.

Vậy $I = \dfrac{\pi}{2} - 2$. □

(12) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin x)^2\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{\pi^3}{24} + \dfrac{\pi}{4} - 2$

✍ **Lời giải.**

Có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-\sin x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 + \sin^2 x\right)\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x = I_1 - 2I_2$.

$+\ I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 + \sin^2 x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi^3}{24} + \dfrac{\pi}{4}$.

$+\ I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x. \end{cases}$

Do đó $I_2 = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Vậy $I = \dfrac{\pi^3}{24} + \dfrac{\pi}{4} - 2.$ □

(13) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I = \pi - 2$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi^2}{4} & \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Vậy $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos t\,\mathrm{d}t.$

Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ \mathrm{d}v = \cos t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t \\ v = \sin t. \end{cases}$

Suy ra $I = 2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\,\mathrm{d}t = \pi + 2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$ □

(14) $I = \int\limits_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I = 2\pi$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow t = 0 \\ x = \pi^2 & \Rightarrow t = \pi. \end{cases}$

Vậy $I = \int\limits_0^{\pi} 2t\sin t\,\mathrm{d}t.$

Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ \mathrm{d}v = \sin t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t \\ v = -\cos t. \end{cases}$

Suy ra $I = -2t\cos t\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} 2\cos t\,\mathrm{d}t = 2\pi + 2\sin t\Big|_0^{\pi} = 2\pi.$ □

(15) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I = \dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Có $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\cos x\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=1+\cos x\Rightarrow\cos x=t-1\Rightarrow-\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t.$

Đổi cận $\begin{cases}x=0 & \Rightarrow t=2\\ x=\dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow t=1.\end{cases}$

Vậy $I=-\displaystyle\int\limits_2^1 2(t-1)\ln t\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^2(2t-2)\ln t\,\mathrm{d}t.$

Đặt $\begin{cases}u=\ln t\\ \mathrm{d}v=(2t-2)\,\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t\\ v=t^2-2t.\end{cases}$

Suy ra $I=\left(t^2-2t\right)\ln t\Big|_1^2-\displaystyle\int\limits_1^2\frac{t^2-2t}{t}\,\mathrm{d}t=-\int\limits_1^2(t-2)\,\mathrm{d}t=-\left(\frac{t^2}{2}-2t\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}.$ □

⑯ $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\ln\left(1+\cos^2 x\right)\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $I=2\ln 2-1$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+\cos^2 x\Rightarrow\mathrm{d}t=-2\cos x\sin x\,\mathrm{d}x=-\sin 2x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases}x=0 & \Rightarrow t=2\\ x=\dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow t=1.\end{cases}$

Vậy $I=-\displaystyle\int\limits_2^1\ln t\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\ln t\,\mathrm{d}t.$

Đặt $\begin{cases}u=\ln t\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t\\ v=t.\end{cases}$

Suy ra $I=t\ln t\Big|_1^2-\displaystyle\int\limits_1^2\mathrm{d}t=2\ln 2-t\Big|_1^2=2\ln 2-1.$ □

Bài 5. Tính các tích phân sau:

① $I=\displaystyle\int\limits_0^1(1-x)\left(2+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}+\dfrac{1}{4}$

✍ **Lời giải.**

Có $I=\displaystyle\int\limits_0^1(2-2x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1(1-x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2.$

+ $I_1=\left(2x-x^2\right)\Big|_0^1=1.$

+ $I_2=\displaystyle\int\limits_0^1(1-x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = 1-x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}. \end{cases}$

Suy ra $I_2 = \dfrac{(1-x)\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\Big|_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} - \dfrac{3}{4}.$

Vậy $I = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} + \dfrac{1}{4}.$ □

② $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x(x - \sin x)\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{\pi^3}{3} - \pi$

✍ **Lời giải.**

Có $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = I_1 - I_2.$

+ $I_1 = \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \dfrac{\pi^3}{3}.$

+ $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x. \end{cases}$

Suy ra $I_2 = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$

Vậy $I = \dfrac{\pi^3}{3} - \pi.$ □

③ $I = \displaystyle\int_1^2 \dfrac{x^3 - 2\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = \ln 2 + \dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Có $I = \displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{d}x - 2\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = I_1 - 2I_2.$

+ $I_1 = \dfrac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \dfrac{3}{2}.$

+ $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Suy ra $I_2 = -\dfrac{\ln x}{x}\Big|_1^2 + \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{1}{x}\Big|_1^2 = -\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{1}{2}.$

Vậy $I = \dfrac{3}{2} + \ln 2 - 1 = \ln 2 + \dfrac{1}{2}.$ □

④ $I = \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1 + x^2\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = \mathrm{e}^2 + \ln 2$

✍ **Lời giải.**

Có $I=\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

$+\ I_1=\ln x\Big|_1^2=\ln 2$.

$+\ I_2=\displaystyle\int\limits_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x.\end{cases}$

Suy ra $I_2=x\mathrm{e}^x\Big|_1^2-\displaystyle\int\limits_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\mathrm{e}^x\Big|_1^2=\mathrm{e}^2$.

Vậy $I=\mathrm{e}^2+\ln 2$. □

⑤ $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$..... **ĐS:** $I=2-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

✍ **Lời giải.**

Có $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{d}x+\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

$+\ I_1=x\Big|_0^1=1$.

$+\ I_2=\displaystyle\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-\mathrm{e}^{-x}.\end{cases}$

Suy ra $I_2=-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1+\displaystyle\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\mathrm{e}}-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1=1-\frac{2}{\mathrm{e}}$.

Vậy $I=2-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. □

⑥ $I=\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{1+\ln(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x$..... **ĐS:** $I=\dfrac{2}{3}+\ln 3-\dfrac{2}{3}\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Có $I=\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

$+\ I_1=-\dfrac{1}{x}\Big|_1^3=\dfrac{2}{3}$.

$+\ I_2=\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{x}.\end{cases}$

Suy ra $I_2 = -\dfrac{1}{x}\ln(x+1)\Big|_1^3 + \displaystyle\int_1^3 \dfrac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\ln 2 + \int_1^3 \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\ln 2 + \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|\Big|_1^3$

$= \ln 3 - \dfrac{2}{3}\ln 2.$

Vậy $I = \dfrac{2}{3} + \ln 3 - \dfrac{2}{3}\ln 2.$ □

⑦ $I = \displaystyle\int_0^1 x\left(\mathrm{e}^x + \dfrac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $I = 3 - 2\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Có $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \dfrac{2x}{x+1}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$

$+\ I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Suy ra $I_1 = x\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 1.$

$+\ I_2 = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{2x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2 - \dfrac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x = (2x - 2\ln|x+1|)\Big|_0^1 = 2 - 2\ln 2.$

Vậy $I = 3 - 2\ln 2.$ □

⑧ $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^x + \sqrt{3x^2+1}\right)x\,\mathrm{d}x.$ . . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{16}{9}$

✍ **Lời giải.**

Có $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$

$+\ I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

Suy ra $I_2 = x\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 1.$

$+\ I_2 = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \sqrt{3x^2+1} \Rightarrow t^2 = 3x^2+1 \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = 3x\,\mathrm{d}x \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \dfrac{t}{3}\mathrm{d}t.$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 & \Rightarrow t = 2 \end{cases}.$

Suy ra $I_2 = \int\limits_1^2 \dfrac{t^2}{3}\,\mathrm{d}t = \dfrac{t^3}{9}\Big|_1^2 = \dfrac{7}{9}$.

Vậy $I = 1 + \dfrac{7}{9} = \dfrac{16}{9}$. □

⑨ $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \cos^2 x\right)\sin x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{4}{3}$

✍ **Lời giải.**

Có $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin x\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

+ $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\cos x. \end{cases}$

Suy ra $I_2 = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

+ $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow t = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

Suy ra $I_2 = -\int\limits_1^0 t^2\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $I = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$. □

⑩ $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\ln x\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = \dfrac{\mathrm{e}^2 + 3}{4}$

✍ **Lời giải.**

Có $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

+ $I_1 = \int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Suy ra $I_1 = \dfrac{x^2\ln x}{2}\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{x^2}{4}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}$.

$I_2 = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases} x = 1 & \Rightarrow t = 0 \\ x = \mathrm{e} & \Rightarrow t = 1. \end{cases}$

Suy ra $I_2 = \int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t = \dfrac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}.$

Vậy $I = \dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^2+3}{4}.$ □

(11) $I = \int\limits_0^1 x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I = \dfrac{1}{2}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 & \Rightarrow t = 1. \end{cases}$

Suy ra $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = \mathrm{e}^t. \end{cases}$

Suy ra $I = \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^t\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^t}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}.$ □

(12) $I = \int\limits_0^1 x^5\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I = \dfrac{1}{3}$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x^3 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 & \Rightarrow t = 1. \end{cases}$

Suy ra $I = \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = \mathrm{e}^t. \end{cases}$

Suy ra $I = \dfrac{1}{3}t\mathrm{e}^t\Big|_0^1 - \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}}{3} - \dfrac{\mathrm{e}^t}{3}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3}.$ □

(13) $I = \int\limits_0^1 \left(8x^3 - 2x\right)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$ ..... **ĐS:** $I = 5 - \mathrm{e}$

✍ **Lời giải.**

Có $I = 8\int\limits_0^1 x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 8I_1 - 2I_2$.

+ $I_1 = \int\limits_0^1 x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 & \Rightarrow t = 1. \end{cases}$

Suy ra $I_1 = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = \mathrm{e}^t. \end{cases}$

Suy ra $I_1 = \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^t\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^t}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}$.

+ $I_2 = \int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 & \Rightarrow t = 1. \end{cases}$

Suy ra $I_2 = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t\Big|_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.

Vậy $I = 4 - \mathrm{e} + 1 = 5 - \mathrm{e}$. □

(14) $I = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I = 2\mathrm{e} - 4$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 & \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 & \Rightarrow t = 1. \end{cases}$

Suy ra $I = 2\int\limits_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u = t^2 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t \\ v = \mathrm{e}^t. \end{cases}$

Do đó $I = 2t^2\mathrm{e}^t\Big|_0^1 - 4\int\limits_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e} - 4J$.

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = \mathrm{e}^t. \end{cases}$

Suy ra $J = t\mathrm{e}^t\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - \mathrm{e}^t\Big|_0^1 = 1$.

Vậy $I = 2\mathrm{e} - 4$. □

(15) $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi^3}{27}}\sin\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=-\dfrac{\pi^2}{6}+\pi\sqrt{3}-3$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{x}\Rightarrow t^3=x\Rightarrow 3t^2\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases}x=0 & \Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi^3}{27} & \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

Suy ra $I=3\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}t^2\sin t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=t^2\\ \mathrm{d}v=\sin t\,\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2t\,\mathrm{d}t\\ v=-\cos t.\end{cases}$

Suy ra $I=-3t^2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+6\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}t\cos t\,\mathrm{d}t=-\dfrac{\pi^2}{6}+6J$.

Đặt $\begin{cases}u=t\\ \mathrm{d}v=\cos t\,\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=\sin t.\end{cases}$

Suy ra $J=t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin t\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}+\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi\sqrt{3}-3}{6}$.

Vậy $I=-\dfrac{\pi^2}{6}+\pi\sqrt{3}-3$. □

(16) $I=\displaystyle\int\limits_{1-\frac{\pi^2}{4}}^{1}\cos\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\pi-2$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=1-x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases}x=1-\dfrac{\pi^2}{4} & \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\\ x=1 & \Rightarrow t=0.\end{cases}$

Suy ra $I=-2\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}t\cos t\,\mathrm{d}t=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=t\\ \mathrm{d}v=\cos t\,\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=\sin t.\end{cases}$

Suy ra $I=2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=\pi+2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$. □

(17) $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=1-2\ln 2$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6} & \Rightarrow t=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{2} & \Rightarrow t=1. \end{cases}$

Suy ra $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln t \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ v=-\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

Suy ra $I=-\dfrac{\ln t}{t}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}+\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=2\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=1-2\ln 2.$ □

18 $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. . . . . **ĐS:** $I=\dfrac{\sqrt{3}\ln 3}{2}-\sqrt{3}+1$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\tan x \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4} & \Rightarrow t=1 \\ x=\dfrac{\pi}{3} & \Rightarrow t=\sqrt{3}. \end{cases}$

Suy ra $I=\displaystyle\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\ln t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln t \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ v=t. \end{cases}$

Suy ra $I=t\ln t\Big|_{1}^{\sqrt{3}}-\displaystyle\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\mathrm{d}t=\sqrt{3}\ln\sqrt{3}-t\Big|_{1}^{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\ln 3}{2}-\sqrt{3}+1.$ □

B CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 NHẬN BIẾT

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_{0}^{6}f(x)\,\mathrm{d}x=7,\int\limits_{3}^{10}f(x)\,\mathrm{d}x=8,\int\limits_{3}^{6}f(x)\,\mathrm{d}x=9$. Giá trị của $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{10}f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=5$. **B.** $I=6$. **C.** $I=7$. **D.** $I=8$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\limits_{3}^{10}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{3}^{6}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{6}^{10}f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_{6}^{10}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{3}^{10}f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{3}^{6}f(x)\,\mathrm{d}x=8-9=-1$

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{10}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{6}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{6}^{10}f(x)\,\mathrm{d}x=7-1=6.$

Chọn đáp án B □

Câu 2. Cho các hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_a^a kf(x)\,\mathrm{d}x=0$.

B. $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=x\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Dựa vào các đáp án ta dễ dàng nhận thấy các đáp án A, C, D đúng, đáp án B sai.

Chọn đáp án B □

Câu 3. Cho $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<I<\dfrac{1}{3}$.

B. $\dfrac{1}{3}<I<\dfrac{1}{2}$.

C. $\dfrac{1}{2}<I<\dfrac{2}{3}$.

D. $\dfrac{2}{3}<I<1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\,\mathrm{d}(\cos x)=-\dfrac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{1}{3}\left(\cos^3\dfrac{\pi}{3}-\cos^3 0\right)=\dfrac{7}{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\ln 2}\left(\mathrm{e}^{4x}+1\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{15}{4}+\ln 2$.

B. $I=4+\ln 2$.

C. $I=\dfrac{17}{4}+\ln 2$.

D. $I=\dfrac{15}{2}+\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\left(\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}+x\right)\Big|_0^{\ln 2}=\left(\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4\ln 2}+\ln 2\right)-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}+\ln 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 5. Biết $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x=3$, $\int\limits_2^5 g(x)\mathrm{d}x=9$. Tích phân $\int\limits_2^5[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 10.

B. 3.

C. 6.

D. 12.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_2^5[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_2^5 g(x)\mathrm{d}x=3+9=12$.

Chọn đáp án D □

Câu 6. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

B. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5}{4}$.

C. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

D. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,\mathrm{d}x=F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tích phân $\int\limits_1^2 (x+3)^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 61. **B.** $\dfrac{61}{3}$. **C.** $\dfrac{61}{9}$. **D.** 4.

Lời giải.

$$\int\limits_1^2 (x+3)^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x+3)^2\,\mathrm{d}(x+3) = \frac{(x+3)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{61}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số bất kỳ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. **B.** $\int\limits_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Theo tính chất trong sách giáo khoa thì $\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ sai.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2;3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2;3)$. Tính $I = \int\limits_{-1}^2 [f(x)+2x]\,\mathrm{d}x$, biết $F(-1)=1$, $F(2)=4$.

A. $I=6$. **B.** $I=10$. **C.** $I=3$. **D.** $I=9$.

Lời giải.

$$I = \int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^2 2x\,\mathrm{d}x = F(x)|_{-1}^2 + x^2\Big|_{-1}^2 = F(2)-F(-1)+4-1 = 4-1+3 = 6.$$

Chọn đáp án A □

Câu 10. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b (f(x)\cdot g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải.

Theo tính chất của tích phân ta có

$$\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và h, k là các hằng số. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_a^b [hf(x)-kg(x)]\,\mathrm{d}x = h\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - k\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

B. $\int\limits_b^a [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^b [h+kf(x)]\,\mathrm{d}x = h+k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

D. $\int\limits_a^b [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = f(x)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

Theo tính chất của tích phân ta có

$$\int\limits_a^b [hf(x)-kg(x)]\,\mathrm{d}x = h\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - k\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án A □

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$.

Tính $I=\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\dfrac{7}{2}$.

✍ **Lời giải.**

$I=\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^2 = f(2)-f(1)=1.$

Chọn đáp án A □

Câu 13. Tích phân $\int\limits_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+3}$ bằng

A. $\dfrac{16}{225}$. **B.** $\log\dfrac{5}{3}$. **C.** $\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{15}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+3} = \ln|x+3|\Big|_0^2 = \ln|2+3|-\ln|0+3| = \ln\dfrac{5}{3}.$

Chọn đáp án C □

Câu 14. Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int\limits_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$, $\int\limits_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$.

Tính $\int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 10.$

Tương tự $\int\limits_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow 2\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6.$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} u+3v=10 \\ 2u-v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases}$, trong đó $u=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$, $v=\int\limits_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 g(x)\mathrm{d}x=4+2=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho $a<b<c$, $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=12$, $\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x=4$. Khi đó giá trị của $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x=12-4=8$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Tính tích phân $\int\limits_0^\pi \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^\pi \sin 3x\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^\pi=-\dfrac{1}{3}(-1-1)=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $I=\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\dfrac{7}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_1^2=f(2)-f(1)=2-1=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho $\int\limits_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_{-2}^4 f(t)\mathrm{d}t=-4$. Tính $\int\limits_2^4 f(y)\mathrm{d}y$.

A. $I=5$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int\limits_{-2}^4 f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x$, $\int\limits_2^4 f(y)\mathrm{d}y=\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int\limits_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int\limits_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x=-4-1=-5$.

Vậy $\int\limits_2^4 f(y)\mathrm{d}y=-5$.

Chọn đáp án D □

Câu 19. Tích phân $I=\int\limits_0^{2019}2^x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $2^{2019}-1$. **B.** $\dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}$. **C.** $\dfrac{2^{2019}}{\ln 2}$. **D.** 2^{2019}.

✍ **Lời giải.**

$I=\int\limits_0^{2019}2^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^{2019}=\dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 20. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=-1$. Giá trị của $\int\limits_0^2[f(x)-5g(x)+x]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $I=\int\limits_0^2[f(x)-5g(x)+x]\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-5\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x$.

Do đó : $I=3-5(-1)+\dfrac{1}{2}(2^2-0^2)=10$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=-2$, khi đó $\int\limits_0^2[2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int\limits_0^2[2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=2\cdot 3-(-2)=8$.

Chọn đáp án C □

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $(a<b)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-2\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 23. Cho các hằng số a, b, $k\,(k\neq 0)$ và hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A. $\int\limits_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\neq\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

✍ **Lời giải.**

Mệnh đề $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ là mệnh đề sai vì $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 5$. **B.** $I = -3$. **C.** $I = 3$. **D.** $P = 4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + 4 = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25. Giá trị của $\int\limits_0^1 \left(2019x^{2018} - 1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $2^{2017} + 1$. **C.** $2^{2017} - 1$. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int\limits_0^1 \left(2019x^{2018} - 1\right)\mathrm{d}x = \left(x^{2019} - x\right)\Big|_0^1 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho $\int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tích phân $\int\limits_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

$\int\limits_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 + 1 = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $\ln 2 - 1$. **B.** $-\ln 2$. **C.** $\ln 2$. **D.** $1 - \ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Tích phân $I = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x = x\Big|_0^2 = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29. Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** π.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị của tích phân $L = \int\limits_0^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $L = 4$. **B.** $L = -1$. **C.** $L = -4$. **D.** $L = 1$.

✍ **Lời giải.**

$$L = \int\limits_0^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2\cdot 2 - 3 = 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 31. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 - 1 = 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Giá trị tích phân $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$ bằng

A. $\log 2$. **B.** $\ln 2$. **C.** 1. **D.** $-\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1||_0^1 = \ln 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 33. Tính $I = \int\limits_0^1 (3x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int\limits_0^1 (3x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x = \left(x^3 - x^2 + 3x\right)\Big|_0^1 = 3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 34. Khẳng định nào trong các khẳng định sau **đúng** với mọi hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kì thuộc K?

A. $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$ **B.** $\int\limits_a^b [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$.

D. $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.

✍ **Lời giải.**

Một trong các tính chất của tích phân là $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

A. $F(9) = -6$. **B.** $F(9) = 6$. **C.** $F(9) = 12$. **D.** $F(9) = -12$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 9 \Leftrightarrow F(9) - F(0) = 9 \Leftrightarrow F(9) = 9 + F(0) = 9 + 3 = 12$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\log 2$. **B.** 1. **C.** $\ln 2$. **D.** $-\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 37. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^a kf(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

B. $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Biểu thức $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sai, vì một hàm khác hằng số không thể đưa ra ngoài dấu tích phân.

Chọn đáp án B □

Câu 38. Cho $F(x) = \left(ax^2+bx-c\right)\mathrm{e}^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(2018x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tính $T = a+2b+4c$.

A. $T = 1011$. **B.** $T = -3035$. **C.** $T = 1007$. **D.** $T = -5053$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$f(x) = F'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{2x} + 2\left(ax^2+bx-c\right)\mathrm{e}^{2x} = \left[2ax^2+(2a+2b)x+(b-2c)\right]\mathrm{e}^2.$$

Suy ra

$$\begin{cases} 2a & =2018 \\ 2a+2b & =-3 \\ b-2c & =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1009 \\ b=-\dfrac{2021}{2} \\ c=-\dfrac{2023}{4}. \end{cases}$$

Vậy $T=a+2b+4c=-3035$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(1)-f(0)=2$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 [f'(x)-\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1-\mathrm{e}$. **B.** $1+\mathrm{e}$. **C.** $3-\mathrm{e}$. **D.** $3+\mathrm{e}$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \left(f'(x)-\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= f(x)\Big|_0^1 - \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = f(1)-f(0)-(\mathrm{e}-\mathrm{e}^0) \\ &= 3-\mathrm{e}. \end{aligned}$$

Vậy $I=3-\mathrm{e}$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^2 2g(x)\,\mathrm{d}x=8$. Khi đó $\int\limits_1^2 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x=4 \Rightarrow \int\limits_1^2 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Cho tích phân $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=32$. Tính tích phân $J=\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. 32. **B.** 64. **C.** 8. **D.** 16.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$. Với $x=0$ thì $t=0$, $x=2$ thì $t=4$.

Suy ra $\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)dt=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot 32=16$.

Chọn đáp án D □

Câu 42. Cho tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $J=\int\limits_0^2 [3f(x)-2]\,\mathrm{d}x$.

A. $J=6$. **B.** $J=2$. **C.** $J=8$. **D.** $J=4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $J=\int\limits_0^2 [3f(x)-2]\,\mathrm{d}x=3\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-2\int\limits_0^2 \mathrm{d}x=3\cdot 2-(2x)\Big|_0^2=6-4=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Cho $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 7$, khi đó $\int_0^2 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** -18. **C.** 24. **D.** 10.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_0^2 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3+3\times 7 = 24.$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Tích phân $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$. **B.** $\dfrac{2}{3}\ln 2$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln 4 - \frac{1}{3}\ln 1 = \frac{2}{3}\ln 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$, $\int_4^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $\int_1^{12} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 17$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 11$. **D.** $I = 7$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 9-5 = 4.$$

Suy ra

$$\int_1^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_4^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = 4+3 = 7.$$

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 6$ và $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 18.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 6+3 = 9.$

Chọn đáp án C □

Câu 47. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và $a,b,c,b+c \in (\alpha;\beta)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo các tính chất của tích phân, ta suy ra

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là khẳng định đúng.

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là khẳng định đúng.

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ là khẳng định đúng vì

$$\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Vậy $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tích phân $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + (-1) = 1$.

Vậy $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 49. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 7$, khi đó $\int\limits_0^2 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 10. **C.** 24. **D.** -18.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^2 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 + 3 \cdot 7 = 24$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 50. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$, khi đó $\int\limits_0^2 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^2 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 3-(-2) = 8.$

Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a,b,c\in K$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$ **B.** $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t.$ **D.** $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

✍ Lời giải.

Theo lý thuyết, ta có $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án B □

Câu 52. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$, giá trị của $\int\limits_0^1 [f(x)+2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** -1. **C.** 5. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^1 [f(x)+2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3+2(-2) = -1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-6$. **B.** $I=6$. **C.** $I=4$. **D.** $I=-4$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = -4.$

Chọn đáp án D □

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$. Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = b-a.$ **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a)-F(b).$

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = a-b.$ **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$

✍ Lời giải.

Áp dụng định nghĩa của tích phân ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$

Chọn đáp án D □

Câu 55. Giá trị của $\int\limits_0^1 (2019x^{2018}-1)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $2^{2017}+1$. **C.** $2^{2017}-1$. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 (2019x^{2018}-1)\,\mathrm{d}x = \left(x^{2019}-x\right)\Big|_0^1 = 0.$

Chọn đáp án A □

Câu 56. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x.$

A. $I = \ln 3 - 1$. **B.** $I = \ln\sqrt{3}$. **C.** $I = \ln 2 + 1$. **D.** $I = \ln 2 - 1$.

✍ Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}.$

Chọn đáp án B □

Câu 57. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{-1}^0 (2x+1)\,\mathrm{d}x.$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có $I = (x^2+x)\Big|_{-1}^0 = 0.$

Chọn đáp án A □

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K và các hằng số $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}$. **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

✍ Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Chọn đáp án D □

Câu 59. Cho hai số thực a, b tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$. **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a)-F(b)$.

C. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$. **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)+F(a)$.

✍ Lời giải.

Theo công thức lý thuyết thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$

Chọn đáp án A □

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b(a < b)$ được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b \pi|f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Do định nghĩa ta có $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(2)=2$, $f(3)=5$; hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $[2;3]$. Khi đó $\int\limits_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 10. **D.** 7.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức lý thuyết ta có $\int\limits_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_2^3=f(3)-f(2)=5-2=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ biết $F(0)=2$ và $F(1)=5$.

A. $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-3$. **B.** $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=7$. **C.** $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. **D.** $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)=5-2=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=1$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=9$. Giá trị của $f(3)$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_0^3 \Leftrightarrow 9=f(3)-f(0)\Leftrightarrow f(3)=9+f(0)=10$.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Tích phân $I=\int\limits_0^1 \dfrac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=2\ln 2$. **B.** $I=2\ln 3$. **C.** $I=\ln 2$. **D.** $I=\ln 3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^1 \dfrac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\ln|2x+1|\Big|_0^1=\ln 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Kí hiệu z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+1=0$. Giá trị của z_1+z_2 bằng

A. i. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $-i$.

✍ **Lời giải.**

Áp dụng định lý Vi-ét ta có $z_1+z_2=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=3$. **D.** $I=4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=1+4=5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=9$, $\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính giá trị của $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=36$. **C.** $I=\dfrac{9}{4}$. **D.** $I=13$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=9+4=13$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=2$ thì tích phân $\int\limits_0^3[x-3f(x)]\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^3[x-3f(x)]\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 x\mathrm{d}x-3\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2\Big|_0^3-6=\dfrac{9}{2}-6=-\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Cho $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=6$ và $\int\limits_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x=8$. Giá trị của $\int\limits_1^5[4f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 10.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^5[4f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=4\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x=4\cdot 6-8=16$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{-1}^5[2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=-5$; $\int\limits_{-1}^5[3f(x)-5g(x)]\,\mathrm{d}x=21$. Tính $\int\limits_{-1}^5[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. -5. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

Đặt $I_1=\int\limits_{-1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$, $I_2=\int\limits_{-1}^{5}g(x)\mathrm{d}x$. Ta có

$$\int\limits_{-1}^{5}[2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=-5\Leftrightarrow 2\int\limits_{-1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x+3\int\limits_{-1}^{5}g(x)\,\mathrm{d}x=-5\Rightarrow 2I_1+3I_2=-5.$$
$$\int\limits_{-1}^{5}[3f(x)-5g(x)]\,\mathrm{d}x=21\Leftrightarrow 3\int\limits_{-1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x-5\int\limits_{-1}^{5}g(x)\,\mathrm{d}x=21\Rightarrow 3I_1-5I_2=21.$$

Từ đó suy ra $I_1=2$, $I_2=-3$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{5}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{5}g(x)\,\mathrm{d}x=I_1+I_2=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 71. Kết quả của tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=1$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Cho các số thực a, b $(a<b)$. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thì

A. $\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=f'(a)-f'(b)$. **B.** $\int\limits_{a}^{b}f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$.

C. $\int\limits_{a}^{b}f'(x)\mathrm{d}x=f(a)-f(b)$. **D.** $\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=f'(b)-f'(a)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{a}^{b}f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_a^{b}=f(b)-f(a)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 73. Cho $\int\limits_{1}^{5}h(x)\mathrm{d}x=4$ và $\int\limits_{1}^{7}h(x)\mathrm{d}x=10$, khi đó $\int\limits_{5}^{7}h(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{1}^{7}h(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{5}h(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{5}^{7}h(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_{5}^{7}h(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{7}h(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{5}h(x)\mathrm{d}x=10-4=6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 74. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(b)+F(a)$. **B.** $\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức Newton-Leibniz ta có: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Chọn đáp án B □

Câu 75. Cho $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4$, khi đó $\int\limits_1^3 [4f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 19.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^3 [4f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4 \cdot 3 - 4 = 8$.

Chọn đáp án B □

Câu 76. Cho $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^{-1} [2f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -7$. **B.** $I = 7$. **C.** $I = -14$. **D.** $I = 14$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I = \int\limits_1^{-1} [2f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^1 [2f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x = 5\int\limits_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 7.$$

Chọn đáp án B □

Câu 77. Biết $\int\limits_{2018}^{2019} f(x)\,\mathrm{d}x = -2$, $\int\limits_{2018}^{2019} g(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tích phân $\int\limits_{2018}^{2019} [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -2. **C.** 22. **D.** -10.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{2018}^{2019} [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{2018}^{2019} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{2018}^{2019} g(x)\,\mathrm{d}x = -4 - 6 = -10$.

Chọn đáp án D □

Câu 78. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $a < c < b$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với k là hằng số.

C. $\int\limits_a^b \dfrac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo tính chất của tích phân xác định ta có

$$\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với k là hằng số.

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Ta không có tính chất $\int\limits_a^b \dfrac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$

Chọn đáp án C □

Câu 79. Biết $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 9, \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -5$. Tính $K = \int\limits_1^3 [2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $K = 3$. **B.** $K = 33$. **C.** $K = 4$. **D.** $K = 14$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $K = 2\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 9 - 3\cdot(-5) = 33.$

Chọn đáp án B □

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) + F(a)$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F'(b) - F'(a)$.

✍ **Lời giải.**

Theo định nghĩa tích phân xác định ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$

Chọn đáp án B □

Câu 81. Tính $I = \int\limits_1^3 \left(4x^3 + 3x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 92$. **B.** $I = 68$. **C.** $I = -68$. **D.** $I = -92$.

✍ **Lời giải.**

$I = \int\limits_1^3 \left(4x^3 + 3x\right)\mathrm{d}x = \left(x^4 + \dfrac{3}{2}x^2\right)\Big|_1^3 = 92.$

Chọn đáp án A □

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, $f(1) = 15$, $f(4) = 8$. Tính $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x$

A. $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 7$. **B.** $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 3$. **C.** $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 23$. **D.** $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = -7$.

✍ **Lời giải.**

$$\int_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(1) = 8 - 15 = -7.$$

Chọn đáp án D □

Câu 83. Tích phân $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2}$ bằng

A. $\dfrac{16}{225}$. **B.** $\log\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{15}$. **D.** $\ln\dfrac{4}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln|x+2||_1^2 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 84. Cho $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị của tích phân $L = \int_0^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $L = 4$. **B.** $L = -1$. **C.** $L = -4$. **D.** $L = 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $L = \int_0^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 2 - 3 = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 85. Tích phân $\int_0^2 \left(x^2 - 3x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{-10}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** 12.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_0^2 \left(x^2 - 3x\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \dfrac{-10}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Tính tính phân $\int_0^1 x(x+1)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_0^1 x(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+x)\,\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án A □

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 6$, $\int_0^1 (2x-2)f'(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. -3. **B.** -9. **C.** 3. **D.** 6.

✍ **Lời giải.**

Gọi $I = \int_0^1 (2x-2)f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x-2 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$ ta chọn $\begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

$$I = (2x-2)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 6 = 2f(0) - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) - 3 = 3.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 88. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 36$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = 8$.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + 6 = 8.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0;2]$ và $f(0) = -1$, biết $\int_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $f(2)$.

A. $f(2) = 2$. **B.** $f(2) = 6$. **C.** $f(2) = 4$. **D.** $f(2) = 5$.

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^2 = f(2) - f(0) = 5 \Leftrightarrow f(2) = 4.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 90. Giả sử tích phân $I = \int_1^6 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \ln M$, tìm M.

A. $M = 4{,}33$. **B.** $M = 13$. **C.** $M = \frac{13}{3}$. **D.** $M = \sqrt{\frac{13}{3}}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int_1^6 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_1^6 = \frac{1}{2}\ln 13 - \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Chọn đáp án D ☐

Câu 91. Cho biết $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\int_2^5 g(t)\,\mathrm{d}t = 9$. Tính $\int_2^5 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. -6. **B.** -15. **C.** 12. **D.** 21.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_2^5 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 - 2\cdot 9 = -15$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 92. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây.

A. $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a<c<b)$. **D.** $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Khẳng định "$\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$" là khẳng định sai.

Chọn đáp án A □

Câu 93. Tích phân $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. e. **B.** $\mathrm{e}+1$. **C.** 1. **D.** $\mathrm{e}-1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\big|_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 94. Tính $I = \int\limits_0^{2018} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \mathrm{e}^{2018}-1$. **B.** $I = \mathrm{e}^{2019}-1$. **C.** $I = \mathrm{e}^{2019}$. **D.** $I = \mathrm{e}^{2018}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_0^{2018} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\big|_0^{2018} = \mathrm{e}^{2018}-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 95. Tính $I = \int\limits_0^2 2018\,\mathrm{d}x$.

A. 4036. **B.** 2018. **C.** 0. **D.** 4026.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = 2018\,x\big|_0^2 = 4036$.

Chọn đáp án A □

Câu 96. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = x\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Khẳng định **sai** là $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = x\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 97. Tính tích phân $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1}$.

A. $\ln\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\log\dfrac{3}{2}$. **D.** $\ln 6$.

✍ **Lời giải.**

Tính tích phân $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_1^2 = \ln\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Tích phân $\displaystyle\int_4^8 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$ bằng

A. $\ln 9 - \ln 5$. **B.** $\ln 5 - \ln 9$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{1}{81} - \dfrac{1}{25}$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int_4^8 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_4^8 = \ln 9 - \ln 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Diện tích S của D được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức ta có $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 2(\mathrm{e}^2 - 1)$. **B.** $I = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$. **C.** $I = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$. **D.** $I = \mathrm{e}^2 - 1$.

✍ **Lời giải.**

$I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 101. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^5 - \dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^4 - \dfrac{1}{2}$. **D.** $\mathrm{e}^4 - 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^4 - \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 102. Giá trị tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+4}{x+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln\dfrac{5}{3}$. **B.** $1 + \ln\dfrac{4}{3}$. **C.** $\ln\dfrac{3}{5}$. **D.** $1 - \ln\dfrac{3}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+4}{x+3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1+\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = (x+\ln|x+3|)\Big|_0^1 = 1+\ln\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

1.1 ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. A	4. A	5. D	6. D	7. B	8. C	9. A	10. C
11. A	12. A	13. C	14. B	15. C	16. B	17. A	18. D	19. B	20. D
21. C	22. B	23. D	24. A	25. A	26. B	27. C	28. D	29. B	30. D
31. B	32. B	33. C	34. A	35. C	36. C	37. B	38. B	39. C	40. B
41. D	42. B	43. C	44. B	45. D	46. C	47. B	48. C	49. C	50. C
51. B	52. B	53. D	54. D	55. A	56. B	57. A	58. D	59. A	60. B
61. A	62. D	63. C	64. D	65. B	66. A	67. D	68. D	69. A	70. D
71. A	72. B	73. C	74. B	75. B	76. B	77. D	78. C	79. B	80. B
81. A	82. D	83. D	84. D	85. B	86. A	87. C	88. D	89. C	90. D
91. B	92. A	93. D	94. A	95. A	96. B	97. A	98. A	99. B	100. C
101. C	102. B								

2 THÔNG HIỂU

Câu 1. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

A. $2\ln 5$. **B.** $\frac{1}{2}\ln 5$. **C.** $\ln 5$. **D.** $4\ln 5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}(2x+1) = \ln|2x+1|\Big|_0^2 = \ln 5$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho tích phân $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \cos 2x\cos 4x\,\mathrm{d}x = a+b\sqrt{3}$, trong đó a, b là các hằng số hữu tỉ. Tính $\mathrm{e}^a+\log_2|b|$.

A. -2. **B.** -3. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \cos 2x\cos 4x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} (\cos 2x+\cos 6x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{6}\sin 6x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{0} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Suy ra $a=0$ và $b=\frac{1}{8}$. Khi đó $\mathrm{e}^a+\log_2|b| = 1-3 = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 3. Tính $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

A. $\ln 2$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\ln\frac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 4. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{x+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $4-5\ln\dfrac{3}{5}$. **B.** $4-5\log\dfrac{5}{3}$. **C.** $4+5\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $4-5\ln\dfrac{5}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^2\frac{2x+1}{x+3}\,\mathrm{d}x=\int_0^2\left(2-\frac{5}{x+3}\right)\mathrm{d}x=(2x-5\ln|x+3|)\Big|_0^2=4-5\ln\frac{5}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Cho $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\displaystyle\int_{-1}^2[x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{11}{2}$. **B.** $I=\dfrac{7}{2}$. **C.** $I=\dfrac{17}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

✍ **Lời giải.**

$$I=\int_{-1}^2[x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 x\,\mathrm{d}x+2\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x-3\int_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{17}{2}$$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho $\displaystyle\int_1^2[3f(x)+2g(x)]\,\mathrm{d}x=1$ và $\displaystyle\int_1^2[2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=-3$. Khi đó $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{11}{7}$. **B.** $-\dfrac{5}{7}$. **C.** $\dfrac{6}{7}$. **D.** $\dfrac{16}{7}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases}\displaystyle\int_1^2[3f(x)+2g(x)]\,\mathrm{d}x=1\\ \displaystyle\int_1^2[2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x+2\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x=1\\ 2\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{5}{7}\\ \displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{11}{7}\end{cases}$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Biết $\displaystyle\int_0^\pi(x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\pi^2$ trong đó a, b là các số thực và $\dfrac{a}{b}$ (tối giản). Tính $a+b$.

A. -3. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^\pi(x-\sin 2x)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{2}$. Suy ra $a=1$, $b=2$ khi đó $a+b=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5}{4}$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{6}\right)=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 9. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=0$. **D.** $I=1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Tính $I = \int\limits_0^3 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x.$

A. $I = -\frac{21}{100}.$ **B.** $I = \ln\frac{5}{2}.$ **C.** $I = \frac{4581}{5000}.$ **D.** $I = \log\frac{5}{2}.$

✍ **Lời giải.**

$I = \int\limits_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_0^3 = \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{2}.$

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho $I = \int\limits_0^1 (2x - m^2)\,\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để $I + 3 \geq 0$.

A. 4. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_0^1 (2x - m^2)\,\mathrm{d}x = (x^2 - m^2 x)\Big|_0^1 = 1 - m^2.$

Để $I + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$

Từ đó suy ra có 2 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Chọn đáp án D □

Câu 12. Cho $\int\limits_{-2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-2}^1 [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x.$

A. $-9.$ **B.** 3. **C.** $-3.$ **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

$I = \int\limits_{-2}^1 [2f(x) - 1]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-2}^1 \mathrm{d}x = 3.$

Chọn đáp án B □

Câu 13. Tích phân $\int\limits_1^2 (x+3)^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{61}{9}.$ **B.** 4. **C.** 61. **D.** $\frac{61}{3}.$

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_1^2 (x+3)^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x^2 + 6x + 9)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 9x\right)\Big|_1^2 = \frac{61}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$ với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 3\ln 2$. Tính $T = a + b$

A. $T = -2.$ **B.** $T = 2.$ **C.** $T = -1.$ **D.** $T = 0.$

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$2-3\ln 2=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\left(-\frac{a}{x}+b\ln|x|+2x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=a+b\ln 2+1\Rightarrow\begin{cases}a+1=2\\ b=-3\end{cases}\Rightarrow a+b=-2.$$

Chọn đáp án A ☐

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=17$. Khi đó $f(4)$ bằng

A. 5. **B.** 29. **C.** 19. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(4)-f(1)\Rightarrow f(4)=\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x+f(1)=17+12=29.$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 16. Tính tích phân $I=\int\limits_2^4 \frac{x}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

A. $2-\ln 3$. **B.** $1+\ln 3$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $2+\ln 3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_2^4 \frac{x}{x-1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^4\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=(x+\ln|x-1|)\Big|_2^4=2+\ln 3.$

Chọn đáp án D ☐

Câu 17. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Chọn đáp án D ☐

Câu 18. Tích phân $I=\int\limits_0^1 (x+1)^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^1 (x+1)^2\,\mathrm{d}x=\frac{(x+1)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$

Chọn đáp án C ☐

Câu 19. Nếu $f(1)=12$, $f'(x)$ liên tục và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=17$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. 19. **B**. 5. **C**. 29. **D**. 9.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^4 = f(4)-f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 29.$

Chọn đáp án C □

Câu 20. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Khi đó $\int\limits_0^2 [4f(x)-3]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B**. 14. **C**. 8. **D**. 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^2 [4f(x)-3]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 4f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 3\,\mathrm{d}x = 4\cdot 5 - 3x\Big|_0^2 = 14.$

Chọn đáp án B □

Câu 21. Tích phân $I = \int\limits_1^2 \left(\dfrac{1}{x}+2\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \ln 2 + 2$. **B**. $I = \ln 2 + 1$. **C**. $I = \ln 2 - 1$. **D**. $I = \ln 2 + 3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_1^2 \left(\dfrac{1}{x}+2\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x| + 2x\right)\Big|_1^2 = \ln 2 + 4 - 2 = \ln 2 + 2.$

Chọn đáp án A □

Câu 22. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -2\ln 2$. **B**. $I = \dfrac{2\ln 2}{3}$. **C**. $I = -\dfrac{2\ln 2}{3}$. **D**. $I = 2\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^1 \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\ln 2 = -\frac{2\ln 2}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị thực của a để có $\int\limits_0^a (2x+5)\,\mathrm{d}x = a-4$.

A. 1. **B**. 0. **C**. 2. **D**. Vô số.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^a (2x+5)\,\mathrm{d}x = \left(x^2+5x\right)\Big|_0^a = a^2+5a.$

Nên: $\int\limits_0^a (2x+5)\,\mathrm{d}x = a-4 \Leftrightarrow a^2+5a = a-4 \Leftrightarrow a^2+4a+4 \Leftrightarrow a = -2.$

Vậy, có một giá trị thực của a thỏa mãn là $a = -2$.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $\mathscr{K}$ và a, b, c là ba số bất kì thuộc $\mathscr{K}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$ **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ c \in (a;b).$ **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

✍ **Lời giải.**

Hàm số f liên tục trên khoảng $\mathscr{K}$ và a số bất kì thuộc $\mathscr{K}$, ta có $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Như vậy, khẳng định $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 4 - x & \text{khi } 1 \le x \le 2 \end{cases}$. Tính $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (4-x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1 - \mathrm{e}^2$. **B.** $\dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^2)$. **C.** $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)$. **D.** $\mathrm{e}^2 - 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và thỏa mãn $f(-1) = 4$; $f(3) = 7$. Giá trị của $I = \displaystyle\int_{-1}^3 5f'(t)\,\mathrm{d}t$ bằng

A. $I = 20$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 15$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = 5\displaystyle\int_{-1}^3 f'(t)\,\mathrm{d}t = 5f(t)\Big|_{-1}^3 = 5(f(3) - f(-1)) = 15.$

Chọn đáp án D □

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$ **B.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall c \in \mathbb{R}.$

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. **D.** $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

✍ **Lời giải.**

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ ta có các mệnh đề sau

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall c \in (a;b)$.

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

— $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và $f(0) - f(2) = 2$. Tính $\int\limits_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(2) - f(0) = -2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(1) = 2017$ và $\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1$, giá trị của $f(2)$ bằng

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 2016.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^2 = 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 1 \Leftrightarrow f(2) = 1 + f(1) \Leftrightarrow f(2) = 2018.$$

Chọn đáp án C □

Câu 31. Giá trị của tích phân $I = \int\limits_0^1 \dfrac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ là

A. $I = 2 + \ln 2$. **B.** $I = 1 - \ln 2$. **C.** $I = 2 - \ln 2$. **D.** $I = 1 + \ln 2$.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = (x - \ln|x+1|)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 32. Biết $\int\limits_1^3 \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=\dfrac{13}{2}$. **B.** $P=\dfrac{16}{3}$. **C.** $P=5$. **D.** $P=\dfrac{2}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \int\limits_1^3 \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3\right]\Big|_1^3$.

$$= \frac{16}{3}+2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3} = 2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{14}{3}.$$

Vậy $P=a+b+c=2-\dfrac{4}{3}+\dfrac{14}{3}=\dfrac{16}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 3^{2x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{27}{\ln 9}$. **B.** $\dfrac{9}{\ln 9}$. **C.** $\dfrac{4}{\ln 3}$. **D.** $\dfrac{12}{\ln 3}$.

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_0^1 3^{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3^{2x+1}}{2\ln 3}\Big|_0^1 = \frac{12}{\ln 3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2; \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=8$. **B.** $I=12$. **C.** $I=36$. **D.** $I=4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2+6=8$.

Chọn đáp án A □

Câu 35. Cho M, N là các số thực, xét hàm số $f(x)=M\sin\pi x+N\cos\pi x$ thỏa mãn $f(1)=3$ và $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{\pi}$. Giá trị của $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$ bằng

A. $\dfrac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\dfrac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(1)=3 \Leftrightarrow M\sin\pi+N\cos\pi=3 \Leftrightarrow N=-3$.

Mặt khác $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (M\sin\pi x-3\cos\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{M}{\pi}\cos\pi x-\frac{3}{\pi}\sin\pi x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{3}{\pi}+\frac{M}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow M=2.$$

Vậy $f(x)=2\sin\pi x-3\cos\pi x$ nên $f'(x)=2\pi\cos\pi x+3\pi\sin\pi x \Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5\pi\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Cho a là số thực thỏa mãn $|a|<2$ và $\int\limits_a^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x = 4$. Giá trị biểu thức $1+a^3$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_a^2 (2x+1)\,\mathrm{d}x = (x^2+x)\Big|_a^2 = 6-a^2-a$.

Theo giả thiết $6-a^2-a=4 \Leftrightarrow a^2+a-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-2. \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện $|a|<2 \Rightarrow a=1$. Vậy $1+a^3=2$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Cho $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)^2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I\in(-1;3)$. **B.** $I\in(-2;0)$. **C.** $I\in(-7;-5)$. **D.** $I\in[3;8]$.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 38. Tích phân $I = \int\limits_0^2 (x+2)^3\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=56$. **B.** $I=60$. **C.** $I=240$. **D.** $I=120$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_0^2 (x+2)^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{(x+2)^4}{4}\Big|_0^2 = \dfrac{4^4-2^4}{4} = 60$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho $I = \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$. Kết quả $J = \int\limits_5^2 [2-4f(x)]\,\mathrm{d}x$ là

A. 34. **B.** 36. **C.** 40. **D.** 32.

✍ **Lời giải.**

Xét $J = \int\limits_5^2 [2-4f(x)]\,\mathrm{d}x = 2x\Big|_5^2 - 4\int\limits_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -6+40 = 34$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Tích phân $I = \int\limits_0^1 \dfrac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $1-\ln 2$. **C.** $\ln 2$. **D.** $1-\ln 3$.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = x\Big|_0^1 - \ln|x+1|\Big|_0^1 = 1-\ln 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 41. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. **B.** $I=1-\sqrt{2}$. **C.** $I=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. **D.** $I=\sqrt{2}-1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 42. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=2\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=2\ln 2+\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=2\mathrm{e}-\dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(2\ln|x|+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=2\ln 2-\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Tính $\int\limits_0^1\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $-1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1=-\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^0=-\frac{1}{\mathrm{e}}+1$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Biết $\int\limits_2^3\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=a\ln 7+b\ln 3+c\ln 2+d$ (với a,b,c,d là các số nguyên). Tính giá trị của biểu thức $T=a+2b^2+3c^3+4d^4$.

A. $T=6$. **B.** $T=7$. **C.** $T=9$. **D.** $T=5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_2^3\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(1-\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(x-\ln|x^2-x+1|\right)\Big|_2^3=1-\ln 7+\ln 3$

$\Rightarrow a=-1,\ b=1,\ c=0,\ d=1\Rightarrow T=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 45. Giá trị nào của b để $\int\limits_1^b(2x-6)\,\mathrm{d}x=0$?

A. $b=0$ hoặc $b=3$. **B.** $b=0$ hoặc $b=1$. **C.** $b=5$ hoặc $b=0$. **D.** $b=1$ hoặc $b=5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^b(2x-6)\,\mathrm{d}x=(x^2-6x)\Big|_1^b=b^2-6b+5$.

Do đó $\int\limits_1^b (2x-6)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow b^2-6b+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=5 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 46. Cho một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=a\cos^4 x - b\cos x$ với $a, b \in \mathbb{R}$ biết rằng $F(0)=F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3\pi}{16}$. **B.** $\cos\left(\dfrac{b}{a}\right)\approx 0{,}83$. **C.** $ab<0$. **D.** $\cos\left(\dfrac{a}{b}\right)=0{,}45$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos^4 x - b\cos x \\ &= a\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 - b\cos x \\ &= \frac{a}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) - b\cos x \\ &= \frac{a}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right) - b\cos x. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\left(\frac{a}{4}+\frac{a}{2}\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{8}-b\cos x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{3a}{8}x+\frac{a}{4}\sin 2x+\frac{a}{32}\sin 4x - b\sin x + C. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} &\begin{cases} F(0)=0 \\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=0 \\ \dfrac{3a\pi}{16}-b=0 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & \frac{3a\pi}{16}-b=0 \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{3\pi}{16} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a}{b}=\frac{16}{3\pi} \Rightarrow \cos\left(\frac{b}{a}\right)\approx 0{,}83. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 47. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x^{2018}(1+x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2018}+\dfrac{1}{2019}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2020}+\dfrac{1}{2021}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2019}+\dfrac{1}{2020}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2017}+\dfrac{1}{2018}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^1 \left(x^{2018}+x^{2019}\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^{2019}}{20019}+\dfrac{x^{2020}}{2020}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2019}+\dfrac{1}{2020}$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=9$, tính $I=\int\limits_0^1 f(3x+1)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=9$. **B.** $I=3$. **C.** $I=1$. **D.** $I=27$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^1 f(3x+1)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 f(3x+1)\,\mathrm{d}(3x+1)=\dfrac{1}{3}\int\limits_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t=3.$

Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $\mathscr{K}$; a,b,c là các số thực thuộc $\mathscr{K}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$ **B.** $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$ **D.** $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

Theo tính chất của tích phân.

Chọn đáp án A □

Câu 50. Cho $\int\limits_3^4 \dfrac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3,(a,b\in\mathbb{Z})$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b+1=0.$ **B.** $a+3b+1=0.$ **C.** $a-2b=0.$ **D.** $a+b=-2.$

✍ **Lời giải.**

$\int\limits_3^4 \dfrac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_3^4\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=(\ln(x-2)-\ln(x-1))|_3^4.$

$=\ln 2-\ln 3-(\ln 1-\ln 2)=2\ln 2-\ln 3\Rightarrow a=2;b=-1.$

Vậy $a+3b+1=0$ là khẳng định đúng.

Chọn đáp án B □

Câu 51. Cho $f(x),g(x)$ là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\int\limits_1^3[f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=10,\int\limits_1^3[2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=6$. Tính $\int\limits_1^3[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x.$

A. 9. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases}\int\limits_1^3[f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=10\\ \int\limits_1^3[2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4\\ \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x=2\end{cases}\Rightarrow\int\limits_1^3[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=4+2=6.$

Chọn đáp án C □

Câu 52. Tích phân $\int\limits_0^2 \dfrac{a}{ax+3a}\,\mathrm{d}x,(a>0)$ bằng

A. $\dfrac{16a}{225}.$ **B.** $a\log\dfrac{5}{3}.$ **C.** $\ln\dfrac{5}{3}.$ **D.** $\dfrac{2a}{15}.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^2 \dfrac{a}{ax+3a}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 \dfrac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x=\ln(x+3)|_0^2=\ln 5-\ln 3=\ln\dfrac{5}{3}.$

Chọn đáp án C □

Câu 53. Nếu $\int\limits_a^d f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_b^d f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ (với $a < d < b$) thì $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 10.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_d^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^d f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^d f(x)\,\mathrm{d}x = 5 - 2 = 3.$

Chọn đáp án A □

Câu 54. Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = a \cdot \ln 2 + b$ (với a, b là các số nguyên). Khi đó giá trị của a là

A. -7. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{2x+3}{2-x}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 \frac{2(x-2)+7}{x-2}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 \left(2 + \frac{7}{x-2}\right)\mathrm{d}x = -\left(2x + 7\ln|x-2|\right)\Big|_0^1 = 7\ln 2 - 2.$$

Do đó $a = 7$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 4$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = \dfrac{3}{2}$. **D.** $I = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 1\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{5}{2}.$

Chọn đáp án D □

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall c \in \mathbb{R}$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

D. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải.

Ta không biết được hàm số $y = f(x)$ có liên tục tại c hay không, nên biểu thức $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall c \in \mathbb{R}$ sai.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 20$, $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính $\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 22. **B.** 18. **C.** -18. **D.** -22.

✍ **Lời giải.**

$\int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -18.$

Chọn đáp án C □

Câu 58. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$, đồng thời thỏa mãn $\int\limits_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. 6. **B**. 8. **C**. 7. **D**. 9.

✍ **Lời giải.**

Đặt $a = \int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, $b = \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} a+3b=10 \\ 2a-b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2. \end{cases}$$

Vậy $\int\limits_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = a+b = 6.$

Chọn đáp án A □

Câu 59. Cho tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2$ với a, $b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a+b=0$. **B**. $a-2b=0$. **C**. $2a-b=0$. **D**. $a+2b=0$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \cos x + 2 \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{5}{2} \\ t=2. \end{cases}$

Suy ra $a\ln 5 + b\ln 2 = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{5}{2}}^{2} \dfrac{-\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t|\Big|_{\frac{5}{2}}^{2} = -\left(\ln 2 - \ln\dfrac{5}{2}\right) = \ln 5 - 2\ln 2.$

Do đó $a=1$, $b=-2$ nên $2a+b=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Tích phân $I = \int\limits_0^1 \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = a\ln b + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b+c$.

A. 2. **B**. 1. **C**. 3. **D**. 0.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I = \int\limits_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{(x^2+1)-2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1).$$

Suy ra $I = 1 - \left[\ln(x^2+1)\right]\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$. Do đó $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$.

Vậy $a + b + c = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho $I = \int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 26$. Khi đó $J = \int\limits_0^2 x \cdot \left[f(x^2+1)+1\right]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 13. **B.** 52. **C.** 54. **D.** 15.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_0^2 x \cdot \left[f(x^2+1)+1\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 x \cdot f(x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(x^2+1)\,\mathrm{d}(x^2+1) + \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\int\limits_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t + 2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 26 + 2 = 15. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên và $\int\limits_2^8 f(x)\mathrm{d}x = 10$. Tính $I = \frac{3}{2}\int\limits_1^3 f(3x-1)\mathrm{d}x$.

A. 30. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Đặt $3x - 1 = t \Rightarrow 3\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 3 \Rightarrow t = 8$.

$I = \frac{3}{2}\int\limits_1^3 f(3x-1)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int\limits_2^8 f(t)\frac{1}{3}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_2^8 f(t)\mathrm{d}t$.

Ta có $\int\limits_2^8 f(x)\mathrm{d}x = 10 \Rightarrow \int\limits_2^8 f(t)\mathrm{d}t = 10$. Vậy $I = \frac{1}{2}\int\limits_2^8 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 63. Biết rằng $I = \int\limits_2^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = m\ln 3 + n\ln 2 + p$, trong đó m, n, $p \in \mathbb{Q}$. Tính $m + n + 2p$.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{5}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$ suy ra

$$I = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^3 - \frac{1}{2}\int\limits_2^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Suy ra $m + n + 2p = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 64. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 12. **C.** -8. **D.** 1.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 - 2\cdot 5 = -8$.

Chọn đáp án C □

Câu 65. $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2)$. **B.** $\frac{1}{3}\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2$. **C.** $\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2$. **D.** $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^2)$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}\right)$. **B.** $\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}$. **C.** $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}\right)$. **D.** $\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e})$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$. **B.** $\frac{1}{3}\ln 2$. **C.** $\frac{2}{3}\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 1) = \frac{2}{3}\ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 68. Cho $\int\limits_1^{\mathrm{e}} (1 + x\ln x)\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2 + b\mathrm{e} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b = c$. **B.** $a + b = -c$. **C.** $a - b = c$. **D.** $a - b = -c$.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^{\mathrm{e}} (1 + x\ln x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1 + \int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases}$, ta chọn $\begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \frac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{2}\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{1}{4}x^2\Big|_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} + \dfrac{1}{4}$.

Suy ra $\int\limits_1^{\mathrm{e}} (1 + x\ln x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1 + \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} + \mathrm{e} - \dfrac{3}{4}$ nên $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 1$, $c = -\dfrac{3}{4}$.

Vậy $a - b = c$.

Chọn đáp án C □

Câu 69. $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{2x+3}$ bằng

A. $2\ln\dfrac{7}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{2}\ln 35$. **C.** $\ln\dfrac{7}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{2x+3} = \dfrac{1}{2}\ln|2x+3|\Big|_1^2 = \dfrac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 70. Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,\mathrm{d}(2x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$. **B.** $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. **C.** $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$. **D.** $\int\limits_0^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\ln x = t \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x = 1 \Rightarrow t = 0$; Khi $x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 1$.

Vậy ta có $I = \int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} \Leftrightarrow I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$.

Chọn đáp án C □

Câu 72. Tích phân $\int\limits_e^{e^2} \dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln 2 + 1$. **B.** $\ln 2 + 2$. **C.** $\ln 3 - 1$. **D.** $\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int\limits_e^{e^2} \dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|\Big|_1^2 = \ln 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 73. Giá trị của $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0; x=e\Rightarrow t=1$.

Khi đó, $I=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 74. Tính tích phân $\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$ ta được kết quả

A. $\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. **C.** $\frac{2\mathrm{e}^2+1}{4}$. **D.** $\frac{2\mathrm{e}^2-1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x, \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$.

Suy ra $\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\ln x\right|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\left.\frac{x^2}{4}\right|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 75. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x=5$, khi đó $\int\limits_0^1 [f(x)-2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 12. **C.** -8. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_0^1 [f(x)-2g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x=2-2\cdot 5=-8.$$

Chọn đáp án C □

Câu 76. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để tích phân $\int\limits_1^{1+a}\frac{\mathrm{d}x}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại.

A. $-1<a<3$. **B.** $a<-1$. **C.** $a\neq 4, a\neq 5$. **D.** $a<3$.

✍ **Lời giải.**

Tích phân $\int\limits_1^{1+a}\frac{\mathrm{d}x}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại khi và chỉ khi hàm số $y=\frac{1}{x(x-5)(x-4)}$ liên tục trên $[1;1+a]$ hoặc $[1+a;a]$.

Mà hàm số $y=\frac{1}{x(x-5)(x-4)}$ liên tục trên khoảng $(-\infty;0);(0;4);(4;5);(5;+\infty)$.

Nên hàm số liên tục trên $[1;1+a]$ hoặc $[1+a;1]\Leftrightarrow 0<1+a<4\Leftrightarrow -1<a<3$.

Vậy $-1<a<3$.

Chọn đáp án A □

Câu 77. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$. Hãy tính $\int\limits_1^4\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

A. $I=4$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{1}{2}$. **D.** $I=2$.

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=1 \Leftrightarrow t=1$; $x=4 \Rightarrow t=2$, ta có

$$I=2\int\limits_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t=2\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2\cdot 2=4.$$

Chọn đáp án A □

Câu 78. Cho $\displaystyle\int\limits_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\displaystyle\int\limits_{5}^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{-2}^{5}[f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=27$. **C.** $I=-11$. **D.** $I=3$.

✍ Lời giải.

Theo tính chất của tích phân ta có

$$I=\int\limits_{-2}^{5}[f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x-4\int\limits_{-2}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{5}\mathrm{d}x=8\cdot 4\cdot(-3)-x\Big|_{-2}^{5}=13.$$

Chọn đáp án A □

Câu 79. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$. **B.** $\ln\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$.

✍ Lời giải.

Đặt $u=x^2+3 \Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=3$; $x=2 \Rightarrow u=7$, ta có

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_3^7 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln|u|\Big|_3^7=\frac{1}{2}\ln 7-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 80. Cho $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$, $\displaystyle\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$. Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 5.

✍ Lời giải.

$$\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=5.$$

Chọn đáp án D □

Câu 81. Cho biết $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\displaystyle\int\limits_0^2 g(x)\mathrm{d}x=-2$. Tính tích phân

$$I=\int\limits_0^2[2x+f(x)-2g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

A. $I=11$. **B.** $I=18$. **C.** $I=5$. **D.** $I=3$.

✍ Lời giải.

Ta có $I=\int\limits_0^2[2x+f(x)-2g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 2x\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-2\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^2+3-2(-2)=11$.

Chọn đáp án A □

Câu 82. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[2;3]$ thỏa mãn $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=2019$. Tính $I=\int\limits_1^{\sqrt[3]{2}} x^2f(x^3+1)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=6057$. **B.** $I=\sqrt[3]{2019}$. **C.** $I=673$. **D.** $I=2019$.

✍ Lời giải.

Đặt $t=x^3+1\Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\,\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{1}{3}\mathrm{d}t=x^2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=2$, $x=\sqrt[3]{2}\Rightarrow t=3$.

Vậy $I=\dfrac{1}{3}\int\limits_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{2019}{3}=673$.

Chọn đáp án C □

Câu 83. Cho $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{16}{3}$. Tính $I=\int\limits_0^4\left[\dfrac{5}{(x+1)^2}-3f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-20$. **D.** $I=1$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$I=\int\limits_0^4\left[\frac{5}{(x+1)^2}-3f(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{-5}{x+1}\Big|_0^4-3\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=-1+5-3\cdot\frac{16}{3}=-12.$$

Chọn đáp án A □

Câu 84. Cho $I=\int\limits_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$ và $u=\sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $I=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^5}{5}-\dfrac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3$. **B.** $I=\int\limits_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u$.

C. $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 x^2(x^2-1)\,\mathrm{d}x$. **D.** $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u$.

✍ Lời giải.

Đặt $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=u\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=1$, $x=4\Rightarrow u=3$.

Khi đó, ta có

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3.$$

Mặt khác, do tích phân không phụ thuộc vào ký hiệu biến nên ta có

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 x^2(x^2-1)\,\mathrm{d}x.$$

Ta thấy $\int\limits_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u \neq \frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u$.

Vậy mệnh đề "$I=\int\limits_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u$" sai.

Chọn đáp án B □

Câu 85. Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$ và $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{13}{2}$ (với a, b, $c\in\mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.

A. $P=-\frac{3}{4}$. **B.** $P=-\frac{4}{3}$. **C.** $P=\frac{4}{3}$. **D.** $P=\frac{3}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+d$.

Có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+d\right)\Big|_0^1\Rightarrow\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}$ (1).

Có $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=-2\Rightarrow\left(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+d\right)\Big|_0^2\Rightarrow\frac{8}{3}a+2b+2c=-2$ (2).

Có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{13}{2}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+d\right)\Big|_0^3\Rightarrow 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có hệ $\begin{cases}\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}\\ \frac{8}{3}a+2b+2c=-2\\ 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}.\end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm $(a;b;c)=\left(1;3;-\frac{16}{3}\right)$.

Vậy $P=a+b+c=4-\frac{16}{3}=-\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 86. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int\limits_1^3[f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=10$ đồng thời $\int\limits_1^3[2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=6$. Tính $\int\limits_1^3[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

✍ **Lời giải.**

Đặt $A=\int\limits_1^3 f(x)]\,\mathrm{d}x$, $B=\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Theo bài ra ta có hệ $\begin{cases}A+3B=10\\ 2A-B=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=4\\ B=2.\end{cases}$

Vậy $\int\limits_1^3[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=A+B=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 87. Biết m là số thực thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)\,\mathrm{d}x = 2\pi^2+\dfrac{\pi}{2}-1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \le 0$. **B.** $0 < m \le 3$. **C.** $3 < m \le 6$. **D.** $m > 6$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2mx\,\mathrm{d}x\\ &= x\sin x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x + mx^2\big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{2} + \cos x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{m\pi^2}{4}\\ &= \frac{\pi}{2}-1+\frac{m\pi^2}{4}\\ &= \frac{m\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}-1. \quad (1)\end{aligned}$$

Theo bài ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)\,\mathrm{d}x = 2\pi^2+\dfrac{\pi}{2}-1$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{m}{2}=4 \Rightarrow m=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 88. Cho $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$. Tính $I = \int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=36$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 f(3x)\,\mathrm{d}(3x) = \frac{1}{3}\int\limits_0^6 f(u)\,\mathrm{d}u \text{ (với } u=3x)$$

$\Rightarrow I = \dfrac{1}{3}.12 = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 89. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Tính $I=F(\mathrm{e})-F(1)$.

A. $I=\mathrm{e}$. **B.** $I=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 90. Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^2 [x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{5}{2}$. **B.** $I=\dfrac{7}{2}$. **C.** $I=\dfrac{17}{2}$. **D.** $I=\dfrac{11}{2}$.

✍ **Lời giải.**

$$\int_{-1}^{2}[x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{2}x\,\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x-3\int_{-1}^{2}g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}+2.2-3.(-1)=\frac{17}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 91. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+2\sin x]\,\mathrm{d}x$.

A. 7. **B.** $5+\frac{\pi}{2}$. **C.** 3. **D.** $5+\pi$.

✍ **Lời giải.**

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+2\sin x]\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,\mathrm{d}x=5-2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=7$$

Chọn đáp án A □

Câu 92. Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{1}{4}\pi^4$. **B.** $I=-\pi^4$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-\frac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}u=-\sin x\,\mathrm{d}x\Rightarrow \sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$

Đổi cận

x	0	π
u	1	-1

Nên $I=\int_1^{-1}u^3.(-\mathrm{d}u)=\int_{-1}^{1}u^3.\mathrm{d}u=\frac{1}{4}u^4\Big|_{-1}^{1}=0$

Chọn đáp án C □

Câu 93. Tính tích phân $I=\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{e^2-2}{2}$. **C.** $I=\frac{e^2+1}{4}$. **D.** $I=\frac{e^2-1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$, ta có:

$$I=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2+1}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 94. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 2-1$. **B.** $F(3)=\ln 2+1$. **C.** $F(3)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $F(3)=\dfrac{7}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F(x)=\ln|x-1|+C$.

Do $F(2)=1$ nên $C=1\Rightarrow F(x)=\ln|x-1|+1$.

Khi đó $F(3)=\ln 2+1$.

Chọn đáp án B □

Câu 95. Cho $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=16$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=32$. **B.** $I=8$. **C.** $I=16$. **D.** $I=4$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=2\Rightarrow t=4$.

$\Rightarrow I=\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{2}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=8$.

Chọn đáp án B □

Câu 96. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=2\displaystyle\int_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **B.** $I=\displaystyle\int_1^2 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **C.** $I=\displaystyle\int_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$. **D.** $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2 \sqrt{u}\mathrm{d}u$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u=x^2-1\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=1\Rightarrow u=0$; $x=2\Rightarrow u=3$.

Do đó: $I=\displaystyle\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^3 \sqrt{u}\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án C □

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$. **B.** $I=8$. **C.** $m=1$. **D.** $I=-8$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$. Khi đó $I=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $10=2f(1)-f(0)-\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-10+2=-8$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Chọn đáp án D □

Câu 98. $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2)$. **B.** $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$. **C.** $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$. **D.** $\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^5+\mathrm{e}^2)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2)$.

Chọn đáp án A □

Câu 99. $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e})$. **B.** $\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}$. **C.** $\frac{1}{3}(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e})$. **D.** $\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e})$.

Chọn đáp án A □

Câu 100. $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x+3}$ bằng

A. $2\ln\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}\ln 35$. **C.** $\ln\frac{7}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$.

Chọn đáp án D □

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16, \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 7$. **B.** $I = 12$. **C.** $I = 20$. **D.** $I = 13$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$, Đổi cận $x = 0 \Leftrightarrow t = 0, x = 1 \Leftrightarrow t = 2$.

$I = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 t \cdot f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases} u = t \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow v = f(t). \end{cases}$

$I = \frac{1}{4}\left(tf(t)|_0^2 - \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}(2f(2) - 0f(0) - 4) = 7$.

Chọn đáp án A □

Câu 102. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $\int\limits_0^1 g(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_0^1 g'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x = 2$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 [f(x)\cdot g(x)]'\mathrm{d}x$.

A. $I = -1$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 3$.

✍ **Lời giải.**

$I = \int\limits_0^1 [f(x)\cdot g(x)]'\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\right]\mathrm{d}x = 2 + 1 = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 103. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^{\sin x}+\cos x\right)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}+b\pi+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $S=a^2+b^2+c^2$.

A. $\dfrac{49}{36}$. **B.** $\dfrac{49}{9}$. **C.** $\dfrac{33}{16}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x)+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+2\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$
$-\mathrm{e}+\dfrac{\pi}{4}+1$.

Đồng nhất với đề bài ta được $a=-1; b=\dfrac{1}{4}; c=1\Rightarrow S=a^2+b^2+c^2=\dfrac{33}{16}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 104. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đạo hàm là hàm số $f(x)=x^2+2\sqrt{x}-1$

A. $g(x)=2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1$. **B.** $g(x)=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1$.

C. $g(x)=2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **D.** $g(x)=2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

✍ **Lời giải.**

$f'(x)=2x+2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 105. Biết rằng $\int\limits_2^3 \dfrac{3x+1}{2x^2-x-1}\,\mathrm{d}x = a\ln 2+b\ln 5+c\ln 7$ trong đó a, b, $c\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{6}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_2^3 \frac{3x+1}{2x^2-x-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{4}{3}\int\limits_2^3\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int\limits_2^3\frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{4}{3}\ln|x-1|\Big|_2^3+\frac{1}{6}\ln|2x+1|\Big|_2^3\\ &= \frac{4}{3}\ln 2-\frac{1}{6}\ln 5+\frac{1}{6}\ln 7.\end{aligned}$$

Suy ra $a=\dfrac{4}{3}$, $b=-\dfrac{1}{6}$, $c=\dfrac{1}{6}$.

Vậy $a+b+c=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int\limits_0^{2019} f(x)\,\mathrm{d}x=2019$ và $F(0)=3$. Tính $F(2019)$.

A. $F(2019)=2020$. **B.** $F(2019)=2016$. **C.** $F(2019)=2022$. **D.** $F(2019)=-2022$.

✍ **Lời giải.**

$I=\int\limits_0^{2019} f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_0^{2019}=F(2019)-F(0)=2019\Leftrightarrow F(2019)=2019+F(0)=2022$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 107. Cho $\int\limits_0^1 \left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a+b<2$. **B.** $a-2b>0$. **C.** $a+b>3$. **D.** $a+2b<0$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2$ và $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+3} = \ln|x+3|\Big|_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = 2\ln 2 - \ln 3$.

Do đó $\int\limits_0^1 \left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = (\ln 3 - \ln 2) - (2\ln 2 - \ln 3) = -3\ln 2 + 2\ln 3$ nên $a=-3$, $b=2$.

Vậy $a+b=-1<2$.

Chọn đáp án A □

Câu 108. Cho tích phân $I = \int\limits_0^3 \dfrac{x}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\sqrt{x+1}$ thì

A. $I = \int\limits_1^2 (t^2-2t)\mathrm{d}t$. **B.** $I = \int\limits_1^2 (2t^2-t)\mathrm{d}t$. **C.** $I = \int\limits_1^2 (2t^2+2t)\mathrm{d}t$. **D.** $I = \int\limits_1^2 (2t^2-2t)\mathrm{d}t$.

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Leftrightarrow x = t^2-1$, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=1$; khi $x=3$ thì $t=2$.

$I = \int\limits_0^3 \dfrac{x}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \dfrac{t^2-1}{1+t}2t\,\mathrm{d}t = \int\limits_1^2 2t(t-1)\mathrm{d}t = \int\limits_1^2 (2t^2-2t)\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án D □

Câu 109. Biết $I = \int\limits_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=0$. **B.** $S=6$. **C.** $S=2$. **D.** $S=-2$.

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$. Khi đó

$$I = \int\limits_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = \int\limits_3^4 \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = [\ln x - \ln(x+1)]\Big|_3^4 = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra: $a=4$, $b=-1$, $c=-1$. Vậy $S=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 110. Kết quả tích phân $I = \int\limits_0^1 (2x+3)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ được viết dưới dạng $I = a\mathrm{e}+b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tìm khẳng định đúng.

A. $a^3+b^3=28$. **B.** $a+2b=1$. **C.** $a-b=2$. **D.** $ab=3$.

✍ Lời giải.

— Cách 1: Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (2x+3)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (2x+3)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x \\ &= [(2x+3)\mathrm{e}^x]\Big|_0^1 - \int_0^1 2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= \left[(2x+3)\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x\right]\Big|_0^1 \\ &= 3\mathrm{e}-1. \end{aligned}$$

Do đó $a=3$, $b=-1$ nên $a+2b=1$.

— Cách 2: Đặt $\begin{cases} u = 2x+3 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x. \end{cases}$

$\Rightarrow I = (2x+3)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 5\mathrm{e}-3-2\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 5\mathrm{e}-3-2(\mathrm{e}-1) = 3\mathrm{e}-1.$

Suy ra Do đó $a=3$, $b=-1$ nên $a+2b=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 111. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2+6x+8)}\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 4 + c\ln 5 + d\ln 6$ $(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2a+3b-c-\dfrac{d}{2}$.

A. $T=2$. **B.** $T=5$. **C.** $T=0$. **D.** $T=3$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{(x^2+6x+8)}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{x}{(x+2)(x+4)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left(\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= [2\ln(x+4) - \ln(x+2)]\Big|_1^2 \\ &= = 2\ln 6 - \ln 4 - 2\ln 5 + \ln 3. \end{aligned}$$

Từ đó có $a=1$, $b=-1$, $c=-2$, $d=2$ nên $T = 2+(-3)+2-1 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 112. Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Khi đó giá trị của $I = \displaystyle\int_1^4 f(3x-3)\,\mathrm{d}x$ là

A. 24. **B.** 0. **C.** 27. **D.** 3.

✍ Lời giải.

$I = \displaystyle\int_1^4 f(3x-3)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=3x-3 \Rightarrow \mathrm{d}t=3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=0; x=4 \Rightarrow t=9$.

Khi đó: $I=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^9 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\cdot 9=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7$ và $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $P=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P=7$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=4$. **D.** $P=10$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7-3=4$.

Vậy $P=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 114. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{\ln 3-1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{\ln 3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{\ln 3}{3}$. **D.** $I=\ln 3+1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=\dfrac{\ln 3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 115. Biết rằng tích phân $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=a+b\cdot e\,(a,b\in\mathbb{Z})$, tích $a\cdot b$ bằng

A. -15. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 20.

✍ **Lời giải.**

Điều kiện: $a,\ b\in\mathbb{Z}$.

Đặt $\begin{cases} u=2x+1 \\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x \\ v=\mathrm{e}^x \end{cases}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(2x+1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1-2\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(2x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=1+\mathrm{e}=a+b\cdot e$.

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$. Vậy tích $a\cdot b=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 116. Cho hai tích phân $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=7$ và $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $\displaystyle\int_3^5 [1+f(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. 3. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 13.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_3^5 [1+f(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^5 \mathrm{d}x + \int\limits_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + \int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 5.$

Chọn đáp án C □

Câu 117. Cho $\int\limits_{\ln 2}^{1+\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$. Tính $\int\limits_1^e \dfrac{1}{x} f(\ln 2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 2018$. **B.** $I = 4036$. **C.** $I = \dfrac{1009}{2}$. **D.** $I = 1009$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\ln 2x = t \Rightarrow \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Khi đó $\int\limits_1^e \dfrac{1}{x} f(\ln 2x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\ln 2}^{1+\ln 2} f(t)\,\mathrm{d}t = 2018.$

Chọn đáp án A □

Câu 118. Tính tích phân $I = \int\limits_1^e \dfrac{1+x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **B.** $I = 2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $I = 2 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $I = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int\limits_1^e \frac{1+x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x} + \ln|x|\right)\Big|_1^e = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2; \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_{-1}^1 f(|2x-1|)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{2}{3}$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = \dfrac{3}{2}$. **D.** $I = 6$.

✍ **Lời giải.**

Có $I = \int\limits_{-1}^1 f(|2x-1|)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$

Tính $I_1 = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = 1-2x \Rightarrow \mathrm{d}u = -2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow u = 3 \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = \dfrac{-1}{2}\int\limits_3^0 f(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^3 f(u)\,\mathrm{d}u = 3$

Tính $I_2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(2x-1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = 2x-1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow u = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = 1$

Vậy $I = I_1 + I_2 = 4$.

Chọn đáp án B □

Câu 120. Tính chất tích phân $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$

A. $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. **C.** $\dfrac{2\mathrm{e}^2+1}{4}$. **D.** $\dfrac{2\mathrm{e}^2-1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{3}$

Vậy $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^e \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 121. Giá trị của $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1-\mathrm{e}$. **B.** $\mathrm{e}-1$. **C.** $-\mathrm{e}$. **D.** e.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{e}^{x+1}\mathrm{d}(x+1) = \mathrm{e}^{x+1}\Big|_{-1}^0 = \mathrm{e}-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 122. Cho $\displaystyle\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c\ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 64.

✍ **Lời giải.**

$$\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int_3^4 \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x = 3\ln|x-1|\Big|_3^4 + 2\ln|x-2|\Big|_3^4 = 3\ln 3 - 3\ln 2 + 2\ln 2 = -\ln 2 + 3\ln 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a - 3b + c = 6.$$
$$c = 0$$

Chọn đáp án D □

Câu 123. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln 5$. **B.** $\dfrac{\ln 5}{2}$. **C.** $2\ln 5$. **D.** $4\ln 5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|2x+1|\Big|_0^2 = \ln 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 124. Cho $\int\limits_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x$ và $\int\limits_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t = -1$, khi đó $\int\limits_0^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 3.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int\limits_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3\Big|_0^2 = 8 \Rightarrow \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4.$

Lại có: $\int\limits_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t = -1 \Rightarrow \int\limits_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -1.$

Vậy $\int\limits_0^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4+3\cdot(-1) = 1.$

Chọn đáp án C □

Câu 125. Trong không gian với hệ tọa độ cho 3 điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng (P): $3x-3y-2z-12=0$. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2+MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = 2a-b+c$.

A. $\dfrac{15}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{15}{2}$. **D.** $-\dfrac{5}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Gọi I là điểm thỏa mãn điều kiện

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow I\left(\dfrac{1+3+3\cdot 2}{1+1+3}; \dfrac{4+4+3\cdot(-1)}{1+1+3}; \dfrac{5+0+3\cdot 0}{1+1+3}\right) \Rightarrow I(2;1;1).$

Khi đó

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2+3MC^2 &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2 \\ &= 5MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right) + +IA^2+IB^2+3IC^2 \\ &= 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + 3IC^2. \end{aligned}$$

Do $IA^2+IB^2+3IC^2$ là hằng số cụ thể nên

$MA^2+MB^2+3MC^2$ min $\Leftrightarrow 5MI^2$ min $\Leftrightarrow MI$ min, khi đó M là hình chiếu của I trên (P).

Đường thẳng đi qua $I(2;1;1)$ và vuông góc với (P) là $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-3t \\ z = 1-2t. \end{cases}$

Điểm M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-3t \\ z = 1-2t \\ 3x-3y-2z-12=0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2};0\right) \Rightarrow 2a-b+c = \dfrac{15}{2}.$

Chọn đáp án A □

Câu 126. Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \le 0 \\ a(x-x^2) & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$. Tích phân $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{a}{6}-1$. **B.** $\dfrac{2a}{3}+1$. **C.** $\dfrac{a}{6}+1$. **D.** $\dfrac{2a}{3}-1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^0 2x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 a(x-x^2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{6}-1.$

Chọn đáp án A □

Câu 127. Trên đoạn thẳng AB dài 200 (m) có hai chất điểm X và Y. Chất điểm X xuất phát từ A chuyển động thẳng hướng đến B với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{80}t^2+\frac{1}{3}t$ (m/s), trong đó t (giây) tính từ lúc X bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, chất điểm Y xuất phát từ B và xuất phát chậm hơn X, 10 giây và chuyển động thẳng ngược chiều với X có gia tốc bằng a (m/s^2) với a là hằng số. Biết rằng hai chất điểm gặp nhau tại đúng trung điểm của đoạn thẳng AB, giá trị của a bằng

A. 2. **B.** 1,5. **C.** 2,5. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB, ta có $AI=100$ m.

Gọi t_0 là khoảng thời gian chất điểm X xuất phát từ A đi đến I, ta có

$$S_X=\int\limits_0^{t_0}v(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{t_0}\left(\frac{t^2}{80}+\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{240}+\frac{t^2}{6}\right)\Big|_0^{t_0}=\frac{t_0^3}{240}+\frac{t_0^2}{6}=100$$

$\Rightarrow t_0=20$ (giây).

Do đó Y cần $20-10=10$ giây để di chuyển đến trung điểm I của đoạn thẳng AB, vì vậy

$$\int\limits_0^{10}v_Y(t)\,\mathrm{d}t=100\Leftrightarrow\int\limits_0^{10}at\,\mathrm{d}t=100\Leftrightarrow a=\frac{100}{\displaystyle\int\limits_0^{10}t\,\mathrm{d}t}=2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 128. Cho $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=-3$. Giá trị của $\displaystyle\int\limits_a^b[f(x)-2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -4. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

✍ Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_a^b[f(x)-2g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-2\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=2-2\cdot(-3)=8.$

Chọn đáp án D □

Câu 129. Biết $\displaystyle\int\limits_1^2 x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x=a\ln5+b\ln2+c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=3$. **B.** $P=0$. **C.** $P=5$. **D.** $P=2$.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x^2+1)\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2+1}{2}.\end{cases}$

Do đó: $\displaystyle\int\limits_1^2 x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x=\frac{x^2+1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2-\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\ln5-\ln2-\frac{3}{2}.$

Suy ra $a=\frac{5}{2}$, $b=-1$, $c=-\frac{3}{2}\Rightarrow P=a+b+c=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 130. Cho $\displaystyle\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int\limits_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^2[x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{17}{2}$. **B.** $I=\dfrac{11}{2}$. **C.** $I=\dfrac{7}{2}$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$I=\int\limits_{-1}^{2}[x+2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}x\,\mathrm{d}x+2\int\limits_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x-3\int\limits_{-1}^{2}g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}+2\cdot 2-3\cdot(-1)=2-\frac{1}{2}+4+3=\frac{17}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 131. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\displaystyle\int\limits_{-1}^{5}[2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=-5$; $\displaystyle\int\limits_{-1}^{5}[3f(x)-5g(x)]\,\mathrm{d}x=21$. Tính $\displaystyle\int\limits_{-1}^{5}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. -5. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

✍ Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{-1}^{5}[2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=-5\\ \displaystyle\int\limits_{-1}^{5}[3f(x)-5g(x)]\,\mathrm{d}x=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\displaystyle 2\int\limits_{-1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x+3\int\limits_{-1}^{5}g(x)\,\mathrm{d}x=-5\\ \displaystyle 3\int\limits_{-1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x-5\int\limits_{-1}^{5}g(x)\,\mathrm{d}x=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{-1}^{5}f(x)=2\\ \displaystyle\int\limits_{-1}^{5}g(x)=-3.\end{cases}$

$\Rightarrow\displaystyle\int\limits_{-1}^{5}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{5}g(x)\,\mathrm{d}x=2-3=-1.$

Chọn đáp án D □

Câu 132. Cho $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{1}x^2\sqrt{1-x^3}\,\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\sqrt{1-x^3}$ thì ta được

A. $I=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int\limits_{0}^{1}t^2\,\mathrm{d}t$. **B.** $I=-\dfrac{3}{2}\displaystyle\int\limits_{0}^{1}t^2\,\mathrm{d}t$. **C.** $I=-\dfrac{2}{3}\displaystyle\int\limits_{0}^{1}t^2\,\mathrm{d}t$. **D.** $I=\dfrac{2}{3}\displaystyle\int\limits_{0}^{1}t^2\,\mathrm{d}t$.

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{1-x^3}\Rightarrow t^2=1-x^3\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=-3x^2\,\mathrm{d}x$ hay $x^2\,\mathrm{d}x=-\dfrac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=0.\end{cases}$

Do đó $I=-\dfrac{2}{3}\displaystyle\int\limits_{1}^{0}t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}\int\limits_{0}^{1}t^2\,\mathrm{d}t.$

Chọn đáp án D □

Câu 133. Cho $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=1$, $\displaystyle\int\limits_{-2}^{4}f(t)\,\mathrm{d}t=-4$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_{2}^{4}f(y)\mathrm{d}y=1$.

A. $I=5$. **B.** $I=3$. **C.** $I=-3$. **D.** $I=-5$.

✍ Lời giải.

Vì $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{2} f(y)\mathrm{d}y = 1$ và $\int\limits_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^{4} f(y)\mathrm{d}y = -4$ nên

$$I = \int\limits_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y = \int\limits_{2}^{-2} f(y)\mathrm{d}y + \int\limits_{-2}^{4} f(y)\mathrm{d}y = -1 - 4 = -5.$$

Chọn đáp án D □

Câu 134. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ thì tích phân $I = \int\limits_{0}^{3} [x - 3f(x)]\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $I = -3$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = \dfrac{3}{2}$. **D.** $I = -\dfrac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_{0}^{3} [x - 3f(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{3} x\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{9}{2} - 3\cdot 2 = -\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 135. Cho với $\int\limits_{0}^{1} (x+3)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = a + b\mathrm{e}$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a + b = -5$. **B.** $a \cdot b = -6$. **C.** $a \cdot b = 6$. **D.** $a + b = -1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int\limits_{0}^{1} (x+3)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} (x+3)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = (x+3)\cdot \mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int\limits_{0}^{1} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x+2)\cdot \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 3\mathrm{e} - 2$.

Suy ra $a = -2, b = 3$. Do đó $a \cdot b = -6$.

Chọn đáp án B □

Câu 136. Cho $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, tích phân $\int\limits_{0}^{1} \left(2f(x) - 3x^2\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_{0}^{1} \left(2f(x) - 3x^2\right)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = 2\cdot 1 - 1 = 1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 137. Biết $\int\limits_{3}^{5} \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = a + \ln\dfrac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

A. $S = 2$. **B.** $S = -2$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 10$.

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_{3}^{5} \frac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{3}^{5} \left(x + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x+1|\right)\Big|_3^5 = 8 + \ln\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = a - 2b = 2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 138. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{0}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, $\int\limits_{3}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$, $\int\limits_{3}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Giá trị

của $I=\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

✍ **Lời giải.**

$$I=\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{6} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_6^{3} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7-9+8=6.$$

Chọn đáp án B □

Câu 139. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để tích phân $\int\limits_1^{1+a}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại.

A. $-1<a<3$. **B.** $a<-1$. **C.** $a\neq 4, a\neq 5$. **D.** $a<3$.

✍ **Lời giải.**

Để tích phân của đề bài xác định thì $1,1+a$ phải thuộc vào cùng một khoảng xác định của hàm số $\dfrac{1}{x(x-5)(x-4)}$. Khoảng xác định chứa 1 là khoảng $(0;4)$. Nên $1+a\in(0;4)$ hay $a\in(-1;3)$.

Chọn đáp án A □

Câu 140. Tích phân $\int\limits_0^{\pi^2}\left(\sin\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=A+B\pi$ với $A,B\in\mathbb{Z}$. Tính $A+B$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\pi^2\Rightarrow t=\pi.\end{cases}$

Suy ra $I=2\int\limits_0^{\pi}(\sin t-\cos t)\,t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=t\\ \mathrm{d}v=(\sin t-\cos t)\,\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=-\cos t-\sin t.\end{cases}$

$$I=2\left[t(-\cos t-\sin t)\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}(\cos t+\sin t)\,\mathrm{d}t\right]=2\left[\pi+(\sin t-\cos t)\Big|_0^{\pi}\right]=4+2\pi.$$

Vậy $A=4;B=2\Rightarrow A+B=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 141. Cho $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x=m(\mathrm{e}^p-\mathrm{e}^q)$ với $m,p,q\in\mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m+p+q$ bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** $\dfrac{22}{3}$. **D.** 8.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int\limits_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}(3x-1)=\dfrac{1}{3}\cdot\mathrm{e}^{3x-1}\Big|_1^2=\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2)$.

Suy ra $m=\dfrac{1}{3}, p=5$ và $q=2$.

Vậy $m+p+q=\dfrac{22}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 142. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int\limits_{-1}^{1}|x|^3\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x\right|$.

B. $\int\limits_{-1}^{2018}\left|x^4-x^2+1\right|^3\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2018}\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_{-2}^{3}\left|\mathrm{e}^x(x+1)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{3}\mathrm{e}^x(x+1)^3\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $x^4-x^2+1=x^4-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x^2+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $\int\limits_{-1}^{2018}\left|x^4-x^2+1\right|^3\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2018}\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 143. Tích phân $\int\limits_{1}^{2}[4f(x)-2x]\mathrm{d}x=1$. Khi đó $\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{1}^{2}[4f(x)-2x]\mathrm{d}x=1\\ \Leftrightarrow\ &4\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_{1}^{2}x\mathrm{d}x=1\\ \Leftrightarrow\ &4\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x-2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=1\\ \Leftrightarrow\ &4\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=4\\ \Leftrightarrow\ &\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 144. Tích phân $\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+\dfrac{c}{3}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^2+b^2+c^2=1$. **B.** $a^2+b^2+c^2=11$. **C.** $a^2+b^2+c^2=9$. **D.** $a^2+b^2+c^2=3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_{1}^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x$, đặt $t=\ln x+2\Rightarrow dt=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận tích phân: Khi $x=1\Rightarrow t=2$; $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=3$.

Vậy $I=\int\limits_{2}^{3}\dfrac{t-2}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_{2}^{3}(\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t^2})\mathrm{d}t=(\ln t+\dfrac{2}{t})\Big|_2^3=\ln 3-\ln 2-\dfrac{1}{3}$.

Suy ra $a=1,b=-1,c=-1$. Vậy $a^2+b^2+c^2=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 145. Cho tích phân $I=\int\limits_0^1 \sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}x$. Với cách đặt $t=\sqrt[3]{1-x}$ ta được

A. $I=3\int\limits_0^1 t^3\,\mathrm{d}t$. **B.** $I=3\int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int\limits_0^1 t^3\,\mathrm{d}t$. **D.** $I=3\int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{1-x}\Rightarrow x=1-t^3\Rightarrow \mathrm{d}x=-3t^2\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=0\\ x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$

$\Rightarrow I=-3\int\limits_1^0 t^3\,\mathrm{d}t=3\int\limits_0^1 t^3\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án A □

Câu 146. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x(\ln x+2)}\,\mathrm{d}x=a\ln\dfrac{3}{2}+b$, $(a,\,b\in\mathbb{Q})$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=1$. **B.** $2a+b=1$. **C.** $a^2+b^2=4$. **D.** $a+2b=0$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u=\ln x+2\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\\ \ln x=u-2.\end{cases}$

Đổi cận: $x=1\to u=2$; $x=\mathrm{e}\to u=3$.

Khi đó $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x(\ln x+2)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\dfrac{u-2}{u}\,\mathrm{d}u=(u-2\ln|u|)\Big|_2^3=-2\ln\dfrac{3}{2}+1$.

Vậy $\begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}\Rightarrow a+2b=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 147. Cho $\int\limits_4^{16} f(x)\,\mathrm{d}x=20$. Tính $\int\limits_1^4 f(4x)\,\mathrm{d}x$.

A. 80. **B.** 24. **C.** 5. **D.** 16.

✍ **Lời giải.**

$\int\limits_1^4 f(4x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\int\limits_1^4 f(4x)\,\mathrm{d}(4x)=\dfrac{1}{4}\cdot 20=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 148. Biết $\int\limits_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x=3$, $\int\limits_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x$ nên $I=\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 149. Biết $\displaystyle\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 4$. Tính $S = a^2+b^2+c^2$.

A. $S=2$. **B.** $S=3$. **C.** $S=4$. **D.** $S=5$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+1}$. Khi đó $t^2 = x+1$ hay $x = t^2-1$. Suy ra $2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Với $x=3$ thì $t=2$ và với $x=8$ thì $t=3$.

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)t} = \int_2^3 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t-1)(t+1)} = \int_2^3 \frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}\mathrm{d}t = \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^3 = \ln\frac{2}{4} - \ln\frac{1}{3} = \ln 2 + \ln 3 - \ln 4. \end{aligned}$$

Suy ra $a=1$, $b=1$, $c=-1$. Do đó $S = 1^2+1^2+(-1)^2 = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 150. Cho $\displaystyle\int_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x = 2$, khi đó $\displaystyle\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 4.

Lời giải.

- Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$.
- $\displaystyle\int_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^5 f(t)\mathrm{d}t$ nên $\displaystyle\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = \int_2^5 f(t)\mathrm{d}t = 4$.

Chọn đáp án D □

Câu 151. Biết $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x = a + \ln\frac{b}{2}$ với a,b là các số nguyên. Tính $S = a-2b$.

A. $S=-2$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2$. **D.** $S=10$.

Lời giải.

$$\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_3^5 \left(x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2+\ln|x+1|\right)\Big|_3^5 = 8+\ln\frac{3}{2}.$$

Vậy $a-2b=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 152. Tích phân $\displaystyle\int_1^2 e^x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $e-e^2$. **B.** e^2-e. **C.** e. **D.** e^{-1}.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 e^x\,\mathrm{d}x = e^x\big|_1^2 = e^2-e$.

Chọn đáp án B □

Câu 153. Nếu $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\displaystyle\int_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$ thì $\displaystyle\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 12. **D.** -6.

✍ Lời giải.

Ta có $\int\limits_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_5^7 f(x)\,\mathrm{d}x = 3+9 = 12.$

Chọn đáp án C □

Câu 154. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7, \int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị của $P = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x.$

A. $P = 3.$ **B.** $P = 1.$ **C.** $P = 4.$ **D.** $P = 2.$

✍ Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow P = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 7-3 = 4.$

Chọn đáp án C □

Câu 155. Giả sử $\int\limits_1^2 \dfrac{x}{1+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = a + b\ln c$. Tính $S = 3a+2b+c$.

A. $S = 5.$ **B.** $S = 1.$ **C.** $S = 8.$ **D.** $S = 11.$

✍ Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2+1 = x \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \left(\frac{t^2+1}{1+t}\cdot 2t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^1 \left(2t^2-2t+4-\frac{4}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{2}{3}t^3 - t^2 + 4t - 4\ln|t+1|\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{11}{3} - 4\ln 2\end{aligned}$$

Do đó $a = \dfrac{11}{3}, b = -4, c = 2 \Rightarrow S = 3a+2b+c = 5.$

Chọn đáp án A □

Câu 156. Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó $a-b$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** -4. **D.** 4.

✍ Lời giải.

Ta có $b\sqrt{2}+a = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(x+1) = 2\sqrt{x+1}\Big|_0^1 = 2\sqrt{2}-2.$

Do đó $a = -2, b = 2 \Rightarrow a-b = -4.$

Chọn đáp án C □

Câu 157. Nếu $\int\limits_a^d f(x)\,\mathrm{d}x = 5$, $\int\limits_b^d f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, với $a < d < b$ thì $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 0.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_d^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^d f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^d f(x)\,\mathrm{d}x = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 158. Cho số thực a thỏa mãn $\int\limits_{-1}^a e^{x+1}\,\mathrm{d}x = e^2 - 1$, khi đó a có giá trị bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_{-1}^a e^{x+1}\,\mathrm{d}x = e^{x+1}\Big|_{-1}^a = e^{a+1} - 1$.

Vậy yêu cầu bài toán tương đương $e^{a+1} - 1 = e^2 - 1 \Leftrightarrow a = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 159. Tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó $a - b$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(x+1) = 2\sqrt{x+1}\Big|_0^1 = 2\sqrt{2} - 2.$$

Do đó $a = -2$, $b = 2$. Vậy $a - b = -4$.

Chọn đáp án C □

Câu 160. Giả sử $\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 37$ và $\int\limits_9^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 16$. Khi đó $I = \int\limits_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 122$. **B.** $I = 58$. **C.** $I = 143$. **D.** $I = 26$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I = \int\limits_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x &= 2\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_0^9 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_9^0 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2 \cdot 37 - 3 \cdot 16 = 26. \end{aligned}$$

Vậy $I = 26$.

Chọn đáp án D □

Câu 161. Giả sử $\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 37$ và $\int\limits_9^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 16$. Khi đó, $I = \int\limits_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 122$. **B.** $I = 58$. **C.** $I = 143$. **D.** $I = 26$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^9 [2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_0^9 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_9^0 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\times 37 - 3\times 16 = 26. \end{aligned}$$

Vậy $I = 26$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 162. Nếu $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ với $t = \sqrt{1+x}$ thì $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $f(t) = 2t^2 + 2t$. **B.** $f(t) = t^2 - t$. **C.** $f(t) = t^2 + t$. **D.** $f(t) = 2t^2 - 2t$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sqrt{1+x} \Rightarrow t^2 = 1+x \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ và $x = t^2 - 1$.

Đổi cận, $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó, $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{t^2-1}{1+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 (t-1)2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(2t^2-2t\right)\mathrm{d}t$.

Vậy $f(t) = 2t^2 - 2t$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 163. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[1;\mathrm{e}]$ biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1$, $f(\mathrm{e}) = 2$. Tính tích phân $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(x)\cdot \ln x\,\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

✍ **Lời giải.**

Đặt $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(x)\cdot \ln x\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Ta có $I = [f(x)\cdot \ln x]|_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = f(\mathrm{e}) - 1 = 2 - 1 = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 164. Cho b là số thực dương sao cho $\displaystyle\int_0^b x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\sqrt{b^2+1}}$. Tính b.

A. $b = 2\sqrt{2}$. **B.** $b = 3\sqrt{2}$. **C.** $b = 2\sqrt{3}$. **D.** $b = 3\sqrt{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$.

Khi $x = 0$ thì $t = 1$, khi $x = b$ thì $t = \sqrt{b^2+1}$, do đó

$$I = \int_0^b x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{b^2+1}} t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = \mathrm{e}^t. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= t\mathrm{e}^t\Big|_1^{\sqrt{b^2+1}} - \int_1^{\sqrt{b^2+1}} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{b^2+1}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{b^2+1}} - \mathrm{e} - \mathrm{e}^t\Big|_1^{\sqrt{b^2+1}} \\ &= \sqrt{b^2+1}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{b^2+1}} - \mathrm{e} - \mathrm{e}^{\sqrt{b^2+1}} + \mathrm{e} \\ &= \left(\sqrt{b^2+1}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{b^2+1}}. \end{aligned}$$

Suy ra $\left(\sqrt{b^2+1}-1\right) = 2 \Leftrightarrow b = \pm 2\sqrt{2}$, mà b dương nên $b = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 165. Cho $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị của tích phân $L = \int_0^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $L = 4$. **B.** $L = -1$. **C.** $L = -4$. **D.** $L = 1$.

✍ **Lời giải.**

$L = \int_0^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2\cdot 2 - 3 = 1.$

Chọn đáp án D □

Câu 166. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = xe^{x^2}$. Hàm số nào sau đây không phải là $F(x)$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + 2$. **B.** $F(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x^2} + 5\right)$. **C.** $F(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C$. **D.** $F(x) = -\frac{1}{2}\left(2 - e^{x^2}\right)$.

✍ **Lời giải.**

Ta thấy ở đáp án C thì $\left(-\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)' = -xe^{x^2} \neq xe^{x^2}$ nên hàm số ở đáp án C không là một nguyên hàm của hàm $y = xe^{x^2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 167. Cho $\int_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x = 2$, khi đó $I = \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 2, x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Khi đó: $\int_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^5 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int_2^5 f(t)\mathrm{d}t = 2\int_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x = 4.$

Mà tích phân không phụ thuộc vào biến nên: $I = \int_2^5 f(t)\mathrm{d}t = \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 4.$

Chọn đáp án D □

Câu 168. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(1) = 12, \int_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 17$. Tính giá trị của $f(4t) = ?$

A. $f(4)=19$. **B.** $f(4)=5$. **C.** $f(4)=29$. **D.** $f(4)=9$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C$ nên $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(4)-f(1)=17$.

Suy ra $f(4)=17+f(1)=17+12=29$.

Chọn đáp án C □

Câu 169. Cho hai tích phân $\int\limits_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_{5}^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $\int\limits_{-2}^{5}[f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=27$. **C.** $I=-11$. **D.** $I=3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{-2}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x=-3$

và $\int\limits_{-2}^{5}[f(x)-4g(x)-1]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x-4\int\limits_{-2}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-2}^{5}1\,\mathrm{d}x=8-4(-3)-7=13$.

Chọn đáp án A □

Câu 170. Tích phân $\int\limits_0^2 \dfrac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{7}{3}$. **B.** $\ln\dfrac{7}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^2 \dfrac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 \dfrac{\mathrm{d}(x^2+3)}{x^2+3}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3)\Big|_0^2=\dfrac{1}{2}\ln 7-\dfrac{1}{2}\ln 3=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 171. Biết $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c$ $(a,\ b,\ c\in\mathbb{Z})$. Giá trị $a+b-c$ bằng

A. 2. **B.** -4. **C.** 3. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x=(2x-3\ln|x+1|)\Big|_0^{\frac{1}{2}}\\ &= 1-3\ln\frac{3}{2}=1-3\ln 3+3\ln 2.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a=-3, b=3, c=1$.

Vậy $a+b-c=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 172. Cho tích phân $\int\limits_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{b}{c}+a\ln 2$ với a là số thực và b, c là các số nguyên dương, đồng thời $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=2a+3b+c$.

A. $P=6$. **B.** $P=-6$. **C.** $P=5$. **D.** $P=4$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$. Suy ra

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x}\Big|_1^2 \\ &= -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 2$ hay $P = 2a + 3b + c = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 173. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ và $f(0) = 1$. Tính $f(2)$.

A. $f(2) = 4\mathrm{e}^2 + 1$. **B.** $f(2) = 2\mathrm{e}^2 + 1$. **C.** $f(2) = 3\mathrm{e}^2 + 1$. **D.** $f(2) = \mathrm{e}^2 + 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$f(2) - f(0) = \int_0^2 f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 (x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x\Big|_0^2 = 2\mathrm{e}^2.$$

Suy ra $f(2) = 2\mathrm{e}^2 + f(0) = 2\mathrm{e}^2 + 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 174. Biết $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x = a\ln|x-1| + b\ln|x-2| + C$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

A. $a + b = 1$. **B.** $a + b = 5$. **C.** $a + b = -5$. **D.** $a + b = -1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x &= \int \frac{-2(x-2) + 3(x-1)}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

Suy ra $a = -2$, $b = 3$ và $a + b = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 175. Cho $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1$, $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = -4$. Tính $I = \displaystyle\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 5$. **B.** $I = -5$. **C.** $I = -3$. **D.** $I = 3$.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x = -5.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 176. Có hai giá trị của số thực a là a_1 và a_2 $(0 < a_1 < a_2)$ thỏa mãn $\int\limits_1^a (2x-3)\,\mathrm{d}x = 0$. Hãy tính $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)$.

A. $T = 26$. **B.** $T = 12$. **C.** $T = 13$. **D.** $T = 28$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^a (2x-3)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow (x^2-3x)\big|_1^a = 0 \Leftrightarrow a^2-3a+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 2. \end{array}\right.$

Vậy $T = 13$.

Chọn đáp án C □

Câu 177. Biết $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{3}}{a}\pi - \ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b$.

A. $T = 9$. **B.** $T = 13$. **C.** $T = 7$. **D.** $T = 11$.

✍ **Lời giải.**

$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = (x\tan x)\big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,\mathrm{d}x = (x\tan x)\big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \ln(\cos x)\big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2.$

Vậy $a = 3$, $b = 2$ và do đó $T = 11$.

Chọn đáp án D □

Câu 178. Tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \dfrac{3\pi}{16}$. **B.** $I = -\dfrac{\pi}{16}$. **C.** $I = \dfrac{\pi}{16}$. **D.** $I = -\dfrac{3\pi}{16}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 179. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_2^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$, khi đó $\int\limits_0^2 [f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^2 [f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_2^0 g(x)\,\mathrm{d}x = 2+3 = 5.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 180. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$ và $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $P = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P=-4$. **B.** $P=10$. **C.** $P=7$. **D.** $P=4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \quad 7 = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x + 3 \Leftrightarrow P = 4.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 181. Biết $J = \displaystyle\int_1^4 x\log_2 x\,\mathrm{d}x = 16 - \frac{a}{b\ln 2}$ với $a,b \in \mathbb{N}^*; \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a+b$.

A. $T=11$. **B.** $T=19$. **C.** $T=13$. **D.** $T=17$.

✍ **Lời giải.**

Tính $J = \displaystyle\int_1^4 x\log_2 x\,\mathrm{d}x$.

+ Đặt $\begin{cases} u = \log_2 x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x\ln 2}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

$$J = \int_1^4 x\log_2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\log_2 x\right)\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{x\ln 2}\cdot\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 16 - \frac{1}{2\ln 2}\int_1^4 x\,\mathrm{d}x$$

$$= 16 - \frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^4$$

$$= 16 - \frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{15}{2} = 16 - \frac{15}{4\ln 2} \Rightarrow a=15; b=4.$$

Vậy $T = a+b = 19$.

Chọn đáp án B □

Câu 182. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^{2017} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(2017x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1}{2017}$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = 2017$. **D.** $I = 1$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 2017x \Rightarrow \dfrac{1}{2017}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 2017$.

$I = \int\limits_0^1 f(2017x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2017}\int\limits_0^{2017} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2017}\int\limits_0^{2017} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2017}$.

Chọn đáp án A □

Câu 183. Cho tích phân $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = a$. Hãy tính tích phân $I = \int\limits_0^1 xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I = 4a$. **B.** $I = \dfrac{a}{4}$. **C.** $I = \dfrac{a}{2}$. **D.** $I = 2a$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $I = \int\limits_0^1 xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(t)\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{2} = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{a}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 184. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int\limits_3^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** -1. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_3^1 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = -\int\limits_1^3 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = -\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -1 + 2\cdot 3 = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 185. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Biết $F(1) = 2$, giá trị của $F(0)$ bằng

A. $2 + \ln 2$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2 + \ln(-2)$. **D.** $\ln(-2)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) \Rightarrow F(0) = F(1) - \int\limits_0^1 \dfrac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = 2 + \ln 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 186. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^{\pi^2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$. Tính $I = \int\limits_0^{\pi} xf(x^2)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 1008$. **B.** $I = 2019$. **C.** $I = 2017$. **D.** $I = 1009$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \pi \Rightarrow t = \pi^2$.

Khi đó, ta có

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi^2} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi^2} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2018=1009.$$

Chọn đáp án D □

Câu 187. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Xét $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=2$. Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$ và $x=1\Rightarrow t=2$.

Khi đó, $2=\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(t)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t\Rightarrow\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=4$.

Vậy $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$.

Chọn đáp án D □

Câu 188. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=10$, thì $\int\limits_0^3 f(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 30. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0, x=3\Rightarrow t=6$.

Vậy $I=\int\limits_0^3 f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 189. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0)=f(1)=5$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. **B.** $I=-5$. **C.** $I=0$. **D.** $I=5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I=\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}f(x)=\mathrm{e}^{f(x)}\Big|_0^1=\mathrm{e}^{f(1)}-\mathrm{e}^{f(0)}=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 190. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=10$, $\int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tích phân $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 6.

✍ **Lời giải.**

Theo tính chất của tích phân, ta có: $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x=10-4=6$.

Vậy $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=6$.

Chọn đáp án D □

Câu 191. Cho $\int\limits_0^m (3x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^m (3x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow (x^3-x^2+x)\Big|_0^m=6\Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0\Leftrightarrow m=2$.

Vậy $m\in(0;4)$.

Chọn đáp án C □

Câu 192. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^2 \left(f(x)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

A. -18. **B.** -2. **C.** 18. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$10=\int\limits_0^2 \left(f(x)+3x^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+8\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 193. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^2 [f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3$, và $\int\limits_0^2 [2f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=8$. Tính $I=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases}\int\limits_0^2 [f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x=4\\ \int\limits_0^2 [2f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-3\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=4\\ 2\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4\\ \int\limits_0^2 g(x)\mathrm{d}x=0.\end{cases}$

Do đó $4=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3+\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 194. Cho tích phân $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=32$. Tính tích phân $J=\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $J=64$. **B.** $J=8$. **C.** $J=32$. **D.** $J=16$.

✍ Lời giải.

Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$.

Ta có $x=0 \Rightarrow t=0$, $x=2 \Rightarrow t=4$.

Suy ra

$$J=\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 f(t)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=16.$$

Chọn đáp án D □

Câu 195. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Tính $I=F(\mathrm{e})-F(1)$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\mathrm{e}$.

✍ Lời giải.

Ta có $I=F(\mathrm{e})-F(1)=\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 196. Cho $\displaystyle\int(x-2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^x+C$. Tính giá trị $a+b+c$.

A. -2. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 0.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=x-2\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x\end{cases}$, ta có

$$\int(x-2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x-2)\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x-2)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=(x-3)\mathrm{e}^x+C.$$

Từ đó suy ra $a=0$, $b=1$, $c=-3$. Vậy $a+b+c=0+1+(-3)=-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 197. Cho $\displaystyle\int\limits_1^2 f(x^2+1)x\,\mathrm{d}x=2$. Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** -1.

✍ Lời giải.

Đặt $t=x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\ x=2\Rightarrow t=5\end{cases}$. Suy ra

$$2=\int\limits_1^2 f(x^2+1)x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_2^5 f(t)\,\mathrm{d}t\Rightarrow\int\limits_2^5 f(t)\,\mathrm{d}t=4.$$

Vậy $I=\displaystyle\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^5 f(t)\,\mathrm{d}t=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 198. Nếu các số hữu tỉ a, b thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1(a\mathrm{e}^x+b)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}+2$ thì giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 (ae^x+b)\,\mathrm{d}x = (ae^x+bx)\Big|_0^1 = ae+b-a \qquad (1).$

Theo giả thiết, ta có $\int\limits_0^1 (ae^x+b)\,\mathrm{d}x = e+2 \qquad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a=1 \\ b-a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3. \end{cases}$

Vậy $a+b=4$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 199. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=12$, $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 17$. Tính $f(4)$.

A. 29. **B.** 9. **C.** 26. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(4)-f(1) \Rightarrow f(4) = 12+17 = 29.$

Chọn đáp án A ☐

Câu 200. Tích phân $\int\limits_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+3}$ bằng

A. $\log\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{225}$. **C.** $\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{15}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+3} = \ln|x+3|\Big|_0^2 = \ln\dfrac{5}{3}.$

Chọn đáp án C ☐

Câu 201. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 \dfrac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x.$

A. $I=\ln 5$. **B.** $I=\dfrac{\ln 5}{2}$. **C.** $I=2\ln 5$. **D.** $I=4\ln 5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_0^2 \dfrac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \dfrac{\mathrm{d}(2x+1)}{2x+1} = \ln|2x+1|\Big|_0^2 = \ln 5.$

Chọn đáp án A ☐

Câu 202. Cho $\int\limits_1^2 \dfrac{2}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với a,b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a+3b$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -5.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^2 \dfrac{2}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left|\dfrac{x}{x+2}\right|\Big|_1^2 = \ln\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{1}{3} = -\ln 2+\ln 3.$

$\Rightarrow a=-1$ và $b=1 \Rightarrow 2a+3b=1.$

Chọn đáp án B ☐

Câu 203. Cho $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$, khi đó $I = -\int_5^2 4f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 40. **C.** -40. **D.** -12.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = 4\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 40$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 204. Cho $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính giá trị của $I = \int_0^1 f(4x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{1}{4}$. **B.** $I = -2$. **C.** $I = -\dfrac{1}{4}$. **D.** $I = -\dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 4x \Rightarrow \mathrm{d}t = 4\mathrm{d}x$. Khi đó $I = \int_0^4 \dfrac{1}{4}f(t)\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 205. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;3]$ đồng thời $f(2) = 2$, $f(3) = 5$. Khi đó $\int_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 10. **D.** 7.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)]\Big|_2^3 = f(3) - f(2) = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 206. Cho tích phân $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2}\,\mathrm{d}x$ và $x = 4\sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$. **B.** $I = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$.

C. $I = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t)\,\mathrm{d}t$. **D.** $I = -16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $x = 4\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\Rightarrow \mathrm{d}x = 4\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = 2\sqrt{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$.

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sqrt{16 - 16\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 207. Tính tích phân $\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ được kết quả

A. $\dfrac{1}{6} - \ln 2$. **B.** $\dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2} + 4}{3}$. **D.** $\ln 2 - \dfrac{1}{6}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.
Đặt $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$.
Ta có $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{3}$.
Chọn đáp án B □

Câu 208. Cho biết $\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\displaystyle\int_0^5 f(t)\mathrm{d}t = 10$. Tính $\displaystyle\int_3^5 2f(z)\mathrm{d}z$.
A. -7. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 7.

✍ **Lời giải.**
Ta có $\displaystyle\int_3^5 2f(z)\mathrm{d}z = 2\int_0^5 f(z)\mathrm{d}z - 2\int_0^3 f(z)\mathrm{d}z = 2\cdot 10 - 2\cdot 3 = 14$.
Chọn đáp án B □

Câu 209. Cho tích phân $I=\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x$. Khi đặt $t=\sqrt{x^2+9}$ thì tích phân đã cho trở thành
A. $I=\displaystyle\int_3^5 t\,\mathrm{d}t$. **B.** $I=\displaystyle\int_0^4 t\,\mathrm{d}t$. **C.** $I=\displaystyle\int_0^4 t^2\mathrm{d}t$. **D.** $I=\displaystyle\int_3^5 t^2\mathrm{d}t$.

✍ **Lời giải.**
Ta có $t=\sqrt{x^2+9} \Rightarrow t^2 = x^2+9 \Rightarrow t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.
Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=3$, $x=4 \Rightarrow t=5$.
Khi đó $I=\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x = \int_3^5 t^2\mathrm{d}t$.
Chọn đáp án D □

Câu 210. Cho $I=\displaystyle\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t = 9$. Tính tích phân $J=\displaystyle\int_0^1 f(3x+1)\mathrm{d}x$.
A. 9. **B.** 27. **C.** 3. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**
Đặt $t=3x+1 \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=1 \Rightarrow t=4$.
Ta có $J=\displaystyle\int_0^1 f(3x+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cdot I = 3$.
Chọn đáp án C □

Câu 211. Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x = \frac{a}{4} - 4\ln\frac{4}{b}$, với a,b là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng
A. 25. **B.** 41. **C.** 20. **D.** 34.

✍ **Lời giải.**
Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2+2x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{(x+3)^2-4(x+3)+3}{(x+3)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[1 - \frac{4}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \left(x - 4\ln|x+3| - \frac{3}{x+3}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{4} - 4\ln\frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $a^2+b^2=34$.
Chọn đáp án D □

Câu 212. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^{2017} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 f(2017x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 0$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = \dfrac{1}{2017}$. **D.** $I = 2017$.

✍ Lời giải.

Đặt $t = 2017x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2017\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2017}\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 2017$.

Khi đó $I = \dfrac{1}{2017}\int\limits_0^{2017} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2017}\cdot 1 = \dfrac{1}{2017}$.

Chọn đáp án C □

Câu 213. Cho $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_{2}^{-1} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{2}[x + 2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{21}{2}$. **B.** $\dfrac{26}{2}$. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I = \int\limits_{-1}^{2}[x + 2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_{2}^{-1} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2} + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 = \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 214. Biết $\int\limits_3^5 \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}\,\mathrm{d}x = a + \ln\dfrac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

A. $S = 2$. **B.** $S = -2$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 10$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int\limits_3^5 \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_3^5 \left(x + \dfrac{1}{x + 1}\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^2}{2} + \ln|x + 1|\right)\Big|_3^5 = 8 + \ln\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a = 8$, $b = 3$ và $S = a - 2b = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 215. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}}\,\mathrm{d}x = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b$.

A. $S = 1$. **B.** $S = \dfrac{1}{2}$. **C.** $S = \dfrac{3}{4}$. **D.** $S = \dfrac{2}{3}$.

✍ Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{1 + \ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + \ln x \Rightarrow \ln x = t^2 - 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 1$, $x = \mathrm{e} \Rightarrow t = \sqrt{2}$.

Khi đó, $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \dfrac{(t^2 - 1)2t}{t}\,\mathrm{d}t = \left(\dfrac{2t^3}{3} - 2t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{2}$.

Vậy $a = \dfrac{4}{3}$, $b = -\dfrac{2}{3}$ và $S = a + b = \dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 216. Cho $\int\limits_1^{13} f(x)\,\mathrm{d}x = 2019$. Tính $\int\limits_0^4 f(3x+1)\,\mathrm{d}x$.

A. -2019. **B.** 2019. **C.** 6057. **D.** 673.

Lời giải.

Đặt $t = 3x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 4 \Rightarrow t = 13$.

$$\int\limits_0^4 f(3x+1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{13} f(t)\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cdot 2019 = 673.$$

Chọn đáp án D □

Câu 217. Tính tích phân $\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$ ta được kết quả

A. $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. **C.** $\dfrac{2\mathrm{e}^2+1}{4}$. **D.** $\dfrac{2\mathrm{e}^2-1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $u = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x, \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$.

Suy ra $\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{x}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{x^2}{4}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 218. Cho $\int\limits_1^5 \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| \mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $P = abc$ là

A. $P = -36$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = 18$. **D.** $P = -18$.

Lời giải.

Ta thấy $\int \dfrac{x-2}{x+1}\mathrm{d}x = \int \left(1 - \dfrac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x = x - 3\ln|x+1| + C$. (1)

Ta có $\int\limits_1^5 \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| \mathrm{d}x = -\int\limits_1^2 \dfrac{x-2}{x+1}\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 \dfrac{x-2}{x+1}\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} 2 + 3\ln 3 - 6\ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow P = -36.$

$c = 2$

Chọn đáp án A □

Câu 219. Cho $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tìm tất cả các giá trị của a để

$$\int\limits_2^3 [a + 2ax + 3f(x)]\,\mathrm{d}x - \int\limits_2^3 (a-2)g(x)\,\mathrm{d}x = 10.$$

A. 2. **B.** -3. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 10 &= [ax+ax^2]\big|_2^3 + 3\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x - (a-2)\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a+5a+3-(a-2)\cdot 5 \\ &= a+13 \Rightarrow a=-3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 220. Cho $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int_1^2 [3f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$, khi đó $\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 17. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -4.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_1^2 [3f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 3\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3\cdot 3 - \int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 9 - \int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

Chọn đáp án C □

Câu 221. Tính tích phân $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$. **B.** $I = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $I = 2\sqrt{2}-1$. **D.** $I = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\left(x^2+1\right) = \dfrac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 222. Biết $\int_0^1 \dfrac{x^3+2x^2+3}{x+2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} + b\ln\dfrac{3}{2}$ với a, $b>0$. Tính giá trị của $S = a+2b$.

A. $S=5$. **B.** $S=6$. **C.** $S=9$. **D.** $S=3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_0^1 \dfrac{x^3+2x^2+3}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2+\dfrac{3}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + 3\ln|x+2|\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3} + 3\ln\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a=3$, $b=3$ nên $S = a+2b = 9$.

Chọn đáp án C □

Câu 223. Cho $\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$, khi đó $\int_{-1}^2 [x+2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{17}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}[x+2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2}x\,\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x+3\int_{-1}^{2}g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}+2\cdot 2+3\cdot(-1)\\ &= \frac{3}{2}+4-3=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 224. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^5\frac{\mathrm{d}x}{1-2x}$.

A. $I=-\ln 9$. **B.** $I=\ln 9$. **C.** $I=-\ln 3$. **D.** $I=\ln 3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}I &= \int_1^5\frac{\mathrm{d}x}{1-2x}=-\frac{1}{2}\int_1^5\frac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x}\\ &= -\frac{1}{2}\ln|1-2x|\Big|_1^5=-\frac{1}{2}(\ln 9-\ln 1)=-\ln 3.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 225. Cho $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=5$ và $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=-3$. Khi đó $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 15. **C.** -8. **D.** -15.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=-5-3=-8.$

Chọn đáp án C □

Câu 226. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(-1)=-2$, $f(3)=2$. Tính $I=\displaystyle\int_{-1}^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=4$. **B.** $I=3$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int_{-1}^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{-1}^3=f(3)-f(-1)=4$

Chọn đáp án A □

Câu 227. Cho hàm số $f(x)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}}\left(4t^3-8t\right)\mathrm{d}t$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;6]$. Tính $M-m$.

A. 16. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\int\limits_1^{\sqrt{x}}\left(4t^3-8t\right)\mathrm{d}t=\left(t^4-4t^2\right)\Big|_1^{\sqrt{x}}=x^2-4x+3.$

$y'=2x-4, y'=0\Leftrightarrow x=2\in[1;6].$

$y(1)=0, y(2)=-1, y(6)=15.$

Suy ra $m=-1$, $M=15$, $M-m=16$.

Chọn đáp án A □

Câu 228. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(2)=4$ và $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int\limits_0^2 x\cdot f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=3$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=9$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x).\end{cases}$

Ta có $I=xf(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-5=3.$

Chọn đáp án B □

Câu 229. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$ và $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x=3$, khi đó $\int\limits_0^1[3f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -9. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_0^1[3f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x=3\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x=9.$$

Chọn đáp án C □

Câu 230. Biết $I=\int\limits_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x=ae^3+b$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $9(a+b)$ bằng

A. 3. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 6.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}$ ta có $\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^3}{3}.\end{cases}$

Suy ra $I=\dfrac{x^3\ln x}{3}\Big|_1^e-\int\limits_1^e\dfrac{x^2}{3}\mathrm{d}x=\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{x^3}{9}\Big|_1^e=\dfrac{2}{9}\cdot e^3+\dfrac{1}{9}.$

Vậy $a=\dfrac{2}{9}$, $b=\dfrac{1}{9}$ nên $9(a+b)=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 231. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int\limits_1^5 2f(x)\mathrm{d}x=6$, khi đó $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^5 2f(x)\,\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow \int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3.$

Do đó $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -2+3 = 1.$

Chọn đáp án A □

Câu 232. Cho biết $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ, thì

A. $a+b=\dfrac{1}{2}$. **B.** $a+b=\dfrac{3}{2}$. **C.** $a+b=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $a+b=\dfrac{5}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{1}{2}x^2+\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}+\ln 2.$

Do đó $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$, $a+b=\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 233. Cho biết $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2$, trong đó a, b là hai số hữu tỉ, thì

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=1$. **C.** $a+b=3$. **D.** $a+b=-1$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\ v=x+1. \end{cases}$

Ta có $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\,\mathrm{d}x = a+b\ln 2 = (x+1)\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 1\,\mathrm{d}x = -1+2\ln 2.$

Do đó $a=-1$, $b=2$, $a+b=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 234. Cho $\int\limits_0^1 (x+2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}+b$ với a, b là số nguyên. Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=-1$. **B.** $S=10$. **C.** $S=5$. **D.** $S=0$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} x+2=u \\ \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\mathrm{e}^x \end{cases}$, ta có

$$\int\limits_0^1 (x+2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x+2)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}-2-\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 3\mathrm{e}-2-\mathrm{e}+1 = 2\mathrm{e}-1.$$

Do đó $a=2$, $b=-1$, $S=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 235. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$, $\forall x\in[1;3]$ và $\int_1^3 xf(x)\,\mathrm{d}x = -2$. Giá trị $2\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=4-x \Rightarrow x=4-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, với $x=1 \Rightarrow t=3$, $x=3 \Rightarrow t=1$. Ta có

$$-2=\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=-\int_3^1 (4-t)f(4-t)\mathrm{d}t=\int_1^3 (4-t)f(t)\mathrm{d}t=4\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+2.$$

Vậy $2\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=-2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 236. Biết rằng $\displaystyle\int_1^a \ln x\,\mathrm{d}x=1+2a$, $(a>1)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $a\in(18;21)$. **B.** $a\in(1;4)$. **C.** $a\in(11;14)$. **D.** $a\in(6;9)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_1^a \ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_1^a-\int_1^a x\,\mathrm{d}(\ln x)=x\ln x\Big|_1^a-\int_1^a \mathrm{d}x=a\ln a-a+1$.

Suy ra $a\ln a-a+1=1+2a \Leftrightarrow \ln a=3 \Leftrightarrow a=\mathrm{e}^3\approx 20\in(18;21)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 237. Cho $\displaystyle\int_0^1 (x+3)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=a+b\mathrm{e}$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a\cdot b=6$. **B.** $a\cdot b=-6$. **C.** $a+b=-5$. **D.** $a+b=-1$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u=x+3 \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \Rightarrow v=\mathrm{e}^x$.

Khi đó $I=(x+3)\cdot\mathrm{e}^x\Big|_0^1-\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=4\mathrm{e}-3-\mathrm{e}^x\Big|_0^1=-2+3\mathrm{e}$.

Vậy $a=-2$, $b=3$. Do đó $a\cdot b=-6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 238. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x=10$ thì $\displaystyle\int_0^3 f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 30. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_0^3 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^3 f(2x)2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^3 f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 10=5.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 239. Tích phân $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^2}{2}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$. **C.** $\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^2$. **D.** $2\left(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^2\right)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^2\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 240. Biết $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+2}{x}\mathrm{d}x=a+b\ln c$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$, $c<9$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=6$. **B.** $S=7$. **C.** $S=5$. **D.** $S=8$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+2}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^3\left(1+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=(x+2\ln x)\Big|_1^3=2+2\ln 3=a+b\ln c$.

$\Rightarrow a=2,\ b=2,\ c=3\Rightarrow a+b+c=7$.

Chọn đáp án B □

Câu 241. Nếu $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}+\ln|x|+C$ thì $f(x)$ là

A. $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\ln|x|$. **B.** $f(x)=\sqrt{x}+\ln|x|$. **C.** $f(x)=-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$. **D.** $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F'(x)=\left(\dfrac{1}{x}+\ln|x|+C\right)'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=f(x)$.

Chọn đáp án D □

Câu 242. Cho $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=1,\int_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t=-4$. Tính $I=\displaystyle\int_2^4 f(y)\,\mathrm{d}y$.

A. $I=5$. **B.** $I=3$. **C.** $I=-3$. **D.** $I=-5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2} f(y)\,\mathrm{d}y=1,\int_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-2}^{4} f(y)\,\mathrm{d}y=-4$.

Vậy $\displaystyle I=\int_2^4 f(y)\,\mathrm{d}y=\int_{-2}^{4} f(y)\,\mathrm{d}y-\int_{-2}^{2} f(y)\,\mathrm{d}y=-4-1=-5$.

Chọn đáp án D □

Câu 243. Kết quả của tích phân $\displaystyle I=\int_1^2(2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=2\ln 2$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=2\ln 2-\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=2\ln 2+\dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=(2x-1)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=x^2-x.\end{cases}$

Ta có $\displaystyle I=\int_1^2(2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x=(x^2-x)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2(x-1)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 244. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_{-5}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=9$. Tính $\displaystyle\int_0^2(f(1-3x)+9)\,\mathrm{d}x$.

A. 27. **B.** 15. **C.** 75. **D.** 21.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1-3x\Rightarrow \mathrm{d}t=-3\mathrm{d}x$.

Đổi cận

x	0	2
t	1	−5

Ta có

$$\int_0^2 (f(1-3x)+9)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(1-3x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 9\,\mathrm{d}x = 18 + \frac{1}{3}\int_{-5}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 18 + \frac{1}{3}\int_{-5}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 21.$$

Chọn đáp án D □

Câu 245. Nếu $\int_{-2}^{0}\left(4-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x = a+2b\mathrm{e}$ thì giá trị của $a+2b$ là

A. 12. **B.** 9. **C.** 12,5. **D.** 8.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_{-2}^{0}\left(4-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x = 4x|_{-2}^{0} + 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\Big|_{-2}^{0} = 8+2(1-\mathrm{e}) = 10-2e$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow a+2b = 8.$$

Chọn đáp án D □

Câu 246. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) = 2x+1$. Giá trị $f(2)-f(1)$ bằng

A. 4. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Ta thấy $f(2)-f(1) = \int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 (2x+1)\mathrm{d}x = 4.$

Chọn đáp án A □

Câu 247. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = 4$, $\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x = -3$. Giá trị của $\int_0^2 [f(v)-3]\,\mathrm{d}v$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^6 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^6 f(x)\mathrm{d}x - \int_2^6 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 7.$$

Ta thấy $\int_0^2 [f(v)-3]\,\mathrm{d}v = \int_0^2 f(v)\mathrm{d}v - 3\int_0^2 \mathrm{d}v = 7-6 = 1.$

Chọn đáp án A □

Câu 248. Tính tích phân $I = \int_1^2 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

A. $I = \mathrm{e}$. **B.** $I = -\mathrm{e}^2$. **C.** $I = \mathrm{e}^2$. **D.** $I = 3\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$.

Khi đó $I = \int\limits_1^2 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\right) = \mathrm{e}^2$.

Chọn đáp án C □

Câu 249. Cho $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -2$, $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 5$. Khi đó $\int\limits_{-1}^{3} 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -14. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 6.

✍ **Lời giải.**

Ta có $2\int\limits_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 2\left(\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x\right) = 2(-2+5) = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 250. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$, $\int\limits_1^2 2f(x)\mathrm{d}x = 200$. Khi đó $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 104. **B.** 204. **C.** 196. **D.** 96.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^5 2f(x)\mathrm{d}x = 200 \Leftrightarrow 2\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 200 \Leftrightarrow \int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 100$.

Suy ra $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 96$.

Chọn đáp án D □

Câu 251. Cho tích phân $I = \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x \cdot f\left(\sqrt{3\cos x + 1}\right)}{\sqrt{3\cos x + 1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $-\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** -2.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sqrt{3\cos x + 1} \Rightarrow t^2 = 3\cos x + 1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = -3\sin x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \sin x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{2t\,\mathrm{d}t}{3}$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1. \end{cases}$

Khi đó ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x \cdot f\left(\sqrt{3\cos x + 1}\right)}{\sqrt{3\cos x + 1}}\mathrm{d}x = -\dfrac{2}{3}\int\limits_2^1 \dfrac{t \cdot f(t)}{t}\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}\int\limits_1^2 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 252. Giá trị của $I = \int \left(\dfrac{x^2 - 2}{x}\right) \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 2\ln^2 x + \dfrac{x^2}{2} \cdot \ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$.

B. $I = -\ln^2 x + \dfrac{x^2}{2} \cdot \ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$.

C. $I = \ln^2 x + \dfrac{x^2}{2} \cdot \ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$.

D. $I = \dfrac{\ln^2 x}{2} + \dfrac{x^2}{2} \cdot \ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\left(\dfrac{x^2-2}{x}\right)\ln x\,\mathrm{d}x=\int x\ln x\,\mathrm{d}x-2\int\dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=A-2B.$

— $A=\int x\ln x\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2}{2}.\end{cases}$

Khi đó $A=\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C.$

— $B=\int\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{\ln^2 x}{2}+C.$

Suy ra $I=A-2B=\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x-\dfrac{x^2}{4}-\ln^2 x+C=-\ln^2 x+\dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C.$

Chọn đáp án B □

Câu 253. Giả sử $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=3$ với $a<b<c$ thì $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x&=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\\&=2-3=-1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 254. Cho tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2$ với $a,\,b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a+b=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $2a-b=0$. **D.** $a+2b=0$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\cos x+2\Rightarrow\mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x\Rightarrow\sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t.$

Đổi cận $\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{5}{2}\\ t=2.\end{cases}$

Suy ra $a\ln 5+b\ln 2=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{2}\dfrac{-\mathrm{d}t}{t}=-\ln|t|\Big|_{\frac{5}{2}}^{2}=-\left(\ln 2-\ln\dfrac{5}{2}\right)=\ln 5-2\ln 2.$

Do đó $a=1$, $b=-2$ nên $2a+b=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 255. Biết $I=\int\limits_1^2\dfrac{x^2+2x}{x+1}\mathrm{d}x=\dfrac{5}{a}+\ln b-\ln c$. Tính giá trị biểu thức $S=a-b+c$.

A. $S=7$. **B.** $S=3$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=1$.

✍ Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{x^2+2x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|\right)\Big|_1^2=\frac{5}{2}+\ln 2-\ln 3.$

Suy ra $a=2,\ b=2$ và $c=3$. Do đó $S=a-b+c=2-2+3=3$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 256. Cho $\displaystyle\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $\displaystyle\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=-5$, khi đó $\displaystyle\int\limits_0^2[3f(x)+4g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 29. **B.** -3. **C.** -11. **D.** 4.

✍ Lời giải.

Ta thấy

$$\int\limits_0^2[3f(x)+4g(x)]\,\mathrm{d}x=3\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+4\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=3\cdot 3+4\cdot(-5)=-11.$$

Chọn đáp án C ☐

Câu 257. Cho $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-1$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=1$. Khi đó $\displaystyle\int\limits_0^1[f(x)-7g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -8. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 8.

✍ Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1[f(x)-7g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-7\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=-8.$

Chọn đáp án A ☐

Câu 258. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1;4]$, $f(4)=2017$, $\displaystyle\int\limits_{-1}^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=2016$. Giá trị của $f(-1)$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=2016 &\Leftrightarrow f(4)-f(-1)=2016\\ &\Leftrightarrow f(-1)=f(4)-2016\\ &\Leftrightarrow f(-1)=1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 259. Cho $\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=12$, giá trị của $I=\displaystyle\int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=24$. **B.** $I=10$. **C.** $I=6$. **D.** $I=14$.

✍ Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_2^6 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=2\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=24.$

Chọn đáp án A ☐

Câu 260. Tính tích phân $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 2x\,\mathrm{d}x.$

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 261. Tích phân $\int_0^1 (3x^2+1)\,\mathrm{d}x$.

A. -6. **B.** 2. **C.** 6. **D.** -2.

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^1 (3x^2+1)\,\mathrm{d}x = (x^3+x)\Big|_0^1 = 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 262. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;1]$ thỏa mãn $\int_{-1}^1 f'(x)\mathrm{d}x = 5$ và $f(-1) = 4$. Tìm $f(1)$?

A. $f(1) = -1$. **B.** $f(1) = 1$. **C.** $f(1) = 9$. **D.** $f(1) = -9$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_{-1}^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(1) - f(-1) = 5$, suy ra $f(1) = 5 + f(-1) = 9$.

Chọn đáp án C □

Câu 263. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-9}$.

A. $I = \frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}$. **B.** $I = -\frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}$. **C.** $I = \frac{1}{6}\ln 2$. **D.** $I = \ln\sqrt[6]{2}$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-9} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6}\int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6}\left(\ln|x-3| - \ln|x+3|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{6}\ln\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 264. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a) = 2, f(b) = -4$. Tính $T = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$.

A. $T = -2$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = -6$. **D.** $T = 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $T = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a) = -4 - 2 = -6$.

Chọn đáp án C □

Câu 265. Cho hàm số $f(x)=A\sin(\pi x)+Bx^2$ (A,B là các hằng số) và $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{8}{3}$. Tính B.

A. 1. **B.** -1. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^2 \left[A\sin(\pi x)+Bx^2\right]\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\Leftrightarrow -\frac{A}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^2+\frac{Bx^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow B=1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 266. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=12$, $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $\int\limits_1^4 f'(x)\mathrm{d}x=17$. Tính $f(4)$.

A. 29. **B.** 9. **C.** 26. **D.** 5.

Lời giải.

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)\mathrm{d}x=f(4)-f(1)\Rightarrow f(4)=12+17=29$.

Chọn đáp án A □

Câu 267. Đổi biến $x=2\sin t$ thì tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành

A. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} t\mathrm{d}t$. **B.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} t\mathrm{d}t$. **C.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}t$. **D.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$.

Lời giải.

Xét $I=\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Đặt $x=2\sin t$ với $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận:

$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow t=0.\\ x=1 &\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Ta có:

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{\sqrt{4\cos^2 t}}\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}t.$$

Chọn đáp án C □

Câu 268. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{4x^2-4x+1}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ thì a,b là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $x^2-5x+6=0$. **B.** $x^2+4x-12=0$. **C.** $2x^2-x-1=0$. **D.** $x^2-9=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-4x+1} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(2x-1)^2} = -\frac{1}{2(2x-1)}\Big|_1^2 = -\frac{1}{6}+\frac{1}{2} \Rightarrow a=-6; b=2.$$

$\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình $x^2+4x-12=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 269. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_{-1}^{5}[2f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x = 16$ và $\int_{-1}^{5}[f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x = -1$. Tính $\int_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 5.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int_{-1}^{5}[2f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x = 16 \Leftrightarrow 2\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x + 3\int_{-1}^{5} g(x)\mathrm{d}x = 16 \quad (1)$$

$$\int_{-1}^{5}[f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x = -1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^{5} g(x)\mathrm{d}x = -1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} \int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 5 \\ \int_{-1}^{5} g(x)\mathrm{d}x = 2 \end{cases}$.

Xét $I = \int_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$. Với $x=-1 \Rightarrow t=-1$; $x=2 \Rightarrow t=5$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{5} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 270. Biết $\int_1^2 \ln(2x+1)\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln 5 + \frac{b}{2}\ln 3 + c$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a+2b+c$.

A. $T=12$. **B.** $T=2$. **C.** $T=10$. **D.** $T=-2$.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2}{2x+1}\mathrm{d}x \\ v = x. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^2 \ln(2x+1)\,\mathrm{d}x &= x\ln(2x+1)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{2x}{2x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln 5 - \ln 3 - \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\ln 5 - \ln 3 - \left[x - \frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]\Big|_1^2 \\ &= \frac{5}{2}\ln 5 + \frac{-3}{2}\ln 3 - 1. \end{aligned}$$

Vậy $a = 5$, $b = -3$, $c = -1$ suy ra $T = a + 2b + c = -2$.

Chọn đáp án D □

Câu 271. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ thỏa mãn $f'(x) > 0$, $\forall x \in [-1;3]$ và $f(3) = -1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 4.$ **B.** $f(-1) = 3.$

C. $\displaystyle\int_{-1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$ **D.** $\displaystyle\int_{-1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

Vì $\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in [-1;3] \\ f(3) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in [-1;3].$

Vậy $\displaystyle\int_{-1}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án C □

Câu 272. Cho $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Khi đó $\displaystyle\int_0^2 [4f(x) - 3]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 14. **C.** 8. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^2 [4f(x) - 3]\,\mathrm{d}x = 4\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int_0^2 \mathrm{d}x = 20 - 6 = 14.$

Chọn đáp án B □

Câu 273. Tích phân $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x-1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $2 - \ln 3.$ **B.** $1 + \ln 3.$ **C.** $\dfrac{2}{5}.$ **D.** $2 + \ln 3.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = (x + \ln(x-1))\Big|_2^4 = 2 + \ln 3.$

Chọn đáp án D □

Câu 274. Nếu $f(1)=12$, $f'(x)$ liên tục và $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=17$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. 19. **B.** 5. **C.** 29. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=17 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^4=17 \Leftrightarrow f(4)-f(1)=17$ suy ra $f(4)=17+f(1)=29$.

Chọn đáp án C □

Câu 275. Tích phân $\int\limits_2^7 \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$ bằng $a\ln 2-b\ln 5$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $2a+b$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_2^7 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}=\int_2^7 \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_2^7=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 5.$$

Do đó $a=\dfrac{1}{2}$ và $b=-\dfrac{1}{2}$. Vậy $2a+b=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 276. Nếu $\int\limits_0^1 (x^2-mx)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-7$ thì giá trị của m là nghiệm của phương trình nào dưới đây?

A. $x^2+4\mathrm{e}x+36\mathrm{e}-81=0$. **B.** $x^2-5x+6=0$.

C. $x^2-8x-\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}+12=0$. **D.** $x^2-12x+35=0$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x^2-mx\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=(2x-m)\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x.\end{cases}$

Khi đó $I=(x^2-mx)\mathrm{e}^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1(2x-m)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=2x-m\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x.\end{cases}$

$I=(1-m)\mathrm{e}-\mathrm{e}^x(2x-m)\Big|_0^1+\int\limits_0^1 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(1-m-2+m)\mathrm{e}-m+2\mathrm{e}-2=\mathrm{e}-m-2\Rightarrow m=5$. Phương trình

$x^2-12x+35=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=7.\end{array}\right.$

Vậy giá trị $m=5$ là nghiệm của phương trình $x^2-12x+35=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 277. Biểu thức $I=\int\limits_2^3 \dfrac{2x-3}{x-1}\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $2+4\ln 2$. **B.** $5-4\ln 2$. **C.** $5+\ln 2$. **D.** $2-\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_2^3 \dfrac{2(x-1)-1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(2-\dfrac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=(2x-\ln|x-1|)\Big|_2^3=2-\ln 2$.

Chọn đáp án D □

Câu 278. Một chiếc xe đang chạy đều với vận tốc 20 m/s thì giảm phanh với vận tốc $v(t) = 20 - 2t$ m/s đến khi dừng hẳn. Quãng đường xe đi được từ lúc bắt đầu giảm phanh đến khi dừng hẳn là

A. 98 m . **B.** 94 m. **C.** 100 m. **D.** 96 m.

✍ **Lời giải.**

Ta có $v(0) = 20$ do đó thời điểm xe bắt đầu giảm phanh ứng với $t = 0$.

Xe dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 10$. Vậy quãng đường xe đi được từ lúc bắt đầu giảm phanh đến khi dừng hẳn là

$$S = \int_0^{10} v(t)\mathrm{d}x = \left(20t - t^2\right)\Big|_0^{10} = 100.$$

Chọn đáp án C □

Câu 279. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)x$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2) = 0$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{7}{60}$. **B.** $-\dfrac{127}{60}$. **C.** $\dfrac{113}{60}$. **D.** $-\dfrac{7}{60}$.

✍ **Lời giải.**

— $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + C$. Vì $f(2) = 0 \Rightarrow C = -2$.

— Khi đó $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2\right)\mathrm{d}x = -\frac{127}{60}$.

Chọn đáp án B □

Câu 280. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;3], f(3) = 5$ và $\displaystyle\int_1^3 f'(x)\mathrm{d}x = 6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. -1. **B.** 11. **C.** 1. **D.** 10.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int_1^3 f'(x)\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow f(3) - f(1) = 6 \Rightarrow f(1) = f(3) - 6$.

Vậy $f(1) = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 281. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a,b]$ và $c \in [a,b]$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

C. $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\mathrm{d}x \neq 0$. **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. Vậy đẳng thức $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\mathrm{d}x \neq 0$ sai.

Chọn đáp án C □

Câu 282. Cho $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{2} f(2x+1)\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = \dfrac{5}{2}$. **D.** $I = \dfrac{3}{2}$.

✍ Lời giải.

Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$ và bảng đổi cận

x	-1	5
t	-1	5

Ta có

$$\int\limits_{-1}^{5} f(2x+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{5} f(t)\mathrm{d}t = 2.$$

Chọn đáp án A □

Câu 283. Biết $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{b}{c} + a\ln 2$ (với a là số thực, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $2a+3b+c$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** -6.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Khi đó ta có $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = -\dfrac{\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int\limits_{1}^{2} \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{x}\Big|_1^2 = -\dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{b}{c} + a\ln 2.$

Do đó $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 2 \Rightarrow 2a+3b+c = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 284. Cho biết $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} xf(x^2)\mathrm{d}x = 4$, $\int\limits_{2}^{3} f(z)\mathrm{d}z = 2$, $\int\limits_{9}^{16} \dfrac{f\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2$. Tính $\int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

A. 10. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Ta có

— $4 = \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} xf(x^2)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} f(u)\mathrm{d}u \Rightarrow \int\limits_{0}^{2} f(u)\mathrm{d}u = 8$ hay $\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$.

— $2 = \int\limits_{9}^{16} \dfrac{f\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\int\limits_{3}^{4} f(u)\mathrm{d}u \Rightarrow \int\limits_{3}^{4} f(u)\mathrm{d}u = 1$ hay $\int\limits_{3}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Vậy $\int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d} + \int\limits_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{3}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 8+2+1 = 11.$

Chọn đáp án B □

Câu 285. Tích phân $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{2x+1}$ bằng

A. $\log\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{15}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{225}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \dfrac{1}{2}\ln(2x+1)\Big|_1^2 = \dfrac{1}{2}(\ln 5 - \ln 3) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 286. Giả sử hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên K và a,b,c là ba số bất kì thuộc K. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Khẳng định sai là: "$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$".

Chọn đáp án D □

Câu 287. Giá trị của b để $\int\limits_1^b (2x-6)\,\mathrm{d}x = 0$.

A. $b=0$ hoặc $b=1$. **B.** $b=0$ hoặc $b=3$. **C.** $b=1$ hoặc $b=5$. **D.** $b=5$ hoặc $b=0$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^b (2x-6)\,\mathrm{d}x = (x^2-6x)\Big|_1^b = b^2-6b+5$.

Do đó $\int\limits_1^b (2x-6)\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow b^2-6b+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=5. \end{array}\right.$

Chọn đáp án C □

Câu 288. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int\limits_0^2 (f(x)+1)\,\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

$\int\limits_0^2 (f(x)+1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 \mathrm{d}x = 3 + x|_0^2 = 3+2 = 5$.

Chọn đáp án B □

Câu 289. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{(x+1)\ln x + 2}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e} + b\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\right)$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính tỉ số $\dfrac{a}{b}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(x+1)\ln x+2}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x\ln x+1+1+\ln x}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \left(1+\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right)\mathrm{d}x\\ &= x\Big|_1^{\mathrm{e}}+\ln|1+x\ln x|\Big|_1^{\mathrm{e}}=\mathrm{e}-1+\ln|1+\mathrm{e}|\\ &= \mathrm{e}-\ln\mathrm{e}+\ln(1+\mathrm{e})=\mathrm{e}+\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\right).\end{aligned}$$

Suy ra $a=1$ và $b=1$ nên $\dfrac{a}{b}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 290. Cho tích phân $I=\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$. Viết dạng của I khi đặt $t=\sqrt{x+1}$.

A. $\displaystyle\int_1^2 (2t^2+2t)\,\mathrm{d}t$. **B.** $\displaystyle\int_1^2 (2t^2-2t)\,\mathrm{d}t$. **C.** $\displaystyle\int_1^2 (t^2-2t)\,\mathrm{d}t$. **D.** $\displaystyle\int_1^2 (2t^2-t)\,\mathrm{d}t$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận

x	0	3
t	1	2

Tích phân trở thành

$$I=\int_1^2 \frac{(t^2-1)2t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_1^2 \frac{(t-1)(t+1)2t}{t+1}\,\mathrm{d}t=\int_1^2 (t-1)2t\,\mathrm{d}t=\int_1^2 (2t^2-2t)\,\mathrm{d}t.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 291. Tìm số thực m thỏa mãn $9+\displaystyle\int_0^1 (2m^2x-6m)\,\mathrm{d}x=0$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

✍ **Lời giải.**

$$9+\int_0^1 (2m^2x-6m)\,\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow 9+\left[m^2x^2-6mx\right]\Big|_0^1=0\Leftrightarrow m^2-6m+9=0\Leftrightarrow m=3.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 292. Cho tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1+\cos x)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)+c$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Tính $a-b+c$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** -2. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1+\cos x)\,\mathrm{d}x = \left(2x^2-x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)+1.$

Vậy $a=2, b=2, c=1$, suy ra $a-b+c=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 293. Cho $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tích phân $\displaystyle\int_0^2 [4f(x)-3]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^2 [4f(x)-3]\,\mathrm{d}x = 4\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 3\,\mathrm{d}x = 12-6=6.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 294. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=16, \displaystyle\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 2.$

Tính $\displaystyle\int_0^2 x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$

A. 16. **B.** 28. **C.** 36. **D.** 30.

✍ **Lời giải.**

Từ $\displaystyle\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 2$ ta đặt $t=2x$ được $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \quad (1).$

Từ $I = \displaystyle\int_0^2 x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = [x\cdot f(x)]\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 28.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 295. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x$. Khi đặt $u=\sqrt{x^2+9}$ ta được tích phân nào dưới đây?

A. $I = \displaystyle\int_3^5 u^2\,\mathrm{d}u.$ **B.** $I = \displaystyle\int_3^5 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u.$ **C.** $I = \displaystyle\int_0^4 u^2\,\mathrm{d}u.$ **D.** $I = \displaystyle\int_3^5 u\,\mathrm{d}u.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $u=\sqrt{x^2+9} \Rightarrow u^2 = x^2+9 \Rightarrow u\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=3$, $x=4 \Rightarrow u=5$. Khi đó, tích phân đã cho trở thành

$$I = \int_3^5 u^2\,\mathrm{d}u.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 296. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $3\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}.$ **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}-1}{3}.$ **C.** $2\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}.$ **D.** $3\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}.$

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{3} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{3}-1}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 297. Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int_{-1}^{2} [x + 2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = \frac{7}{2}$. **B.** $I = \frac{17}{2}$. **C.** $I = \frac{5}{2}$. **D.** $I = \frac{11}{2}$.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int_{-1}^{2} [x + 2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_{-1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 298. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn $I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Khi đó giá trị của tích phân $K = \int_0^3 (\mathrm{e}^{1+\ln f(x)} + 4)\,\mathrm{d}x$ là

A. $14 + 3\mathrm{e}$. **B.** $4\mathrm{e} + 14$. **C.** $12 + 4\mathrm{e}$. **D.** $3\mathrm{e} + 12$.

✍ **Lời giải.**

$$K = \int_0^3 (\mathrm{e}^{1+\ln f(x)} + 4)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (\mathrm{e}\cdot f(x) + 4)\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e} + 12.$$

Chọn đáp án C □

Câu 299. Tính tích phân sau $I = \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{3}{2}$. **B.** $I = \frac{2}{3}$. **C.** $I = -\frac{2}{3}$. **D.** $I = \frac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \cos x$ suy ra $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{bmatrix} x = 0 \\ x = \pi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \\ t = -1. \end{bmatrix}$

Khi đó

$$I = \int_1^{-1} t^2 \cdot (-1)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 300. Biết rằng $\int_0^1 x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(a\sin 2 + b\cos 2 + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a + b + c = 1$. **B.** $a - b + c = 0$. **C.** $2a + b + c = -1$. **D.** $a + 2b + c = 1$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x. \end{cases}$

Khi đó,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\cos 2x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\sin 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\sin 2 + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{2}\sin 2 + \frac{1}{4}\cos 2 - \frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{4}(2\sin 2 + \cos 2 - 1)\\ &= \frac{1}{4}(a\sin 2 + b\cos 2 + c).\end{aligned}$$

Suy ra $a=2; b=1; c=-1$.

Vậy $a-b+c=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 301. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=-2$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=-18$. **C.** $I=-10$. **D.** $I=-5$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$ và $x=4\Rightarrow t=2$. Khi đó

$$\begin{aligned}I &= \int_0^2 f'(t)\cdot 2t\,\mathrm{d}t\\ &= 2\cdot\int_0^2 t\,\mathrm{d}(f(t))\\ &= 2\cdot\left(tf(t)\Big|_0^2 - \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= 4\cdot f(2) - 2\cdot\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -8-2=-10.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 302. Tính tích phân $\int_{-1}^2 (2x+1)^{2018}\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2019}\left(5^{2019}+1\right)$. **B.** $\frac{1}{4038}\left(5^{2019}+1\right)$. **C.** $\frac{1}{2019}\left(5^{2019}-1\right)$. **D.** $\frac{1}{4038}\left(5^{5^{2019}-1}\right)$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Khi $x=-1$ thì $t=-1$; khi $x=2$ thì $t=5$. Suy ra

$$\int_{-1}^2 (2x+1)^{2018}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^5 t^{2018}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{2019}}{4038}\Big|_{-1}^{2019} = \frac{1}{4038}\left(5^{2019}+1\right).$$

Chọn đáp án B □

Câu 303. Cho tích phân $\int\limits_1^2 \dfrac{x^3-3x^2+2x}{x+1}\,\mathrm{d}x = a+b\ln 2+c\ln 3$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $b<0$. **B.** $c>0$. **C.** $a<0$. **D.** $a+b+c>0$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_1^2 \frac{x^3-3x^2+2x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{(x+1)\left(x^2-4x+6\right)-6}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(x^2-4x+6-\frac{6}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^3}{3}-2x^2+6x-6\ln|x+1|\right)\Big|_1^2 = \frac{7}{3}+6\ln 2-6\ln 3. \end{aligned}$$

Vậy $a=\dfrac{7}{3}$, $b=6$, $c=-6$. Suy ra $a+b+c=\dfrac{7}{3}>0$.

Chọn đáp án D □

Câu 304. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **đúng**?

A. $\int\limits_a^b xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x\Big|_a^b - \int\limits_a^b x\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x\Big|_a^b - \int\limits_a^b e^x\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x\Big|_a^b + \int\limits_a^b x\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x\Big|_a^b + \int\limits_a^b e^x\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_a^b xe^x\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b x\,\mathrm{d}(e^x) = xe^x\Big|_a^b - \int\limits_a^b e^x\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 305. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(a;b)$ và $f(a)=f(b)$. Tính $I=\int\limits_a^b f'(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I = \int\limits_a^b e^{f(x)}\,\mathrm{d}(f(x)) = e^{f(x)}\Big|_a^b = e^{f(b)}-e^{f(a)} = 0.$$

Chọn đáp án A □

Câu 306. Cho $\int\limits_0^1 (x+2)e^x\mathrm{d}x = ae+b$ $(a,b\in\mathbb{Q})$. Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=-1$. **B.** $S=10$. **C.** $S=5$. **D.** $S=0$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=x+2 \\ dv=e^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=e^x \end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_0^1 (x+2)e^x\mathrm{d}x = (x+2)e^x\big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x = 3e-2-(e-1) = 2e-1$.

Suy ra $a=2$, $b=-1 \Rightarrow S=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 307. Tính tích phân $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$.

A. $\log\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\ln\dfrac{3}{2}$. **D.** $\ln 6$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1||_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 308. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $I = x^2\ln^2 x|_1^{\mathrm{e}} - 2\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$. **B.** $I = \dfrac{1}{2}x^2\ln^2 x|_1^{\mathrm{e}} - 2\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$.

C. $I = \dfrac{1}{2}x^2\ln^2 x|_1^{\mathrm{e}} + 2\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$. **D.** $I = \dfrac{1}{2}x^2\ln^2 x|_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Dùng tích phân từng phần bằng cách đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ \mathrm{d}v = x\cdot\mathrm{d}x \end{cases}$, ta có

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D □

Câu 309. Cho $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$, $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -8$. Tính $\displaystyle\int_1^4 3f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

A. -4. **B.** 12. **C.** -12. **D.** -24.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x-1$ hay $x = t+1$, ta có $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Với $x = 1$ thì $t = 0$ và với $x = 4$ thì $t = 3$.

Khi đó $\displaystyle\int_1^4 3f(x-1)\,\mathrm{d}x$ bằng

$$\int_0^3 3f(t)\,\mathrm{d}t = 3\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t\right) = 3(4-8) = -12.$$

Chọn đáp án C □

Câu 310. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2+3x+1}{2x+3}\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 3 + c$. Tính $T = a+b+2c$.

A. $T = 3$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 1$. **D.** $T = 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_0^1 \frac{2x^2+3x+1}{2x+3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2x+3}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(2x+3)\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3.$$

Suy ra $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{1}{2}$. Vậy $T=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 311. Biết $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=10$ và $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=5$. Tính tích phân $I=\int\limits_a^b [3f(x)-5g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=-5$. **C.** $I=10$. **D.** $I=15$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=3\cdot\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-5\cdot\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x=3\cdot 10-5\cdot 5=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 312. Cho $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=16$. Tính $I=\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. 32. **B.** 16. **C.** 4. **D.** 8.

✍ **Lời giải.**

Ta có $16=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(2t)\,\mathrm{d}(2t)=2\int\limits_0^2 f(2t)\,\mathrm{d}t\Rightarrow\int\limits_0^2 f(2t)\,\mathrm{d}t=8$. Vậy $I=\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 313. Biết $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int\limits_1^2 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 3.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^2 3f(x)\mathrm{d}x=3\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3.2=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 314. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha)\colon 2x+y+z-1=0$. Tìm phương trình mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và đi qua gốc tọa độ 0.

A. $(\beta)\colon 2x+y+z+1=0$. **B.** $(\beta)\colon x-y-z=0$.

C. $(\beta)\colon 2x+y+z=0$. **D.** $(\beta)\colon 2x-y-z=0$.

✍ **Lời giải.**

Mặt phẳng (α) nhận $\vec{u}(2;1;1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Do $(\alpha)\parallel(\beta)$ nên $\vec{u}$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của (β).

Phương trình mặt phẳng $(P)\colon 2(x-0)+1(y-0)+1(z-0)=0\Leftrightarrow 2x+y+z=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 315. Tích phân $I=\int\limits_0^1 \dfrac{2x^2+3x-6}{2x+1}\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. $I=\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}\ln 3$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}\ln 3$. **C.** $I=5\ln 3$. **D.** $I=-2\ln 3$.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int_0^1 \frac{2x^2+3x-6}{2x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x+1-\frac{7}{2x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left(x^2+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 - \left(\frac{7}{2}\ln(2x+1)\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}-\frac{7}{2}\ln 3.$$

Chọn đáp án A □

Câu 316. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 317. Cho $\int_1^7 f(x)\mathrm{d}x = 10$. Tính tích phân $I = \int_1^4 f(2x-1)\mathrm{d}x$.

A. $I = 7$. **B.** $I = 14$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = 17$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 2x-1$, suy ra $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$.
Với $x = 1 \Rightarrow t = 1$ và $x = 4 \Rightarrow t = 7$.
Vậy

$$I = \int_1^4 f(2x-1)\mathrm{d}x = \int_1^7 f(t)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^7 f(t)\mathrm{d}t = \frac{10}{2} = 5.$$

Chọn đáp án C □

Câu 318. Cho $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = 10$ và $\int_b^c f(x)\mathrm{d}x = 3$ với $a < c < b$. Tính $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 7$. **B.** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 30$. **C.** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -7$. **D.** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 13$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = 10-3 = 7.$$

Chọn đáp án A □

Câu 319. Tìm các giá trị của b sao cho $\int\limits_0^b (2x-4)\,\mathrm{d}x = 5$.

A. $\{-1;4\}$. **B.** $\{5\}$. **C.** $\{-1\}$. **D.** $\{-1;5\}$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int\limits_0^b (2x-4)\,\mathrm{d}x = 5 \Leftrightarrow \left(x^2-4x\right)\Big|_0^b = 5 \Leftrightarrow b^2-4b-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1 \\ b=5. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D □

Câu 320. Cho $\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-2}^{1} [2f(x)-1]\,\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=3$. **C.** $I=-3$. **D.** $I=-9$.

✍ Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_{-2}^{1} [2f(x)-1]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-2}^{1} \mathrm{d}x = 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 321. Biết $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{2}{3}(\sqrt{a}-b)$, với a,b là các số nguyên dương. Tính $T=a+b$.

A. $T=10$. **B.** $T=7$. **C.** $T=8$. **D.** $T=6$.

✍ Lời giải.

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \int\limits_0^1 \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x}{(x+1)-x} = \int\limits_0^1 (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1$$
$$= \frac{2}{3}(\sqrt{8}-2).$$

Khi đó, $a=8, b=2 \Rightarrow T=a+b=8+2=10$.

Chọn đáp án A □

Câu 322. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{-1}^{1} f(2-3x)\,\mathrm{d}x = a$. Tìm a để $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

A. 3. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Đặt $t = 2-3x \Rightarrow \mathrm{d}t = -3\,\mathrm{d}x$.

Khi $x=-1$ thì $t=5$, khi $x=1$ thì $t=-1$.

$$\int\limits_{-1}^{1} f(2-3x)\,\mathrm{d}x = a \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int\limits_{5}^{-1} f(t)\,\mathrm{d} = a$$
$$\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{a}{3}$$
$$\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{3}$$
$$\Leftrightarrow a = -3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 323. Biết $I=\displaystyle\int\limits_2^5 \frac{|x-2|}{x}\,\mathrm{d}x = a\ln 2+b\ln 5+c$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a+2b=2$. **B.** $a+b=0$. **C.** $a=2c$. **D.** $a+c=b$.

Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_2^5 \frac{|x-2|}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^5 \frac{2-x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^5 \frac{2}{x}-1\,\mathrm{d}x=(2\ln x-x)\Big|_2^5=-2\ln 2+2\ln 5-4$.

Từ đó suy ra $a=-2$, $b=2$, $c=-4$. Vậy $a+b=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 324. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $2(\sqrt{2}-1)$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Lời giải.

$\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(x+1)=\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=2(\sqrt{2}-1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 325. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos x$ và $F(0)=\pi$. Tìm $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}+\pi$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{4}+\pi$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\pi$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$.

Lời giải.

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x=\left(\frac{\sin^4 x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}+F(0)=\frac{1}{4}+\pi.$$

Chọn đáp án B □

Câu 326. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{3-2x}$.

A. $I=-\dfrac{1}{2}\ln 3$. **B.** $I=-\ln 3$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}\ln 3$. **D.** $I=\dfrac{1}{2}\log 3$.

Lời giải.

$I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{3-2x}=-\frac{1}{2}\ln(3-2x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 327. Tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\dfrac{\pi^4}{4}$. **B.** $I=\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

$I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,\mathrm{d}(\sin x)=\frac{\sin^4 x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án B □

2.1 ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. A	4. D	5. C	6. B	7. C	8. C	9. C	10. B
11. D	12. B	13. D	14. A	15. B	16. D	17. D	18. C	19. C	20. B
21. A	22. C	23. A	24. A	25. A	26. C	27. D	28. B	29. B	30. C
31. B	32. B	33. D	34. A	35. A	36. B	37. A	38. B	39. A	40. B
41. C	42. B	43. A	44. D	45. D	46. B	47. C	48. B	49. A	50. B
51. C	52. C	53. A	54. B	55. D	56. B	57. C	58. A	59. A	60. A
61. D	62. D	63. C	64. C	65. A	66. A	67. C	68. C	69. D	70. C
71. C	72. D	73. C	74. A	75. C	76. A	77. A	78. A	79. D	80. D
81. A	82. C	83. A	84. B	85. B	86. B	87. D	88. D	89. C	90. C
91. A	92. C	93. C	94. B	95. B	96. C	97. D	98. A	99. A	100. D
101. A	102. D	103. C	104. D	105. A	106. C	107. A	108. D	109. C	110. B
111. C	112. D	113. C	114. B	115. C	116. C	117. A	118. B	119. B	120. A
121. B	122. D	123. A	124. C	125. A	126. A	127. A	128. D	129. B	130. A
131. D	132. D	133. D	134. D	135. B	136. A	137. A	138. B	139. A	140. B
141. C	142. B	143. A	144. D	145. A	146. D	147. C	148. A	149. B	150. D
151. C	152. B	153. C	154. C	155. A	156. C	157. B	158. A	159. C	160. D
161. D	162. D	163. A	164. A	165. D	166. C	167. D	168. C	169. A	170. D
171. D	172. D	173. B	174. A	175. B	176. C	177. D	178. A	179. B	180. D
181. B	182. A	183. C	184. D	185. A	186. D	187. D	188. D	189. C	190. D
191. C	192. D	193. B	194. D	195. A	196. A	197. C	198. A	199. A	200. C
201. A	202. B	203. B	204. C	205. A	206. A	207. B	208. B	209. D	210. C
211. D	212. C	213. A	214. A	215. D	216. D	217. A	218. A	219. B	220. C
221. A	222. C	223. A	224. C	225. C	226. A	227. A	228. B	229. C	230. A
231. A	232. B	233. B	234. C	235. D	236. A	237. B	238. D	239. A	240. B
241. D	242. D	243. C	244. D	245. D	246. A	247. A	248. C	249. D	250. D
251. C	252. B	253. C	254. A	255. B	256. C	257. A	258. B	259. A	260. B
261. B	262. C	263. A	264. C	265. A	266. A	267. C	268. B	269. A	270. D
271. C	272. B	273. D	274. C	275. B	276. D	277. D	278. C	279. B	280. A
281. C	282. A	283. A	284. B	285. C	286. D	287. C	288. B	289. B	290. B
291. C	292. B	293. C	294. B	295. A	296. B	297. C	298. C	299. B	300. B
301. C	302. B	303. D	304. B	305. A	306. C	307. C	308. D	309. C	310. C
311. A	312. D	313. B	314. C	315. A	316. B	317. C	318. A	319. D	320. B
321. A	322. C	323. B	324. B	325. B	326. C	327. B			

3 VẬN DỤNG THẤP

Câu 1. Cho $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + b\ln 2 + c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=3 \Rightarrow t=2$.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2(t^2-1)t}{4+2t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{t^3-t}{t+2}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{(t+2)(t^2-2t+3)-6}{t+2}\,\mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_1^2 \left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 3t - 6\ln t = \frac{7}{3} - 12\ln 2 + 6\ln 3$.

Suy ra $a=7; b=-12; c=6 \Rightarrow a+b+c = 7-12+6 = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{2+\pi}{8}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2+\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

✍ Lời giải.

Đặt $x=\tan t$ với $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, suy ra $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 t}\cdot\mathrm{d}t$.

— Khi $x=0$ thì $t=0$.

— Khi $x=1$ thì $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Ta có

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan t)\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=t|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Xét hàm số $y=f(x)$ liên tục trên miền $D=[a;b]$ có đồ thị là một đường cong (C). Gọi S là phần giới hạn bởi (C) và các đường thẳng $x=a$, $x=b$. Người ta chứng minh được rằng độ dài đường cong S bằng $\displaystyle\int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. Theo kết quả trên, độ dài đường cong S là phần đồ thị của hàm số $f(x)=\ln x$ bị giới hạn bởi các đường $x=1$, $x=\sqrt{3}$ là $m-\sqrt{m}+\ln\dfrac{1+\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ với $m,n\in\mathbb{Z}$ thì giá trị m^2-mn+n^2 là bao nhiêu?

A. 6. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Ta có $S=\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow u^2=1+x^2\Rightarrow u\,\mathrm{d}u=x\,\mathrm{d}x$.

Khi $x=1$ thì $u=\sqrt{2}$.

Khi $x=\sqrt{3}$ thì $u=2$.

Nên

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}u+\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{(u-1)(u+1)}\,\mathrm{d}u\\&=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u\\&=u|_{\sqrt{2}}^{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=2-\sqrt{2}+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Do đó $m=2$, $n=3$. Bởi vậy $m^2-mn+n^2=7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\displaystyle\int\limits_0^3 x(3-x)^m\,\mathrm{d}x=-f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x)=\ln x^{15}$.

A. $m=20$. **B.** $m=4$. **C.** $m=5$. **D.** $m=3$.

✍ Lời giải.

Đặt $u=3-x\Rightarrow\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$

x	0	3
u	3	0

$$\int_0^3 x(3-x)^m\,\mathrm{d}x = -\int_3^0 (3-u)u^m\,\mathrm{d}u = 3\frac{3^{m+1}}{m+1} - \frac{3^{m+2}}{m+2}$$

Ta có $f'(x) = \dfrac{15}{x}$ và $f''(x) = -\dfrac{15}{x^2} \Rightarrow f''\left(\dfrac{10}{9}\right) = -\dfrac{243}{20}$.

$$\int_0^3 x(3-x)^m\,\mathrm{d}x = -f''\left(\frac{10}{9}\right) \Leftrightarrow 3^{m+2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) = \frac{243}{20} \Leftrightarrow \frac{3^m}{m^2+3m+2} - \frac{27}{20} = 0 \quad (*).$$

Xét hàm $g(m) = \dfrac{3^m}{m^2+3m+2} - \dfrac{27}{20}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $g'(m) = \dfrac{3^m}{(m^2+3m+2)^2}[m^2\ln 3 + (3\ln 3 - 2)m + 2\ln 3 - 3] = 0$ có hai nghiệm trái dấu $m_1 < 0 < m_2$.

Bảng biến thiên hàm $g(m)$ trên $(0;+\infty)$:

x	0		m_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$g(0)$	↘	$g(m_2)$	↗	$+\infty$

Vì $g(0) < 0$ nên đồ thị hàm số $g(m)$ cắt đường thẳng $y = 0$ tại đúng một điểm. Suy ra phương trình $g(m) = 0$ có đúng một nghiệm trên $(0;+\infty)$. Mà $g(3) = 0$ nên $(*) \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Cho $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^5+x^3} = a\ln 5 + b\ln 2 + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+2b+4c$ bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** $-\dfrac{5}{8}$. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^5+x^3} = \int_1^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^4(x^2+1)} = I$. Đặt $t = x^2+1 \Rightarrow x^2 = t-1$, $x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$. Với $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Khi đó

$$I = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2 t} = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} - \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= -\frac{1}{2(t-1)}\Big|_2^5 - \frac{1}{2}\ln|t-1|\Big|_2^5 + \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_2^5 = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{8}.$$

Suy ra $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{3}{2}$, $c = \dfrac{3}{8} \Rightarrow a+2b+4c = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6. Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\displaystyle\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 (au^4+bu^2+c)\,\mathrm{d}u$, trong đó $u = \sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S = a+b+c$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

✍ Lời giải.

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2 = 2x+1 \Rightarrow x = \dfrac{u^2-1}{2}$.

Đổi cận

x	0	4
u	1	3

Khi đó $\displaystyle\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{2\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2+4\left(\frac{u^2-1}{2}\right)+1}{u}\cdot u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_1^3 (u^4+2u^2-1)\,\mathrm{d}u.$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow S=a+b+c=2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 7. Giả sử tích phân $I=\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = a+b\ln 3+c\ln 5\ (a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=\dfrac{5}{3}$. **B.** $S=\dfrac{8}{3}$. **C.** $S=\dfrac{7}{3}$. **D.** $S=\dfrac{4}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+\sqrt{3x+1}\Rightarrow 3x+1=(t-1)^2\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}(t-1)\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=3; x=5\Rightarrow t=5$. Khi đó

$$I=\frac{2}{3}\int_3^5 \frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_3^5\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}(t-\ln|t|)\Big|_3^5=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\ln 3-\frac{2}{3}\ln 5.$$

Suy ra $a=\dfrac{4}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$, $c=-\dfrac{2}{3}$.

Vậy $S=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho tích phân $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 5+b\ln 2$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2a+b=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $2a-b=0$. **D.** $a+2b=0$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\cos x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$

$$x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{5}{2},$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2.$$

$$I=\int_2^{\frac{5}{2}}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln t\Big|_2^{\frac{5}{2}}=\ln 5-2\ln 2.$$

Suy ra $a=1$, $b=-2$.

Vậy $2a+b=0$.

Chọn đáp án A □

Câu 9. Cho tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2+(2x+\cos x)\cos x+1-\sin x}{x+\cos x}\,\mathrm{d}x = a\pi^2+b-\ln\dfrac{c}{\pi}$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị biểu thức $P=ac^3+b$ là

A. 3. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2+(2x+\cos x)\cos x+1-\sin x}{x+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x+\cos x)^2+1-\sin x}{x+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x+\cos x}\,\mathrm{d}(x+\cos x) \\
&= \left(\frac{x^2}{2}+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \ln|x+\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{8}+1+\ln\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{8}\pi^2+1-\ln\frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Suy ra $a=\dfrac{1}{8}$; $b=1$; $c=2$
Vậy $P=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Giả sử tích phân $I=\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = a+b\ln 3+c\ln 5$. Lúc đó

A. $a+b+c=\dfrac{4}{3}$. **B.** $a+b+c=\dfrac{5}{3}$. **C.** $a+b+c=\dfrac{7}{3}$. **D.** $a+b+c=\dfrac{8}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2=3x+1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2t}{3}\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=2 \\ x=5 \Rightarrow t=4. \end{cases}$

$$I=\frac{2}{3}\int_2^4 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_2^4 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}(t-\ln|t+1|)\Big|_2^4=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\ln 3-\frac{2}{3}\ln 5.$$

Vậy $a=\dfrac{4}{3}$; $b=\dfrac{2}{3}$; $c=-\dfrac{2}{3}$ suy ra $a+b+c=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11. Cho $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $I=\ln a+b$ (với $a>0, b\in\mathbb{R}$). Khẳng định nào sau đây đúng:

A. $2ab=-1$. **B.** $2ab=1$. **C.** $-b+\ln\dfrac{3}{2a}=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-b+\ln\dfrac{3}{2a}=\dfrac{1}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$. Khi đó:

$$I=\int\limits_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+2)^2}=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{t+2}-\frac{2}{(t+2)^2}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t+2|+\frac{2}{t+2}\right)\Big|_0^1=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}.$$

Vậy $\ln a+b=\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow -b+\ln\dfrac{3}{2a}=\dfrac{1}{3}$.

Lưu ý. Với bài toán này, nếu đọc đề không kĩ thì rất dễ rơi vào phương án nhiễu vì các bộ số a,b ở đây là không duy nhất. Nhiều em học sinh sau khi giải ra được $I=\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}=\ln a+b$ $(*)$ đã vội vàng kết luận $a=\dfrac{3}{2},b=-\dfrac{1}{3}$, do đó $2ab=-1$ và rơi vào phương án nhiễu của đề bài. Dễ thấy $a=\dfrac{3}{2\mathrm{e}},b=\dfrac{2}{3}$ cũng thỏa mãn $(*)$ nhưng $2ab\neq -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 12. Giá trị $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2\sin\left(\pi x^3\right)e^{\cos\left(\pi x^3\right)}\mathrm{d}x$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây:

A. 0,046. **B.** 0,036. **C.** 0,037. **D.** 0,038.

✍ **Lời giải.**

Xét tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2\sin\left(\pi x^3\right)\mathrm{e}^{\cos\left(\pi x^3\right)}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\cos\left(\pi x^3\right)\Rightarrow \mathrm{d}dt=-3\pi x^2\sin\left(\pi x^3\right)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2};x=\dfrac{9}{\sqrt[3]{4}}\Rightarrow t=\cos\dfrac{729\pi}{4}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+182\pi\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $I=-\dfrac{1}{3\pi}\displaystyle\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{3\pi}\mathrm{e}^t\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{3\pi}\approx 0{,}037.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\displaystyle\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=5$, tính $I=\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{5}{2}$. **B.** $I=\dfrac{7}{2}$. **C.** $I=\dfrac{9}{2}$. **D.** $I=\dfrac{11}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Trong tích phân $\displaystyle\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x$, đặt $x=4-t$, ta được $5=\displaystyle\int\limits_3^1(4-t)f(4-t)\mathrm{d}(4-t)=\int\limits_1^3(4-t)f(t)\mathrm{d}t=4\int\limits_1^2 f(t)\mathrm{d}t-\int\limits_1^3 tf(t)\mathrm{d}t$. Suy ra $\displaystyle\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho $\displaystyle\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=16$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=32$. **B.** $I=8$. **C.** $I=16$. **D.** $I=4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(u)\,\mathrm{d}(u)=8.$

Chọn đáp án B □

Câu 15. Tính tích phân $I=\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}$ ta được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5$.

Giá trị $S=a^2+ab+3b^2$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=3\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2; x=5\Rightarrow t=4$.

$$I=\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\int\limits_2^4 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\frac{t^2-1}{3}\cdot t}=2\int\limits_2^4 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$=\int\limits_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^4=2\ln 3-\ln 5.$$

Khi đó $a=2,b=-1\Rightarrow a^2+ab+3b^2=4-2+3=5$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ là

A. $I=2+\ln 2$. **B.** $I=1+\ln 2$. **C.** $I=1-\ln 2$. **D.** $I=2-\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I=\int\limits_0^1 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \mathrm{d}x-\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$=x\Big|_0^1-\ln(x+1)\Big|_0^1=1-\ln 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 17. Biết $\int\limits_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3\cdot 2^x}{\pi+\mathrm{e}\cdot 2^x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{m}+\frac{1}{\mathrm{e}\ln n}\ln\left(p+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với m,n,p là các số nguyên dương. Tính tổng $S=m+n+p$.

A. $S=7$. **B.** $S=6$. **C.** $S=8$. **D.** $S=5$.

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3\cdot 2^x}{\pi+\mathrm{e}\cdot 2^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{x^3(\pi+\mathrm{e}\cdot 2^x)+2^x}{\pi+\mathrm{e}\cdot 2^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^3+\frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}\cdot 2^x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}\cdot 2^x}\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+$$

$$\frac{1}{\ln 2}\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}(2^x)}{\pi+\mathrm{e}\cdot 2^x}=\frac{1}{4}+\frac{1}{\mathrm{e}\cdot\ln 2}\ln\left|\pi+\mathrm{e}\cdot 2^x\right|\Big|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{\mathrm{e}\cdot\ln 2}\ln\frac{\pi+2\mathrm{e}}{\pi+\mathrm{e}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{\mathrm{e}\cdot\ln 2}\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right).$$

Suy ra $S=7$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = a\pi + \ln b$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a+b$.

A. $S = 2+\sqrt{2}$. **B.** $S = \dfrac{11}{4}$. **C.** $S = \dfrac{5}{4}$. **D.** $S = \dfrac{3}{4}$.

✍ Lời giải.

Phân tích $5\sin x+\cos x = \alpha(\sin x+\cos x)+\beta(-\sin x+\cos x) \Rightarrow \alpha = 3, \beta = -2$.

Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3-2\frac{-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= (3x-2\ln|\sin x+\cos x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4}-2\ln\sqrt{2} = \frac{3\pi}{4}+\ln\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S = a+b = \frac{3}{4}+\frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 19. Cho $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\,\mathrm{d}x = a+b\sqrt{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Khi đó giá trị của a là

A. $\dfrac{26}{27}$. **B.** $-\dfrac{26}{27}$. **C.** $-\dfrac{27}{26}$. **D.** $-\dfrac{25}{27}$.

✍ Lời giải.

Nhân cả tử và mẫu với lượng liên hợp của $3x+\sqrt{9x^2-1}$ ta được

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{3}}^{1} x(3x-\sqrt{9x^2-1})\,\mathrm{d}x = 3\int_{\frac{1}{3}}^{1} x^2\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{3}}^{1} x\sqrt{9x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Đặt $u = 9x^2-1 \Rightarrow \mathrm{d}u = 18x\,\mathrm{d}x$ và đổi cận, ta được

$$I = x^3\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} - \frac{1}{18}\int_{\frac{1}{3}}^{1} \sqrt{9x^2-1}\cdot 18x\,\mathrm{d}x = x^3\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} - \frac{1}{18}\int_0^8 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{26}{27}+\left(-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{27}\right)\Big|_0^8 = \frac{26}{27}-\frac{16\sqrt{2}}{27}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 8$. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 8$. **B.** $I = 16$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 32$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$8 = \int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 16.$$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$. Suy ra

$$I = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 8.$$

Chọn đáp án A □

Câu 21. Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x)f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{2a}{3}$. **B.** $I=\dfrac{a}{2}$. **C.** $I=\dfrac{a}{3}$. **D.** $I=a$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow I=\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)}\mathrm{d}t=\int_0^a \frac{1}{1+\dfrac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x=\int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow 2I=\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}x=a\Rightarrow I=\frac{a}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 22. Biết $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $M=a-b+c$.

A. $M=35$. **B.** $M=41$. **C.** $M=-37$. **D.** $M=-35$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=-\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$ và $x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{6}$.

Từ đó, $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{-t\cos(-t)}{\sqrt{1+t^2}-t}\mathrm{d}t=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}-x}\mathrm{d}x=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $I=-\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$.

u	v'
x^2	$\cos x$
$2x$	$\sin x$
2	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$=-\left(x^2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}+2x\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}-2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\right)=2-\dfrac{\pi^2}{36}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $a=2,b=-36,c=-3$ do đó $M=a-b+c=35$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2$.

Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Xét $I=\int\limits_0^1 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$, đặt $\sqrt{x}=t\to \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$, đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=1\end{cases}$

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f'(t)\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\int\limits_0^1 x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}(f(x))=2\cdot x\cdot f(x)\Big|_0^1-2\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-2.$

Chọn đáp án B ☐

Câu 24. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a-b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c<4$. Tính giá trị $S=a+b+c$.

A. $S=13$. **B.** $S=28$. **C.** $S=25$. **D.** $S=16$.

✍ **Lời giải.**

Xét tích phân: $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\sqrt{3+\ln x}\Rightarrow u^2=3+\ln x\Rightarrow 2u\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$;

Khi $x=1$ thì $u=\sqrt{3}$;

Khi $x=\mathrm{e}$ thì $u=2$;

Ta có: $I=\int\limits_{\sqrt{3}}^2 u\cdot 2u\,\mathrm{d}u=2\int\limits_{\sqrt{3}}^2 u^2\,\mathrm{d}u=\dfrac{2}{3}u^3\Big|_{\sqrt{3}}^2=\dfrac{16-6\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $a=16$, $b=6$, $c=3$. Do đó $S=a+b+c=16+6+3=25$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^1 f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{2}{3}$. **B.** $I=4$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=6$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2x-1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=-3$; $x=1\Rightarrow t=1$. Khi đó

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^1 f(|t|)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^0 f(-t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1+3=4.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 26. Biết $\int\limits_1^2\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}-1}\mathrm{d}x=a\sqrt{5}+b\sqrt{2}+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $P=a+b+c$ là

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $a\sqrt{5}+b\sqrt{2}+c=\int\limits_1^2\dfrac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^2 \frac{x^3(\sqrt{x^2}+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+1-1} \\
&= \int_1^2 x(\sqrt{x^2+1}+1)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 (\sqrt{x^2+1})^2\,\mathrm{d}(\sqrt{x^2+1}) + \int_1^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3}\Big|_1^2 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Do đó $a=\dfrac{5}{3}$, $b=-\dfrac{2}{3}$ và $c=\dfrac{3}{2}$ hay $P=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Biết tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = a\pi + \ln b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S=a+b$.

A. $S=\dfrac{5}{4}$. **B.** $S=\dfrac{11}{4}$. **C.** $S=\dfrac{3}{4}$. **D.** $S=2$.

✍ **Lời giải.**

$$
\begin{aligned}
I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3(\sin x+\cos x)+2(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(3+\frac{2(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3\pi}{4} + J.
\end{aligned}
$$

Đặt $t=\sin x+\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t=(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$, $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{-2}{t}\,\mathrm{d}t = -2\ln|t|\Big|_1^{\sqrt{2}} = -\ln 2 = \ln\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $I=\dfrac{3\pi}{4}-\ln 2$. Mà $I=a\pi+\ln b$ nên $a=\dfrac{3}{4}$, $b=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $S=a+b=\dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28. Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0)$, phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} (2ax+b)^3\cdot \mathrm{e}^{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=x_2-x_1$. **B.** $I=\dfrac{x_2-x_1}{4}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\dfrac{x_2-x_1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta đặt $t = ax^2 + bx + c \Rightarrow \mathrm{d}t = (2ax + b)\,\mathrm{d}x$ và $g(t) = (2ax + b)^2$

Do giả thiết x_1, x_2 là hai nghiệm của $ax^2 + bx + c = 0$ nên $\begin{cases} x = x_1 \Rightarrow t = 0 \\ x = x_2 \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

Do đó dễ dàng có

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (2ax + b)^3 \cdot \mathrm{e}^{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int_0^0 g(t) \cdot \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 29. Biết $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 12$. Tính tích phân $I = \int_0^2 x\left(2 + f(x^2+1)\right)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 16$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 7$.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int_0^2 \left[2x + xf(x^2+1)\right]\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 f(x^2+1)\,\mathrm{d}(x^2+1)$$

$$= 4 + \frac{1}{2}\int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t \text{ (ta đặt } x^2+1 = t) = 4 + \frac{1}{2}\cdot 12 = 10.$$

Chọn đáp án C □

Câu 30. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{4\sin x - 2\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x + 1)}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2$, với a, b là các số nguyên. Tính $S = a \cdot b$.

A. $S = 10$. **B.** $S = -6$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\frac{4\sin x - 2\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x + 1)} = \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)\cos^2 x}$$

$$= \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{(\sin x + \cos x)\cos x}$$

$$= \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\cos^2 x(\tan x + 1)}.$$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{4\sin x - 2\cos x}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x + 1)}\,\mathrm{d}x = (2\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 3\ln|\tan x + 1|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - 3\ln 2.$

Vậy $S = a \cdot b = 2 \cdot (-3) = -6$.

Chọn đáp án B □

Câu 31. Cho $\int_1^3 \dfrac{x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = m\ln 2 + n\ln 3 + p\ln 5$, với m, n, p là các số hữu tỉ. Tính $S = m^2 + n + p^2$.

A. $S = 6$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 5$.

✍ **Lời giải.**

$$\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 + \ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra $m = 2$, $n = 1$, $p = -1$ nên $S = m^2 + n + p^2 = 6$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 12$, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -12. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải.

Xét tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 2\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\sin x\,\mathrm{d}x$ hay $\sin x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1$, $x = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow t = -1$.

Từ đó:

$$I = -\frac{1}{2}\int_{1}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6.$$

Chọn đáp án C □

Câu 33. Biết rằng $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\sin 2x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = a + \frac{\pi}{b}$, với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\sin 2x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 x\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(1-\sin^2 x)\sin x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\sin x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= -2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{1}{2}\sin 2x - x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \frac{\pi}{-2}.\end{aligned}$$

Suy ra $a = 2$, $b = -2$. Vậy $a + b = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 34. Biết $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với a, b là các số hữu tỉ. Hỏi $a+b$ bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{x^2+3x+2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = (\ln|x+1| - \ln|x+2|)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2\\ &= 2\ln 2 - \ln 3.\end{aligned}$$

Vậy $a = 2$, $b = -1$. Do đó $a + b = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 35. Biết rằng $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,\mathrm{d}x = 2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \sqrt{x+3}+\sqrt{x+1} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{2}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}\,\mathrm{d}x.$

Khi $x=0$ thì $t=1+\sqrt{3}$; khi $x=1$ thì $t=2+\sqrt{2}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,\mathrm{d}x = 2\int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} = 2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=5.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\forall x \in [0;2018]$, ta có $f(x)>0$ và $f(x)\cdot f(2018-x)=1$. Giá trị của tích phân $I = \displaystyle\int_0^{2018} \frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x$ là

A. 2018. **B.** 4016. **C.** 0. **D.** 1009.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 2018-x$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Khi đó

$$I = -\int_{2018}^{0} \frac{1}{1+f(2018-t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2018} \frac{1}{1+\dfrac{1}{f(t)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2018} \frac{f(t)}{1+f(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2018} \frac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Do đó

$$2I = I+I = \int_0^{2018} \frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^{2018} \frac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2018} 1\,\mathrm{d}x = 2018.$$

Vậy $I = 1019$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 37. Tính $I = \displaystyle\int_1^2 \left(2019\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}\right)x^{2018}\,\mathrm{d}x.$

A. $I = 2^{2018}$. **B.** $I = 2^{2017}$. **C.** $I = 2^{2020}$. **D.** $I = 2^{2019}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = 2019\log_2 x + \dfrac{1}{\ln 2} \\ \mathrm{d}v = x^{2018}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2019}{x\ln 2}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^{2019}}{2019} \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \left(2019\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}\right)\frac{x^{2019}}{2019}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{2018}}{\ln 2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2^{2019} + \frac{2^{2019}}{2019\ln 2} - \frac{1}{2019\ln 2} - \frac{x^{2019}}{2019\ln 2}\Big|_1^2 \\ &= 2^{2019} + \frac{2^{2019}}{2019\ln 2} - \frac{1}{2019\ln 2} - \frac{2^{2019}}{2019\ln 2} + \frac{1}{2019\ln 2} \\ &= 2^{2019}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 38. Có bao nhiêu số thực a để $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}\,\mathrm{d}x = 1$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

✍ Lời giải.

$a + x^2 \neq 0$ với mọi $x \in [0;1] \Rightarrow a > 0$ hoặc $a < -1$.

$$\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|a+x^2\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+1}{a}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2-1} \\ a = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2+1} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Chọn đáp án B □

Câu 39. Cho $f(x)$ là một hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 2018$, $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2017$. Giá trị của $I = \displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 2$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = -1$.

✍ Lời giải.

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$$\int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2018 \Rightarrow \int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -2018$$

Khi đó, $I = \displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 2017 - 2018 = -1$.

Chọn đáp án D □

Câu 40. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x+1}{3x^2+x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(a + \frac{\ln b}{c}\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương và $c \leq 4$. Tính tổng $T = a + b + c$.

A. $T = 7$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 8$. **D.** $T = 9$.

✍ Lời giải.

Đặt $u = \ln x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ x = \mathrm{e}^u. \end{array}\right.$

Với $x = 1 \Rightarrow u = 0$ và $x = 2 \Rightarrow u = \ln 2$.

Ta có

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{3x+1}{3x^2+x\ln x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\ln 2} \frac{3\mathrm{e}^u+1}{3\mathrm{e}^u+u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}(3\mathrm{e}^u+u)}{3\mathrm{e}^u+u} = \ln x\Big|_3^{6+\ln 2}\\ &= \ln(6+\ln 2)-\ln 3 = \ln\left(2+\frac{\ln 2}{3}\right).\end{aligned}$$

Khi đó $a=2;\ b=2;\ c=3$. Vậy $T=a+b+c=7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41. Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\int_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $\int_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=11$. **B.** $I=5$. **C.** $I=2$. **D.** $I=14$.

✍ **Lời giải.**

Hàm số $y=f(x)$ chẵn trên $[-6;6]$ nên $f(-2x)=f(2x)$, do đó $\int_1^3 f(2x)\,\mathrm{d}x=3$.

Đặt $u=2x\Rightarrow \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x$, đổi cận: $x=1\Rightarrow u=2, x=2\Rightarrow u=6$; lúc này được

$$\int_1^3 f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^6 f(u)\,\mathrm{d}u=3.$$

Vậy $\int_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x=14$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho $\int_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2019}}\,\mathrm{d}x=\frac{a^{2018}-3^{2018}}{6\cdot 2018}$. Tính a.

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2019}}\,\mathrm{d}x=\int_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2017}}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^3 \left(1+\frac{6}{x}\right)^{2017}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=1+\frac{6}{x}\Rightarrow$ nếu $x=1$ thì $t=7$; nếu $x=3$ thì $t=3$; $\mathrm{d}t=-\frac{1}{6x^2}\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $I=\frac{1}{6}\int_3^7 t^{2017}\,\mathrm{d}t=\frac{7^{2018}-3^{2018}}{6\cdot 2018}\Rightarrow a=7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 43. Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\int_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\int_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=11$. **C.** $I=5$. **D.** $I=14$.

Lời giải.

$$\int_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}x=3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int_1^3 f(-2x)\,\mathrm{d}(-2x)=3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int_{-2}^{-6} f(t)\,\mathrm{d}t=3 \Leftrightarrow \int_{-6}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t=6.$$

$$I=\int_{-1}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x=8+\int_{-2}^{-6} f(-t)\,\mathrm{d}(-t)=8+\int_{-6}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t=14.$$

Chọn đáp án D □

Câu 44. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x+\cos x+2x}{\sin x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{a}+\ln\frac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P=a\cdot b\cdot c$.

A. $P=24$. **B.** $P=13$. **C.** $P=48$. **D.** $P=96$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x+\cos x+2x}{\sin x+2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x(\sin x+2)+\cos x}{\sin x+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x+\frac{\cos x}{\sin x+2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2}+\ln|\sin x+2|\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi^2}{8}+\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$P=a\cdot b\cdot c=48$.

Chọn đáp án C □

Câu 45. Cho $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=a\sqrt{\mathrm{e}}+b$ với a,b là các số hữu tỉ. Tính $P=a\cdot b$.

A. $P=-8$. **B.** $P=8$. **C.** $P=-4$. **D.** $P=4$.

Lời giải.

— Ta có

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=4\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=4\int_1^{\mathrm{e}} \ln\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)=4\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \ln x\,\mathrm{d}x=4(x\ln x-x)|_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}=-2\sqrt{\mathrm{e}}+4.$$

— Vậy $a=-2$ và $b=4\Rightarrow P=a\cdot b=8$.

Chọn đáp án A □

Câu 46. Biết $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c+\frac{1}{2}\ln(3\sqrt{2}-3)$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=\dfrac{1}{2}$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $P=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(1+x-\sqrt{1+x^2})}{2x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}x\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2x^2}\,\mathrm{d}x.$

$= \dfrac{1}{2}\ln\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} - I.$

Xét $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2x^2}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2}$, khi đó $t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Ta có

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t^2}{2(t^2-1)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\left[t\Big|_{\sqrt{2}}^{2} + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]\Big|_{\sqrt{2}}^{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2 - \sqrt{2}\ln\sqrt{3} - \ln(\sqrt{2}-1)\right].$$

Vậy $I = \dfrac{1}{2}\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}\sqrt{2} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\ln(3\sqrt{2}-3)$.

Do đó $P = a+b+c = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^4 f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = -10$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = -5$. **D.** $I = -18$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sqrt{x}$, suy ra $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Khi $x = 0$ thi $t = 0$, khi $x = 4$ thì $t = 2$. Do đó

$$I = \int_0^2 2tf'(t)\,\mathrm{d}t = 2tf(t)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot 2f(2) - 2\cdot 1 = -10.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 48. Cho $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + b\ln 2 + c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\sqrt{x+1} = t \Rightarrow x+1 = t^2 \Rightarrow x = t^2-1$. Như vậy, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 3 \Rightarrow t = 2$. Từ đó ta có

$$I = \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t}\cdot t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{t^3-t}{t+2}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t.$$

Suy ra $I=\left(\dfrac{t^3}{3}-t^2+3t-6\ln|t+2|\right)\Big|_1^2=\dfrac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3$.
Vậy $a=7,\ b=-12,\ c=6\Rightarrow a+b+c=1$.
Chọn đáp án D □

Câu 49. Biết $\displaystyle\int_1^5\dfrac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5,\ (a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+\sqrt{3x+1}\Rightarrow 3x+1=(t-1)^2\Rightarrow 3\mathrm{d}x=2(t-1)\mathrm{d}t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2(t-1)}{3}\mathrm{d}t$.
Đổi cận $x=1\Rightarrow t=3;\ x=5\Rightarrow t=5$.
Khi đó

$$\begin{aligned}\int_1^5\dfrac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x &= \int_3^5\dfrac{2(t-1)}{3t}\mathrm{d}t=\int_3^5\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3t}\right)\mathrm{d}t=\left(\dfrac{2t}{3}-\dfrac{2\ln|t|}{3}\right)\Big|_3^5\\ &= \dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot\ln 3-\dfrac{2}{3}\cdot\ln 5.\end{aligned}$$

Vậy $a=\dfrac{4}{3},\ b=\dfrac{2}{3},\ c=-\dfrac{2}{3}$ và $a+b+c=\dfrac{4}{3}$.
Chọn đáp án D □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+m & \text{khi } x\ge 0\\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b\sqrt{3}+c,\ (a,b,c\in Q)$.
Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x+m)=m+1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(2x\sqrt{3+x^2}\right)=0$ và $f(0)=m+1$.
Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=0$.
Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$ hay $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$.
Khi đó $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}\left(3+x^2\right)+\int_0^1\left(\mathrm{e}^x-1\right)\mathrm{d}x$

$$=\dfrac{2}{3}\left(3+x^2\right)\sqrt{3+x^2}\Big|_{-1}^0+\left(\mathrm{e}^x-x\right)\Big|_0^1=\mathrm{e}+2\sqrt{3}-\dfrac{22}{3}.$$

Suy ra $a=1,\ b=2,\ c=-\dfrac{22}{3}$. Vậy tổng $a+b+3c=-19$.
Chọn đáp án C □

Câu 51. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x^3+x-1)+f(-x^3-x-1)=-6x^6-12x^4-6x^2-2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Tính tích phân $\displaystyle\int_{-3}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 32. **B.** 4. **C.** -36. **D.** -20.

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=t^3+t-1\Rightarrow \mathrm{d}x=(3t^2+1)\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=-3\Rightarrow t=-1$; $x=1\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}f(t^3+t-1)(3t^2+1)\mathrm{d}t$.

Đặt $t=-u$ ta có

$$I=\int\limits_{-1}^{1}f(t^3+t-1)(3t^2+1)\mathrm{d}t=\int\limits_{1}^{-1}f(-u^3-u-1)(3u^2+1)(-\mathrm{d}u)=\int\limits_{-1}^{1}f(-t^3-t-1)(3t^2+1)\mathrm{d}t.$$

Do đó

$$2I=\int\limits_{-1}^{1}f(t^3+t-1)(3t^2+1)\mathrm{d}t+\int\limits_{-1}^{1}f(-t^3-t-1)(3t^2+1)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{1}(-6x^6-12x^4-6x^2-2)(3t^2+1)\mathrm{d}t=-40.$$

Vậy $I=-20$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52. Cho tích phân $\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\pi-\frac{m}{n}$, với $a,b,m,n\in\mathbb{N}^*$, các phân số $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính a^b+m^n.

A. 3. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 2.

✍ Lời giải.

Đặt $x=\cos 2t$ với $0\le t\le\dfrac{\pi}{4}$ thì $\mathrm{d}x=-2\sin 2t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$; $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó

$$\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}}(-2\sin 2t)\mathrm{d}t=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}-1.$$

Suy ra $a=1$, $b=2$, $m=n=1$. Vậy $a^b+m^n=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 53. Cho $\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\frac{9^x+3m}{9^x+3}\mathrm{d}x=m^2-1$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m.

A. $P=24$. **B.** $P=16$. **C.** $P=\dfrac{1}{2}$. **D.** $P=12$.

✍ Lời giải.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\frac{9^x+3m}{9^x+3}\mathrm{d}x=1+(3m-3)\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{9^x+3}\mathrm{d}x$.

Xét $J=\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{9^x+3}\mathrm{d}x$:

Đặt $t=9^x\Rightarrow dt=9^x\cdot\ln 9\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{t\ln 9}$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=9$. Khi đó

$$J=\int\limits_{1}^{9}\frac{1}{t(t+3)\ln 9}\mathrm{d}t=\frac{1}{3\ln 9}\int\limits_{0}^{1}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t+3}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{3\ln 9}\ln\frac{t}{t+3}\Big|_1^9=\frac{1}{6}.$$

Suy ra $I=1+\dfrac{3m-3}{6}=1+\dfrac{m-1}{2}$. Do đó $m^2-1=1+\dfrac{m-1}{2}\Leftrightarrow 2m^2-m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$

Vậy tổng tất cả các giá trị m là $\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{(x+1)\ln x+2}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}+b\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\right)$ trong đó a,b là các số nguyên. Khi đó tỷ số $\dfrac{a}{b}$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \dfrac{(x+1)\ln x+2}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \left[1+\dfrac{\ln x+1}{1+x\ln x}\right]\mathrm{d}x = x\Big|_1^{\mathrm{e}} + \ln|1+x\ln x|\Big|_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}+\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\right)$.

Vậy $a=b=1 \Rightarrow \dfrac{a}{b}=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int\limits_0^2 f(4x)\,\mathrm{d}x = 6$.

Tính $I = \int\limits_{-2}^{2} f\left(3|x|+2\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{20}{3}$. **B.** $I=20$. **C.** $I=\dfrac{40}{3}$. **D.** 40.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2x$, ta được $\int\limits_0^4 f(2t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^4 f(2x)\,\mathrm{d}x = 12$.

Ta thấy $I = \int\limits_{-2}^{2} f\left(3|x|+2\right)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f\left(3|x|+2\right)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f\left(3x+2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $2u=3x+2$, ta được $I = \dfrac{4}{3}\int\limits_1^4 f(2u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{4}{3}\left(\int\limits_0^4 f(2x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x\right) = \dfrac{4}{3}(12-2) = \dfrac{40}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 56. Cho $\int\limits_1^3 \dfrac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{x+3}{x^2+3x+2} = \dfrac{-1}{x+2}+\dfrac{2}{x+1}$.

Do đó,

$$\int\limits_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(-\ln|x+2|+2\ln|x+1|\right)\Big|_1^3 = 2\ln 2+\ln 3-\ln 5.$$

Suy ra $a=2$, $b=1$ và $c=-1$.

Vậy $a+b+c=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $I =$

$\int\limits_{-1}^{1} f(|3x-2|)\,\mathrm{d}x.$

A. $I=3.$ **B.** $I=-2.$ **C.** $I=4.$ **D.** $I=9.$

✍ Lời giải.

Ta có $f(|3x-2|)=\begin{cases} f(3x-2) \text{ khi } x\geq \dfrac{2}{3} \\ f(2-3x) \text{ khi } x<\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Do đó $I=\int\limits_{-1}^{1} f(|3x-2|)\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_{-1}^{\frac{2}{3}} f(2-3x)\,\mathrm{d}x}_{A}+\underbrace{\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} f(3x-2)\,\mathrm{d}x}_{B}.$

Với $A=\int\limits_{-1}^{\frac{2}{3}} f(2-3x)\,\mathrm{d}x$, đặt $t=2-3x\Rightarrow \mathrm{d}t=-3\,\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}t}{-3}=\mathrm{d}x.$

Khi đó $x=-1\Rightarrow t=5, x=\dfrac{2}{3}\Rightarrow t=0.$

Do đó $A=\int\limits_{5}^{0} \dfrac{f(t)}{-3}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\int\limits_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{6}{3}=2.$

Với $B=\int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} f(3x-2)\,\mathrm{d}x$, đặt $u=3x-2\Rightarrow \mathrm{d}u=3\,\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{3}=\mathrm{d}x.$ Khi đó $x=\dfrac{2}{3}\Rightarrow u=0, x=1\Rightarrow u=1.$

Do đó $B=\int\limits_{0}^{1} f(u)\dfrac{\mathrm{d}u}{3}=\dfrac{1}{3}\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=1.$

Vậy $I=A+B=2+1=3.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 58. Cho $\int\limits_{0}^{3} \dfrac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tìm tổng giá trị của $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 9.

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=2; x=3\Rightarrow t=4.$

Khi đó

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^2 \frac{t^3-t}{t+2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^2 \left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \left(\frac{t^3}{3}-t^2+3t-6\ln|t+2|\right)\Big|_1^2\\ &= \frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3.\end{aligned}$$

Suy ra $\begin{cases} a=7\\ b=-12 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=1.$
$c=6$

Chọn đáp án A □

Câu 59. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_{-1}^1 f(|3x-2|)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=9$.

✍ **Lời giải.**

— Có $\int_{-1}^1 f(|3x-2|)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{2}{3}} f(2-3x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^1 f(3x-2)\,\mathrm{d}x.$

— $\int_{-1}^{\frac{2}{3}} f(2-3x)\,\mathrm{d}x=-\int_5^0 f(t)\frac{\mathrm{d}t}{3}=2.$

— $\int_{\frac{2}{3}}^1 f(3x-2)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\frac{\mathrm{d}t}{3}=1.$

— Vậy $I=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 60. Biết $\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=a+b\ln\frac{1+\mathrm{e}}{2}$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\mathrm{e}^x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=1 \Rightarrow t=\mathrm{e}+1. \end{cases}$

Khi đó

$$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^{\mathrm{e}+1} \frac{1}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_2^{\mathrm{e}+1} \frac{1}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t = \int\limits_2^{\mathrm{e}+1} \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\Big|_2^{\mathrm{e}+1}$$

$$= 1-\ln\frac{\mathrm{e}+1}{2}.$$

Vậy $a=1$, $b=-1$ và $S=a^3+b^3=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^{\ln 2} f(\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x=5$ và $\int\limits_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x=3$.

Tính $I=\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

A. $I=2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=8$.

✍ Lời giải.

Đặt $\mathrm{e}^x+1=t \Rightarrow \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t \Rightarrow (t-1)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=\ln 2 \Rightarrow t=3. \end{cases}$

$$\int\limits_0^{\ln 2} f(\mathrm{e}^x+1)\,\mathrm{d}x=5 \Rightarrow \int\limits_2^3 f(t)\frac{\mathrm{d}t}{t-1}=5 \Rightarrow \int\limits_2^3 \frac{f(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x=5.$$

Ta có $\int\limits_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x=3 \Rightarrow \int\limits_2^3 \frac{(2x-2)f(x)-f(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3 2f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_2^3 \frac{f(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x=3.$

Suy ra $2\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=3+5=8 \Rightarrow \int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Biết tích phân $\int\limits_0^{\ln 6} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\,\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$, với a,b,c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=2$. **D.** $T=1$.

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+3}$ ta có $t^2=\mathrm{e}^x+3$, suy ra $2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \ln 6 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array}$. Tích phân ban đầu trở thành

$$\int\limits_2^3 \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^3 \left(2-\frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t=(2t-2\ln|1+t|)\Big|_2^3=6-2\ln 4-(4-2\ln 3)=2-4\ln 2+2\ln 3.$$

Đồng nhất hệ số, ta có $a=2$, $b=-4$, $c=2$. Vậy $T=a+b+c=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 63. Cho $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a,b,c,d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

✍ Lời giải.

Nhân tử và mẫu của $\sqrt{\dfrac{x}{x^3+1}}$ cho $x\sqrt{x}$ ta được $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\dfrac{x}{x^3+1}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3(x^3+1)}}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=x^3$ thì $I=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{t(t+1)}}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)}}\,\mathrm{d}t.$

Áp dụng công thức $\displaystyle\int\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+b}}\,\mathrm{d}u=\ln\left|u(x)+\sqrt{u^2(x)+b}\right|+C$, ta có

$$I=\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)}}=\frac{1}{3}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)}\right|\Bigg|_{\frac{1}{8}}^{1}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right).$$

Vậy $a+b+c+d=10$.

Chọn đáp án B □

Câu 64. Cho $I=\displaystyle\int\limits_0^1 x\ln\left(2+x^2\right)\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 0.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(2+x^2\right)\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\end{cases}$. Khi đó $\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2+2}{2}.\end{cases}$

Do đó

$$I=\left(\frac{x^2+2}{2}\right)\cdot\ln\left(2+x^2\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}.$$

Suy ra $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-1$, $c=-\dfrac{1}{2}$. Vậy $a+b+c=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 65. Biết $\displaystyle\int\limits_1^e\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x=a+b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=\dfrac{1}{2}$. **C.** $S=\dfrac{3}{4}$. **D.** $S=\dfrac{2}{3}$.

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow\ln x=t^2-1$ và $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=2t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=1\to t=1$; $x=e\to t=\sqrt{2}$.

Khi đó $I=\displaystyle\int\limits_1^e\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\,\mathrm{d}x\Rightarrow I=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\dfrac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\left(\dfrac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=2\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}\right)+\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}\sqrt{2}.$

Suy ra $S=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 66. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+2}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$ với a, b là các số nguyên. Tính $P = 2a+b$.

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Đặt $\sin x = t \Rightarrow \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{1}{(t+1)(t+2)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \left(\ln|t+1|-\ln|t+2|\right)\Big|_0^1 = 2\ln 2-\ln 3.\end{aligned}$$

Vậy $a = 2$, $b = -1 \Rightarrow P = 2a+b = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 67. Biết $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính $T = a+b+c$.

A. $T = 1$. **B.** $T = 4$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = 6$.

✍ Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra

$$\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2t(t^2-1)}{4+2t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3.$$

Vậy $a = 7, b = -12, c = 6 \Rightarrow T = 1$.

Chọn đáp án A □

Câu 68. Biết $\displaystyle I = \int_1^5 \frac{1}{x\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 5$. Giá trị của $2a^2+ab+b^2$ là

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 3.

✍ Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow x = \dfrac{t^2-1}{3} \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}t\mathrm{d}t$.

Ta có $I = \displaystyle\int_2^4 \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_2^4 \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^4 = \left(\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{3}\right) = 2\ln 3-\ln 5$.

Do đó $2a^2+ab+b^2 = 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 69. Nếu $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\ln c$, (với $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $a>0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $a+2b+3c$ là

A. 13. **B.** 14. **C.** 9. **D.** 11.

✍ Lời giải.

Có $\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=\sin x+\cos x$, vì $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra

$$\begin{aligned}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\,\mathrm{d}x&=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x\\ =&-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=-\ln|\sin x+\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\left(\ln 1-\ln\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Suy ra $a=1$, $b=2$, $c=2$. Vậy $a+2b+3c=11$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 70. Biết rằng $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4\sin x+7\cos x}{2\sin x+3\cos x}\,\mathrm{d}x=a+2\ln\frac{b}{c}$, với $a>0;b,c\in\mathbb{N}^*;\frac{b}{c}$ tối giản. Hãy tính giá trị biểu thức $P=a-b+c$.

A. $\pi-1$. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** $\frac{\pi}{2}-1$. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x-6\sin x}{2\sin x+3\cos x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x\\ &=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{2\sin x+3\cos x}\,\mathrm{d}(2\sin x+3\cos x)+\frac{\pi}{2}\\ &=2\ln|2\sin x+3\cos x|\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\\ &=2\ln 2-2\ln 3+\frac{\pi}{2}\\ &=2\ln\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $P=\frac{\pi}{2}-2+3=\frac{\pi}{2}+1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 71. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_{-2}^{1} \frac{1}{x+5\sqrt{x+3}+9}\,\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** 5. **D.** -5.

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+3}$. Ta có $t^2=x+3\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=-2\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=2$.

Khi đó,

$$I = \int_{-2}^{1} \frac{1}{x+5\sqrt{x+3}+9}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} \frac{2t}{t^2-3+5t+9}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{2} \frac{2t}{t^2+5t+6}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{2} \frac{2t}{(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{1}^{2} \left(-\frac{4}{t+2}+\frac{6}{t+3}\right)\mathrm{d}t = (-4\ln|t+2|+6\ln|t+3|)\Big|_1^2 = -20\ln 2+4\ln 3+6\ln 5.$$

Do đó, $a=-20$, $b=4$, $c=6$.

Vậy $a+b+c=-20+4+6=-10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 72. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Tính tích phân $\int_{0}^{2} [f(1-3x)+9]\,\mathrm{d}x$.

A. 27. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 75.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_{0}^{2} [f(1-3x)+9]\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} f(1-3x)\,\mathrm{d}x + 18$.

Xét $I = \int_{0}^{2} f(1-3x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = 1-3x \Rightarrow \mathrm{d}u = -3\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{3}$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=2 \Rightarrow u=-5$.

Khi đó $I = \int_{0}^{2} f(1-3x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-5}^{1} f(u)\frac{\mathrm{d}u}{3} = -3$.

Vậy $\int_{0}^{2} [f(1-3x)+9]\,\mathrm{d}x = 18-3 = 15$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 73. Cho $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{3x+1}}{x-5}\,\mathrm{d}x = a+b\cdot\ln 5+c\cdot\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

A. 6. **B.** -4. **C.** 14. **D.** -2.

✍ **Lời giải.**

Xét $I = \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{3x+1}}{x-5}\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow \frac{2t}{3}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0$ thì $t=1$, $x=1$ thì $t=2$.

Khi đó

$$I = \int_{1}^{2} \frac{2t^2}{t^2-16}\mathrm{d}t = \int_{1}^{2} \left(2+\frac{4}{t-4}-\frac{4}{t+4}\right)\mathrm{d}t$$
$$= (2t+4\ln|t-4|-4\ln|t+4|)\Big|_1^2 = 2-8\ln 3+4\ln 5.$$

Do đó $a=2, b=4, c=-8$. Vậy $a+b+c=-2$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(3)=21$, $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=9$. Tính $I=\int\limits_0^1 xf'(3x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=12$. **C.** $I=9$. **D.** $I=15$.

Lời giải.

Đặt $3x=t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$. Với $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=3$.

$$I=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 tf'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 t\,\mathrm{d}(f(t))=\frac{1}{9}\left[tf(t)\Big|_0^3-\int\limits_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{9}[3f(3)-9]=\frac{3\cdot 21-9}{9}=6.$$

Chọn đáp án A □

Câu 75. Cho $\int\limits_0^1 x\ln(2+x^2)\,\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 0.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(2+x^2)\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2x}{2+x^2}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2}{2}+1.\end{cases}$

$I=\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)\ln(2+x^2)\Big|_0^1-\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}\ln 3-\ln 2-\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1=\dfrac{3}{2}\ln 3-\ln 2-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a+b+c=\dfrac{3}{2}-1-\dfrac{1}{2}=0$.

Chọn đáp án D □

Câu 76. Biết m là số thực thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)\,\mathrm{d}x=2\pi^2+\dfrac{\pi}{2}-1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\leqslant 0$. **B.** $0<m\leqslant 3$. **C.** $3<m\leqslant 6$. **D.** $m>6$.

Lời giải.

Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=(\cos x+2m)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\sin x+2mx.\end{cases}$

Khi đó $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)\,\mathrm{d}x=x(\sin x+2mx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+2mx)\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{2}(1+m\pi)-\left(mx^2-\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{m\pi^2}{4}+\dfrac{\pi}{2}-1$.

Theo giả thiết $I=2\pi^2+\dfrac{\pi}{2}-1\Rightarrow\dfrac{m}{4}=2\Leftrightarrow m=8$.

Chọn đáp án D □

Câu 77. Biết $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=a\sqrt{\mathrm{e}}+b$ với a, $b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a\cdot b$.

A. $P=4$. **B.** $P=-8$. **C.** $P=8$. **D.** $P=-4$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = 2\sqrt{x}. \end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^{\mathrm{e}} - 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^{\mathrm{e}} - 4\sqrt{x}\Big|_0^{\mathrm{e}} = -2\sqrt{e} + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4. \end{cases}$

Vậy $P = ab = -8$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 78. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = a\pi + b\ln 2$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $T = 16a - 8b$.

A. $T = 4$. **B.** $T = 5$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = -2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \tan x. \end{cases}$

$$I = \frac{1}{2}\left[x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

Nên $a = \dfrac{1}{8}$, $b = -\dfrac{1}{4}$. Do đó $T = 16a - 8b = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 79. Biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{\mathrm{e}+1} + b\ln\frac{2}{\mathrm{e}+1} + c$, với a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x+1} + 1 = \dfrac{x}{x+1} \end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{x\ln x}{x+1}\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1} - \ln|x+1|\Big|_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1} + \ln\frac{2}{\mathrm{e}+1} = \frac{-1}{\mathrm{e}+1} + \ln\frac{2}{\mathrm{e}+1} + 1. \end{aligned}$$

Vậy ta suy ra $a = -1$; $b = 1$; $c = 1 \Rightarrow a+b+c = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $f(0) = 2$, $\displaystyle\int_0^2 (2x-4)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Tính $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -2$. **B.** $I = -6$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 6$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = 2x-4 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int_0^2 (2x-4)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = (2x-4)\cdot f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 2f(x)\,\mathrm{d}x = 4f(0) - 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $f(2) = 3$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \displaystyle\int_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 3$. **B.** $I = -3$. **C.** $I = 6$. **D.** $I = 0$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int_0^2 x\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot x\Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2f(2) - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3.$

Chọn đáp án A □

Câu 82. Biết $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = a\ln 5 + b\ln 2 + c$. Tính $P = a+b+c$.

A. $P = 3$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = 5$. **D.** $P = 2$.

✍ **Lời giải.**

— Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2+1) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

— Khi đó

$$\begin{aligned} \int_1^2 x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2 \\ &= 2\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2 - 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2 \\ &= \frac{5}{2}\ln 5 - \ln 2 - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $P = a+b+c = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 83. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $f(0)=2$, $\displaystyle\int_0^2 (2x-4)f'(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Tính $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-2$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=2$. **D.** $I=6$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=2x-4 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x \\ v=f(x). \end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int_0^2 (2x-4)f'(x)\,\mathrm{d}x = (2x-4)\cdot f(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 2f(x)\,\mathrm{d}x = 4f(0) - 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Vậy $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 84. Biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{\mathrm{e}+1} + b\cdot\ln\frac{2}{\mathrm{e}+1} + c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Xét tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt

$$\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=-\dfrac{1}{x+1}. \end{cases}$$

Thu được

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{x+1}\cdot\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + \int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_1^{\mathrm{e}} = -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + 1 - \ln(\mathrm{e}+1) + \ln 2 \\ &= \frac{-1}{\mathrm{e}+1} + \ln\frac{2}{\mathrm{e}+1} + 1. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a=-1, b=1, c=1$ nên $a+b+c=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 85. Tích phân $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với $b\in\mathbb{N}$, $a,c\in\mathbb{Q}$ là các phân số tối giản. Tính tổng $a+b+c$.

A. $-\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{9}{10}$. **D.** $-\dfrac{9}{10}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ v=-\dfrac{1}{2(x^2+1)}. \end{cases}$

Khi đó

$$I=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{(x^2+1)}\Big|_1^2+\int\limits_1^2\frac{1}{2x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{10}\ln 2+I_1.$$

(Với $I_1=\displaystyle\int\limits_1^2\frac{1}{2x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$)

Ta có

$$\begin{aligned}I_1=\int\limits_1^2\frac{1}{2x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{(x^2+1)-x^2}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)\Big|_1^2\\ &= \frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 5+\frac{1}{4}\ln 2\\ &= \frac{3}{4}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 5.\end{aligned}$$

Suy ra $I=-\dfrac{1}{10}\ln 2+\dfrac{3}{4}\ln 2-\dfrac{1}{4}\ln 5=\dfrac{13}{20}\ln 2-\dfrac{1}{4}\ln 5.$

Vậy $\begin{cases}a=\dfrac{13}{20}\\ b=0\\ c=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$ và $a+b+c=\dfrac{2}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 86. Cho $\displaystyle\int\limits_1^2\frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\ln 5+b\ln 3+c\ln 2$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+2(b+c)$ là

A. 0. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=\ln(1+2x)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2}{1+2x}\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{-1}{x}.\end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2\frac{\ln(1+2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{x}\ln(1+2x)\Big|_1^2-\int\limits_1^2\left(\frac{-1}{x}\cdot\frac{2}{1+2x}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\ln 5+\ln 3+\int\limits_1^2\frac{2}{x(2x+1)}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\ln 5+\ln 3+\int\limits_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{4}{2x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\ln 5+\ln 3+(2\ln|x|-2\ln|2x+1|)\Big|_1^2=-\frac{5}{2}\ln 5+3\ln 3+2\ln 2\end{aligned}$$

Vậy $\begin{cases} a=-5 \\ b=3 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow a+2(b+c)=-5+2(3+2)=5.$

Chọn đáp án D □

Câu 87. Nghiệm dương a của phương trình $\int\limits_1^a (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x = (a^2-a)\ln a - 9$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(7;10)$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=(2x-1)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=x^2-x. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_1^a (2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x = (x^2-x)\ln x\Big|_1^a - \int\limits_1^a (x-1)\,\mathrm{d}x \\ &= (a^2-a)\ln a - \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^a = (a^2-a)\ln a - \frac{a^2}{2}+a-\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow I=(a^2-a)\ln a-9 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}+a-\frac{1}{2}=-9 \\ &\Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}+a+\frac{17}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{16}{3} \\ a=-\dfrac{10}{3}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm dương a thỏa mãn là $a=\dfrac{16}{3}\in(5;7)$.

Chọn đáp án C □

Câu 88. Cho $I=\int\limits_1^2 \dfrac{x+\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b}\ln 2 - \dfrac{1}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và các phân số là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S=\dfrac{a+b}{c}$.

A. $S=\dfrac{5}{6}$. **B.** $S=\dfrac{1}{3}$. **C.** $S=\dfrac{2}{3}$. **D.** $S=\dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = x + \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= (x+\ln x)\cdot\left(-\frac{1}{x+1}\right)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x+1}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\cdot(2+\ln 2) + \frac{1}{2} + \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6} + \ln x\Big|_1^2 \\ &= -\frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6} + \ln 2 \\ &= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$.
Vậy $S = \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{2+3}{6} = \dfrac{5}{6}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 89. Biết $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x\left(2x + \mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x = a\cdot\mathrm{e}^4 + b\cdot\mathrm{e}^2 + c$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -4$. **B.** $S = -2$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^2 \mathrm{e}^x\left(2x+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x &= \int_0^2 \left(2x+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^x \\ &= \left(2x+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^x\Big|_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\left(2x+\mathrm{e}^x\right) \\ &= \left(2x+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^x\Big|_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^x\left(2+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(2x+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^x\Big|_0^2 - \int_0^2 \left(2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(2x+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^x\Big|_0^2 - \left(2\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + 2\mathrm{e}^2 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 2$, $c = \dfrac{3}{2}$.
Vậy $S = a + b + c = \dfrac{1}{2} + 2 + \dfrac{3}{2} = 4$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 90. Cho $\displaystyle\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a^2 + b^2 - c^2$ bằng

A. $\dfrac{17}{18}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** 1. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Đặt: $\begin{cases} u = 3+\ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x+1}. \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x &= \frac{-1}{(x+1)}(3+\ln x)\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{-1}{4}(3+\ln 3)+\frac{3}{2}+\ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^3 \\ &= \frac{-3}{4}-\frac{1}{4}\ln 3+\frac{3}{2}+\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4}\ln 3-\ln 2+\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=\dfrac{3}{4}$, $b=-1$, $c=\dfrac{3}{4}$.

Vậy $a^2+b^2-c^2=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Cho $I=\displaystyle\int_0^1 \left(x+\sqrt{x^2+15}\right)\mathrm{d}x = a+b\ln 3+c\ln 5$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính tổng $a+b+c$.

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $J=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+15}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+15} \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases}$, ta được $\begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+15}}\mathrm{d}x \\ \text{Chọn } v=x \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} J &= x\sqrt{x^2+15}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+15}}\mathrm{d}x \\ J &= 4-\int_0^1 \frac{x^2+15-15}{\sqrt{x^2+15}}\mathrm{d}x \\ J &= 4-J+15\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+15}}\mathrm{d}x \\ J &= 2+\frac{15}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+15}\right|\Big|_0^1 \\ J &= 2-\frac{15}{4}\ln 3+\frac{15}{4}\ln 5.\end{aligned}$$

Ta được $I=\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+J=\frac{5}{2}-\frac{15}{4}\ln 3+\frac{15}{4}\ln 5 \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=-\dfrac{15}{4} \\ c=\dfrac{15}{4}. \end{cases}$

Vậy $a+b+c=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 92. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $f(2)=3$; $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\int\limits_0^2 x\cdot f'(x)\mathrm{d}x$

A. $I=6$. **B.** $I=3$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $I=\int\limits_0^2 x\cdot f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\cdot x\big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $2(x+1)f(x)f'(x)=1+f^2(x),\ \forall x\in(0;+\infty)$; $f(0)=2$. Khi đó giá trị $f^2(1)$ bằng

A. 3. **B.** e^2. **C.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned}\frac{2f(x)f'(x)}{1+f^2(x)}=\frac{1}{x+1}\ &\Rightarrow\ \int\limits_0^1\frac{2f(x)f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\ &\Leftrightarrow\ \ln\left|1+f^2(x)\right|\Big|_0^1=\ln|1+x|\Big|_0^1\\ &\Leftrightarrow\ \ln\left(1+f^2(1)\right)-\ln 5=\ln 2\\ &\Leftrightarrow\ f^2(1)=9.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 94. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn các điều kiện $f(4-x)=f(x),\forall x\in[1;3]$ và $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=-2$. Giá trị $2\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(4-x)=f(x),\forall x\in[1;3]$ nên $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 xf(4-x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=4-x$, khi đó $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ hay $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Với $x=1$ thì $t=3$; với $x=3$ thì $t=1$.

Do đó $\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 xf(4-x)\mathrm{d}x=\int\limits_3^1(4-t)f(t)(-\mathrm{d}t)=\int\limits_1^3 4f(t)\mathrm{d}t-\int\limits_1^3 tf(t)\mathrm{d}t$.

Suy ra

$$2\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=4\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow 2\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 xf(x)\mathrm{d}x=-2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 95. Cho hàm số $y=f(x)$ thoả mãn $f(2)=-\dfrac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{3}{4}$.

✍ Lời giải.

Ta có $f'(x)=x^3f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;2]$ ta được

$$\int\limits_1^2\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2x^3\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{-1}{f(x)}\Big|_1^2=\frac{15}{4}\Leftrightarrow\frac{-1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\frac{15}{4}\Leftrightarrow f(1)=-1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 96. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\displaystyle\int\limits_0^3\left[2x\ln(x+1)+xf'(x)\right]\mathrm{d}x=0$ và $f(3)=1$. Biết $\displaystyle\int\limits_0^3f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a+b\ln2}{2}$ với a,b là các số thực dương. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 35. **B.** 29. **C.** 11. **D.** 7.

✍ Lời giải.

Giả sử với $f(x)$ là hàm có đạo hàm liên tục trên $[0;3]$.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^3\left[2x\ln(x+1)+xf'(x)\right]\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_0^3 2x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x}_{I}+\underbrace{\int\limits_0^3xf'(x)\,\mathrm{d}x}_{K}$

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\int\limits_0^3 2x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x=\left(x^2\ln(x+1)\right)\Big|_0^3-\int\limits_0^3\frac{x^2}{x+1}\\&=9\ln4-\int\limits_0^3\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=9\ln4-\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)\Big|_0^3=8\ln4-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$$K=\int\limits_0^3xf'(x)\,\mathrm{d}x=(xf(x))\Big|_0^3-\int\limits_0^3f(x)\,\mathrm{d}x=3f(3)-\int\limits_0^3f(x)\,\mathrm{d}x=3-\int\limits_0^3f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Theo giả thiết ta có $I+K=0$ suy ra $\displaystyle\int\limits_0^3f(x)\,\mathrm{d}x=8\ln4+\frac{3}{2}=\frac{16\ln4+3}{2}=\frac{32\ln2+3}{2}.$

Vậy $a=32;\ b=3$. Giá trị của $a+b=35$.

Chọn đáp án A □

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[(f'(x)]^2+f(x)f''(x)=15x^4+12x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $[f(1)]^2$ là

A. 8. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có $\left[f(x)\cdot f'(x)\right]'=\left[f'(x)\right]^2+f(x)\cdot f''(x)$ do đó, $\left[f(x)\cdot f'(x)\right]'=15x^4+12x$, suy ra

$$f(x)\cdot f'(x)=3x^5+6x^2+C,$$

cho $x=0$ suy ra $C=1$ nên ta được $f(x)\cdot f'(x)=3x^5+6x^2+1.\quad(1)$

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) ta có

$$\begin{aligned}&\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\int(3x^5+6x^2+1)\,\mathrm{d}x\\\Rightarrow\ &\frac{[f(x)]^2}{2}=3\cdot\frac{x^6}{6}+6\cdot\frac{x^3}{3}+x+C_1\\\Rightarrow\ &[f(x)]^2=x^6+4x^3+2x+C',\end{aligned}$$

cho $x=0$ suy ra $C'=1$.

Vậy $[f(x)]^2=x^6+4x^3+2x+1\Rightarrow[f(1)]^2=8$.

Chọn đáp án A □

Câu 98. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $[f(x)]^2\cdot f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

A. $2.\sqrt[3]{16}$. **B.** $\sqrt[3]{18}$. **C.** $2.\sqrt[3]{18}$. **D.** $\sqrt[3]{16}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có:

$$[f(x)]^2\cdot f'(x)=3x^2+4x+2\Rightarrow\int[f(x)]^2\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\int(3x^2+4x+2)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{[(f(x)]^3}{3}=x^3+2x^2+2x+C\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{3x^3+6x^2+6x+3C}.$$

Vì $f(0)=1$ nên $C=\dfrac{1}{3}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3x^2+4x+2}{\sqrt[3]{(3x^3+6x^2+6x+1)^2}}>0$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]}f(x)=f(1)=\sqrt[3]{16}$.

Chọn đáp án D □

Câu 99. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp một, đạo hàm cấp hai liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^xf''(x)\,\mathrm{d}x\neq0$. Giá trị của biểu thức $\dfrac{ef'(1)-f'(0)}{ef(1)-f(0)}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

✍ **Lời giải.**

Giả sử $\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^xf''(x)\,\mathrm{d}x=a\neq0$.

Ta đặt $\displaystyle I=\int_0^1\mathrm{e}^xf(x)\,\mathrm{d}x=a;\ I_1=\int_0^1\mathrm{e}^xf'(x)\,\mathrm{d}x=a;\ I_2=\int_0^1\mathrm{e}^xf''(x)\,\mathrm{d}x=a$.

Xét $\displaystyle I_1=\int_0^1\mathrm{e}^xf'(x)\,\mathrm{d}x=a$.

Đặt $\begin{cases}u=\mathrm{e}^x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ v=f(x).\end{cases}$

Khi đó $\displaystyle I_1=\mathrm{e}^xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^xf(x)\,\mathrm{d}x=a\Leftrightarrow ef(1)-f(0)=2a$.

Xét $\displaystyle I_2=\int_0^1\mathrm{e}^xf''(x)\,\mathrm{d}x=a$.

Đặt $\begin{cases}u=\mathrm{e}^x\\ \mathrm{d}v=f''(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ v=f'(x).\end{cases}$

Khi đó $\displaystyle I_1=\mathrm{e}^xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1(\mathrm{e}^x)'f(x)\,\mathrm{d}x=a\Leftrightarrow ef'(1)-f'(0)=2a$.

Vậy $\dfrac{ef'(1)-f'(0)}{ef(1)-f(0)}=\dfrac{2a}{2a}=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[0;5]$ thỏa mãn $\int\limits_0^5 xf'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 8$; $f(5) = \ln 5$.

Tính $I = \int\limits_0^5 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. -33. **B.** 33. **C.** 17. **D.** -17.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{f(x)}. \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_0^5 xf'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 8 \Leftrightarrow \left(x\cdot \mathrm{e}^{f(x)}\right)\Big|_0^5 - \int\limits_0^5 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 8 \Leftrightarrow 5\mathrm{e}^{f(5)} - I = 8 \Rightarrow I = 25 - 8 = 17.$

Chọn đáp án C □

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) > 0$ và $f(x) - f'(x) = -\dfrac{2[f(x)]^2}{\mathrm{e}^x \cdot x\sqrt{x-x^2}}$, $\forall x \in (0;1)$. Biết $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(\dfrac{1}{5}\right) \geqslant \dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{5} \leqslant f\left(\dfrac{1}{5}\right) < \dfrac{1}{4}$. **C.** $f\left(\dfrac{1}{5}\right) < \dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{6} \leqslant f\left(\dfrac{1}{5}\right) < \dfrac{1}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} & f(x) - f'(x) = -\frac{2[f(x)]^2}{\mathrm{e}^x \cdot x\sqrt{x-x^2}},\ \forall x \in (0;1) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{e}^x f(x) - \mathrm{e}^x \cdot f'(x)}{[f(x)]^2} = -\frac{2}{x\sqrt{x-x^2}} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\frac{\mathrm{e}^x}{f(x)}\right]' = \frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}} \\ \Rightarrow\ & \int \left[\frac{\mathrm{e}^x}{f(x)}\right]' \mathrm{d}x = \int \frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{e}^x}{f(x)} = \int \frac{-2}{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}}\,\mathrm{d}x. \qquad (1) \end{aligned}$$

Xét $I = \int \dfrac{-2}{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{1}{x}-1} \Rightarrow t^2 = \dfrac{1}{x} - 1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $I = \int \dfrac{4t}{t}\,\mathrm{d}t = 4t + C = 4\sqrt{\dfrac{1}{x}-1} + C$.

Từ (1) suy ra $\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)} = 4\sqrt{\dfrac{1}{x}-1} + C \Rightarrow f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{4\sqrt{\dfrac{1}{x}-1} + C}$.

Do $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{4+C} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow C = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 4 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{4\sqrt{\dfrac{1}{x}-1} + 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 4}$.

Vậy $f\left(\dfrac{1}{5}\right) \approx 0{,}167$.

Chọn đáp án D □

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $x\cdot f'(x)=-[f(x)]^2\cdot \ln x$; $f(1)=1$. Giá trị $f(\mathrm{e})$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2\mathrm{e}}{3}$. **C.** $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

✍ Lời giải.

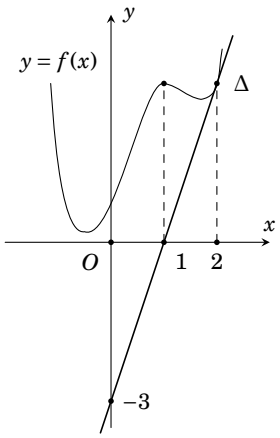
Ta có

$$\begin{aligned} & x\cdot f'(x)=-[f(x)]^2\cdot \ln x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}=-\frac{\ln x}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{\ln x}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{f(x)}=\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\ln^2 x}{2}+C. \end{aligned}$$

Do $f(1)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=\dfrac{2}{\ln^2 x+2}$. Vậy $f(\mathrm{e})=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$; đường thẳng Δ trong hình vẽ bên là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=2$. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^x f''\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng



A. 8. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

✍ Lời giải.

Ta có phương trình tiếp tuyến Δ là $y=f'(2)(x-2)+f(2)=3x-3$.

Suy ra $f'(2)=3$ và $2f'(2)-f(2)=3$.

Do hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$ nên $f'(1)=0$.

Đặt $t=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{2}$ khi đó $I=\displaystyle\int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^x f''\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int_1^2 f''(t)\,\mathrm{d}t=2f'(2)-2f'(1)=6.$

Chọn đáp án D □

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x=5$ và $\displaystyle\int_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\displaystyle\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=8$.

✍ Lời giải.

Xét tích phân $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x=5$.

Đặt $t = \mathrm{e}^x + 1$. Ta có

$$\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{t-1} \cdot \mathrm{d}t.$$
$$x = 0 \Rightarrow t = 2, \quad x = \ln 2 \Rightarrow t = 3.$$

Do đó

$$5 = \int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^x + 1\right) \mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{f(t)}{t-1} \mathrm{d}t.$$

Mặt khác

$$3 = \int_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1} \mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{(2x-2-1)f(x)}{x-1} \mathrm{d}x = \int_2^3 \left[2f(x) - \frac{f(x)}{x-1}\right] \mathrm{d}x$$
$$= 2\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^3 \frac{f(x)}{x-1} \mathrm{d}x = 2I - 5.$$

Vậy $I = 4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 105. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(x^5 + 4x + 3\right) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_{-2}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 2. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** 72.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = x^5 + 4x + 3 \Rightarrow \mathrm{d}t = (5x^4 + 4)\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = -1 \Rightarrow t = -2, x = 1 \Rightarrow t = 8$.

Suy ra $\int_{-2}^{8} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (5x^4 + 4) f\left(x^5 + 4x + 3\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (5x^4 + 4)(2x + 1)\,\mathrm{d}x = 10$.

Vậy $\int_{-2}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x = 10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 106. Cho $y = f(x), y = g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn:

$$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10, \int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 6.$$

Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

Theo giả thiết

$$\begin{cases} \int_1^3 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 \\ \int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 10 \\ 2\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \\ \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6.$$

Chọn đáp án C □

Câu 107. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 x^{2018} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Giá trị của $\int_0^1 x^{2019} f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -4038. **B.** $\dfrac{2}{2019}$. **C.** 4038. **D.** $-\dfrac{2}{2019}$.

✍ **Lời giải.**

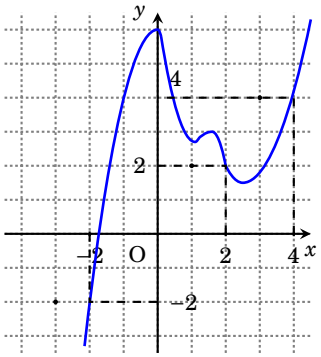
Đặt $\begin{cases} u = x^{2019} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases}$, ta được $\begin{cases} u' = 2019x^{2018} \\ \text{Chọn } v = f(x) \end{cases}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^{2019} f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x^{2019} f(x)\Big|_0^1 - 2019\int_0^1 x^{2018} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -2019\cdot 2 \\ &= -4038. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 108.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Khi đó tổng $\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x + \int_0^2 f'(x+2)\,\mathrm{d}x$ bằng



A. 2. **B.** -2. **C.** 6. **D.** 10.

✍ **Lời giải.**

Dựa vào đồ thị hàm số có $f(-2)=-2, f(2)=2, f(4)=4$.

Đặt $t=x-2 \Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ và $\int_0^4 f'(x-2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^2 f'(t)\,\mathrm{d}t = f(2)-f(-2) = 2-(-2) = 4$.

Đặt $t=x+2 \Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ và $\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x = \int_2^4 f'(t)\,\mathrm{d}t = f(4)-f(2) = 4-2 = 2$.

Vậy $\int_0^4 f'(x-2)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 f'(x+2)\,\mathrm{d}x = 6$.

Chọn đáp án C □

Câu 109. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x)=f'(1-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$, $f(1)=2019$.

Giá trị của $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 1010. **D.** $\sqrt{2019}$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int f'(1-x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x) = -f(1-x) + C \Leftrightarrow f(x) + f(1-x) = C$.

Khi đó $f(0) + f(1) = C \Rightarrow C = 2020 \Rightarrow f(x) + f(1-x) = 2020$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^0 f(1-x)(-\mathrm{d}x) = \int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Do đó $\displaystyle 2I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2020\,\mathrm{d}x \Rightarrow I = \frac{2020}{2} = 1010$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 110. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tập hợp các số thực m thỏa mãn $\displaystyle\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^m f(m-x)\,\mathrm{d}x$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

✍ Lời giải.

Với m bất kì, đặt $t = m - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = m$, $x = m \Rightarrow wt = 0$.

Nên $\displaystyle\int_0^m f(m-x)\,\mathrm{d}x = -\int_m^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^m f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x$. Do đó $m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 111. Cho $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn $f(x) + f(4-x) = -x^2 + 4x$. Giá trị của tích phân $I = \displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 32. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** 16.

✍ Lời giải.

Trong tích phân I, ta đặt $t = 4 - x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 4$; với $x = 4 \Rightarrow t = 0$.

Tích phân trở thành $\displaystyle I = \int_4^0 f(4-t)(-\mathrm{d}t)$. Hay $\displaystyle I = \int_0^4 f(4-x)\,\mathrm{d}x$.

Từ đó suy ra $\displaystyle I + I = \int_0^4 \left(f(x) + f(4-x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3}$.

Vậy $I = \frac{16}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 112. Cho $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 3}{2^x + 1}\,\mathrm{d}x = a + \frac{b\pi}{2}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $a + b^2$ bằng

A. 10. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 2.

✍ Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 3}{2^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x + 3}{2^x + 1}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 3}{2^x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=-\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$ và $x=0 \Rightarrow t=0$.

Khi đó

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x+3}{2^x+1}\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{2^t(\cos t+3)}{2^t+1}\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^t(\cos t+3)}{2^t+1}\mathrm{d}t.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+3}{2^x+1}\mathrm{d}x &= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^x(\cos x+3)}{2^x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+3}{2^x+1}\mathrm{d}x\\ &= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x+3)\mathrm{d}x=(\sin x+3x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1+\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $a=1, b=3 \Rightarrow a+b^2=10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x)-2f(x)=\tan^2 x$. Tính $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $1-\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}-1$. **C.** $1+\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $2-\dfrac{\pi}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Theo đề bài ta có $3f(-x)-2f(x)=\tan^2 x$. (1)

Thay x bởi $-x$ ta được: $3f(x)-2f(-x)=\tan^2(-x)=\tan^2 x$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x)=\tan^2 x$. Khi đó

$$\begin{aligned}I &= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(1+\tan^2 x\right)-1\right]\mathrm{d}x\\ &= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=2(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 114. Cho $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} &= \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1} \frac{2}{(x+2)^2}\mathrm{d}x\\ &= \ln|x+2|\Big|_0^1+\frac{2}{x+2}\Big|_0^1=\ln 3-\ln 2-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nên $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-1$, $c=1$. Suy ra $3a+b+c=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 115. Cho $\displaystyle\int_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a-b=-c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a+b=3c$. **D.** $a-b=-3c$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+9}\Rightarrow t^2=x+9\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=16\Rightarrow t=5$; $x=55\Rightarrow t=8$.

Ta có $\displaystyle\int_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=\int_{5}^{8}\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-9)t}=2\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-9}=\frac{1}{3}\left(\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t-3}-\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t+3}\right)$

$$=\frac{1}{3}(\ln|x-3|-\ln|x+3|)\Big|_5^8=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 11.$$

Vậy $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$, $c=-\dfrac{1}{3}$. Mệnh đề $a-b=-c$ đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 116. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{2}{9}$ và $f'(x)=2x[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{35}{36}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{19}{36}$. **D.** $-\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2x[f(x)]^2\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}=2x\Leftrightarrow\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=-2x\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(x)}=-x^2+C$.

Từ $f(2)=-\dfrac{2}{9}$ suy ra $C=-\dfrac{1}{2}$.

Do đó $f(1)=\dfrac{1}{-1^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 117. Cho $\displaystyle\int_{5}^{21}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-2c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a-b=-c$. **D.** $a-b=-2c$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+4}\Rightarrow\begin{cases}x=t^2-4\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t.\end{cases}$

Đổi cận $\begin{cases}x=5\Rightarrow t=3\\ x=21\Rightarrow t=5.\end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned}I&=\int_{3}^{5}\frac{2\,\mathrm{d}t}{(t-2)(t+2)}=\frac{1}{2}\int_{3}^{5}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}(\ln|t-2|-\ln|t+2|)\Big|_3^5\\&=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 7+\ln 5).\end{aligned}$$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{2}$.

Do đó $a+b=-2c$.

Chọn đáp án A □

Câu 118. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{150}t^2+\dfrac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 20 (m/s). **B.** 16 (m/s). **C.** 13 (m/s). **D.** 15 (m/s).

✍ **Lời giải.**

Từ đề bài, ta suy ra từ lúc chất điểm A chuyển động đến lúc bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 12 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\displaystyle\int a\,\mathrm{d}t=a\cdot t+C$, lại có $v_B(0)=0$ nên $v_B(t)=at$.

Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến lúc bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau, nghĩa là

$$\int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{12}at\,\mathrm{d}t\Leftrightarrow 96=72a\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}.$$

Do đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(12)=\dfrac{4}{3}\cdot 12=16$ (m/s).

Chọn đáp án B □

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{41}{400}$. **B.** $-\dfrac{1}{10}$. **C.** $-\dfrac{391}{400}$. **D.** $-\dfrac{1}{40}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(x)=4x^3[f(x)]^2\Rightarrow-\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}=-4x^3\Rightarrow\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=-4x^3\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}=-x^4+C$.

Do $f(2)=-\dfrac{1}{25}$ nên ta có $C=-9$. Do đó $f(x)=-\dfrac{1}{x^4+9}\Rightarrow f(1)=-\dfrac{1}{10}$.

Chọn đáp án B □

Câu 120. Cho $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(2+x\ln x)\,\mathrm{d}x=a\mathrm{e}^2+b\cdot\mathrm{e}+c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a-b=c$. **D.** $a-b=-c$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(2+x\ln x)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}2\,\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x=2x\Big|_1^{\mathrm{e}}+I=2\mathrm{e}-2+I$ với $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2}{2}.\end{cases}$

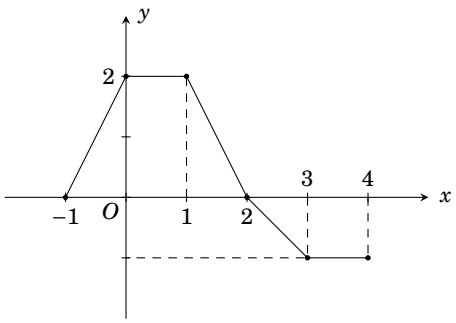
Khi đó $I=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

Suy ra $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(2+x\ln x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}-\frac{7}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b=2\\ c=-\dfrac{7}{4}\end{cases}\Rightarrow a-b=c.$

Chọn đáp án C □

Câu 121.

Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1;4]$ như hình bên. Khi đó $\int\limits_0^{\frac{17}{4}} f\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?



A. $\frac{5}{2}$. **B.** 5. **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$ ta có $f(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{khi } -1\le x\le 0\\ 2 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ -2x+4 & \text{khi } 1\le x\le 2\\ -x+2 & \text{khi } 2\le x\le 3\\ -1 & \text{khi } 3\le x\le 4.\end{cases}$

Xét $I=\int\limits_0^{\frac{17}{4}} f\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x-\frac{1}{2}$. Khi đó $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Với $x=0$ thì $t=-\frac{1}{2}$ và với $x=\frac{17}{4}$ thì $t=\frac{15}{4}$.

Do đó

$$I=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{15}{4}} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}(2t+2)\mathrm{d}t+\int\limits_0^1 2\mathrm{d}t+\int\limits_1^2(-2t+4)\mathrm{d}t+\int\limits_2^3(-t+2)\mathrm{d}t+\int\limits_3^{\frac{15}{4}}(-1)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{3}{4}+2+1-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 122. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+3\sin x}}$ là

A. $I=\frac{1}{3}$. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\frac{4}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+3\sin x}\Rightarrow t^2=1+3\sin x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=3\cos x\,\mathrm{d}x\Rightarrow\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$.

Khi đó, $I=\int_1^2\frac{\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t}{t}=\frac{2}{3}\int_1^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 123. Cho a và b là hai số hữu tỷ tỏa mãn $I=\int\limits_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}2\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=a\pi+b$. Giá trị của biểu thức a^b là

A. 0,0625. **B.** 4. **C.** 0,125. **D.** 0,625.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

$$\begin{aligned}I=\int\limits_0^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}2\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}4t\,\mathrm{d}(\sin t)\\ &= 4t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}(4t)\\ &= 2\pi-4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=2\pi-4\end{aligned}$$

Suy ra $a=2$, $b=-4$. Vậy $a^b=2^{-4}=0{,}0265$.

Chọn đáp án A □

Câu 124. Cho $\displaystyle\int\limits_0^3\frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tìm tổng giá trị của $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=2$; $x=3\Rightarrow t=4$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\int\limits_0^3\frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x &= \int\limits_1^2\frac{t^2-1}{4+2t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_1^2\frac{t^3-t}{t+2}\mathrm{d}t\\ &= \int\limits_1^2\left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \left(\frac{t^3}{3}-t^2+3t-6\ln|t+2|\right)\Big|_1^2\\ &= \frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3.\end{aligned}$$

Suy ra $\begin{cases}a=7\\ b=-12\end{cases}\Rightarrow a+b+c=1.$
$c=6$

Chọn đáp án A □

Câu 125. Cho $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+2)^2} &= \int_0^1 \frac{x+2-2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{x+2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x+2|\Big|_0^1 + \frac{2}{x+2}\Big|_0^1\\ &= \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nên $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-1$, $c=1$, suy ra $3a+b+c=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 126. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\left(\sin\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = A+B\pi$. Tính $A+B$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Đặt $y=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\pi^2\Rightarrow t=\pi$ Suy ra $I=2\displaystyle\int_0^{\pi}(\sin t-\cos t)t\,\mathrm{d}t$.

Đặt $u=t$; $\mathrm{d}v=(\sin t-\cos t)\mathrm{d}t\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}t; v=-\cos t-\sin t$.

$$I=2\left[t(-\cos t-\sin t)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}(\cos t+\sin t)\mathrm{d}t\right]=2\left[\pi+(\sin t-\cos t)\Big|_0^{\pi}\right]=4+2\pi.$$

Nên $A=4$; $B=2\Rightarrow A+B=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 127. Cho hai hàm số $f(x)$ và $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$. Tính $I=\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{\pi}{20}$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{10}$. **C.** $I=-\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $I=-\dfrac{\pi}{10}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=-2\Rightarrow t=2$; $x=2\Rightarrow t=-2$, ta có

$$I=-\int_2^{-2} f(-t)\,\mathrm{d}t=\int_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Theo bài ra ta có

$$2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2}\quad\Leftrightarrow 2\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+3\int_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 3I+2I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x=2\tan u$ ta có $\mathrm{d}x=2\dfrac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=2\left(1+\tan^2 u\right)\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x=-2\Rightarrow u=-\dfrac{\pi}{4}$; $x=2\Rightarrow u=\dfrac{\pi}{4}$, ta có

$$I=\frac{1}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\left(1+u^2\right)}{4+4\tan^2 u}\mathrm{d}u=\frac{1}{10}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}u=\frac{1}{10}u\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{20}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 128. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $f(2)=16;\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=7$. **B.** $I=20$. **C.** $I=12$. **D.** $I=13$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=2$, ta có

$$I=\int\limits_0^2\frac{t}{2}f'(t)\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\limits_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases}u=t\\ \mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\\ v=f(t)\end{cases}$, ta có

$$I=\frac{1}{4}\left[tf(t)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{4}\left[2f(2)-4\right]=\frac{1}{4}(2\cdot 16-4)=7.$$

Chọn đáp án A □

Câu 129. Biết tích phân $\int\limits_0^{\ln 6}\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$, với a,b,c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=2$. **D.** $T=1$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+3}$ ta có $t^2=\mathrm{e}^x+3$, suy ra $2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{array}{c|cc}x&0&\ln 6\\ \hline t&2&3\end{array}$. Tích phân ban đầu trở thành

$$\int\limits_2^3\frac{2t}{1+t}\mathrm{d}x=\int\limits_2^3\left(2-\frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t=(2t-2\ln|1+t|)\Big|_2^3=6-2\ln 4-(4-2\ln 3)=2-4\ln 2+2\ln 3.$$

Đồng nhất hệ số, ta có $a=2$, $b=-4$, $c=2$. Vậy $T=a+b+c=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 130. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[(f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = 15x^4 + 12x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $[f(1)]^2$ là

A. 8. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** $\frac{9}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\left[f(x)\cdot f'(x)\right]' = \left[f'(x)\right]^2 + f(x)\cdot f''(x)$ do đó, $\left[f(x)\cdot f'(x)\right]' = 15x^4 + 12x$, suy ra

$$f(x)\cdot f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + C,$$

cho $x = 0$ suy ra $C = 1$ nên ta được $f(x)\cdot f'(x) = 3x^5 + 6x^2 + 1$. (1)

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) ta có

$$\begin{aligned} &\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (3x^5 + 6x^2 + 1)\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow\ &\frac{[f(x)]^2}{2} = 3\cdot\frac{x^6}{6} + 6\cdot\frac{x^3}{3} + x + C_1 \\ \Rightarrow\ &[f(x)]^2 = x^6 + 4x^3 + 2x + C', \end{aligned}$$

cho $x = 0$ suy ra $C' = 1$.

Vậy $[f(x)]^2 = x^6 + 4x^3 + 2x + 1 \Rightarrow [f(1)]^2 = 8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 131. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^{3} f'(\sqrt{x+1})\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -5$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = -18$. **D.** $I = -10$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x + 1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = -1 \Rightarrow t = 0$, $x = 3 \Rightarrow t = 2$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{3} f'(\sqrt{x+1})\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 t\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Chọn $\begin{cases} u = t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ v = f(t). \end{cases}$

Khi đó

$$\int\limits_0^2 t\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t = t\cdot f(t)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2f(2) - 1 = -5.$$

Vậy $I = -10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 132. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \geq 1 \\ x^2 + b, & x < 1 \end{cases}$, với a, b là các số thực. Biết rằng $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{19}{3}$. **B.** $I = \frac{25}{3}$. **C.** $I = \frac{1}{3}$. **D.** $I = \frac{26}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Do hàm số liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \\ f'(1^-) = f'(1^+). \end{cases}$

Hay ta có hệ $\begin{cases} a+1 = 1+b \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x+1,\ x \geq 1 \\ x^2+2,\ x < 1. \end{cases}$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2+2\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} (2x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{26}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 133. Biết $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 + \cos^3 x \sin x} dx = a(2-\sqrt{3}) + b\ln 2 + c\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** -4. **D.** -6.

✍ **Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x + \cos^3 x \sin x} dx &= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x\left(\cos^2 x + \sin x \cos x\right)} dx \\ &= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1+\tan^2 x\right).\frac{(1+\tan^2 x)}{1+\tan x} dx \end{aligned}$$

Đặt $t = 1+\tan x$ ta được $dt = \left(1+\tan^2 x\right)dx$, đổi cận $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2,\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1+\sqrt{3}$. Ta được,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1+\tan^2 x\right).\frac{(1+\tan^2 x)}{1+\tan x} dx &= \int\limits_{2}^{1+\sqrt{3}} \left(t-2+\frac{2}{t}\right) dt \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - 2t + 2\ln t\right)\Big|_2^{1+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}-2\ln 2 + 2\ln\left(1+\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra $a(2-\sqrt{3}) + b\ln 2 + c\ln\left(1+\sqrt{3}\right) = 2-\sqrt{3}-2\ln 2 + 2\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Do đó $a = 1, b = -2, c = 2$ suy ra $abc = -4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 134. Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}\right)+C.$ **B.** $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}+C.$

C. $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)+C.$ **D.** $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}+C.$

✍ **Lời giải.**

$\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\int \ln x\,\mathrm{d}f(x)=f(x)\ln x-\int\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=f(x)\ln x-\dfrac{1}{2x^2}+C$. Mặt khác, $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)'\Rightarrow$ $f(x)\ln x=-\dfrac{\ln x}{x^2}$. Vậy $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}\right)+C.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 135. Biết $I=\displaystyle\int_3^4\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ln|x|-\ln|x+1|+C.$

Vậy $I=(\ln|x|-\ln|x+1|)\big|_3^4=4\ln 2-\ln 3-\ln 5$nên $a=4,b=-1,c=-1\Rightarrow S=2.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 136. Cho $\displaystyle\int_0^1\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=a+b\ln\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=1$.

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}=\int_0^1\frac{(\mathrm{e}^x+1)-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x+1}=x\Big|_0^1-\ln|\mathrm{e}^x+1|\Big|_0^1=1-\ln\frac{1+e}{2}.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow S=a^3+b^3=0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 137. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x},\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=-6$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=6$.

✍ **Lời giải.**

Cách 1. Tự luận.

Đặt $t=-x\Rightarrow\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x.$

Đổi cận $x=-\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\dfrac{3\pi}{2};x=\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow t=-\dfrac{3\pi}{2}$. Suy ra $I=\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(-t)\mathrm{d}t.$

Mặt khác $f(t)+f(-t)=\sqrt{2+2\cos 2t}=\sqrt{4\cos^2 t}=2|\cos t|$ (thay $x=t$).

Ta có $2I=\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}2|\cos t|\,\mathrm{d}t.$

Suy ra $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t$.

$I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t$. $\left(\text{Do } |\cos t| \text{ là hàm số chẵn trên đoạn } \left[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]\right)$

$=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t+2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos t|\,\mathrm{d}t=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=2\sin t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-2\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$

Cách 2. Trắc nghiệm.

Ta có: $f(x)+f(-x)=2|\cos x| \Leftrightarrow f(x)+f(-x)=|\cos x|+|\cos(-x)|$

nên ta có thể chọn $f(x)=|\cos x|$.

Suy ra $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos x|\,\mathrm{d}x=6$ (bấm máy).

Chọn đáp án (D) □

Câu 138. Biết $I=\int\limits_{1}^{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=24$. **B.** $P=12$. **C.** $P=18$. **D.** $P=46$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\neq 0,\ \forall x\in[1;2]$ nên

$$I=\int\limits_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\int\limits_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} \quad (*)$$

$$=\int\limits_{1}^{2}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}(x+1-x)}=\int\limits_{1}^{2}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}$$

$$=\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_{1}^{2}=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2.$$

Mà $I=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ nên $\begin{cases}a=32\\ b=12\\ c=2\end{cases}$. Suy ra $P=a+b+c=32+12+2=46$.

Lưu ý: giải đến bước (*), ta có thể đổi biến với $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 139. Cho $\int\limits_{16}^{55}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a-b=-c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a+b=3c$. **D.** $a-b=-3c$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x+9}\Rightarrow t^2=x+9\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=16\Rightarrow t=5$; $x=55\Rightarrow t=8$.

Ta có $\displaystyle\int_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=\int_{5}^{8}\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-9)t}=2\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-9}=\frac{1}{3}\left(\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t-3}-\int_{5}^{8}\frac{\mathrm{d}t}{t+3}\right)$

$$=\frac{1}{3}(\ln|x-3|-\ln|x+3|)\Big|_5^8=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 11.$$

Vậy $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$, $c=-\dfrac{1}{3}$. Mệnh đề $a-b=-c$ đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 140. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{2}{9}$ và $f'(x)=2x[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{35}{36}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{19}{36}$. **D.** $-\dfrac{2}{15}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x)=2x[f(x)]^2\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}=2x\Leftrightarrow\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=-2x\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(x)}=-x^2+C$.

Từ $f(2)=-\dfrac{2}{9}$ suy ra $C=-\dfrac{1}{2}$.

Do đó $f(1)=\dfrac{1}{-1^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 141. Cho $\displaystyle\int_{5}^{21}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-2c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a-b=-c$. **D.** $a-b=-2c$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+4}\Rightarrow\begin{cases}x=t^2-4\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t.\end{cases}$

Đổi cận $\begin{cases}x=5\Rightarrow t=3\\ x=21\Rightarrow t=5.\end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned}I&=\int_{3}^{5}\frac{2\,\mathrm{d}t}{(t-2)(t+2)}=\frac{1}{2}\int_{3}^{5}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}(\ln|t-2|-\ln|t+2|)\Big|_3^5\\&=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 7+\ln 5).\end{aligned}$$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{2}$.

Do đó $a+b=-2c$.

Chọn đáp án A □

Câu 142. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{150}t^2+\dfrac{59}{75}t$ (m/s), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 20 (m/s). **B.** 16 (m/s). **C.** 13 (m/s). **D.** 15 (m/s).

Lời giải.

Từ đề bài, ta suy ra từ lúc chất điểm A chuyển động đến lúc bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 12 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int a\,\mathrm{d}t=a\cdot t+C$, lại có $v_B(0)=0$ nên $v_B(t)=at$.

Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến lúc bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau, nghĩa là

$$\int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{12}at\,\mathrm{d}t\Leftrightarrow 96=72a\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}.$$

Do đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(12)=\frac{4}{3}\cdot 12=16$ (m/s).

Chọn đáp án B □

Câu 143. Cho $\int_1^{\mathrm{e}}(2+x\ln x)\mathrm{d}x=a\mathrm{e}^2+b\cdot\mathrm{e}+c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a-b=c$. **D.** $a-b=-c$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int_1^{\mathrm{e}}(2+x\ln x)\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}2\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x=2x\Big|_1^{\mathrm{e}}+I=2\mathrm{e}-2+I$ với $I=\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\frac{x^2}{2}.\end{cases}$

Khi đó $I=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

Suy ra $\int_1^{\mathrm{e}}(2+x\ln x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}-\frac{7}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=2\\ c=-\frac{7}{4}\end{cases}\Rightarrow a-b=c.$

Chọn đáp án C □

Câu 144. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Biểu thức $I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x$ bằng biểu thức nào trong các biểu thức sau đây?

A. $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

✍ Lời giải.

Đổi biến $x=-t\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=-1\Rightarrow t=1, x=1\Rightarrow t=-1$.

Khi đó $I=-\int_1^{-1}\frac{f(-t)}{2^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{2^rf(t)}{2^s+1}\mathrm{d}t\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}\frac{2^xf(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x$.

Do đó $2I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{2^xf(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2^xf(x)}{2^x+1}+\frac{f(x)}{2^x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 145. Cho biết tích phân $I=\int\limits_0^1 (x+2)\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = a\ln 2+\dfrac{-7}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $a=b$. **B.** $a<b$. **C.** $a>b$. **D.** $a=b+3$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=\ln(x+1) \\ \mathrm{d}v=(x+2)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^2}{2}+2x. \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln(x+1)\right]\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^2+4x}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x+3-\frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+3x-3\ln|x+1|\right]\Big|_0^1 \\ &= 4\ln 2-\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $a=4$, $b=4$.

Vậy $a=b$.

Chọn đáp án A □

Câu 146. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $\int\limits_{-1}^1 f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I=\int\limits_{-1}^1 f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 f(4x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Xét $I_1=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=1-4x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{4}\,\mathrm{d}u$.

Khi $x=-1$ thì $u=5$. Khi $x=\dfrac{1}{4}$ thì $u=0$.

Nên $I_1=-\dfrac{1}{4}\int\limits_5^0 f(u)\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^5 f(u)\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\cdot 4=1$.

Xét $I_2=\int\limits_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=4x-1\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\,\mathrm{d}t$.

Khi $x=\dfrac{1}{4}$ thì $t=0$. Khi $x=1$ thì $t=3$.

Nên $I_2=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\cdot 8=2$.

Vậy $I=I_1+I_2=1+2=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 147. Cho $I=\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$ và $u=\sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^3 x^2(x^2-1)\,\mathrm{d}x$.

B. $I=\displaystyle\int_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u$.

C. $I=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^5}{5}-\dfrac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3$.

D. $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^3 u^2(u^2-1)\,\mathrm{d}u$.

✍ **Lời giải.**

$I=\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}(u^2-1)\Rightarrow \mathrm{d}x=u\,\mathrm{d}u$, đổi cận: $x=0\Rightarrow u=1$, $x=4\Rightarrow u=3$.

Khi đó $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^3 (u^2-1)u^2\,\mathrm{d}u$.

Chọn đáp án B □

Câu 148. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)=x\cdot f'(x)-2x^3-3x^2$; $f(1)=4$. Tính $f(2)$.

A. 10. **B.** 20. **C.** 15. **D.** 25.

✍ **Lời giải.**

Xét biểu thức $-f(x)+x\cdot f'(x)=2x^3+3x^2$. $(*)$

Chia hai vế của $(*)$ cho x^2, ta có

$$(*)\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}\cdot f(x)+\frac{1}{x}\cdot f'(x)=2x+3$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{x}\cdot f(x)\right]'=2x+3.$$

$\Rightarrow \displaystyle\int\left[\frac{1}{x}\cdot f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int(2x+3)\,\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{f(x)}{x}=x^2+3x+C$.

Mà $f(1)=4\Rightarrow 4=4+C\Leftrightarrow C=0$.

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=x^2+3x\Rightarrow f(x)=x^3+3x^2$.

Vậy $f(2)=2^3+3\cdot 2^2=20$.

Phân tích

Biểu thức điều kiện $\Leftrightarrow -f(x)+x\cdot f'(x)=2x^3+3x^2$. $(*)$

Khi đó $[u(x)\cdot f(x)]'=u'(x)\cdot f(x)+u(x)\cdot f'(x)\equiv -1\cdot f(x)+x\cdot f'(x)$.

Với $u(x)\neq 0\Rightarrow \dfrac{-1}{u'(x)}=\dfrac{x}{u(x)}\Rightarrow \dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{-1}{x}$.

$\Rightarrow \ln|u(x)|=-\ln|x|=\ln\left|\dfrac{1}{x}\right|\Rightarrow u(x)=\dfrac{1}{x}$.

Nên ta có $\left[\dfrac{1}{x}\cdot f(x)\right]'=-\dfrac{1}{x^2}\cdot f(x)+\dfrac{1}{x}\cdot f'(x)$.

Chọn đáp án B □

Câu 149. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;5]$ và $f(5)=10$, $\int\limits_0^5 xf'(x)\mathrm{d}x=30$. Tính $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. -20. **B.** 70. **C.** 20. **D.** -30.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow v=f(x) \end{cases}$

$$\int\limits_0^5 x\cdot f'(x)\mathrm{d}x=[x\cdot f(x)]\Big|_0^5-\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow 30=5f(5)-\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x=5f(5)-30=20.$$

Chọn đáp án C □

Câu 150. Cho biết $\int\limits_{-1}^5 f(x)\mathrm{d}x=15$. Tính giá trị của $P=\int\limits_0^2[f(5-3x)+7]\mathrm{d}x$.

A. $P=15$. **B.** $P=37$. **C.** $P=27$. **D.** $P=19$.

✍ Lời giải.

Đặt $t=5-3x\Rightarrow \mathrm{d}t=-3\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0$ thì $t=5$; $x=2$ thì $t=-1$.

Ta có: $P=\int\limits_0^2[f(5-3x)+7]\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(5-3x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 7\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_5^{-1} f(t)\frac{\mathrm{d}t}{-3}+7x\Big|_0^2=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^5 f(t)\mathrm{d}t+14$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 15+14=19.$$

Chọn đáp án D □

Câu 151. Giả sử $\int \mathrm{e}^{2x}(2x^3+5x^2-2x+4)\mathrm{d}x=(ax^3+bx^2+cx+d)\mathrm{e}^{2x}+C$.

Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

✍ Lời giải.

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C\Rightarrow F'(x)=f(x)=\mathrm{e}^{2x}(2x^3+5x^2-2x+4)$

Vậy $F'(x)=(3ax^2+2bx+c)\mathrm{e}^{2x}+2(ax^3+bx^2+cx+d)\mathrm{e}^{2x}$

$=(2ax^3+(2b+3a)x^2+(2c+2b)x+2d+c)\mathrm{e}^{2x}$

Vậy đồng nhất ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2a=2 \\ 2b+3a=5 \\ 2c+2b=-2 \\ 2d+c=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \\ d=3. \end{cases}$

Do đó $a+b+c+d=3$.

Chọn đáp án B □

Câu 152. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;\mathrm{e}]$, biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1$, $f(\mathrm{e}) = 1$.

Ta có $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(x)\cdot \ln x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 4$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 1$. **D.** $I = 0$.

✍ **Lời giải.**

Xét $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(x)\cdot \ln x\,\mathrm{d}x$ đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Khi đó $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(x)\cdot \ln x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot \ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 1 - 1 = 0.$

Chọn đáp án D □

Câu 153. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\displaystyle\int_1^{k} (2x-1)\,\mathrm{d}x = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A. $\left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = -2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = 2 \end{array}\right.$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\displaystyle\int_1^{k} (2x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{k} (2x-1)\mathrm{d}(2x-1) = \frac{(2x-1)^2}{4}\Big|_1^{k} = \frac{(2k-1)^2}{4} - \frac{1}{4}$

Mà $\displaystyle 4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = 4\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 2$

Khi đó: $\displaystyle\int_1^{k} (2x-1)\,\mathrm{d}x = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \Leftrightarrow \frac{(2k-1)^2-1}{4} = 2 \Leftrightarrow (2k-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -1 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án D □

Câu 154. Cho $\displaystyle\int_0^{3} \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tìm tổng giá trị của $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = 3 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó $\displaystyle\int_1^{2} \frac{t^2-1}{4+2t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^{2} \frac{t^3-t}{t+2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{2} \left(t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t$

$$= \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 3t - 6\ln|t+2|\right)\Big|_1^{2} = \frac{7}{3} - 12\ln 2 + 6\ln 3$$

Suy ra $\begin{cases} a = 7 \\ b = -12 \Rightarrow a+b+c = 1. \\ c = 6 \end{cases}$

Chọn đáp án A □

Câu 155. Cho $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c\pi$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

A. $\frac{15}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{17}{8}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=\ln(\sin x+2\cos x)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\Rightarrow\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x\\ v=\tan x+2=\dfrac{\sin x+2\cos x}{\cos x}.\end{cases}$

Khi đó $I=[(\tan x+2)\ln(\sin x+2\cos x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\frac{(\cos x)'}{\cos x}\right)\mathrm{d}x$

Suy ra $I=3\ln\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-2\ln 2-(x+2\ln|\cos x|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=3\ln\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-2\ln 2-\dfrac{\pi}{4}-2\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow I=3\ln 3-\dfrac{5}{2}\ln 2-\dfrac{1}{4}\pi\Rightarrow a=3,b=-\dfrac{5}{2},c=-\dfrac{1}{4}.$

Vậy $abc=\dfrac{15}{8}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 156. Cho $\displaystyle\int\limits_1^2\frac{2}{x^2+2x}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ với a,b là các số hữu tỷ. Giá trị của $2a+3b$ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -5.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2\frac{2}{x^2+2x}\mathrm{d}x&=\int\limits_1^2\frac{2}{x(x+2)}\mathrm{d}x\\ &=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x\\ &=(\ln|x|-\ln|x+2|)\Big|_1^2=\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\Big|_1^2\\ &=\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}=-\ln 2+\ln 3.\end{aligned}$$

$\Rightarrow a=-1,b=1.$

Vậy $2a+3b=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 157. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(3)=7$, $\displaystyle\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3$. Giá trị $\displaystyle\int\limits_0^1 xf'(3x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=3x\Rightarrow\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$, khi đó $x=0\Rightarrow t=0,x=1\Rightarrow t=3$.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 xf'(3x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\frac{t}{3}f'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\limits_0^3 t\cdot f'(t)\mathrm{d}t=\frac{I}{3}$

Đặt $\begin{cases} u = t \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow v = f(t). \end{cases}$

Khi đó $I = [t \cdot f(t)]\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 3f(3) - \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 21 - 3 = 18.$

Vậy $\int\limits_0^1 xf'(3x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{I}{3} = 6.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 158. Cho $I = \int\limits_0^3 \dfrac{x-1}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln 3$. Trong đó a, b, c là những số hữu tỉ. Khi đó $3a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 1 + \sqrt{1+x} \Rightarrow x = (t-1)^2 - 1 = t^2 - 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = (2t-2)\,\mathrm{d}t.$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^3 \frac{x-1}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{t^2-2t-1}{t}\cdot(2t-2)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\cdot\int\limits_2^3 \left(t^2 - 3t + 1 + \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = 2\cdot\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + t + \ln|t|\right)\Big|_2^3 \\ &= -\frac{1}{3} + 2\ln 3 - 2\ln 2. \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra: $a = -\dfrac{1}{3}; b = 2; c = -2 \Rightarrow 3a + b + c = -1.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 159. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $xf(x)f'(x) = f^2(x) - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(2) = 1$. Tích phân $\int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 2. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Lấy tích phân hai vế trên đoạn $[0;2]$ có: $\int\limits_0^2 xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x.$

Tích phân từng phần có

$$\int\limits_0^2 xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right) = \frac{x}{2}f^2(x)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \frac{1}{2}f^2(x)\,\mathrm{d}x = f^2(2) - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy $f^2(2) - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x.$

Từ đó suy ra $\int\limits_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{f^2(2) + \int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{1^2+2}{\dfrac{3}{2}} = 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 160. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^6} \frac{f\left(\ln\sqrt{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = 6$ và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{1}} f\left(\cos^2 x\right)\sin 2x\,\mathrm{d}x = 2$. Tích phân $\displaystyle\int_1^3 (f(x)+2)\,\mathrm{d}x$ bằng ?

A. 10. **B.** 16. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải.

— Đặt $t = \ln\sqrt{x} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2x}\mathrm{d}x$.

Khi đó, $6 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^6} \frac{f\left(\ln\sqrt{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3.$

— Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

Mà $2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos^2 x\right)\sin 2x\,\mathrm{d}x = \int_1^0 f(t)(-\mathrm{d}t) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2.$

Vậy $\displaystyle\int_1^3 (f(x)+2)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_1^3 \mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 4 = 3 - 2 + 4 = 5.$

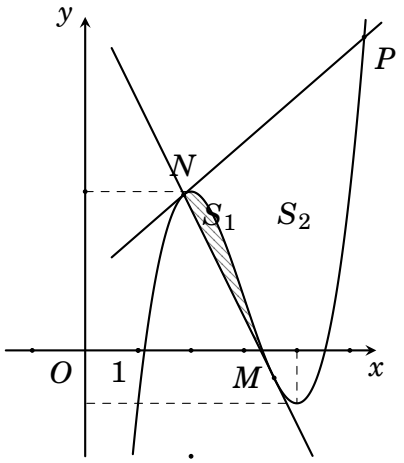
Chọn đáp án D □

Câu 161. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) và M là một điểm bất kì thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm thứ hai N; tiếp tuyến của (C) tại N cắt (C) tại điểm thứ ba P. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng MN và (C); đường thẳng NP và (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S_1 = 8S_2$. **B.** $S_2 = 8S_1$. **C.** $S_2 = 16S_1$. **D.** $S_1 = 16S_2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2x_M + x_N = -\dfrac{b}{a} \\ 2x_N + x_P = -\dfrac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -\dfrac{b}{a} - 2x_M \\ x_P = \dfrac{b}{a} + 4x_M. \end{cases}$



— Khi đó

$$\begin{aligned} S_1 &= \left|\int_{x_M}^{x_N} [a(x-x_M)^2(x-x_N)]\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|a\int_{x_M}^{x_N} [(x-x_M)^3 + (x_M-x_N)(x-x_M)^2]\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|a\left[\frac{(x-x_M)^4}{4} + \frac{(x_M-x_N)(x-x_N)^3}{3}\right]\Bigg|_{x_M}^{x_N}\right| \\ &= \left|a\left[\frac{(x_N-x_M)^4}{4} - \frac{(x_M-x_N)^4}{3}\right]\right| \\ &= \frac{|a|(x_M-x_N)^4}{12}. \end{aligned}$$

— Tương tự $S_2 = \dfrac{|a|(x_N-x_P)^4}{12}$.

Suy ra $\dfrac{S_2}{S_1}=\left(\dfrac{x_N-x_P}{x_M-x_N}\right)^4=\left(\dfrac{-2\cdot\dfrac{b}{a}-6x_M}{\dfrac{b}{a}+3x_M}\right)^4=16.$

Chọn đáp án C □

Câu 162. Cho $\displaystyle\int_1^5\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $P=abc$ là

A. $P=-36$. **B.** $P=0$. **C.** $P=18$. **D.** $P=-18$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

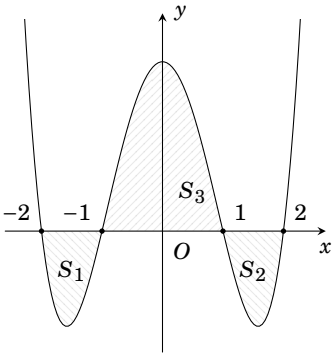
$$\begin{aligned}\int_1^5\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\mathrm{d}x &= \int_1^2\frac{-x+2}{x+1}\mathrm{d}x+\int_2^5\frac{x-2}{x+1}\mathrm{d}x\\ &= \int_1^2\left(-1+\frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x+\int_2^5\left(1-\frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= (-x+3\ln|x+1|)\Big|_1^2+(x-3\ln|x+1|)\Big|_2^5\\ &= (-2+3\ln 3)-(-1+3\ln 2)+(5-3\ln 6)-(2-3\ln 3)\\ &= 3\ln 3-6\ln+2.\end{aligned}$$

Vậy $a=3$, $b=-6$, $c=2$ nên $P=-36$.

Chọn đáp án A □

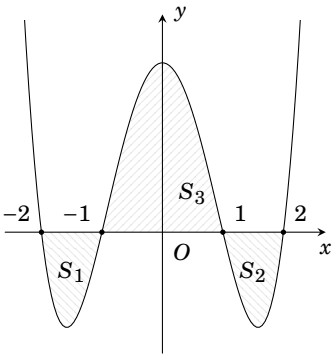
Câu 163. Cho đồ thị hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$ như hình vẽ bên.

Biết rằng diện tích $S_1=S_2=2$ và $S_3=6$. Giá trị của tích phân $I=\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x$ là



A. $I=4$. **B.** $I=2$. **C.** $I=10$. **D.** $I=8$.

✍ **Lời giải.**



- Với $x\in[-2;-1]$: $f(x)\le 0\Rightarrow\displaystyle\int_{-2}^{-1}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{-2}^{-1}|f(x)|\mathrm{d}x=-S_1=-2.$

- Với $x \in [-1;1]$: $f(x) \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x = S_3 = 6.$

- Với $x \in [1;2]$: $f(x) \leq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{1}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = -S_2 = -2.$

Vậy $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -2 + 6 - 2 = 2.$

Chọn đáp án B □

Câu 164. Biết $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1} = a + b\ln\frac{1+\mathrm{e}}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1} = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1)}.$

Đặt $t = \mathrm{e}^x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ x = 1 \Rightarrow t = \mathrm{e}+1. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)} &= \int_{2}^{\mathrm{e}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)} = \int_{2}^{\mathrm{e}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)} = \int_{2}^{\mathrm{e}+1} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\Big|_{2}^{\mathrm{e}+1} \\ &= 1 - \ln\frac{\mathrm{e}+1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $a = 1$, $b = -1$ và $S = a^3 + b^3 = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 165. Biết $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+2x}{(x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{4} - 4\ln\frac{4}{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng

A. 25. **B.** 41. **C.** 20. **D.** 34.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+2x}{(x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \frac{(x+3)^2 - 4(x+3) + 3}{(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} &= \int_{0}^{1} \left[1 - \frac{4}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \left(x - 4\ln|x+3| - \frac{3}{x+3}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{5}{4} - 4\ln\frac{4}{3} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy $a^2 + b^2 = 34$.

Chọn đáp án D □

Câu 166. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x+3\sin x+2} = a\ln 2 + b\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = 2a+b$.

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Ta có: $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x+3\sin x+2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{(\sin x+1)(\sin x+2)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x+1} - \frac{1}{\sin x+2}\right)\mathrm{d}(\sin x)$

$= \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x+1} - \frac{1}{\sin x+2}\right)\mathrm{d}(\sin x) = \ln\frac{\sin x+1}{\sin x+2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln\frac{4}{3} = 2\ln 2 - \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}.$

Chọn đáp án A □

Câu 167. Cho $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

✍ Lời giải.

Nhân tử và mẫu của $\sqrt{\dfrac{x}{x^3+1}}$ cho $x\sqrt{x}$ ta được $I = \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x^3(x^3+1)}}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t = x^3$ thì $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{1}{\sqrt{t(t+1)}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)}}\,\mathrm{d}t.$

Áp dụng công thức $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+b}}\,\mathrm{d}u = \ln\left|u(x)+\sqrt{u^2(x)+b}\right| + C$, ta có

$I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{3}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)}\right|\Big|_{\frac{1}{8}}^{1} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right).$

Vậy $a+b+c+d = 10$.

Chọn đáp án B □

Câu 168. Trên đoạn thẳng AB dài 200 m có hai chất điểm X, Y. Chất điểm X xuất phát từ A, chuyển động thẳng hướng đến B với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{80}t^2 + \dfrac{1}{3}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc X bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, chất điểm Y xuất phát từ B và xuất phát chậm hơn 10 giây so với X; Y chuyển động thẳng theo chiều ngược lại với X và có gia tốc bằng $a\,(m/s^2)$ (a là hằng số). Biết rằng hai chất điểm X, Y gặp nhau tại đúng trung điểm đoạn thẳng AB. Gia tốc của chất điểm Y bằng

A. $2\,(m/s^2)$. **B.** $1{,}5\,(m/s^2)$. **C.** $2{,}5\,(m/s^2)$. **D.** $1\,(m/s^2)$.

✍ Lời giải.

Gọi $v_1(t)$, $v_2(t)$ lần lượt là vận tốc của hai chất điểm X, Y.

Ta có $v_1(t) = \dfrac{1}{80}t^2 + \dfrac{1}{3}t$ và $v_2(t) = a\cdot t$

Vì X, Y gặp nhau tại trung điểm AB nên quãng đường di chuyển của X, Y là 100 (m).

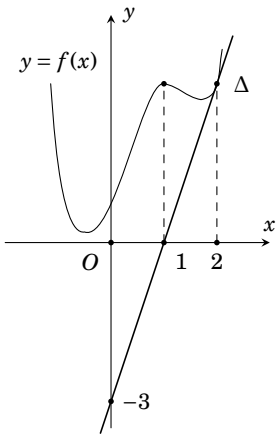
Gọi t_1, t_2 là thời gian mà X, Y di chuyển trên quãng đường 100(m).

Khi đó $\int\limits_0^{t_1} v_1(t)\,\mathrm{d}t = 100 \Leftrightarrow \dfrac{t_1^3}{240} + \dfrac{t_1^2}{6} = 100 \Leftrightarrow t_1 = 20 \Rightarrow t_2 = t_1 - 10 = 10.$

Suy ra $\int\limits_0^{t_2} at \cdot \mathrm{d}t = 100 \Leftrightarrow \dfrac{a \cdot t_2^2}{2} = 100 \Leftrightarrow a = 2.$

Chọn đáp án A □

Câu 169. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$; đường thẳng Δ trong hình vẽ bên là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 2$. Tích phân $\int\limits_0^{\ln 3} \mathrm{e}^x f''\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng



A. 8. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

✍ Lời giải.

Ta có phương trình tiếp tuyến Δ là $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 3x - 3$.

Suy ra $f'(2) = 3$ và $2f'(2) - f(2) = 3$.

Do hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ nên $f'(1) = 0$.

Đặt $t = \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{2}$ khi đó $I = \int\limits_0^{\ln 3} \mathrm{e}^x f''\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\int\limits_1^2 f''(t)\,\mathrm{d}t = 2f'(2) - 2f'(1) = 6.$

Chọn đáp án D □

Câu 170. Biết $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 20$. Tính $\int\limits_1^2 f(4x-3)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{15}{4}$. **B.** $I = 15$. **C.** $I = \dfrac{5}{2}$. **D.** $I = 25$.

✍ Lời giải.

Ta có $I_1 = \int\limits_1^2 f(4x-3)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\int\limits_1^2 f(4x-3)\,\mathrm{d}(4x-3) = \dfrac{1}{4}\int\limits_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t.$

Hay là $I_1 = \dfrac{1}{4}\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{4}\int\limits_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{25}{4}.$

Lại có $I_2 = \int\limits_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2x}\right) = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{5}{2}.$

Vậy $I = I_1 - I_2 = \dfrac{25}{4} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{4}.$

Chọn đáp án A □

Câu 171. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;+\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f'(x) \geq 3x^2 + 2x - 5$ trên $[1;+\infty)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất m sao cho $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x) \geq m$ với mọi hàm số $f(x)$ thỏa điều kiện đề bài.

A. 15. **B.** 20. **C.** 25. **D.** 30.

✍ Lời giải.

Vì $3x^2+2x-5\geq 0$ với mọi $x\in[1;+\infty)$ nên $f'(x)\geq 3x^2+2x-5\geq 0$ với mọi $x\in[1;+\infty)$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$, suy ra $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x)=f(3)$.

Ta có

$$\int_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x\geq\int_1^3\left(3x^2+2x-5\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x)\Big|_1^3\geq\left(x^3+x^2-5x\right)\Big|_1^3$$

$$\Leftrightarrow\quad f(3)-f(1)\geq 24$$

$$\Leftrightarrow\quad f(3)\geq 25.$$

Suy ra $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x)=f(3)\geq 25$, suy ra $m=25$.

Chọn đáp án C □

Câu 172. Biết rằng $\displaystyle\int_{-1}^{a+\sqrt{b}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2-4x}}=\frac{\pi}{6}$, với a, b là các số nguyên thỏa mãn $-1<a+\sqrt{b}<0$ và $b>0$.

Tổng $a+b$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

✍ Lời giải.

$$I=\int_{-1}^{a+\sqrt{b}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2-4x}}=\int_{-1}^{a+\sqrt{b}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x+2)^2}}.$$

Đặt $x+2=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=-1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$, $x=a+\sqrt{b}\Rightarrow\sin t=\dfrac{a+\sqrt{b}+2}{2}\Rightarrow t=t_0$ với $\dfrac{\pi}{6}<t_0<\dfrac{\pi}{2}$.

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{t_0}2\,\mathrm{d}t=2\left(t_0-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t_0=\frac{\pi}{3}.$$

Do đó $\dfrac{a+\sqrt{b}+2}{2}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a+\sqrt{b}=-2+\sqrt{3}$. Ta tìm được $a=-2$, $b=3$ nên $a+b=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 173. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$ và $\displaystyle\int_0^3 f(\sqrt{x+1})\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\displaystyle\int_1^2 x\cdot[f(x)+2]\,\mathrm{d}x$

A. $I=5$. **B.** $I=11$. **C.** $I=16$. **D.** $I=12$.

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

$x=0\Rightarrow t=1, x=3\Rightarrow t=2$.

Ta có $\displaystyle\int_0^3 f(\sqrt{x+1})\,\mathrm{d}x=\int_1^2 2tf(t)\,\mathrm{d}t\Rightarrow\int_1^2 tf(t)\,\mathrm{d}t=2$.

$$I=\int_1^2 x[f(x)+2]\,\mathrm{d}x=\int_1^2 xf(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x=2+3=5.$$

Chọn đáp án A □

Câu 174. Cho $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2018$. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x)\sin 2x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 2018. **B.** 1009. **C.** -1009. **D.** -2018.

✍ Lời giải.

Đặt $t=\cos 2x \Rightarrow \mathrm{d}t=-2\sin 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t=\sin 2x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1,\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cdot 2018=1009$.

Chọn đáp án B □

Câu 175. Cho $\displaystyle\int_0^2(1-2x)f'(x)\,\mathrm{d}x=3f(2)+f(0)=2018$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 1009. **C.** 2018. **D.** 4036.

✍ Lời giải.

Ta có $2018=\displaystyle\int_0^2(1-2x)f'(x)\,\mathrm{d}x=(1-2x)f(x)|_0^2-\int_0^2(-2)f(x)\,\mathrm{d}x=-3f(2)-f(0)+2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2018$.

Đặt $x=2t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}t$, đổi cận $x=0\Rightarrow t=0,\ x=2\Rightarrow t=1$, ta được

$$2018=2\int_0^1 f(2t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=1009$.

Chọn đáp án B □

Câu 176. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,\mathrm{d}x=4$ và $\displaystyle\int_0^1\dfrac{x^2f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=2$. Tính $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=4$.

✍ Lời giải.

Ta có $I-2=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1\dfrac{x^2f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{f(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\tan t$ với $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ ta có

$\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\mathrm{d}t$.

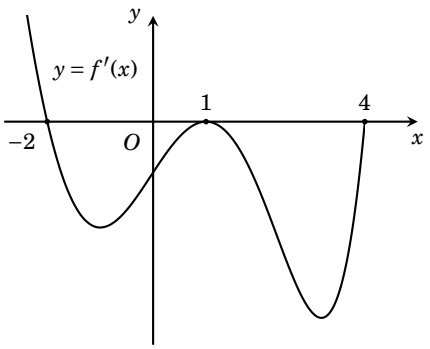
Đổi cận: Với $x=0\Rightarrow t=0$, $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra $I-2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan t)\,\mathrm{d}t=4$. Vậy $I=6$.

Chọn đáp án A □

Câu 177.

Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(1)=3$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox trên các đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt là 9 và 12. Giá trị của $f(-2)+f(4)$ bằng.



A. 21. **B.** 9.

C. 3. **D.** 2.

✍ Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)\le 0$ trên các đoạn $[-2;1]$, $[1;4]$. Do đó

$$\int_{-2}^{1}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=-\int_{-2}^{1}f'(x)\mathrm{d}x=-f(x)\Big|_{-2}^{1}=-f(1)+f(-2).$$
$$\int_{1}^{4}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=-\int_{1}^{4}f'(x)\mathrm{d}x=-f(x)\Big|_{1}^{4}=-f(4)+f(1).$$

Theo bài ra ta lại có $\int_{-2}^{1}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=9$, $\int_{1}^{4}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x=12$ và $f(1)=3$. Do đó

$$[-f(1)+f(-2)]-[-f(4)+f(1)]=-3\Leftrightarrow f(-2)+f(4)=2f(1)-3=3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 178. Biết $\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{(x+1)\ln x+2}{1+x\ln x}\mathrm{d}x=a\mathrm{e}+b\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\right)$ trong đó a, b là các số nguyên. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{(x+1)\ln x+2}{1+x\ln x}\mathrm{d}x&=\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{1+x\ln x+1+\ln x}{1+x\ln x}\mathrm{d}x\\&=\int_{1}^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x+\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}(1+x\ln x)}{1+x\ln x}\\&=x\Big|_{1}^{\mathrm{e}}+\ln(1+x\ln x)\Big|_{1}^{\mathrm{e}}=\mathrm{e}-1+\ln(1+\mathrm{e})=\mathrm{e}+\ln\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=b=1$. Vậy $\frac{a}{b}=1$.

Chọn đáp án B □

Câu 179. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;\mathrm{e}]$, biết $\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=1, f(\mathrm{e})=2$. Tích phân $\int_{1}^{\mathrm{e}}f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\ln|x|\end{cases}$.

Suy ra

$$1=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|\cdot f(x)|_1^{\mathrm{e}}-\int\limits_1^{\mathrm{e}}f'(x)\ln x\mathrm{d}x=2-\int\limits_1^{\mathrm{e}}f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_1^{\mathrm{e}}f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x=1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 180. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1(x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$. **B.** $I=8$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-8$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$. Khi đó $I=(x+1)f\,(x)|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $10=2f(1)-f(0)-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-10+2=-8$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Chọn đáp án D □

Câu 181. Biết $\int\dfrac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}\mathrm{d}x=\ln|(x-1)^m(x-2)^n(x-3)^p|+C$. Tính $4(m+n+p)$.

A. 5. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\dfrac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}=\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$.

Khi đó ta có $x^2+1=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$.

Chọn $x=1$ ta có $A=1$.

Chọn $x=2$ ta có $B=-5$.

Chọn $x=3$ ta có $C=5$.

Vậy $\int\dfrac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x+\int\dfrac{5}{x-2}\mathrm{d}x+\int\dfrac{5}{x-3}\mathrm{d}x=\ln|x-1|-5\ln|x-2|+5\ln|x-3|+C=\ln|(x-1)(x-2)^{-5}(x-3)^5|+C$.

Vậy $m=1;n=-5;p=5$ và $4(m+n+p)=4$.

Chọn đáp án C □

Câu 182. Nếu $\int\limits_0^3\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 f(t)\mathrm{d}t$, với $t=\sqrt{1+x}$ thì $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $f(t)=2t^2+2t$. **B.** $f(t)=t^2-t$. **C.** $f(t)=t^2+t$. **D.** $f(t)=2t^2-2t$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+x}\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$.

Khi $x=0$ thì $t=1$. Khi $x=3$ thì $t=2$. Ta có

$$\int\limits_0^3\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\frac{t^2-1}{1+t}2t\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^2(2t^2-2t)\mathrm{d}t.$$

Vậy $f(t)=2t^2-2t$.

Chọn đáp án D □

Câu 183. Biết $I=\int\limits_0^4 x\ln(2x+1)\,\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}\ln 3-c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=60$. **B.** $S=70$. **C.** $S=72$. **D.** $S=68$.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(2x+1)\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2}{2x+1}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}x^2\end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}x^2\ln(2x+1)\Big|_0^4-\int\limits_0^4\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{2}{2x+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\ln(2x+1)\Big|_0^4-\int\limits_0^4\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2x+1)}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\ln(2x+1)\Big|_0^4-\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\ln 4(2x+1)\right)\Big|_0^4\\&=\frac{63}{4}\ln 3-3.\end{aligned}$$

Như vậy $a=63$, $b=4$, $c=3$. Nên $S=a+b+c=63+4+3=70$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 184. Biết $I=\int\limits_0^4 x\ln(2x+1)\,\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}\ln 3-c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=60$. **B.** $S=70$. **C.** $S=72$. **D.** $S=68$.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(2x+1)\\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2}{2x+1}\\ v=\dfrac{x^2}{2}.\end{cases}$

Khi đó,

$$\begin{aligned}I&=\frac{x^2}{2}\ln(2x+1)\Big|_0^4-\int\limits_0^4\frac{x^2}{2x+1}\mathrm{d}x=8\ln 9-\int\limits_0^4\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2x+1)}\right)\mathrm{d}x\\&=16\ln 3-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\ln|2x+1|\right)\Big|_0^4=16\ln 3-\left(3+\frac{1}{8}\ln 9\right)=\frac{63}{4}\ln 3-3.\end{aligned}$$

Vậy $S=a+b+c=63+4+3=70$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 185. Biết $\int\limits_3^5\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x=a+\ln\dfrac{b}{2}$ với a,b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=-2$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2$. **D.** $S=10$.

✍ Lời giải.

Ta có $\int\limits_3^5\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_3^5\left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{2}x^2+\ln|x+1|\right)\Big|_3^5=\dfrac{25}{2}+\ln 6-\dfrac{9}{2}-\ln 4=8+\ln\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a=8,b=3$. Suy ra $a-2b=8-2\cdot 3=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 186. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int\limits_1^4 \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 4$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = \dfrac{1}{2}$. **D.** $I = 2$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \Rightarrow 2\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.

— Với $x = 1 \Rightarrow u = 1$.

— Với $x = 4 \Rightarrow u = 2$.

Từ đó ta có $I = 2\int\limits_1^2 f(u)\,\mathrm{d}u = 2\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 187. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ và $f(2) = 16$, $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $\int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 7$. **B.** $I = 20$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = 13$.

✍ **Lời giải.**

Xét $I = \int\limits_0^1 xf'(2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = 2x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$.

— Với $x = 0 \Rightarrow u = 0$.

— Với $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Suy ra $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 \dfrac{u}{2}f'(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{4}\int\limits_0^2 uf'(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{4}\left(uf(u)|_0^2 - \int\limits_0^2 f(u)\,\mathrm{d}u\right) = \dfrac{1}{4}(2f(2) - 4) = 7$.

Chọn đáp án A □

Câu 188. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 (a,\ b$ là các số hữu tỉ). Tính $T = a^2 + b^3$.

A. $T = \dfrac{13}{3}$. **B.** $T = \dfrac{134}{27}$. **C.** $T = \dfrac{8}{3}$. **D.** $T = \dfrac{152}{27}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = \dfrac{1}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{x} \\ v = -\dfrac{1}{x+1} + 1. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{-1}{x+1}+1\right)\ln x\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{-1}{x+1}+1\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{-1}{x+1}+1\right)\ln x\Big|_1^2 - \ln|x+1|\Big|_1^2\\ &= -\ln 3+\frac{5}{3}\ln 2.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a=-1,\ b=\dfrac{5}{3}\Rightarrow T=a^2+b^3=1+\dfrac{125}{27}=\dfrac{152}{27}$.

Vậy $T=\dfrac{152}{27}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 189. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(2x+1)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{5}{12}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2x+1\Leftrightarrow x=\dfrac{t-1}{2}\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=3$.

Ta có $I=\displaystyle\int_1^3 \frac{t-1}{4t^2}\,\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{4}\ln|t|+\frac{1}{4t}\right)\Big|_1^3=\frac{1}{4}\ln 3-\frac{1}{6}$.

Suy ra $a=-\dfrac{1}{6},\ b=0,\ c=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $a+b+c=\dfrac{1}{12}$.

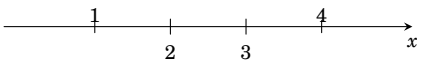
Chọn đáp án (A) □

Câu 190. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$ có $f'(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4}$ thỏa mãn $f(3)=1$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. $-1+3\ln 2$. **B.** $1+3\ln 2$. **C.** 1. **D.** $1-\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Xét trục số



Vì hàm số $f'(x)$ xác định trên $[2;3]$ nên

$$f(2)-f(3)=\int_3^2 f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow f(2)=\int_3^2 \frac{2x-5}{x^2-5x+4}\mathrm{d}x+f(3).$$

Xét tích phân $\displaystyle\int_3^2 \frac{2x-5}{x^2-5x+4}\mathrm{d}x=\int_3^2 \frac{\mathrm{d}(x^2-5x+4)}{x^2-5x+4}=\ln|x^2-5x+4|\Big|_3^2=0$.

Vậy $f(2)=f(3)=1$.

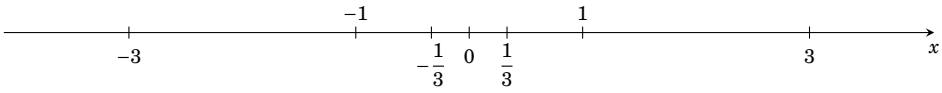
Chọn đáp án (C) □

Câu 191. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3)+f(-3)=4$ và $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2$. Tính giá trị của biểu thức $T=f(-5)+f(0)+f(2)$.

A. $T=5+\dfrac{1}{2}\ln 2$. **B.** $T=5-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **C.** $T=6+\dfrac{1}{2}\ln 2$. **D.** $T=6-\dfrac{1}{2}\ln 2$.

✍ Lời giải.

Xét trục số



Ta có

— $f(-3)-f(-5)=\displaystyle\int_{-5}^{-3}\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_{-5}^{-3}=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}\Rightarrow f(-5)=f(-3)-\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

— $f(3)-f(2)=\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_{2}^{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\Rightarrow f(2)=f(3)-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

— $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)-f(0)=\displaystyle\int_{0}^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_{0}^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\ln 2\Rightarrow f(0)=f\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\ln 2$.

— $f\left(\dfrac{1}{3}\right)-f(0)=\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_{0}^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2}\ln 2\Rightarrow f(0)=f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\ln 2$.

Suy ra

$$\begin{aligned}f(-5)+f(0)+f(2) &= f(-3)-\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left[f\left(-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right]+f(3)-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\\ &= 4+\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{2}\ln 2\\ &= 5-\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 192. Cho hàm số $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(3)<2$. **B.** $2<f(3)<4$. **C.** $f(3)>6$. **D.** $4<f(3)<6$.

✍ Lời giải.

Vì $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên

$$f(x)=\sqrt{x+1}\cdot f'(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\sqrt{x+1}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C.$$

Khi $x=0$ thì $f(0)=1$ nên $\ln 1=\dfrac{2}{3}+C\Rightarrow C=-\dfrac{2}{3}$.

Khi $x=3$ thì $\ln f(3)=\dfrac{2}{3}\sqrt{(3+1)^3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{14}{3}\Rightarrow f(3)=e^{\frac{14}{3}}>6$.

Chọn đáp án C □

Câu 193. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên thỏa mãn $f(2x)=3f(x)$. Biết rằng $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=5$. **C.** $I=2$. **D.** $I=6$.

✍ **Lời giải.**

Từ giả thiết ta có $f(x)=\dfrac{1}{3}f(2x)$ và $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=3$.

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=2.\end{cases}$

Khi đó $\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=3\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=6=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy $I=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6-1=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 194. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-8$. **B.** $I=8$. **C.** $I=12$. **D.** $I=-12$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x).\end{cases}$

Vậy $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)\Big|_0^1-10=2f(1)-f(0)-10=-8$.

Vậy $I=-8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 195. Tính $I=\int\limits_0^a \dfrac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

A. $I=\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}-1$. **B.** $I=\dfrac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}-1\right]$.

C. $I=\dfrac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}+1\right]$. **D.** $I=\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}+1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^a \frac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^a \frac{x\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^a x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow t^2=x^2+1\Leftrightarrow t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=a \Rightarrow t=\sqrt{a^2+1} \end{cases}$. Khi đó tích phân trở thành

$$\int_1^{\sqrt{a^2+1}} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}}{3} - \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 196. Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n x\,\mathrm{d}x$ theo n.

A. $I=\dfrac{1}{2n+2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2n}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2n-1}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2n+1}$.

✍ **Lời giải.**

Ta xét: $I=\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=1-x^2 \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$.

$$I=-\frac{1}{2}\int_1^0 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n+2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 197. Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{3}}{a}\pi - \ln b$. Khi đó, giá trị của a^2+b bằng

A. 11. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\tan x. \end{cases}$

Khi đó $I=x\cdot\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{3}\cdot\tan\dfrac{\pi}{3} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$.

$= \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln\dfrac{1}{2} - \ln 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2$.

Vậy $a=3$; $b=2$. Do đó $a^2+b=3^2+2=11$.

Chọn đáp án A □

Câu 198. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$. Tính $I=\int_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -3.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=x^3 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=3x^2\,\mathrm{d}x \\ v=f(x). \end{cases}$

Ta có $I=x^3 f(x)\Big|_0^1 - 3\cdot\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - 3\cdot\dfrac{1}{3} = 0-1=-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 199. Cho $I=\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 7.

✍ Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=3\Rightarrow t=2$.

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t=\int_1^2 \frac{t^3-t}{t+2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^2 \left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \left(\frac{t^3}{3}-t^2+3t-6\ln|t+2|\right)\Big|_1^2\\ &= \frac{7}{3}-6\ln\frac{4}{3}=\frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3. \end{aligned}$$

Do đó $a=7$, $b=-12$, $c=6$. Suy ra $a+b+c=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 200. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(3)=1, f(1)>0$ và $f'(x)=3x^2[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{1}{25}$. **B.** $\dfrac{1}{27}$. **C.** $\dfrac{1}{25}$. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

✍ Lời giải.

Ta có $f'(x)=3x^2[f(x)]^2\Leftrightarrow f'(x)\geq 0,\forall x\in[1;3]$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;3]\Rightarrow f(x)\geq f(1)>0,\forall x\in[1;3]$.

Suy ra ta có $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=3x^2\Rightarrow\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int 3x^2\,\mathrm{d}x\Rightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^3+C$.

Do $f(3)=1\Rightarrow C=-1-27=-28\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^3-28}\Rightarrow f(1)=\dfrac{1}{27}$.

Vậy $f(1)=\dfrac{1}{27}$.

Chọn đáp án B □

Câu 201. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=4x(1+\ln x)$ và $F(1)=5$.Tính $F(\mathrm{e})$.

A. $F(\mathrm{e})=3\mathrm{e}^2+4$. **B.** $F(\mathrm{e})=5\mathrm{e}^2+4$. **C.** $F(\mathrm{e})=5\mathrm{e}^2$. **D.** $F(\mathrm{e})=3\mathrm{e}^2+6$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int 4x(1+\ln x)\,\mathrm{d}x &= \int 4x\,\mathrm{d}x+\int 4x\ln x\,\mathrm{d}x\\ &= 2x^2+2\int \ln x\,\mathrm{d}x^2\\ &= 2x^2+2x^2\ln x-\int 2x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= 2x^2+2x^2\ln x-x^2+C. \end{aligned}$$

Do $F(1)=5\Rightarrow C=4\Rightarrow F(\mathrm{e})=3\mathrm{e}^2+4$.

Vậy $F(\mathrm{e})=3\mathrm{e}^2+4$.

Chọn đáp án A □

Câu 202. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)+2xf(x)=\mathrm{e}^x f(x)$ với $f(x)\neq 0,\forall x$ và $f(0)=1$. Khi đó $|f(1)|$ bằng

A. $\mathrm{e}+1$. **B.** $\mathrm{e}^{\mathrm{e}-2}$. **C.** $\mathrm{e}-1$. **D.** $\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}$.

Lời giải.

$f'(x)+2xf(x)=\mathrm{e}^x f(x)\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\mathrm{e}^x-2x.$

Do đó

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^x-2x)\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \ln|f(x)|=\mathrm{e}^x-x^2+C$$
$$\Rightarrow |f(x)|=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-x^2+C}$$

Vì $f(0)=1$ nên $C=-1$.

Vậy $|f(1)|=\mathrm{e}^{\mathrm{e}-2}$

Chọn đáp án B □

Câu 203. Giá trị của $\dfrac{2^{2021}}{2021}-\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+1)^{2019}x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2^{2017}}{505}$. **B.** $\dfrac{2^{2018}}{505}$. **C.** $\dfrac{2^{2017}-1}{505}$. **D.** $\dfrac{2^{2016}-1}{505}$.

Lời giải.

Đặt $u=x+1$ thì $du=dx$. Với $x=-1\Rightarrow u=0, x=1\Rightarrow u=2$. Ta có

$$\int_{-1}^{1}(x+1)^{2019}x\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}u^{2019}(u-1)\mathrm{d}u=\left(\frac{u^{2021}}{2021}-\frac{u^{2020}}{2020}\right)\Big|_0^2=\frac{2^{2021}}{2021}-\frac{2^{2018}}{505}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 204. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-a;a]$ và $k>0$. Giá trị tích phân $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\displaystyle\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $2\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $2\displaystyle\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải.

Vì $f(x)$ là hàm chẵn nên ta có $f(-x)=f(x)$.

Đặt $t=-x$, $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$, đổi cận ta được $I=-\displaystyle\int_{a}^{-a}\frac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-kt}}\mathrm{d}t=\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{e}^{kt}\cdot f(t)}{1+\mathrm{e}^{kt}}\mathrm{d}t.$

Khi đó, $2I=\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{e}^{kx}\cdot f(x)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án A □

Câu 205. Biết rằng $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{10}{3}$. **C.** $-\dfrac{10}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=3\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=2$. Ta có

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{3x+1+5\sqrt{3x+1}+6} &= \frac{2}{3}\int_1^2\frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+5t+6}\\ &= \frac{2}{3}\int_1^2\left(\frac{3}{t+3}-\frac{2}{t+2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{3}\left[3\ln|t+3|-2\ln|t+2|\right]\Big|_1^2\\ &= \frac{2}{3}\left[(3\ln 5-2\ln 4)-(3\ln 4-2\ln 3)\right]\\ &= -\frac{20}{3}\ln 2+\frac{4}{3}\ln 3+2\ln 5.\end{aligned}$$

Suy ra $a=-\dfrac{20}{3}, b=\dfrac{4}{3}, c=2$. Vậy $a+b+c=-\dfrac{10}{3}$

Chọn đáp án C □

Câu 206. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tính $f(1)$.

A. $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. **B.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** e. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)+f'(x)=x\Leftrightarrow f(x)\cdot\mathrm{e}^x+f'(x)\cdot\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^x f(x)\right)'=x\mathrm{e}^x$.

Suy ra $\mathrm{e}^x f(x)=\displaystyle\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)=x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $\mathrm{e}^0\cdot 1=0\cdot\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^0+C\Rightarrow C=2$. Suy ra $\mathrm{e}^1 f(1)=1\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^1+2\Rightarrow f(1)=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Vậy $f(1)=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án A □

Câu 207. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=x\mathrm{e}^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{\mathrm{e}^4-1}{4}$. **B.** $I=\dfrac{2\mathrm{e}-1}{2}$. **C.** $I=\mathrm{e}^4-2$. **D.** $I=\mathrm{e}^4-1$.

✍ **Lời giải.**

Xét $J=\displaystyle\int_0^2 f(2-x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u=2-x\Rightarrow\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: với $x=0\Rightarrow u=2$, $x=2\Rightarrow u=0$.

Khi đó $J=-\displaystyle\int_2^0 f(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^2 f(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=I$.

Ta có

$$\begin{aligned}&f(x)+f(2-x)=x\mathrm{e}^{x^2}\\ \Rightarrow\ &\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 f(2-x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\\ \Rightarrow\ &2I=\int_0^2 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Xét $K=\int\limits_0^2 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $u=x^2\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: với $x=0\Rightarrow u=0$, $x=2\Rightarrow u=4$.

Khi đó $K=\int\limits_0^4 \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^4-1)$.

Vậy $I=\dfrac{1}{2}K=\dfrac{\mathrm{e}^4-1}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 208. Biết $\int_0^2 \dfrac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8. **B.** -10. **C.** -12. **D.** 16.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2\left(1+\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= (x+2\ln|x+3|-\ln|x+1|)\Big|_0^2\\ &= 2-3\ln 3+2\ln 5.\end{aligned}$$

Vậy $a=2$, $b=-3$, $c=2$ và $abc=-12$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 209. Biết $\int_1^5 \dfrac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=1+\sqrt{3x+1}\Rightarrow 3x+1=(t-1)^2\Rightarrow 3\,\mathrm{d}x=2(t-1)\,\mathrm{d}t\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2(t-1)}{3}\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=3$; $x=5\Rightarrow t=5$.

Khi đó

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_3^5 \frac{2(t-1)}{3t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_3^5\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3t}\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{2t}{3}-\frac{2\ln|t|}{3}\right)\Big|_3^5\\ &= \frac{4}{3}+\frac{2}{3}\cdot\ln 3-\frac{2}{3}\cdot\ln 5.\end{aligned}$$

Vậy $a=\dfrac{4}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$, $c=-\dfrac{2}{3}$ và $a+b+c=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 210. Cho tích phân $\int\limits_1^5 \left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P=abc$.

A. $P=-36$. **B.** $P=0$. **C.** $P=-18$. **D.** $P=18$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int_1^5 \left|\frac{x-2}{x+1}\right| \mathrm{d}x &= \int_1^2 \left|\frac{x-2}{x+1}\right| \mathrm{d}x + \int_2^5 \left|\frac{x-2}{x+1}\right| \mathrm{d}x = -\int_1^2 \frac{x-2}{x+1} \mathrm{d}x + \int_2^5 \frac{x-2}{x+1} \mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left(\frac{3}{x+1} - 1\right) \mathrm{d}x + \int_2^5 \left(1 - \frac{3}{x+1}\right) \mathrm{d}x \\ &= (3\ln(x+1) - x)\Big|_1^2 + (x - 3\ln(x+1))\Big|_2^5 = 2 - 6\ln 2 + 3\ln 3 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \Rightarrow P = abc = -36. \\ c = 3 \end{cases}\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 211. Cho $\int_0^1 \frac{9^x + 3m}{9^x + 3} \mathrm{d}x = m^2 - 1$. Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m.

A. $P = 24$. **B.** $P = 16$. **C.** $P = \frac{1}{2}$. **D.** $P = 12$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int_0^1 \frac{9^x + 3m}{9^x + 3} \mathrm{d}x = 1 + (3m - 3) \int_0^1 \frac{1}{9^x + 3} \mathrm{d}x$.

Xét $J = \int_0^1 \frac{1}{9^x + 3} \mathrm{d}x$:

Đặt $t = 9^x \Rightarrow dt = 9^x \cdot \ln 9 \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t \ln 9}$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 9$. Khi đó

$$J = \int_1^9 \frac{1}{t(t+3)\ln 9} \mathrm{d}t = \frac{1}{3\ln 9} \int_0^1 \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3}\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{3\ln 9} \ln \frac{t}{t+3}\Big|_1^9 = \frac{1}{6}.$$

Suy ra $I = 1 + \frac{3m-3}{6} = 1 + \frac{m-1}{2}$. Do đó $m^2 - 1 = 1 + \frac{m-1}{2} \Leftrightarrow 2m^2 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \frac{3}{2}. \end{array}\right.$

Vậy tổng tất cả các giá trị m là $\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 212. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp một, đạo hàm cấp hai liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x f''(x) \mathrm{d}x \neq 0$. Giá trị của biểu thức $\frac{\mathrm{e}f'(1) - f'(0)}{\mathrm{e}f(1) - f(0)}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x f''(x) \mathrm{d}x \neq 0$, suy ra

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x f(x) \mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x) \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x) \mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 \left[\mathrm{e}^x f(x)\right]' \mathrm{d}x = 2\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x) \mathrm{d}x. \quad (1)$$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^x f''(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 \left[\mathrm{e}^x f'(x)\right]'\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\int_0^1 \left[\mathrm{e}^x f(x)\right]'\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\mathrm{e}^x f'(x)\right]'\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \mathrm{e}f(1) - f(0) = \mathrm{e}f'(1) - f'(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}f'(1) - f'(0)}{\mathrm{e}f(1) - f(0)} = 1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 213. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f(0) = 2018$, $f(2) = 2019$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

A. $S = \ln 4035$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = \ln 2$. **D.** $S = 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$f(x) = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1, & \text{với } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2, & \text{với } x < 1. \end{cases}$$

— Với $f(0) = 2018 \Rightarrow C_2 = 2018$.

— Với $f(2) = 2019 \Rightarrow C_1 = 2019$.

Vậy $S = f(3) - f(-1) = \ln 2 + 2019 - (\ln 2 + 2018) = 1$.

Chọn đáp án D □

Câu 214. Cho $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = a + b\ln\frac{1+\mathrm{e}}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. $S = -2$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

✍ **Lời giải.**

Gọi $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1)}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow u = 1$, $x = 1 \Rightarrow u = \mathrm{e}$, ta có

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u(u+1)}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \ln\frac{u}{u+1}\Big|_1^{\mathrm{e}} = 1 - \ln\frac{1+\mathrm{e}}{2}.$$

Từ đó suy ra $a = 1$, $b = -1$. Vậy $S = 1^3 + (-1)^3 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 215. Biết $I = \displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 5$, với a, b là các số nguyên. Tính tổng $a + b$.

A. -1. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u = \sqrt{3x+1}$, ta có $3x + 1 = u^2 \Rightarrow 3\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow u = 2$, $x = 5 \Rightarrow u = 4$, ta có

$$I = \int_2^4 \frac{3}{(u^2-1)u}\cdot\frac{2u}{3}\,\mathrm{d}u = 2\int_2^4 \frac{1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \int_2^4 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \ln\frac{u-1}{u+1}\Big|_2^4 = \ln\frac{3}{5} - \ln\frac{1}{3} = 2\ln 3 - \ln 5.$$

Từ đó ta có $a = 2$, $b = -1$. Vậy $a + b = 2 + (-1) = 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 216. Biết $\int\limits_1^2 \frac{1}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ thì a và b là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $x^2 - 5x + 6 = 0$. **B.** $x^2 - 9 = 0$. **C.** $x^2 + 4x - 12 = 0$. **D.** $2x^2 - x - 1 = 0$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^2 \frac{1}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{1}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2(2x-1)}\Big|_1^2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$.

Không mất tính tổng quát ta có $a = -6$, $b = 2$, suy ra $a + b = -4$, $ab = -12$.

Vậy a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + 4x - 12 = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 217. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Tính $\int\limits_{-1}^1 f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x$.

A. 6. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** 3. **D.** $\frac{11}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int\limits_{-1}^1 f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)\,\mathrm{d}x$.

Tính $A = \int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = -4x + 1 \Rightarrow -\frac{1}{4}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 5 \\ x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{4}\int\limits_5^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\limits_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

Tính: $B = \int\limits_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 4x - 1 \Rightarrow \frac{1}{4}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 3. \end{cases}$

$\Rightarrow B = \frac{1}{4}\int\limits_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 2.$

Vậy $\int\limits_{-1}^1 f(|4x-1|)\,\mathrm{d}x = A + B = 3.$

Chọn đáp án C □

Câu 218. Cho hai tích phân $\int\limits_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_{-2}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x = -3$. Tính $\int\limits_{-2}^{5} [f(x) - 4g(x) - 1]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -11$. **B.** $I = 13$. **C.** $I = 27$. **D.** $I = 3$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int\limits_{-2}^{5} [f(x) - 4g(x) - 1]\,\mathrm{d}x &= \int\limits_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x - 4\int\limits_{-2}^{5} g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-2}^{5} \mathrm{d}x\\ &= 8 + 4\cdot 3 - [5 - (-2)]\\ &= 13.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 219. Biết tích phân $\int\limits_{0}^{\ln 6} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 2$. **B.** $T = 1$. **C.** $T = 0$. **D.** $T = -1$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\sqrt{\mathrm{e}^x+3} = t \Rightarrow \mathrm{e}^x = t^2 - 3$ và $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Tại $x = 0$ thì $t = 2$; tại $x = \ln 6$ thì $t = 3$.

Khi đó tích phân đã cho trở thành

$$I = \int\limits_{2}^{3} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t} = \int\limits_{2}^{3} \frac{(2t+2)\,\mathrm{d}t}{1+t} - 2\int\limits_{2}^{3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = 2t\big|_2^3 - 2\ln(1+t)\big|_2^3 = 2 - 2\ln 4 + 2\ln 3 = 2 - 4\ln 2 + 2\ln 3.$$

$\Rightarrow a = 2, b = -4, c = 2$.

Suy ra $T = a + b + c = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 220. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm kiên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(3) = 7, \int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Giá trị của $\int\limits_{0}^{1} xf'(3x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$. Khi đó:

$$3 = \int\limits_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot f(x)\big|_0^3 - \int\limits_{0}^{3} xf'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{0}^{3} xf'(x)\,\mathrm{d}x = 18.$$

Đặt $t = 3x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{3}$. Khi đó $I = \int\limits_{0}^{1} xf'(3x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{9}\int\limits_{0}^{3} tf'(t)\,\mathrm{d}t = 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 221. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x) + x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=5$. **C.** $I=6$. **D.** $I=4$.

✍ Lời giải.

Từ giả thiết $f(2x)=3f(x)+x$, lấy tích phân hai vế trên đoạn $[0;1]$, ta được:

$$\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=3+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=6.$$

Chọn đáp án C □

Câu 222. Biết $\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** 3.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int_2^3 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_2^3 \ln x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\cdot\ln x\Big|_2^3-\int_2^3\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}(\ln x)$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\ln 3+\frac{1}{2}\cdot\ln 2+\int_2^3\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cdot\ln 3+\frac{1}{2}\cdot\ln 2+\frac{1}{6}.$$

Vậy $a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=-\dfrac{1}{3}$. Suy ra $a+b+c=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 223. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}-2}\,\mathrm{d}x=a\sqrt{5}+b\sqrt{2}+c$, với a, b, $c\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 10. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** 20. **D.** $\dfrac{20}{3}$.

✍ Lời giải.

$$\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}-2}\,\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{x^3\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2 x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2 x\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x+3.$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2-4\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=x\,\mathrm{d}x$.

Với $x=1\Rightarrow t=\sqrt{5}$; $x=2\Rightarrow t=2\sqrt{2}$.

Khi đó ta có $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} t^2\,\mathrm{d}t=-\frac{5}{3}\sqrt{5}+\frac{16}{3}\sqrt{2}$.

Do đó $\begin{cases}a=-\dfrac{5}{3}\\ b=\dfrac{16}{3}\\ c=3\end{cases}\Rightarrow a+b+c=\dfrac{20}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 224. Cho $\displaystyle\int_1^2\left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{10}{b}+\ln\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+b$.

A. $P=1$. **B.** $P=5$. **C.** $P=7$. **D.** $P=2$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int_1^2\left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x &= \int_1^2\left(x^2+1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{1}{3}x^3+x-\ln|x+1|\right)\Big|_1^2\\ &= \left(\frac{8}{3}+2-\ln 3\right)-\left(\frac{1}{3}+1-\ln 2\right)\\ &= \frac{10}{3}+\ln\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Nên suy ra $\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}\Rightarrow P=a+b=5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 225. Cho $I=\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=a\cdot\mathrm{e}^2+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính tổng $a+b$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})=\frac{x\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Suy ra $a=b=\dfrac{1}{4}\Rightarrow a+b=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 226. Cho hàm số $y=f(x)$ thoả mãn $f(2)=-\dfrac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{3}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(x)=x^3f^2(x)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;2]$ ta được

$$\int\limits_1^2\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2x^3\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left.\frac{-1}{f(x)}\right|_1^2=\frac{15}{4}\Leftrightarrow\frac{-1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\frac{15}{4}\Leftrightarrow f(1)=-1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 227. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^3\left[2x\ln(x+1)+xf'(x)\right]\mathrm{d}x=0$ và $f(3)=1$. Biết $\displaystyle\int\limits_0^3f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a+b\ln2}{2}$ với a, b là các số thực dương. Giá trị của $a+b$ bằng?

A. 35. **B.** 29. **C.** 11. **D.** 7.

✍ Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^3\left[2x\ln(x+1)+xf'(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^32x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^3xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

Xét $\displaystyle I=\int\limits_0^32x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=2x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ v=x^2\end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned}I=x^2\ln(x+1)\Big|_0^3-\int\limits_0^3\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x&=9\ln4-\int\limits_0^3\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\&=18\ln2-\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)\Big|_0^3\\&=18\ln2-(\frac{3}{2}+\ln4)\\&=-\frac{3}{2}+16\ln2.\end{aligned}$$

Xét $\displaystyle J=\int\limits_0^3xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3x\,\mathrm{d}[f(x)]=xf(x)\Big|_0^3-\int\limits_0^3f(x)\,\mathrm{d}x=3f(3)-\frac{a+b\ln2}{2}=3-\frac{a+b\ln2}{2}$.
Suy ra $I+J=0\Leftrightarrow-\dfrac{3}{2}+16\ln2+3-\dfrac{a+b\ln2}{2}=0\Leftrightarrow a=3$ và $b=32$.
Vậy $a+b=35$.

Chọn đáp án A □

Câu 228. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^32^x}{\pi+\mathrm{e}2^x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{m}+\frac{1}{\mathrm{e}\ln n}\cdot\ln\left(p+\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $P=m+n+p$.

A. $P=5$. **B.** $P=6$. **C.** $P=8$. **D.** $P=7$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3 2^x}{\pi+\mathrm{e}2^x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x^3(\pi+\mathrm{e}2^x)+2^x}{\pi+\mathrm{e}2^x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(x^3+\frac{2^x}{\pi+\mathrm{e}2^x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 + \frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\cdot\ln\left|\pi+\mathrm{e}2^x\right|\bigg|_0^1\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{\mathrm{e}\cdot\ln 2}\cdot\ln\left|1+\frac{\mathrm{e}}{\pi+\mathrm{e}}\right|.\end{aligned}$$

Vậy $m=4$, $n=2$, $p=1$ nên $P=m+n+p=7$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 229. Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thoả $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=10$, $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Đặt $a=\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ và $b=\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Khi đó, $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=a+3b$ và $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=2a-b$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}a+3b=10\\2a-b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=2.\end{cases}$$

Vậy $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=a+b=4+2=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 230. Giả sử $I=\int_1^{64}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\frac{2}{3}+b$ với a, b là các số nguyên. Khi đó giá trị $a-b$ là

A. -17. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 17.

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=t^6\Rightarrow \mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$.

Với $x=1\Rightarrow t=1$, $x=64\Rightarrow t=2$.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{6t^5}{t^2+t^3}\,\mathrm{d}t \\ &= 6\int_1^2 \frac{t^3}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= 6\int_1^2 \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)\Big|_1^2 \\ &= 6\ln\frac{2}{3}+11. \end{aligned}$$

Vậy $a=6,\ b=11$. Khi đó $a-b=6-11=-5$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 231. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16,\ \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4$.

Tính $I=\int_0^1 x\cdot f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=7$. **B.** $I=12$. **C.** $I=20$. **D.** $I=13$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2x\Rightarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}t$ và $x=\frac{t}{2}$.

Với $x=0\Rightarrow t=0$ và $x=1\Rightarrow t=2$.

Do đó, $I=\int_0^2 \frac{t}{2}\cdot f'(t)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x). \end{cases}$

Khi đó, $I=\frac{1}{4}\left(xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{4}(2f(2)-4)=7$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 232. Tính tích phân $\int_0^1 \max\{\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{1-2x}\}\,\mathrm{d}x$

A. $\mathrm{e}-1$. **B.** $\frac{3}{2}\left(\mathrm{e}-\sqrt[3]{\mathrm{e}}\right)$. **C.** $\mathrm{e}-\sqrt[3]{\mathrm{e}}$. **D.** $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình $x=1-2x\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Với $0\le x\le\frac{1}{3}$ thì $\mathrm{e}^x\le\mathrm{e}^{1-2x}$.

Với $1\ge x\ge\frac{1}{3}$ thì $\mathrm{e}^x\ge\mathrm{e}^{1-2x}$.

Vậy $\int_0^1 \max\{\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^{1-2x}\}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-2x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{3}}^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^{1-2x}}{2}\Big|_0^{\frac{1}{3}}+\mathrm{e}^x\Big|_{\frac{1}{3}}^1=\frac{3}{2}\left(\mathrm{e}-\sqrt[3]{\mathrm{e}}\right)$.

Chọn đáp án B □

Câu 233. Cho tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cot\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{2+\sqrt{a}}{2}\ln b - \frac{\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $a^2+b^2+c^2$.

A. 48. **B.** 18. **C.** 34. **D.** 36.

Lời giải.

Ta có $\cot\left(\dfrac{5\pi}{12}-x\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{12}+x\right)$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cot\left(\frac{5\pi}{12}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\tan^2\left(\frac{\pi}{12}+x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{12}+x\right)}{\tan^2\left(\frac{\pi}{12}+x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}-1\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{12}+x\right)}{\tan^2\left(\frac{\pi}{12}+x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Đặt $t = \tan\left(\dfrac{\pi}{12}+x\right)$, khi đó $\mathrm{d}t = 1+\tan^2\left(\dfrac{\pi}{12}+x\right)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t = 2-\sqrt{3}$.

Khi $x = \dfrac{\pi}{4}$ thì $t = \sqrt{3}$.

Vậy

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{12}+x\right)}{\tan^2\left(\frac{\pi}{12}+x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{12}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}\,\mathrm{d}x &= \int_{2-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+t\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2-\sqrt{3}}\int_{2-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+(2-\sqrt{3})}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2-\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t}{t+2-\sqrt{3}}\right|\Bigg|_{2-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}\ln\sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\ln 3.
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $a=b=3$, $c=4$. Hay $a^2+b^2+c^2 = 9+9+16 = 34$.

Chọn đáp án C □

Câu 234. Cho $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^{\cos x}+\sin x\right)\sin x\,\mathrm{d}x = a+b\mathrm{e}+c\pi$ với a, b, $c\in\mathbb{Q}$. Tính $a+b+c$.

A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{6}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1-\mathrm{e}+\frac{\pi}{4}$.

Vậy $a+b+c = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 235. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int\limits_0^2 f(4x)\,\mathrm{d}x = 6$.

Tính $I = \int\limits_{-2}^{2} f(3|x|+2)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{20}{3}$. **B.** $I = 20$. **C.** $I = \dfrac{40}{3}$. **D.** 40.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 2x$, ta được $\int\limits_0^4 f(2t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^4 f(2x)\,\mathrm{d}x = 12$.

Ta thấy $I = \int\limits_{-2}^{2} f(3|x|+2)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f(3|x|+2)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f(3x+2)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $2u = 3x+2$, ta được $I = \dfrac{4}{3}\int\limits_1^4 f(2u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{4}{3}\left(\int\limits_0^4 f(2x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x\right) = \dfrac{4}{3}(12-2) = \dfrac{40}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 236. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(x)+f(1-x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x \in [0;1]$. Tính $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \dfrac{3}{4} + 2\ln 2$. **B.** $I = 3 + \ln 2$. **C.** $I = \dfrac{3}{4} + \ln 2$. **D.** $I = \dfrac{3}{2} + 2\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 1-x$, ta có $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$. Đổi cận, ta được $I = -\int\limits_1^0 f(1-t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Do vậy $2I = \int\limits_0^1 [f(x)+f(1-x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{x^2+2x+3}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2} + x + 2\ln|x+1|\right]\Big|_0^1 = \dfrac{3}{2} + 2\ln 2$.

Vậy $I = \dfrac{3}{4} + \ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 237. Cho $\int\limits_2^3 \dfrac{2x+3}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$. Tính giá trị biểu thức $a^2 - ab - b$.

A. 11. **B.** 21. **C.** 31. **D.** 41.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_2^3 \frac{2x+3}{x^2+x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_2^3 \left(\frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln|x^2+x| + 2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]\Big|_2^3 \\ &= \ln 12 + 2\ln\frac{3}{4} - \ln 6 - 2\ln\frac{2}{3} \\ &= -5\ln 2 + 4\cdot\ln 3.\end{aligned}$$

Từ đó, suy ra $a^2 - ab - b = (-5)^2 - (-5)\cdot 4 - 4 = 41$.

Chọn đáp án D □

Câu 238. Cho $\int\limits_1^3 \dfrac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Ta có $\dfrac{x+3}{x^2+3x+2} = \dfrac{-1}{x+2} + \dfrac{2}{x+1}$.

Do đó,

$$\int\limits_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(-\ln|x+2| + 2\ln|x+1|\right)\Big|_1^3 = 2\ln 2 + \ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra $a=2$, $b=1$ và $c=-1$.

Vậy $a+b+c=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 239. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = a\pi + b\ln 2$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $T = 16a - 8b$.

A. $T=4$. **B.** $T=5$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-2$.

✍ Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \tan x. \end{cases}$

$$I = \frac{1}{2}\left[x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

Nên $a = \dfrac{1}{8}$, $b = -\dfrac{1}{4}$. Do đó $T = 16a - 8b = 4$.

Chọn đáp án A □

Câu 240. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x)+1$ chia hết cho $(x-1)^2$ và $f(x)-1$ chia hết cho $(x+1)^2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 5. **B.** 7. **C.** $-\dfrac{5}{8}$. **D.** $\dfrac{13}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có $f(x)+1$ chia hết cho $(x-1)^2$ nên $f'(x)$ chia hết cho $x-1$.

Tương tự ta cũng có $f'(x)$ chia hết cho $x+1$ nên $f'(x) = a(x-1)(x+1)$, với $a \in \mathbb{R}$.

Khi đó $f(x) = \dfrac{a}{3}x^3 - ax + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Mà $f(1) = -1$ và $f(-1) = 1$ nên ta có $\begin{cases} -\dfrac{2a}{3} + b = -1 \\ \dfrac{2a}{3} + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = 0. \end{cases}$

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x$.

Khi đó $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{3}{4}x^2\right)\Big|_0^1 = -\dfrac{5}{8}$.

Chọn đáp án C □

Câu 241. Cho $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a, b, c là các số thực. Giá trị của $a+b^2-c^3$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} &= \int_2^3 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= [\ln(x+1) - \ln(x+2)]\Big|_2^3 \\ &= \ln 4 - \ln 5 - (\ln 3 - \ln 4) \\ &= 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5.\end{aligned}$$

Suy ra $a=4$, $b=-1$, $c=-1 \Rightarrow a+b^2-c^3 = 6$.

Chọn đáp án D □

Câu 242. Biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = a\sqrt{\mathrm{e}} + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a\cdot b$.

A. $P=4$. **B.** $P=-8$. **C.** $P=8$. **D.** $P=-4$.

✍ Lời giải.

Xét tích phân $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = 2\sqrt{x} \end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned} I &= 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - 4\sqrt{x}\Big|_1^{\mathrm{e}} \\ &= 2\sqrt{\mathrm{e}} - 4\left(\sqrt{\mathrm{e}} - 1\right) \\ &= -2\sqrt{\mathrm{e}} + 4. \end{aligned}$$

Suy ra $a=-2$, $b=4$. Do đó $P = a\cdot b = (-2)\cdot 4 = -8$.

Chọn đáp án B □

Câu 243. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \displaystyle\int_0^4 x\cdot f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=144$. **B.** $I=12$. **C.** $I=112$. **D.** $I=28$.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = 2f\left(\dfrac{x}{2}\right). \end{cases}$

Khi đó $I=\int\limits_0^4 x\cdot f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2x\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^4-2\int\limits_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=128-2\int\limits_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\frac{x}{2}$, khi đó $\int\limits_0^4 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=2\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=8.$

Vậy $I=128-2\cdot 8=112.$

Chọn đáp án C □

Câu 244. Cho tích phân $I=\int\limits_0^1 (x+2)\ln(x+1)\mathrm{d}x=a\ln 2-\frac{7}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương. Tổng $a+b^2$ bằng

A. 8. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 20.

✍ **Lời giải.**

— Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=(x+2)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}x^2+2x.\end{cases}$

— Khi đó

$$\begin{aligned}I&=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln(x+1)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{x^2+4x}{x+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x+3-\frac{3}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}+3x-3\ln|x+1|\right)\Big|_0^1\right]\\&=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{7}{4}+\frac{3}{2}\ln 2=4\ln 2-\frac{7}{4}.\end{aligned}$$

— Suy ra $a=4$, $b=4\Rightarrow a+b^2=20.$

Chọn đáp án D □

Câu 245. Cho $I=\int\limits_0^1\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$ với $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính tổng $a+b+c$.

A. 1. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $J=\int\limits_0^1\sqrt{x^2+15}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x^2+15}\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}$, ta được $\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+15}}\mathrm{d}x\\ \text{Chọn } v=x\end{cases}$. Khi đó

$$J=x\sqrt{x^2+15}\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+15}}\mathrm{d}x$$

$$J=4-\int\limits_0^1\frac{x^2+15-15}{\sqrt{x^2+15}}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} J &= 4-J+15\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+15}}\,\mathrm{d}x \\ J &= 2+\frac{15}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+15}\right|\Big|_0^1 \\ J &= 2-\frac{15}{4}\ln 3+\frac{15}{4}\ln 5. \end{aligned}$$

Ta được $I=\displaystyle\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x+J=\frac{5}{2}-\frac{15}{4}\ln 3+\frac{15}{4}\ln 5 \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=-\dfrac{15}{4} \\ c=\dfrac{15}{4}. \end{cases}$

Vậy $a+b+c=\dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 246. Cho $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[0;4]$ thỏa mãn $f(x)+f(4-x)=-x^2+4x$. Giá trị của tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 32. **B.** $\dfrac{16}{3}$. **C.** $\dfrac{32}{3}$. **D.** 16.

✍ **Lời giải.**

Trong tích phân I, ta đặt $t=4-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.
Với $x=0 \Rightarrow t=4$; với $x=4 \Rightarrow t=0$.
Tích phân trở thành $I=\displaystyle\int\limits_4^0 f(4-t)(-\mathrm{d}t)$. Hay $I=\displaystyle\int\limits_0^4 f(4-x)\,\mathrm{d}x$.
Từ đó suy ra $I+I=\displaystyle\int\limits_0^4 (f(x)+f(4-x))\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 (-x^2+4x)\,\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_0^4=\frac{32}{3}$.
Vậy $I=\dfrac{16}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 247. Biết $\displaystyle\int\limits_1^2 x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2+c$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=3$. **B.** $P=0$. **C.** $P=5$. **D.** $P=2$.

✍ **Lời giải.**

— Đặt $\begin{cases} u=\ln(x^2+1) \\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

— Khi đó

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^2\\ &= 2\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2 - 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2\\ &= \frac{5}{2}\ln 5 - \ln 2 - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $P = a+b+c = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 248. Cho $I = \displaystyle\int_0^1 x\ln\left(2+x^2\right)\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(2+x^2\right) \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases}$. Khi đó $\begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2+2}{2}. \end{cases}$

Do đó

$$I = \left(\frac{x^2+2}{2}\right)\cdot\ln\left(2+x^2\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Suy ra $a = \frac{3}{2}$, $b = -1$, $c = -\frac{1}{2}$. Vậy $a+b+c = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 249. Cho $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $6a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

Ta có

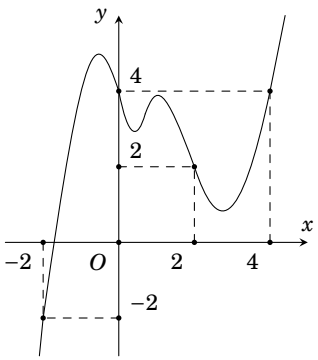
$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x+1|\Big|_1^2 + \frac{1}{x+1}\Big|_1^2\\ &= \ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\\ &= -\frac{1}{6} - \ln 2 + \ln 3.\end{aligned}$$

Vậy $6a+b+c = 6\cdot\frac{-1}{6} + (-1) + 1 = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 250.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của biểu thức $I=\displaystyle\int_0^4 f'(x-2)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\,\mathrm{d}x$ bằng



A. 6. **B.** -2.

C. 2. **D.** 10.

✍ Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 f'(x-2)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\,\mathrm{d}x=\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}(x-2)+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}(x+2)\\ &= f(x-2)\Big|_0^4+f(x+2)\Big|_0^2=f(2)-f(-2)+f(4)-f(2)=f(4)-f(-2)=6. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 251. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x+3\sin x+2}=a\ln 2+b\ln 3$ với a, b là các số nguyên. Tính $P=2a+b$.

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 1.

✍ Lời giải.

Đặt $\sin x=t\Rightarrow \cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x+3\sin x+2} &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2+3t+2}\\ &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}\\ &= \int_0^1\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)\mathrm{d}t\\ &= (\ln|t+1|-\ln|t+2|)\Big|_0^1=2\ln 2-\ln 3. \end{aligned}$$

Vậy $a=2$, $b=-1\Rightarrow P=2a+b=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 252. Biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{\mathrm{e}+1}+b\cdot\ln\frac{2}{\mathrm{e}+1}+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b+c$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

✍ Lời giải.

Xét tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = -\dfrac{1}{x+1}. \end{cases}$$

Thu được

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{x+1}\cdot\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_1^{\mathrm{e}} = -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + 1 - \ln(\mathrm{e}+1) + \ln 2 \\ &= \frac{-1}{\mathrm{e}+1} + \ln\frac{2}{\mathrm{e}+1} + 1. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a=-1, b=1, c=1$ nên $a+b+c=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 253. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x = 5$ và $\displaystyle\int_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \displaystyle\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=4$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=8$.

✍ **Lời giải.**

Xét tích phân $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x = 5$.

Đặt $t = \mathrm{e}^x + 1$. Ta có

$$\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{t-1}\cdot\mathrm{d}t.$$
$$x=0 \Rightarrow t=2, \quad x=\ln 2 \Rightarrow t=3.$$

Do đó

$$5 = \int_0^{\ln 2} f\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{f(t)}{t-1}\mathrm{d}t.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 3 &= \int_2^3 \frac{(2x-3)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{(2x-2-1)f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = \int_2^3 \left[2f(x) - \frac{f(x)}{x-1}\right]\mathrm{d}x \\ &= 2\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x - \int_2^3 \frac{f(x)}{x-1}\mathrm{d}x = 2I - 5. \end{aligned}$$

Vậy $I=4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 254. Biết $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + b\ln 2 + c\ln 3$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a+b+c$.

A. $T=1$. **B.** $T=4$. **C.** $T=3$. **D.** $T=6$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1, x=3\Rightarrow t=2$.

Suy ra

$$\int\limits_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 \frac{2t(t^2-1)}{4+2t}\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3.$$

Vậy $a=7,b=-12,c=6\Rightarrow T=1$.

Chọn đáp án A □

Câu 255. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(x^5+4x+3\right)=2x+1,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_{-2}^{8} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 2. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** 72.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=x^5+4x+3\Rightarrow \mathrm{d}t=(5x^4+4)\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=-1\Rightarrow t=-2, x=1\Rightarrow t=8$.

Suy ra $\int\limits_{-2}^{8} f(t)\mathrm{d}t=\int\limits_{-1}^{1}(5x^4+4)f\left(x^5+4x+3\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}(5x^4+4)(2x+1)\mathrm{d}x=10$.

Vậy $\int\limits_{-2}^{8} f(x)\mathrm{d}x=10$.

Chọn đáp án A □

Câu 256. Biết $I=\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}}{x\sqrt{3x+1}}=a\ln 3+b\ln 5$. Giá trị của $2a^2+ab+b^2$ là

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 3.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{3}\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{2}{3}t\mathrm{d}t$.

Ta có $I=\int\limits_2^4 \frac{2\mathrm{d}t}{t^2-1}=\int\limits_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^4=\left(\ln\frac{3}{5}-\ln\frac{1}{3}\right)=2\ln 3-\ln 5$.

Do đó $2a^2+ab+b^2=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 257. Nếu $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\ln c$, (với $a,b,c\in\mathbb{Z}, a>0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $a+2b+3c$ là

A. 13. **B.** 14. **C.** 9. **D.** 11.

✍ **Lời giải.**

Có $\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=\sin x+\cos x$, vì $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=-\ln|\sin x+\cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\left(\ln 1-\ln\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Suy ra $a=1$, $b=2$, $c=2$. Vậy $a+2b+3c=11$.

Chọn đáp án D □

Câu 258. Cho $I=\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{2x+m}}\,\mathrm{d}x$, m là số thực dương. Tìm tất cả các giá trị của m để $I\geq 1$.

A. $0<m\leq\dfrac{1}{4}$. **B.** $m\geq\dfrac{1}{4}$. **C.** $m>0$. **D.** $\dfrac{1}{8}\leq m\leq\dfrac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{2x+m}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{2x+m}}\,\mathrm{d}(2x+m)=\sqrt{2x+m}\Big|_0^1=\left(\sqrt{2+m}-\sqrt{m}\right)$.

Do đó $I\geq 1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2+m}-\sqrt{m}\right)\geq 1\Leftrightarrow\sqrt{2+m}\geq\sqrt{m}+1\Leftrightarrow 2+m\geq m+1+2\sqrt{m}\Leftrightarrow 0\leq m\leq\dfrac{1}{4}$.

Kết hợp điều kiện $m>0$ của đề bài, ta có $0<m\leq\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 259. Biết rằng $\int\limits_{-2}^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+5\sqrt{x+3}+9}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** 5. **D.** -5.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x+3}$. Ta có $t^2=x+3\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=-2\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=2$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-2}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+5\sqrt{x+3}+9}=\int\limits_1^2 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2-3+5t+9}=\int\limits_1^2 \frac{2t}{t^2+5t+6}\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^2 \frac{2t}{(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_1^2 \left(-\frac{4}{t+2}+\frac{6}{t+3}\right)\mathrm{d}t=\left(-4\ln|t+2|+6\ln|t+3|\right)\Big|_1^2=-20\ln 2+4\ln 3+6\ln 5. \end{aligned}$$

Do đó, $a=-20$, $b=4$, $c=6$.

Vậy $a+b+c=-20+4+6=-10$.

Chọn đáp án A □

Câu 260. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;2]$ và thỏa mãn $I=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=5$. Khi đó giá trị của tích phân $K=\int\limits_0^2 \left(\mathrm{e}^{2+\ln f(x)}+3\right)\mathrm{d}x$ là

A. $5\mathrm{e}^2+6$. **B.** $5\mathrm{e}^2-6$. **C.** $6\mathrm{e}^2+5$. **D.** $5\mathrm{e}^2+9$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} K &= \int_0^2 \left(\mathrm{e}^{2+\ln f(x)}+3\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\mathrm{e}^2\cdot \mathrm{e}^{\ln f(x)}+3\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \left(\mathrm{e}^2 f(x)+3\right)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + 3\int_0^2 \mathrm{d}x \\ &= 5\mathrm{e}^2+6. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 261. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=-1$ và $(x+1)f'(x)+f(x)=3x^2-2x$. Tính giá trị $f(2)$.

A. $f(2)=\dfrac{5}{2}$. **B.** $f(2)=3$. **C.** $f(2)=2$. **D.** $f(2)=\dfrac{2}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $[(x+1)f(x)]'=(x+1)'f(x)+(x+1)f'(x)=(x+1)f'(x)+f(x)$. Nên từ giả thiết $(x+1)f'(x)+f(x)=3x^2-2x$ suy ra $[(x+1)f(x)]'=3x^2-2x$.

Do đó $(x+1)f(x)=\displaystyle\int(3x^2-2x)\mathrm{d}x=x^3-x^2+C.$ $(*)$

Thay $x=1$ vào $(*)$ ta có $2f(1)=C\Rightarrow C=-2$.

Như vậy $(x+1)f(x)=x^3-x^2-2\Rightarrow(2+1)f(2)=2^3-2^2-2\Rightarrow f(2)=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 262. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_{-5}^{1} f(x)\mathrm{d}x=9$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2[f(1-3x)+9]\mathrm{d}x$.

A. 27. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 75.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^2[f(1-3x)+9]\mathrm{d}x=\int_0^2 f(1-3x)\mathrm{d}x+18.$

Xét $I=\displaystyle\int_0^2 f(1-3x)\mathrm{d}x.$

Đặt $u=1-3x\Rightarrow \mathrm{d}u=-3\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}u}{3}$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=1$; $x=2\Rightarrow u=-5$.

Khi đó $I=\displaystyle\int_0^2 f(1-3x)\mathrm{d}x=-\int_{-5}^{1} f(u)\frac{\mathrm{d}u}{3}=-3.$

Vậy $\displaystyle\int_0^2[f(1-3x)+9]\mathrm{d}x=18-3=15.$

Chọn đáp án C □

Câu 263. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$, $F(1)=3$, $F(3)=5$ và $\displaystyle\int_1^3 \left(x^4-8x\right)f(x)\mathrm{d}x=12$. Tính $I=\displaystyle\int_1^3 \left(x^3-2\right)F(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=\dfrac{147}{2}$. **B.** $I=\dfrac{147}{3}$. **C.** $I=-\dfrac{147}{2}$. **D.** $I=147$.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = F(x) \\ \mathrm{d}v = (x^3-2)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f(x)\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^4}{4} - 2x \end{cases}$.

Khi đó

$$I = \left(\frac{x^4}{4} - 2x\right)F(x)\Big|_1^3 - \int_1^3 \left(\frac{x^4}{4} - 2x\right) f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{57}{4}F(3) + \frac{7}{4}F(1) - \frac{1}{4}\cdot 12 = \frac{57}{4}\cdot 5 + \frac{7}{4}\cdot 3 - 3 = \frac{147}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 264. Biết $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(\sqrt{b^3} - c\right)$ (với a, b, $c \in \mathbb{N}$). Tính $Q = abc$.

A. $Q = 120$. **B.** $Q = 15$. **C.** $Q = -120$. **D.** $Q = 40$.

✍ Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow t^2 = x^2+4 \Rightarrow t\mathrm{d}t = x\mathrm{d}x$.

Đổi cận

x	0	1
t	2	$\sqrt{5}$

Ta được $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int_2^{\sqrt{5}} t\cdot t\,\mathrm{d}t = \int_2^{\sqrt{5}} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}\Big|_2^{\sqrt{5}} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{5^3} - 8\right)$.

Suy ra $a = 3, b = 5, c = 8 \Rightarrow Q = abc = 120$.

Chọn đáp án A □

Câu 265. Biết $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{9}{x-3} - \frac{7}{x-2}\right)\mathrm{d}x = a\ln 3 - b\ln 2$ với a, b là các số nguyên. Tính giá trị $P = a^2 + b^2$.

A. $P = 32$. **B.** $P = 130$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 16$.

✍ Lời giải.

$\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{9}{x-3} - \frac{7}{x-2}\right)\mathrm{d}x = (9\ln|x-3| - 7\ln|x-2|)\Big|_{-1}^1 = 7\ln 3 - 9\ln 2 \Rightarrow a = 7;\ b = 9.$

Vậy $P = 130$.

Chọn đáp án B □

Câu 266. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x+1}\,\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $b < 0$. **B.** $c > 0$. **C.** $a < 0$. **D.** $a + b + c > 0$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I = \int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 6 - \frac{6}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 6\right)\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{6}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x\right)\Big|_1^2 - 6\ln(x+1)\Big|_1^2 \\ &= \frac{7}{3} + 6\ln 2 - 6\ln 3. \end{aligned}$$

Suy ra, $a+b+c=\dfrac{7}{3}>0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 267. Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\ln\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $T=a+b+c+d$.

A. $T=13$. **B.** $T=10$. **C.** $T=12$. **D.** $T=11$.

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+2)}-\frac{1}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x=\ln|x+2|\Big|_0^1-\frac{1}{x+2}\Big|_0^1=\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 268. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, $f(0)=\dfrac{1}{3}$ và $f(-3)-f(3)=0$. Tính giá trị của biểu thức $T=f(-4)+f(-1)-f(4)$.

A. $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{8}{5}\right)+1$. **C.** $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)+\ln 2+1$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln 80+1$.

✍ **Lời giải.**

$$f(x)=\int\frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2-(x-1)}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+C.$$

Khử dấu giá trị tuyệt đối, ta được

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)+C_1 & \text{khi } x\in(-\infty;-2)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x+2}{1-x}\right)+C_2 & \text{khi } x\in(-2;1)\\ \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)+C_3 & \text{khi } x\in(1;+\infty).\end{cases}$$

Ta có $f(0)=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\ln 2+C_2=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow C_2=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\ln 2$.

$f(-3)-f(3)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{4}+C_1-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}-C_3=0\Leftrightarrow C_1-C_3=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{4}$.

Vậy $T=f(-4)+f(-1)-f(4)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}+C_1+\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{1}{2}+C_2-\dfrac{1}{3}\ln 2-C_3=\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 269. Biết $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $P=a+4b$.

A. $P=-3$. **B.** $P=0$. **C.** $P=3$. **D.** $P=1$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=\ln(1+x)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned}I&=-\frac{1}{x}\ln(1+x)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+(\ln x-\ln(1+x))\Big|_1^2=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

Suy ra $a=3;\ b=-\dfrac{3}{2}$ nên $P=a+4b=-3$.

Chọn đáp án A □

Câu 270. Cho biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=a\pi+b\ln 2$ với a và b là các số hữu tỉ. Khi đó $\dfrac{a}{b}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ và $B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$. Khi đó $A+B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ (1).

$A-B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln(\sin x+\cos x)\big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}\ln 2\Rightarrow a=\dfrac{1}{8}$ và $b=\dfrac{1}{4}$ và $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 271. Biết rằng $\displaystyle\int_1^0 3\mathrm{e}^{\sqrt{1+3x}}\mathrm{d}x=\frac{a}{5}\mathrm{e}^2+\frac{b}{3}\mathrm{e}+c\,(a;b;c\in\mathbb{Z})$. Tính $T=a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}$.

A. $T=9$. **B.** $T=10$. **C.** $T=-10$. **D.** $T=6$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{1+3x}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=2, x=0\Rightarrow t=1$.

Khi đó $\displaystyle\int_1^0 3\mathrm{e}^{\sqrt{1+3x}}\mathrm{d}x=2\int_2^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=2\int_2^1 t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t$

$=2\left(t\mathrm{e}^t-\displaystyle\int_2^1\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)=2\left(t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t\right)\big|_2^1=2(-2\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^2)=-2\mathrm{e}^2=\frac{-10}{5}\mathrm{e}^2+\frac{0}{3}\mathrm{e}+0.$

Do đó $a=-10, b=0, c=0$. Vậy $a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=-10$.

Chọn đáp án C □

Câu 272. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+3f(1-x)=x\sqrt{1-x}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{4}{15}$. **B.** $I=\dfrac{1}{15}$. **C.** $I=\dfrac{4}{75}$. **D.** $I=\dfrac{1}{25}$.

✍ **Lời giải.**

Từ giả thiết ta có $I=-\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$.

Xét $I_1=-\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$.

Đổi biến $1-x=t\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$.

Suy ra $I_1=-\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\sqrt{1-x} - (1-x)\sqrt{1-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{15}$.

Từ đó ta có $\frac{5}{2}I = \frac{2}{15} \Rightarrow I = \frac{4}{75}$.

Chọn đáp án C □

Câu 273. Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và $f(2) = 4$. Tính $J = \int\limits_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$. **B.** $J = 1 + \ln 4$. **C.** $J = \frac{1}{2} + \ln 4$. **D.** $J = 4 - \ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_1^2 \left(\frac{f'(x)+2}{x} - \frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(2\ln x + \frac{1}{x} + \frac{f(x)}{x}\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln 4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 274. Tìm tất cả giá trị thực của tham số k để có $\int\limits_1^k (2x-1)\,\mathrm{d}x = 4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A. $\left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=2 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=-2 \end{array}\right.$.

✍ **Lời giải.**

$\int\limits_1^k (2x-1)\,\mathrm{d}x = (x^2-x)\Big|_1^k = k^2 - k$

$4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{x+1}+1} = 2$. Ta có $k^2 - k = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=2. \end{array}\right.$

Chọn đáp án A □

Câu 275. Cho các hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = x^2\ \forall x \in (-\infty; 1]$, $f'(x) = 2\ \forall x > 1$. Giá trị của biểu thức $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Do $f'(x) = 2$ nên $f(x) = \int 2\,\mathrm{d}x = 2x + C\ \forall x > 1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x + C) = 2 + C$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$.

Do $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và vì vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Leftrightarrow 2 + C = 1 \Leftrightarrow C = -3$.

Ta có $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \le 1 \\ 2x - 3 & \text{với } x > 1. \end{cases}$

Vậy

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2x-3)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + (x^2-3x)\Big|_1^2\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 276. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^x$. Tính giá trị $f(4)$.

A. $f(4)=3\mathrm{e}^2$. **B.** $f(4)=\dfrac{3\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $f(4)=\dfrac{5\mathrm{e}^4}{8}$. **D.** $f(4)=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[0;+\infty)$.

$$\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^x \Leftrightarrow F\left(x^2\right) - F(0) = x\mathrm{e}^x.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được $2xf\left(x^2\right) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$.

Cho $x=2$ ta được $4f(4) = 3\mathrm{e}^2 \Leftrightarrow f(4) = \dfrac{3\mathrm{e}^2}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 277. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2018-x)=2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x$.

A. 1009. **B.** 4036. **C.** 2018. **D.** 1009^2.

✍ **Lời giải.**

— Đặt $t=2018-x \Rightarrow x=2018-t$, ta có $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0$ thì $t=2018$, $x=2018$ thì $t=0$.

— Ta có

$$I=\int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2018} f(t)\mathrm{d}t = \int_{2018}^{0} f(2018-x)(-\mathrm{d}x) = \int_0^{2018} f(2018-x)\mathrm{d}x.$$

— Do đó

$$2I=\int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{2018} f(2018-x)\mathrm{d}x = \int_0^{2018} (f(x)+f(2018-x))\,\mathrm{d}x = 2x\Big|_0^{2018} = 2\cdot 2018.$$

— Vậy $I=2018$.

Chọn đáp án C □

Câu 278. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^3+x}$, $f(-1)=0$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-2)-f(2)$ bằng

A. $-2+2\ln 5$. **B.** $2+2\ln 5$. **C.** -2. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

— Ta có

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(x^3+x)}{x^3+x}=\ln|x^3+x|+C=\begin{cases}\ln(x^3+x)+C_1 & \text{khi } x>0\\ \ln(-x^3-x)+C_2 & \text{khi } x<0\end{cases}$$

— $f(-1)=0$ nên $C_1=-\ln 2$. Lại có $f(1)=2$ nên $C_2=2-\ln 2$.

— Ta có $f(-2)=\ln 10-\ln 2=\ln 5$ và $f(2)=\ln 10+2-\ln 2=\ln 5+2$.

— Vậy $f(-2)-f(2)=\ln 5-(\ln 5+2)=-2$.

Chọn đáp án C □

Câu 279. Biết $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 5$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a^2+ab+3b^2$.

A. $S=2$. **B.** $S=5$. **C.** $S=4$. **D.** $S=0$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt[3]{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{2t}{3}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$, $x=5\Rightarrow t=4$.

Khi đó

$$\begin{aligned}I&=\int_1^5 \frac{1}{x\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=\int_2^4 \frac{3}{(t^2-1)\cdot t}\cdot\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t\\&=\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^4=2\ln 2-\ln 5.\end{aligned}$$

Suy ra $a=2$ và $b=-1$. Vậy $S=a^2+ab+3b^2=5$.

Chọn đáp án B □

Câu 280. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=1$, $f(2)=3$ và $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** 0. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(2x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}f(2x).\end{cases}$

$$I=\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}xf(2x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 281. Cho hai số hữu tỉ a,b sao cho tồn tại $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}$, biết rằng $F(1)=-\dfrac{2}{3}\ln 2$ và $F(2)=a\ln 2+b\ln 3$. Tính giá trị của biểu thức $T=ab$.

A. $T=-\dfrac{5}{3}$. **B.** $T=-2$. **C.** $T=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $T=-1$.

Lời giải.

Xét $I=\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$. Đặt

$$\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \xrightarrow{\text{Ta chọn}} \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=-\dfrac{1}{x+1} \end{cases}$$

Vậy $I=-\dfrac{1}{x+1}\ln x\Big|_1^2+\displaystyle\int_1^2\dfrac{x+1-x}{x(x+1)}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\ln 2+(\ln|x|-\ln|x+1|)\Big|_1^2=\dfrac{5}{3}\ln 2-\ln 3$.

Mặt khác $I=F(2)-F(1)\Rightarrow\left(a+\dfrac{2}{3}\right)\ln 2+b\ln 3=\dfrac{5}{3}\ln 2-\ln 3\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}\Rightarrow T=-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 282. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $\displaystyle\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x$.

A. 14. **B.** 18. **C.** 13. **D.** 7.

Lời giải.

— Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{2}$. Với $x=0\Rightarrow t=0$, với $x=1\Rightarrow t=2$. Suy ra

$$\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{t}{2}f'(t)\frac{\mathrm{d}t}{2}=\int_0^2\frac{1}{4}tf'(t)\mathrm{d}t.$$

— Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{1}{4}t \\ \mathrm{d}v=f'(t)\mathrm{d}t \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{4}\mathrm{d}t \\ v=f(t). \end{cases}$ Suy ra

$$\begin{aligned}\int_0^2\frac{1}{4}tf'(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{4}tf(t)\right]\Big|_0^2-\int_0^2\frac{1}{4}f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(2)}{2}-\frac{1}{4}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{16}{2}-\frac{1}{4}\cdot 4=7.\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 283. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3)+f(-3)=4$ và $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2$. Tính $m=f(-5)+f(0)+f(2)$.

A. $m=5+\dfrac{1}{2}\ln 2$. **B.** $m=6-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **C.** $m=5-\dfrac{1}{2}\ln 2$. **D.** $m=6+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} m &= f(-5)+f(0)+f(2) \\ &= f(-5)-f(-3)+f(2)-f(3)+\frac{1}{2}\left(f(0)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(f(0)-f\left(\frac{-1}{3}\right)\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{-1}{3}\right)\right)+f(-3)+f(3) \\ &= \int_{-3}^{-5} f'(x)\mathrm{d}x+\int_{3}^{2} f'(x)\mathrm{d}x \\ &+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{0} f'(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}}^{0} f'(x)\mathrm{d}x+1+4 \\ &= 5-\frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 284. Tính tích phân $\int_0^2 \max\{x,x^3\}\,\mathrm{d}x$

A. $\frac{17}{4}$. **B.** 2. **C.** $\frac{15}{4}$. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Ta có: $y=x^3-x$ mang giá trị âm trên khoảng $(0;1)$, dương tên khoảng $(1;2)$.

Suy ra $\left\{\begin{array}{l} \max\limits_{[0;1]}\{x^3,x\}=x \\ \max\limits_{[1;2]}\{x^3,x\}=x^3 \end{array}\right.$.

Vậy $I=\int_0^2 \max\{x,x^3\}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x=\frac{17}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 285. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $a>0$. Giả sử với mọi $x\in[0;a]$ ta có $f(x)>0$ và $f(x)\cdot f(a-x)=1$. Tính $I=\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$.

A. $I=\frac{a}{3}$. **B.** $I=\frac{a}{2}$. **C.** $I=2a$. **D.** $I=a\ln(a+1)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=-\int_a^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+f(a-t)}=\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1}{f(t)}}$.

$\Rightarrow I=\int_0^a \frac{f(t)}{f(t)+1}\,\mathrm{d}t$.

Suy ra $2I=\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+f(t)}+\int_0^a \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{f(t)+1} \Leftrightarrow 2I=\int_0^a \mathrm{d}t=a \Leftrightarrow I=\frac{a}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 286. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1, \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x)\,\mathrm{d}x = 13$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 7$. **D.** $I = 9$.

✍ Lời giải.

Gọi $F(X)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

$$\begin{cases} \int\limits_1^{\frac{1}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \\ \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x)\,\mathrm{d}x = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = 1 \\ F(1) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 26 \end{cases} \Rightarrow F(1) - F(0) = 27.$$

Vậy $I = \int\limits_0^1 x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\left(x^3\right)\mathrm{d}\left(x^3\right) = \frac{1}{3}[F(1) - F(0)] = 9$.

Chọn đáp án D □

Câu 287. Cho các số thực a, b khác 0. Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bx\mathrm{e}^x$, $(x \neq -1)$. Biết $f'(0) = -22$, $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $a + b$.

A. 19. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{a}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 bx\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 bx\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{3a}{8} + \int\limits_0^1 bx\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$. Khi đó

$$\int\limits_0^1 bx\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = bx\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 b\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = b \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3a}{8} + b = 5. \quad (1)$$

Mà $f'(x) = -\frac{3a}{(x+1)^4} + b\mathrm{e}^x + bx\mathrm{e}^x \Rightarrow f'(0) = -3a + b = -22$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $a = 8$, $b = 2 \Rightarrow a + b = 10$.

Chọn đáp án D □

Câu 288. Tích phân $\int\limits_2^7 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$ bằng $a\ln 2 - b\ln 5$. Giá trị của $2a + b$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

✍ Lời giải.

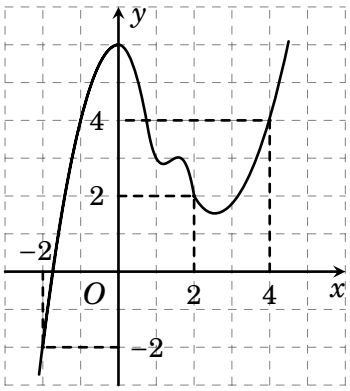
$$\int\limits_2^7 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int\limits_2^7 \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_2^7 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5.$$

Do đó $a=\dfrac{1}{2}$ và $b=-\dfrac{1}{2}$. Vậy $2a+b=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 289.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Khi đó giá trị của biểu thức $S=\displaystyle\int_0^4 f'(x-2)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\,\mathrm{d}x$ bằng



A. $S=-2$. **B.** $S=10$. **C.** $S=2$. **D.** $S=6$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_0^4 f'(x-2)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\,\mathrm{d}x=f(x-2)\Big|_0^4+f(x+2)\Big|_0^2=f(2)-f(-2)+f(4)-f(2)=2-(-2)+4-2=6.$$

Chọn đáp án D □

Câu 290. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;\mathrm{e}]$, biết $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=1$, $f(\mathrm{e})=1$. Tính $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=\mathrm{e}$. **C.** $I=2\mathrm{e}$. **D.** $I=0$.

✍ **Lời giải.**

Xét tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$.

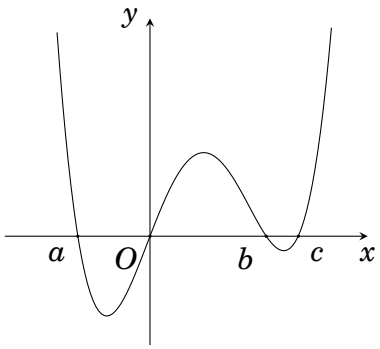
Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ v=f(x).\end{cases}$

Bởi vậy $I=f(x)\cdot\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=f(\mathrm{e})-1=1-1=0.$

Chọn đáp án D □

Câu 291.

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Biết phương trình $f'(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt a, 0, b, c với $a<0<b<c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $f(b)>f(a)>f(c)$. **B.** $f(c)>f(b)>f(a)$.

C. $f(b)>f(c)>f(a)$. **D.** $f(c)>f(a)>f(b)$.

✍ **Lời giải.**

Từ hình vẽ ta thấy $f'(x)<0$ khi $x\in(b;c)$, $f'(x)>0$ khi $x>c$ nên $f(b)>f(c)$.

Ta có $\int\limits_a^0 [-f'(x)]\,\mathrm{d}x < \int\limits_0^b f'(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c [-f'(x)]\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_a^0 [-f'(x)]\,\mathrm{d}x < \int\limits_0^c f'(x)\,\mathrm{d}x$

Suy ra $[-f'(x)]\big|_a^0 < f(x)|_0^c \Leftrightarrow -f(0)+f(a) < f(c)-f(0) \Leftrightarrow f(a) < f(c)$.

Vậy $f(b) > f(c) > f(a)$.

Chọn đáp án C □

Câu 292. Biết $I = \int\limits_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a+b+c$.

A. $S = 6$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = -2$. **D.** $S = 0$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = \int\limits_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \int\limits_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int\limits_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x||_3^4 - \ln|x+1||_3^4 \\ &= \ln 4 - \ln 3 - \ln 5 + \ln 4 = 4\ln 2 - \ln 3 - \ln 5. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 4$, $b = c = -1$ nên $S = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 293. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{1}{x^3+x^5}$, $f(1) = a$ và $f(-2) = b$. Tính $f(-1)+f(2)$.

A. $f(-1)+f(2) = -a-b$. **B.** $f(-1)+f(2) = a-b$.

C. $f(-1)+f(2) = a+b$. **D.** $f(-1)+f(2) = b-a$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(-x) = \dfrac{1}{(-x)^3+(-x)^5} = -\dfrac{1}{x^3+x^5} = -f'(x)$ nên $f'(x)$ là hàm lẻ.

Do đó $\int\limits_{-2}^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $f(-1)-f(-2) = -f(2)+f(1) \Rightarrow f(-1)+f(2) = f(-2)+f(1) = a+b$.

Chọn đáp án C □

Câu 294. Biết $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2+6x+4}{(x^2+1)(2x+1)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\ln b + \dfrac{c\pi}{d}$ với $a,b,c,d \in \mathbb{N}^*, b < 5$, phân số $\dfrac{c}{d}$ tối giản. Tính $P = a^2+b^2+c^2+d^2$.

A. $P = 42$. **B.** $P = 36$. **C.** $P = 38$. **D.** $P = 40$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2+6x+4}{(x^2+1)(2x+1)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \dfrac{3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

Tính $I_1 = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln 3$.

Tính $I_2 = 3\int\limits_0^1 \dfrac{3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $x = \tan t \Rightarrow \mathrm{d}x = (1+\tan^2 t)\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}$.

Khi đó $I_2 = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t = \dfrac{3\pi}{4}$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+6x+4}{(x^2+1)(2x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{3\pi}{4}$. Do đó $a=2, b=c=3, d=4$.

Vậy $P = a^2+b^2+c^2+d^2 = 38$.

Chọn đáp án C □

Câu 295. Cho hai tích phân sau $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$, hãy chỉ ra khẳng định đúng

A. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

B. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

D. Không so sánh được.

✍ **Lời giải.**

Xét tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ suy ra $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Khi $x = 0$ suy ra $t = \dfrac{\pi}{2}$; khi $x = \dfrac{\pi}{2}$ suy ra $t = 0$.

Do đó $I = -\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$.

Vi giá trị tích phân không phụ thuộc vào biến lấy tích phân nên $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

Hay $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 296. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |2x+1| + |x-2|$ biết $F(1) = \dfrac{5}{2}$. Tính $F(-1)$.

A. $-\dfrac{7}{2}$. **B.** -4. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Lập bảng xét dấu

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	‖	$-$	
$\lvert 2x+1\rvert + \lvert x-2\rvert$		$-3x+1$	0	$x+3$	

Từ bảng xét dấu ta có

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-3x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow F(1)-F(-1) = \frac{13}{2} \Leftrightarrow F(-1) = F(1) - \frac{13}{2} = \frac{5}{2} - \frac{13}{2} = -4.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 297. Biết $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 2$, tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	0

Tích phân trở thành $I = 2\int_1^0 tf(t)(-\mathrm{d}t) = 2\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 2 = 4.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 298. Giả sử $\int_1^3 \frac{1+\ln x}{(x+1)^3}dx = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $a-b-c$.

A. -2. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = 1+\ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^3}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = -\frac{1}{2(x+1)^2} \end{cases}$.

Ta có

$$I = -\frac{1}{2}(1+\ln x)\frac{1}{(x+1)^2}\Big|_1^3 + \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)^2}dx.$$

$$I = -\frac{1}{2}\left[(1+\ln 3)\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{2}\int_1^3 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x.$$

$$I = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{16} + \frac{\ln 3}{16}\right) + \frac{1}{2}\left[\ln x\Big|_1^3 - \ln(x+1)\Big|_1^3 + \frac{1}{x+1}\Big|_1^3\right].$$

$$I = \frac{15}{32}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{32}.$$

Vậy $a = -\frac{1}{32}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{15}{32}$.

$\Rightarrow a-b-c = -\frac{1}{32} + \frac{1}{2} - \frac{15}{32} = 0.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 299. Cho $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$. Đặt $t = e^x$. Khi đó

A. $I=\int\limits_0^1 \dfrac{t^2}{t+1}dt.$ **B.** $I=\int\limits_1^e \dfrac{t^2}{t+1}dt.$ **C.** $I=\int\limits_0^1 \dfrac{t}{t+1}dt.$ **D.** $I=\int\limits_1^e \dfrac{t}{t+1}dt.$

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$ hay $dx=\dfrac{dt}{t}$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=e$.

Do đó $I=\int\limits_1^e \dfrac{t^2}{t(t+1)}dt=\int\limits_1^e \dfrac{t}{t+1}\mathrm{d}t.$

Chọn đáp án D □

Câu 300. Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Đặt $h(x)=f(x)+2g(x)$. Biết rằng $\int\limits_a^b f(x)dx=8; \int\limits_a^b h(x)dx=4$. Tính $I=\int\limits_a^b g(x)dx$.

A. $I=-2$. **B.** $I=16$. **C.** $I=-16$. **D.** $I=2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} I&=\int_a^b h(x)dx=\int_a^b [f(x)+2g(x)]dx\\ \Leftrightarrow &\int_a^b h(x)dx=\int_a^b f(x)dx+2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow &4=8+2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.\\ \Rightarrow &\int_a^b g(x)dx=-2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 301. Tính tích phân $\int\limits_0^1 2^{2018x}dx$.

A. $I=\dfrac{2^{2018}-1}{2018\ln 2}$. **B.** $\dfrac{2^{2018}-1}{2018}$.

C. $I=\left(2^{2018}-1\right)\ln 2$. **D.** $I=2018\left(2^{2018}-1\right)\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

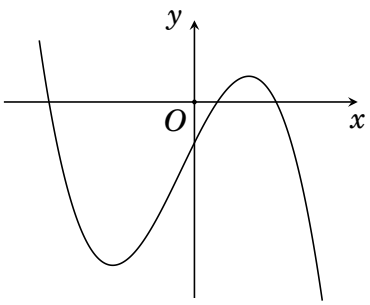
$$I=\int_0^1 2^{2018x}dx=\frac{1}{2018}\int_0^1 2^{2018x}\,\mathrm{d}(2018x).$$

$$I=\frac{2^{2018x}}{2018\cdot\ln 2}\Big|_0^1=\frac{1}{2018\ln 2}\left(2^{2018x}-1\right)=\frac{2^{2018x}-1}{2018\ln 2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 302.

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

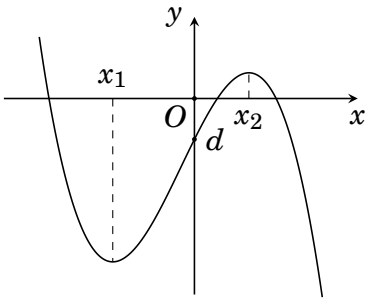


A. $a<0,b>0,c<0,d<0$. **B.** $a<0,b>0,c>0,d>0$.

C. $a<0,b<0,c>0,d<0$. **D.** $a<0,b<0,c<0,d<0$.

✍ Lời giải.

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$. Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$.



— Dạng đồ thị, suy ra hệ số $a<0$.

— $x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}<0\Rightarrow\dfrac{2b}{3a}>0\Rightarrow b<0$.

— $x_1x_2=\dfrac{c}{3a}<0\Rightarrow c>0$.

— Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $(0;d)\Rightarrow d<0$.

Chọn đáp án C □

Câu 303. Biết $\displaystyle\int_1^2\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=3$. **B.** $P=0$. **C.** $P=1$. **D.** $P=2$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$I=\int_1^2\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left(\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^2=\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{3}.$$

Do đó, $a=1$, $b=-\dfrac{4}{3}$, $c=\dfrac{1}{3}$, suy ra $P=a+b+c=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 304. Biết $\displaystyle\int_1^3\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=\dfrac{16}{3}$. **B.** $P=\dfrac{13}{2}$. **C.** $P=5$. **D.** $P=\dfrac{2}{3}$.

✍ Lời giải.

$$\int_1^3\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\int_1^3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^3=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{14}{3}.$$

Do đó $a=2$, $b=-\dfrac{4}{3}$, $c=\dfrac{14}{3}$. Vậy $P=a+b+c=\dfrac{16}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 305. Cho $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=a\sqrt{5}+b\sqrt{2},(a,b\in\mathbb{Q})$. Tính giá trị của biểu thức $A=a+b$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{12}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

✍ Lời giải.

Đặt $t=\tan x$ suy ra $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ và $\cos 2x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Khi đó

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{2+3t}}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{2+3t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\sqrt{(2+3t)^3}\Big|_0^1=\frac{5}{9}\sqrt{5}-\frac{2}{9}\sqrt{2}.$$

Hay $a=\dfrac{5}{9},b=-\dfrac{2}{9}$. Vậy $A=a+b=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 306. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{5}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{5}{5x-3}, f(0)=0, f(2)=-1$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(1)$ bằng

A. $\ln\dfrac{16}{21}-1$. **B.** 0. **C.** $4+\ln 15$. **D.** $\ln\dfrac{16}{21}+1$.

✍ **Lời giải.**

Từ giả thuyết ta suy ra hàm $f(x)$ như sau $f(x)=\begin{cases}\ln(5x-3)+C_1, \text{ khi } x>\dfrac{3}{5}\\ \ln(-5x+3)+C_2, \text{ khi } x<\dfrac{3}{5}\end{cases}$ với C_1, C_2 là các hằng số.

Ta có $\begin{cases}f(0)=0\\ f(2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln 3+C_2=0\\ \ln 7+C_1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-1-\ln 7\\ C_2=-\ln 3.\end{cases}$

Khi đó

$$f(-1)+f(1)=\ln 8+C_2+\ln 2+C_1=\ln\frac{16}{21}-1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 307. Cho biết $I=\displaystyle\int\limits_1^2\ln(9-x^2)\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2+c$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S=|a|+|b|+|c|$.

A. $S=34$. **B.** $S=13$. **C.** $S=18$. **D.** $S=26$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}\ln(9-x^2)=u\\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2x}{x^2-9}\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\\ x=v.\end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned}I&=x\ln(9-x^2)\Big|_2^1-2\int\limits_1^2\frac{x^2}{x^2-9}\mathrm{d}x\\&=2\ln 5-\ln 8-\int\limits_1^2\frac{2(x^2-9)}{x^2-9}\mathrm{d}x-18\int\limits_1^2\frac{1}{x^2-9}\mathrm{d}x\\&=2\ln 5-3\ln 2-2x\Big|_1^2-3\left(\int\limits_1^2\frac{1}{x+3}\mathrm{d}x-\int\limits_1^2\frac{1}{x-3}\mathrm{d}x\right)\\&=2\ln 5-3\ln 2-2+3\ln 5-3\ln 2\\&=5\ln 5-6\ln 2-2.\end{aligned}$$

Suy ra $a=5, b=-5, c=-2$. Khi đó $S=13$

Chọn đáp án B □

Câu 308. Cho $f(x)$ là một hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx = 2$. Tính $\int\limits_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $\int\limits_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x = 2$. **B.** $\int\limits_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x = 4$. **C.** $\int\limits_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\int\limits_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x = 1$.

✍ **Lời giải.**

Do $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow 2\int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1.$ (1)

Đặt $x = 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 2 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó (1) trở thành

$$2\int\limits_{0}^{1} f(2t)\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\int\limits_{0}^{1} f(2x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 309. Cho $\int\limits_{1}^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b}\mathrm{e}^3 + \dfrac{c}{d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $T = ad - bc$.

A. 3. **B.** 0. **C.** -9. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

$$\int\limits_{1}^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_{1}^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}\left(x^3\right) = \frac{1}{3}x^3 \ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{3}\int\limits_{1}^{\mathrm{e}} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{2}{9}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{9}.$$

Khi đó $a = 2, b = 9, c = 1, d = 9 \Rightarrow T = 2 \cdot 9 - 1 \cdot 9 = 9$.

Chọn đáp án D □

Câu 310. Tính tích phân $I = \int\limits_{1}^{5} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a\ln 3 + b\ln 5$. Giá trị của $a^2 + ab + 3b^2$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x + 1 \Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$.

Đội cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2; x = 5 \Rightarrow t = 4$.

$$I = \int\limits_{2}^{4} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{3 \cdot \dfrac{t^2-1}{3} \cdot t} = 2\int\limits_{2}^{4} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^4 = \ln\left(\frac{3}{5} \cdot 3\right) = 2\ln 3 - \ln 5.$$

Do đó, $a = 2, b = -1 \Rightarrow a^2 + ab + 3b^2 = 4 - 2 + 3 = 5$.

Chọn đáp án D □

Câu 311. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0;10]$, thỏa mãn $\int\limits_{0}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 7$ và $\int\limits_{2}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị biểu thức $P = \int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{6}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $P = 4$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 10$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^{6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $P = \int\limits_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_2^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 7 - 3 = 4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 312. Biết $\int\limits_0^{1} \dfrac{3x-1}{x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x = 3\ln\dfrac{a}{b} - \dfrac{5}{6}$, trong đó a, b là hai số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính kết quả ab.

A. -5. **B.** 7. **C.** 12. **D.** 6.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{1} \frac{3x-1}{x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x \\
=\ &\int\limits_0^{1} \frac{3x+9-10}{x^2+6x+9}\,\mathrm{d}x \\
=\ &\int\limits_0^{1} \frac{3}{x+3}\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{1} \frac{10}{(x+3)^2}\,\mathrm{d}x \\
=\ &\left(3\ln|x+3| + \frac{10}{x+3}\right)\Big|_0^1 \\
=\ &3\ln\frac{4}{3} - \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Suy ra $a = 4, b = 3$. Vậy $ab = 12$.

Chọn đáp án (C) □

.

Câu 313. Biết $\int\limits_0^{3} xf'(x)\,\mathrm{d}x = 1, f(3) = 1$. Tính $I = \int\limits_0^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -4$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = -2$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Khi đó $\int\limits_0^{3} xf'(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow xf(x)|_0^3 - \int\limits_0^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow 3f(3) - \int\limits_0^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int\limits_0^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 314. Biết rằng $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{-4\sin x + 7\cos x}{2\sin x + 3\cos x}\,\mathrm{d}x = a + 2\ln\dfrac{b}{c}$, với $a > 0; b, c \in \mathbb{N}^*; \dfrac{b}{c}$ tối giản. Hãy tính giá trị biểu thức $P = a - b + c$.

A. $\pi - 1$. **B.** $\dfrac{\pi}{2} + 1$. **C.** $\dfrac{\pi}{2} - 1$. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos x - 6\sin x}{2\sin x + 3\cos x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{2\sin x + 3\cos x}\,\mathrm{d}(2\sin x + 3\cos x) + \frac{\pi}{2} \\ &= 2\ln|2\sin x + 3\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} \\ &= 2\ln 2 - 2\ln 3 + \frac{\pi}{2} \\ &= 2\ln\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \dfrac{\pi}{2} - 2 + 3 = \dfrac{\pi}{2} + 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 315. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2017x^2 + 2018x^4}$, $f(2) = a$, $f(-6) = b$. Tính giá trị của biểu thức $f(-2) - f(6)$.

A. $2017a - 2018b$. **B.** $b - a$. **C.** $a - b$. **D.** $-a - b$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\limits_2^6 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(6) - f(2)$, $\displaystyle\int\limits_{-6}^{-2} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(2) - f(-6)$.

Xét $I = \displaystyle\int\limits_{-6}^{-2} f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = -x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Với $x = -6 \Rightarrow t = 6$, $x = -2 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $I = -\displaystyle\int\limits_6^2 \frac{\cos(-t)}{2017(-t)^2 + 2018(-t)^4}\,\mathrm{d}t = \int\limits_2^6 \frac{\cos t}{2017t^2 + 2018t^4}\,\mathrm{d}t = \int\limits_2^6 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Vậy $\displaystyle\int\limits_2^6 f'(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-6}^{-2} f'(x)\,\mathrm{d}x$ hay

$$f(6) - f(2) = f(-2) - f(-6) \Rightarrow f(-2) - f(6) = f(-6) - f(2) = b - a.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 316. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_2^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = m\ln 3 + n\ln 2 + p$, trong đó m, n, $p \in \mathbb{Q}$. Khi đó số m là

A. $\dfrac{27}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** 18. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Khi đó

$$\int\limits_2^3 x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_2^3 - \int\limits_2^3 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{x^2}{4}\Big|_2^3 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Suy ra $m = \dfrac{9}{2}$, $n = -2$ và $p = -\dfrac{5}{4}$.

Chọn đáp án B □

Câu 317. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm lẻ, liên tục trên $[-4;4]$. Biết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

✍ **Lời giải.**

— Xét $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x=2$. Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Ta có $-\int\limits_{2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t=2\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t=2$ hay $\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=2$.

— Xét $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\,\mathrm{d}x=4$. Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$. Ta có $\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{4} f(-t)\,\mathrm{d}t=4\Leftrightarrow \int\limits_{2}^{4} f(-t)\,\mathrm{d}t=8$.

Do $y=f(x)$ là hàm lẻ nên $f(-t)=-f(t)$.

Do đó $-\int\limits_{2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t=8\Leftrightarrow \int\limits_{2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t=-8$ hay $\int\limits_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=-8$.

Vậy $I=\int\limits_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=2+(-8)=-6$.

Chọn đáp án C □

Câu 318. Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn $x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2$, $\forall x\in[1;4]$, $f(1)=\frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

A. $\frac{391}{18}$. **B.** $\frac{361}{18}$. **C.** $\frac{381}{18}$. **D.** $\frac{371}{18}$.

✍ **Lời giải.**

Do $f(x)$ đồng biến trên $[1;4]$ nên $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in[1;4]$.

Suy ra $f'(x)=\sqrt{x+2xf(x)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+2f(x)}\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}=\sqrt{x}$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{1}^{4}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{4}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{4}\frac{1}{\sqrt{1+2f(x)}}\,\mathrm{d}\left(2f(x)\right)=\int\limits_{1}^{4}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{1+2f(x)}\right)\Big|_1^4=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^4\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{1+2f(4)}-\sqrt{1+2f(1)}=\frac{14}{3}\\
\Leftrightarrow\ &f(4)=\frac{391}{18}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 319. Cho các số thực a,b khác 0. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^3}+bx\mathrm{e}^x$, $x\neq -1$. Biết rằng $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$ và $f'(0)=-22$. Tính $M=2a-b$.

A. $M=10$. **B.** $M=12$. **C.** $M=14$. **D.** $M=8$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3}=\int(x+1)^{-3}\,\mathrm{d}x=\frac{(x+1)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$$

và

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x-1)\cdot\mathrm{e}^x+C.$$

Vậy

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{a}{2(x+1)^2}+b(x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\frac{3a}{8}+b=5\qquad(1).$$

Ta có $f'(x)=-\dfrac{3a}{(x+1)^4}+b(x+1)\mathrm{e}^x$, vậy $f'(0)=-3a+b=-22$ (2).

Từ (1),(2) ta có $\begin{cases}a=8\\ b=2\end{cases}$. Vậy $M=2\cdot 8-2=14$.

Chọn đáp án C □

Câu 320. Cho $I=\displaystyle\int_0^2\frac{x+\ln(2x+1)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$. Tìm khẳng định đúng.

A. $I=\left(-\dfrac{x+\ln(2x+1)}{x+1}\right)\Big|_0^2-\displaystyle\int_0^2\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)\mathrm{d}x.$

B. $I=\left(-\dfrac{x+\ln(2x+1)}{x+1}\right)\Big|_0^2-\displaystyle\int_0^2\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(2x+1)(x+1)}\right)\mathrm{d}x.$

C. $I=\left(-\dfrac{x+\ln(2x+1)}{x+1}\right)\Big|_0^2+\displaystyle\int_0^2\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(2x+1)(x+1)}\right)\mathrm{d}x.$

D. $I=\dfrac{x+\ln(2x+1)}{x+1}\Big|_0^2-\displaystyle\int_0^2\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)\mathrm{d}x.$

✍ Lời giải.

Xét tích phân $I=\displaystyle\int_0^2\frac{x+\ln(2x+1)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$. Đặt

$$\begin{cases}u=x+\ln(2x+1)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2x+3}{2x+1}\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{x+1}.\end{cases}$$

Khi đó

$$I=\left(-\frac{x+\ln(2x+1)}{x+1}\right)\Big|_0^2+\int_0^2\frac{2x+3}{(2x+1)(x+1)}\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{x+\ln(2x+1)}{x+1}\right]\Big|_0^2+\int_0^2\left[\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(2x+1)(x+1)}\right]\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 321. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x+1} \text{ khi } 0\le x\le 1\\ 2x-1 \text{ khi } 1\le x\le 3\end{cases}$. Tính $I=\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=4+\ln 4$. **B.** $I=2+\ln 2$. **C.** $I=6+\ln 2$. **D.** $I=6+\ln 4$.

✍ Lời giải.

Trước hết, vì $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1$ nên hàm số liên tục tại 1 và từ đó suy ra hàm số liên tục trên $[0;3]$.

Ta có

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x+\int_1^3 (2x-1)\mathrm{d}x=2\ln|x+1||_0^1+(x^2-x)\big|_1^3=2\ln 2+6.$$

Chọn đáp án D □

Câu 322. Giả sử các biểu thức trong dấu nguyên hàm, tích phân đều có nghĩa, trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

A. $\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$. **B.** $\displaystyle\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x,\ \forall k\in\mathbb{R}$.

C. $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)=u(x)v(x)\,|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)$. **D.** $\displaystyle\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \forall k\in\mathbb{R}$.

✍ Lời giải.

Với $k=0$ thì $\displaystyle\int 0.f(x)\mathrm{d}x=C$ (C là hằng số) trong khi $0\cdot\int f(x)\mathrm{d}x=0$.

Chọn đáp án B □

Câu 323. Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x-1)\mathrm{e}^x+2}{x\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=a+b\ln(1+c\mathrm{e})$. Tính $P=a+2b+3c$.

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=7$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int_0^1\left(\frac{(x-1)\mathrm{e}^x+2}{x\mathrm{e}^x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(2-\frac{x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\right)\mathrm{d}x=\left[2x-\ln(x\mathrm{e}^x+1)\right]\big|_0^1=2-\ln(\mathrm{e}+1).$$

Suy ra $a=2,b=-1,c=1$ và $P=2+2\cdot(-1)+3\cdot 1=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 324. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên lục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-3x^2f(x)=2x\mathrm{e}^{x^3}$ và $f(0)=1$. Tính $f(1)$.

A. e. **B.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** e^2. **D.** 2e.

✍ Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\mathrm{e}^{-x^3}f'(x)-3x^2\mathrm{e}^{-x^3}f(x)=2x\Rightarrow\left(\mathrm{e}^{-x^3}f(x)\right)'=2x.$$

Suy ra

$$1=\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\mathrm{e}^{-x^3}f(x)\right)'\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x^3}f(x)\Big|_0^1=\frac{f(1)}{\mathrm{e}}-1.$$

Vậy $f(1)=2\text{e}$.

Chọn đáp án D □

Câu 325. Biết $\int\limits_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left(a+b\sqrt{2}\right)-c$ với a, b là các số nguyên và c là số thực. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=3+\sqrt{2}$. **B.** $T=3-\sqrt{2}$. **C.** $T=1-\sqrt{2}$. **D.** $T=1+\sqrt{2}$.

✍ Lời giải.

Đặt

$$\begin{cases} u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ v=x. \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x &= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\ &= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 - \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 \\ &= \ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-1\right). \end{aligned}$$

Vậy $a=1$; $b=1$; $c=\sqrt{2}-1$ suy ra $T=a+b+c=1+\sqrt{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 326. Tích phân $I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx=\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}$ với a,b là số tự nhiên. Tính $P=\dfrac{a}{b}$.

A. $P=2$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=4$. **D.** $P=8$.

✍ Lời giải.

Đặt $t=-x$. Ta có: $dt=-dx$.

Khi đó, $I=-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{3^{-t}+1}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3^t\sin^2 t}{3^t+1}dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3^x\sin^2 x}{3^x+1}dx$

$\Rightarrow 2I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx \Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$.

Vậy $a=8$ và $b=4$. Do đó, $P=2$.

Chọn đáp án A □

Câu 327. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\displaystyle\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$. **B.** $I=8$. **C.** $I=12$. **D.** $I=-8$.

✍ Lời giải.

Tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\,\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=10 \\ \Leftrightarrow\ & 2f(1)-f(0)-I=10 \Leftrightarrow I=-8. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 328. Cho biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\cdot\mathrm{e}+c$ với a,c là các số nguyên, b là số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a-b+c$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(1-\frac{2}{x+2}\right)^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \left(1-\frac{4}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^2}\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{4}{x+2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{4}{(x+2)^2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^x\big|_0^1 - \left(\frac{4}{x+2}\mathrm{e}^x\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-4}{(x+2)^2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) + \int_0^1 \frac{4}{(x+2)^2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\mathrm{e}^x-\frac{4}{x+2}\mathrm{e}^x\right)\big|_0^1\\ &= \frac{-1}{3}\mathrm{e}+1.\end{aligned}$$

Suy ra $a=-1; b=3; c=1$.

Vậy $a-b+c=-1-3+1=-3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 329. Cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thoả mãn $4f(x)+xf'(x)=x^{2017}$, $\forall x\in[0;1]$. Tính $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{1}{2018\cdot 2021}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2018\cdot 2020}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2018\cdot 2019}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2019\cdot 2021}$.

✍ **Lời giải.**

Ta thấy

$$\begin{aligned}&4f(x)+xf'(x)=x^{2017},\forall x\in[0;1]\\ \Rightarrow\ &4x^3f(x)+x^4f'(x)=x^{2020},\forall x\in[0;1]\\ \Rightarrow\ &\left[x^4f(x)\right]'=x^{2020},\forall x\in[0;1]\\ \Rightarrow\ &\int_0^t \left[x^4f(x)\right]'\,\mathrm{d}x=\int_0^t x^{2020}\,\mathrm{d}x,\forall t\in[0;1]\\ \Rightarrow\ &t^4f(t)=\frac{t^{2021}}{2021},\forall t\in[0;1]\\ \Rightarrow\ &f(x)=\frac{x^{2017}}{2021},\forall x\in[0;1].\end{aligned}$$

Do vậy, ta được $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2017}}{2021}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2018\cdot 2021}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 330. Biết $I=\displaystyle\int\limits_{\ln 3}^{\ln 6}\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+2e^{-x}-3}=3\ln a-\ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính $P=ab$.

A. $P=15$. **B.** $P=10$. **C.** $P=20$. **D.** $P=-10$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 6}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-x}-3}=\int\limits_{\ln 3}^{\ln 6}\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+2-3\mathrm{e}^x}$$

Đặt $t=\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Suy ra

$$I=\int\limits_3^6\frac{\mathrm{d}t}{t^2-3t+2}=\int\limits_3^6\frac{\mathrm{d}t}{(t-1)(t-2)}=\int\limits_3^6\frac{\mathrm{d}t}{(t-2)}-\int\limits_3^6\frac{\mathrm{d}t}{(t-1)}=\left(\ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\right)\Big|_3^6=3\ln 2-\ln 5.$$

Do đó $a=2$ và $b=5$. Suy ra $ab=10$.

Chọn đáp án B □

Câu 331. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^b\dfrac{a-x^2}{\left(a+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$ (với a, b là các số thực dương cho trước).

A. $I=\dfrac{2b}{a^2+b^2}$. **B.** $I=\dfrac{b}{a+b^2}$. **C.** $I=\dfrac{b}{a^2+b^2}$. **D.** $I=\dfrac{b}{a^2+b}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^b\frac{a-x^2}{\left(a+x^2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{a+x^2}\Big|_0^b=\frac{b}{a+b^2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 332. Cho hàm số $y=f(x)=2\sin 3x\cdot\cos x+3x^2+2\cos x$. Tính $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f^{(6)}(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-14-\sqrt{2}$. **B.** $I=14+\sqrt{2}$. **C.** $I=-2080-\sqrt{2}$. **D.** $I=2080+\sqrt{2}$.

✍ **Lời giải.**

$f(x)=\sin 2x+\sin 4x+3x^2+2\cos x$.

$f'(x)=2\cos 2x+4\cos 4x+6x-2\sin x$.

$f''(x)=-4\sin 2x-16\sin 4x+6-2\cos x$.

$f'''(x)=-8\cos 2x-64\cos 4x+2\sin x$.

$f^{(4)}(x)=16\sin 2x+256\sin 4x+2\cos x$.

$f^{(5)}(x)=32\cos 2x+1024\cos 4x-2\sin x$.

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f^{(6)}(x)\mathrm{d}x=f^{(5)}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-1024-\sqrt{2}-(32+1024)=-2080-\sqrt{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 333. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$ và $f(1)=2$. Tính $\displaystyle\int\limits_0^1[f(x)+2]\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{13}{3}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{13}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3}.$

$\displaystyle\int_0^1 [f(x)+2]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 2x\Big|_0^1 = \frac{7}{3}+2 = \frac{13}{3}.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 334. Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1 m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 12 m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 12 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian t tính bằng giây. Hỏi rằng để 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu mét?

A. 37. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 18.

✍ **Lời giải.**

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô A bắt đầu hãm phanh. Gọi T là thời điểm ô tô A dừng cách ô tô B 1 mét. Ta có $v_A(T) = 0$ hay $T = 3$.

Vậy quãng đường ô tô A đi được trong khoảng 3 giây đó là

$$\int_0^3 (12-4t)\,\mathrm{d}t = (12t - 2t^2)\Big|_0^3 = 18 \text{ (m)}.$$

Do đó khoảng cách an toàn là $18 + 1 = 19$ (m).

Chọn đáp án (C) □

Câu 335. Biết $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b}\left(-\sqrt{2}+c\right)$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$.

A. -1. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sqrt{x+1} - \frac{2}{2\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(-\sqrt{2}+2).$

Từ đó suy ra $a = 2$, $b = 3$ và $c = 2$.

Vậy $a + b + c = 7$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 336. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 1$, $f^2(x)\cdot f'(x) = 1 + 2x + 3x^2$. Tính $f(2)$.

A. $\sqrt[3]{43}$. **B.** $\sqrt[3]{103}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** 34.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^2 f^2(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(1 + 2x + 3x^2\right)\mathrm{d}x,$

suy ra $\dfrac{f^3(x)}{3}\Big|_0^2 = (x + x^2 + x^3)\Big|_0^2 = 14 \Rightarrow \dfrac{f^3(2)}{3} - \dfrac{1}{3} = 14 \Rightarrow f(2) = \sqrt[3]{43}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 337. Biết $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-1} = a\sqrt{5}+b\sqrt{2}+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $P = a+b+c$ là

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{7}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** 2.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } a\sqrt{5}+b\sqrt{2}+c &= \int_1^2 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}-1}\\
&= \int_1^2 \frac{x^3(\sqrt{x^2}+1)\,\mathrm{d}x}{x^2+1-1}\\
&= \int_1^2 x(\sqrt{x^2+1}+1)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_1^2 (\sqrt{x^2+1})^2\,\mathrm{d}(\sqrt{x^2+1}) + \int_1^2 x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3}\Big|_1^2 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2\\
&= \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Do đó $a = \dfrac{5}{3}$, $b = -\dfrac{2}{3}$ và $c = \dfrac{3}{2}$ hay $P = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 338. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x) = \sqrt{2+2\cos 2x}$. Giá trị $I = \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ là

A. $I = 1$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = -2$.

Lời giải.

Ta có: $I = \displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{-x=t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}} f(-t)(-\mathrm{d}t) = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x$. Do đó:

$$I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4\cos^2 x}}{2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

hay $I = 2$.

Chọn đáp án C □

3.1 ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. D	5. B	6. D	7. D	8. A	9. D	10. A
11. D	12. C	13. A	14. B	15. D	16. C	17. A	18. C	19. A	20. A
21. B	22. A	23. B	24. C	25. B	26. C	27. A	28. C	29. C	30. B
31. A	32. C	33. A	34. C	35. B	36. D	37. D	38. B	39. D	40. A
41. D	42. A	43. D	44. C	45. A	46. C	47. A	48. D	49. D	50. C
51. D	52. D	53. C	54. B	55. C	56. B	57. A	58. A	59. A	60. D
61. B	62. B	63. B	64. D	65. D	66. A	67. A	68. D	69. D	70. B
71. A	72. C	73. D	74. A	75. D	76. D	77. B	78. A	79. B	80. C

81. A	82. B	83. C	84. B	85. B	86. D	87. C	88. A	89. D	90. C
91. B	92. B	93. D	94. D	95. C	96. A	97. A	98. D	99. B	100. C
101. D	102. D	103. D	104. B	105. A	106. C	107. A	108. C	109. C	110. D
111. B	112. A	113. D	114. B	115. A	116. B	117. A	118. B	119. B	120. C
121. A	122. B	123. A	124. A	125. B	126. B	127. A	128. A	129. B	130. A
131. D	132. D	133. C	134. A	135. B	136. C	137. D	138. D	139. A	140. B
141. A	142. B	143. C	144. B	145. A	146. C	147. B	148. B	149. C	150. D
151. B	152. D	153. D	154. A	155. A	156. B	157. B	158. D	159. C	160. D
161. C	162. A	163. B	164. D	165. D	166. A	167. B	168. A	169. D	170. A
171. C	172. A	173. A	174. B	175. B	176. A	177. C	178. B	179. D	180. D
181. C	182. D	183. B	184. B	185. C	186. A	187. A	188. D	189. A	190. C
191. B	192. C	193. B	194. A	195. B	196. A	197. A	198. A	199. C	200. B
201. A	202. B	203. B	204. A	205. C	206. A	207. A	208. C	209. D	210. A
211. C	212. B	213. D	214. B	215. C	216. C	217. C	218. B	219. C	220. D
221. C	222. B	223. D	224. B	225. A	226. C	227. A	228. D	229. B	230. C
231. A	232. B	233. C	234. C	235. C	236. C	237. D	238. B	239. A	240. C
241. D	242. B	243. C	244. D	245. B	246. B	247. B	248. D	249. D	250. A
251. A	252. B	253. B	254. A	255. A	256. D	257. D	258. A	259. A	260. A
261. D	262. C	263. A	264. A	265. B	266. D	267. C	268. A	269. A	270. A
271. C	272. C	273. C	274. A	275. C	276. B	277. C	278. C	279. B	280. B
281. D	282. D	283. C	284. A	285. B	286. D	287. D	288. B	289. D	290. D
291. C	292. B	293. C	294. C	295. B	296. B	297. D	298. D	299. D	300. A
301. A	302. C	303. B	304. A	305. A	306. A	307. B	308. C	309. D	310. D
311. A	312. C	313. B	314. B	315. B	316. B	317. C	318. A	319. C	320. C
321. D	322. B	323. C	324. D	325. D	326. A	327. D	328. D	329. A	330. B
331. B	332. C	333. D	334. C	335. B	336. A	337. C	338. C		

4 VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$, $f(1) = \cot 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \left[f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** $1 - \ln(\cos 1)$. **C.** 0. **D.** $1 - \cot 1$.

Lời giải.

Ta có $I = \int\limits_0^1 \left[f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x$.

Lại có

— $\int\limits_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - 1$.

— $\int\limits_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \tan x\mathrm{d}(f(x)) = f(x)\cdot\tan x|_0^1 - \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = 1 - \int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Vậy $I = 0$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[0;5]$ thỏa mãn $\int\limits_0^5 xf'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 8, f(5) = \ln 5$.

Tính $I = \int\limits_0^5 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. -33. **B.** 33. **C.** 17. **D.** -17.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^5 xf'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^5 x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{f(x)}\right) = x\mathrm{e}^{f(x)}\Big|_0^5 - \int\limits_0^5 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x$.
Kết hợp với giả thiết ta có

$$\int\limits_0^5 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{f(x)}\Big|_0^5 - \int\limits_0^5 xf'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 5\mathrm{e}^{f(5)} - 8 = 25 - 8 = 17.$$

Vậy $\int\limits_0^5 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 17$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên trục trên đoạn $[0;1]$ sao cho $f(1) = 1$ và $f(x)\cdot f(1-x) = \mathrm{e}^{x^2-x}$, $\forall x \in [0;1]$. Tính $I = \int\limits_0^1 \dfrac{(2x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -\dfrac{1}{60}$. **B.** $I = \dfrac{1}{10}$. **C.** $I = -\dfrac{1}{10}$. **D.** $I = \dfrac{1}{60}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = 2x^3 - 3x^2 \\ \mathrm{d}v = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = (6x^2-6x)\,\mathrm{d}x \\ v = \ln f(x) \end{cases}$ (do $f(x)$ nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$).

Ta có $I = (2x^3-3x^2)\ln f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (6x^2-6x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x = -\ln f(1) - \int\limits_0^1 (6x^2-6x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x$

$= \ln 1 - \int\limits_0^1 (6x^2-6x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 (6x^2-6x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t = 1-x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Ta có $I = \int\limits_1^0 [6(1-t)^2 - 6(1-t)]\ln f(1-t)\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^1 (6t^2-6t)\ln f(1-t)\,\mathrm{d}t$

$= -\int\limits_0^1 (6x^2-6x)\ln f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra, $2I = -\int\limits_0^1 (6x^2-6x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 (6x^2-6x)\ln f(1-x)\,\mathrm{d}x$

$$= -\int\limits_0^1 (6x^2-6x)[\ln f(x)+\ln f(1-x)]\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int\limits_0^1 (6x^2-6x)\ln[f(x)\cdot f(1-x)]\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 (6x^2-6x)\ln \mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -6\int\limits_0^1 (x^2-x)^2\,\mathrm{d}x = -6\int\limits_0^1 (x^4-2x^3+x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}.$$

Như vậy, $2I = -\frac{1}{5} \Rightarrow I = -\frac{1}{10}$.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x)f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2+b$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3\right]' = \left[(3x^2+x)f(x)\right]'$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x)+C$, với C là hằng số.

Mặt khác, theo giả thiết $f(0)=0$ nên $C=0$.

Khi đó $\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có

$$\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x) \Leftrightarrow f^2(x)+12x^3=(6x^2+2x)f(x)$$

$$\Leftrightarrow [f(x)-2x]\left[f(x)-6x^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2x \\ f(x)=6x^2. \end{array}\right.$$

— Với $f(x)=6x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f'(0)=0$ (loại).

— Với $f(x)=2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có

$$\int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x+1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\mathrm{e}^2-\frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a-b=1.$$

Chọn đáp án A □

Câu 5. Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục thỏa đẳng thức $2f(x)-x^2f''(x)+(x^4+4x^3)\mathrm{e}^x=0$ và $f(1)=\mathrm{e}$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}-2$. **C.** $I=\mathrm{e}+2$. **D.** $I=\mathrm{e}$.

✍ **Lời giải.**

Từ biểu thức, suy ra

$$\begin{aligned} & 2f(x)-x^2f''(x)=-(x^4+4x^3)\mathrm{e}^x, \forall x\in\mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \left(2xf(x)-x^2f'(x)\right)'=(-x^4\mathrm{e}^x)' \\ \Leftrightarrow\ & 2xf(x)-x^2f'(x)=-x^4\mathrm{e}^x+C. \quad (*) \end{aligned}$$

Thay $x=0$ và $(*)$ ta được $C=0$. Suy ra $2xf(x)-x^2f'(x)=-x^4\mathrm{e}^x$.

Nếu $x\neq 0$ thì $\dfrac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\mathrm{e}^x\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)'=\mathrm{e}^x\Rightarrow f(x)=x^2(\mathrm{e}^x+C_1)$. $(**)$

Thay $x=1$ vào $(**)$, ta được $\mathrm{e}=\mathrm{e}+C_1\Rightarrow C_1=0$.

Suy ra $f(x)=x^2\mathrm{e}^x, \forall x\neq 0$.

Do $f(x)$ liên tục nên $f(x)=x^2\mathrm{e}^x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}-2$.

Chọn đáp án B □

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=0$; $\left[f'(x)\right]^2+12xf(x)=21x^4-12x$, $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trị của $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $I=-\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Do vậy, ta thấy

$$\begin{aligned} & \int_0^1\left[\left[f'(x)\right]^2+12xf(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left(21x^4-12x\right)\mathrm{d}x \\ \Rightarrow\ & \int_0^1\left[f'(x)-3x^2\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(30x^4-12x\right)\mathrm{d}x \\ \Rightarrow\ & \int_0^1\left[f'(x)-3x^2\right]^2\mathrm{d}x=0 \\ \Rightarrow\ & f'(x)=3x^2 \\ \Rightarrow\ & f(x)=x^3-1. \end{aligned}$$

Ta được $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^3-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 7. Biết rằng với mỗi số thực x thì phương trình $t^3+tx-27=0$ có nghiệm dương duy nhất $t=t(x)$ với $t(x)$ là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$. Giá trị $I=\displaystyle\int_0^{26}[t(x)]^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 26. **B.** 48. **C.** 81. **D.** 94.

✍ **Lời giải.**

Với $x=0\Rightarrow t=3$ và $x=26\Rightarrow t=1$.
Ta thấy $t^3+tx-27=0\Leftrightarrow x=\dfrac{27}{t}-t^2$. Ta được $\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{27}{t^2}-2t\right)\mathrm{d}t$.
Khi đó, $I=\displaystyle\int_0^{26}[t(x)]^2\,\mathrm{d}x=-\int_3^1 t^2\left(\dfrac{27}{t^2}+2t\right)\mathrm{d}t=\int_1^3\left(27+2t^3\right)\mathrm{d}t=94$.
Chọn đáp án D □

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ và với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $f'(x)\cdot f(x)-\sin 2x=f'(x)\cdot\cos x-f(x)\cdot\sin x$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=\sqrt{2}-1$. **C.** $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$. **D.** $I=2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(x)\cdot f(x)-\sin 2x=[f(x)\cdot\cos x]'$
Suy ra $\displaystyle\int\left[f'(x)\cdot f(x)-\sin 2x\right]\mathrm{d}x=\int[f(x)\cos x]'\,\mathrm{d}x$
Suy ra $\dfrac{f^2(x)}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x=\cos x\cdot f(x)+C$
Lại có $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1\Rightarrow\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=C\Rightarrow C=0$
Do đó $f^2(x)+\cos 2x=2\cos x\cdot f(x)$
Suy ra $f^2(x)-2\cos x\cdot f(x)+\cos^2 x=\sin^2 x\Leftrightarrow[f(x)-\cos x]^2=\sin^2 x$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-\cos x=\sin x\\ f(x)-\cos x=-\sin x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=\cos x+\sin x\\ f(x)=\cos x-\sin x.\end{array}\right.$
Mặt khác, do $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ nên ta nhận $f(x)=\cos x-\sin x$
Vậy $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}-1$.
Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho biết hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;3]$ và có $f(3)=4$; thỏa mãn điều kiện $\left(f'(x)\right)^2=8x^2-20-4f(x)$. Tính $f(6)$.

A. $f(6)=8$. **B.** $f(6)=36$. **C.** $f(6)=31$. **D.** $f(6)=41$.

✍ **Lời giải.**

Lấy tích phân hai vế của giả thiết, cận từ 0 đến 3 ta được

$$\int_0^3\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^3\left(8x^2-20-4f(x)\right)\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow\int_0^3\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^3\left(8x^2-20\right)\mathrm{d}x-4\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow\int_0^3\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\left(\frac{8x^3}{3}-20x\right)\Big|_0^3-4\cdot I\text{ với }I=\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow\int_0^3\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=12-4\cdot I\quad(*)$$

Đối với $I=\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v=x. \end{cases}$

Suy ra $I=xf(x)\Big|_0^3-\int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x=3f(3)-\int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x=12-\int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x.$

Thay vào $(*)$, ta được

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^3 \left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x=-36+4\int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x. \\ \Leftrightarrow\ &\int\limits_0^3 \left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x-4\int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x+36=0 \\ \Leftrightarrow\ &\int\limits_0^3 \left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x-4\int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 4x^2\,\mathrm{d}x=0 \\ \Leftrightarrow\ &\int\limits_0^3 \left(f'(x)-2x\right)^2\,\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f'(x)-2x=0\Leftrightarrow f'(x)=2x\Leftrightarrow f(x)=x^2+C. \end{aligned}$$

Mà $f(3)=4\Rightarrow 4=9+C\Leftrightarrow C=-5\Rightarrow f(x)=x^2-5\Rightarrow f(6)=31.$

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\dfrac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\dfrac{4\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$

A. $I=4\ln^2 2.$ **B.** $I=8\ln^2 2.$ **C.** $I=8\ln 2.$ **D.** $I=4+2\ln^2 2.$

✍ **Lời giải.**

Lấy tích phân hai vế từ 1 đến 4, ta được

$$\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^4 \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^4 \frac{4\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^4 f\left(2\sqrt{x}-1\right)d\left(2\sqrt{x}-1\right)+4\int\limits_1^4 \ln x\,\mathrm{d}(\ln x).$$

Do $I_1=\int\limits_1^4 f\left(2\sqrt{x}-1\right)d\left(2\sqrt{x}-1\right)=\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ nên ta có

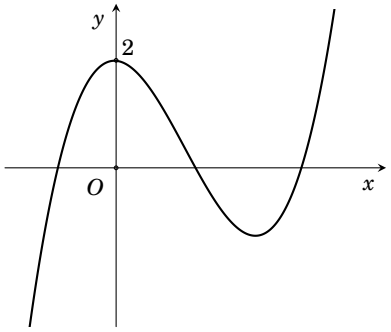
$$\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x+2\ln^2 x\Big|_1^4\Rightarrow\int\limits_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x=2\ln^2 4=8\ln^2 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên.

Biết $\int\limits_1^4 x\cdot f''(x-1)\,\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_1^2 2x\cdot f'(x^2-1)\,\mathrm{d}x=-3$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=3$ là

A. $y=x-4$. **B.** $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$. **C.** $y=2x-7$. **D.** $y=3x-10$.



✍ Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta suy ra $f(0)=2$ và $f'(0)=0$.

Xét $\int\limits_1^2 2x\cdot f'(x^2-1)\,\mathrm{d}x=-3$. Đặt $u=x^2-1\Rightarrow \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow u=0$; $x=2\Rightarrow u=3$ Ta có $\int\limits_0^3 f'(u)\,\mathrm{d}u=f(u)\Big|_0^3=-3\Leftrightarrow f(3)-f(0)=-3\Leftrightarrow f(3)=-1$.

Xét $\int\limits_1^4 x\cdot f''(x-1)\,\mathrm{d}x=7$. Đặt $u=x-1\Rightarrow x=u+1\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow u=0; x=4\Rightarrow u=3$.

$$\Rightarrow \int\limits_0^3 (u+1)f''(u)\,\mathrm{d}u=\int\limits_0^3 (u+1)df'(u)=(u+1)f'(x)\Big|_0^3-\int\limits_0^3 f'(u)\,\mathrm{d}u$$

$$=4f'(3)-f'(0)-f(u)\Big|_0^3=4f'(3)-f'(0)-f(3)+f(0)=7$$

$\Leftrightarrow 4f'(3)=7+f(3)-f(0)=4\Leftrightarrow f'(3)=1$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoàn độ $x=3$ là $y=x-4$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(2)=0$, $\int\limits_1^2 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{45}$ và $\int\limits_1^2 (x-1)f(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{30}$. Tính $I=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{1}{12}$. **B.** $I=-\dfrac{1}{15}$. **C.** $I=-\dfrac{1}{36}$. **D.** $I=\dfrac{1}{12}$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$-\frac{1}{30}=\int\limits_1^2 (x-1)f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 f(x)d\left((x-1)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x-1)^2f(x)\Big|_t^2-\frac{1}{2}\int\limits_1^2 (x-1)^2f'(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_1^2 (x-1)^2f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{15}.$$

Ta lại có $\int\limits_1^2 (x-1)^4\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}(x-1)^5\Big|_1^2=\dfrac{1}{5}$.

Từ giả thiết và các kết quả, ta có $9\int\limits_1^2 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x-6\int\limits_1^2 (x-1)^2f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 (x-1)^4\,\mathrm{d}x=0$.

Mặt khác $9\int\limits_1^2 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x - 6\int\limits_1^2 (x-1)^2 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (x-1)^4\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left[3f'(x)-(x-1)^2\right]^2\,\mathrm{d}x \geq 0.$

Do đó, xét trên đoạn $[1;2]$ ta có $3f'(x)-(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}(x-1)^2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{9}(x-1)^3 + C.$

Lại do $f(2) = 0$ nên $C + \dfrac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow C = -\dfrac{1}{9} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{9}(x-1)^3 - \dfrac{1}{9}.$

Suy ra $I = \dfrac{1}{9}\displaystyle\int\limits_1^2 \left[(x-1)^3 - 1\right]\mathrm{d}x = \dfrac{1}{36}(x-1)^4\Big|_1^2 - \dfrac{1}{9}(x-1)\Big|_1^2 = -\dfrac{1}{12}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $[2f(x)+1-x^2]f'(x) = 2x[1+f(x)]$, $\forall x \in [0;1]$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Với mọi $x \in [0;1]$, ta có

$$\begin{aligned} & [2f(x)+1-x^2]f'(x) = 2x[1+f(x)] \\ \Leftrightarrow\ & x^2 f'(x) + 2xf(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x) - 2x \\ \Leftrightarrow\ & \left[x^2 f(x) - f^2(x) - f(x)\right]' = -2x \\ \Rightarrow\ & x^2 f(x) - f^2(x) - f(x) = -x^2 + C. \end{aligned}$$

Do $f(1) = 1 \Rightarrow C = 0$. Vậy $f^2(x) - (x^2-1)f(x) - x^2 = 0.$ $(*)$

Coi $(*)$ là phương trình bậc 2 ẩn $f(x)$, dễ dàng giải được $f(x) = -1$ hoặc $f(x) = x^2$.

Do $f(x)$ không âm trên đoạn $[0;1]$ nên $f(x) = x^2$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ và với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f'(x)\cdot f(x) - \sin 2x = f'(x)\cdot\cos x - f(x)\cdot\sin x$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x.$

A. $I = 1$. **B.** $I = \sqrt{2} - 1$. **C.** $I = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$. **D.** $I = 2$.

✍ **Lời giải.**

— Nguyên hàm hai vế ta có

$$\frac{1}{2}f(x)^2 + \frac{1}{2}\cos 2x = f(x)\cos x + C. \qquad (1)$$

— Thay $x = \dfrac{\pi}{2}$ vào (1) và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ ta có $0 = C$.

— Vậy (1) là

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}f(x)^2+\frac{1}{2}\cos 2x=f(x)\cos x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}f(x)^2+\frac{1}{2}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=f(x)\cos x \\ \Leftrightarrow\ & (f(x)-\cos x)^2=\sin^2 x \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} f(x)=\sin x+\cos x \\ f(x)=-\sin x+\cos x \end{array}\right. . \end{aligned}$$

— Bởi vì $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên hàm $f(x)$ không thể cùng lúc nhận hai biểu thức tại những giá trị khác nhau, vậy $f(x)=-\sin x+\cos x$ (vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$).

— Từ đó $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2}-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=4\ln 2+\frac{15}{8}$. **B.** $I=4\ln 2-\frac{15}{8}$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $2I=2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=2,\ x=2\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Khi đó,

$$2I=2\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2\int_{2}^{\frac{1}{2}}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=2\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\mathrm{d}t=2\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x,$$

$$I+2I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{2f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\frac{f(x)}{x}+\frac{2f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right]\mathrm{d}x=3\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x=\frac{9}{2}.$$

Vậy $I=\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(2)=1$ và $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$. Giá trị của $\int\limits_1^2\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

✍ Lời giải.

Sử dụng tích phân từng phần với phép đặt $u=f(x)$, $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$ ta có

$$\frac{2}{3}=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=2-\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x.$$

Cho nên $\displaystyle\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$. Ta cũng có $\displaystyle\int\limits_0^2 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$. Để ý rằng $\displaystyle\int\limits_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$.

Từ đó dẫn đến $\displaystyle\int\limits_0^2 \left[2f'(x)-x\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=\frac{x}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{4}+C$. Vì $f(2)=1$ nên $C=0$.

Vậy $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và đồng thời $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x$. Biết rằng $f(2)=a+b\ln 3\,(a,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của a^2+2b^2 là?

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** $\dfrac{27}{4}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

✍ Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $x(x+1)\cdot f'(x)+f(x)=x^2+x$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}\cdot f'(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}f(x)=\dfrac{x}{x+1}\Leftrightarrow\left[\dfrac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]'=\dfrac{x}{x+1}$, với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

Suy ra $\dfrac{x}{x+1}\cdot f(x)=\displaystyle\int\dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\dfrac{x}{x+1}\cdot f(x)=x-\ln|x+1|+C$.

Mặt khác, ta có $f(1)=-2\ln 2$ nên $C=-1$. Do đó $\dfrac{x}{x+1}\cdot f(x)=x-\ln|x+1|-1$.

Với $x=2$ thì $\dfrac{2}{3}\cdot f(2)=1-\ln 3\Leftrightarrow f(2)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\dfrac{3}{2}$ và $b=-\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a^2+2b^2=\dfrac{27}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $xf'(x)=-[f(x)]^2\cdot\ln x$; $f(1)=1$. Giá trị $f(e)$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{e}{2}$. **C.** $\dfrac{2\mathrm{e}}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có $xf'(x)=-[f(x)]^2\cdot\ln x;\ f(1)=1\Rightarrow-\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}=\dfrac{\ln x}{x}$.

Suy ra $\displaystyle\int-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=\frac{\ln^2 x}{2}+C$

Theo giả thiết $f(1)=0+C=1\Rightarrow C=1$. Khi $x=e\Rightarrow\dfrac{1}{f(e)}=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}\Rightarrow f(e)=\dfrac{2}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Giả sử hàm f có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(1)=1$ $f(1-x)+x^2f''(x)=2x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int\limits_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

✍ Lời giải.

$f(1-x)+x^2f''(x)=2x+1 \qquad (1)$.

Trong (1), thay $x=0$ ta được $f(1)=1$.

Lấy tích phân hai vế cận từ 0 đến 1 của (1) ta có:

$$\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2f''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(2x+1)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \quad -\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}(1-x)+f'(1)-2\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x=2$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=1.$$

Đặt $I_1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Vì $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} I_1-2I=1 \\ I_1=1-I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1=1 \\ I=0. \end{cases}$$

Vậy $I=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f''(x)\cdot f^2(x)+2[f'(x)]^2\cdot f(x)=2x-3,\ \forall x\in\mathbb{R};\ f(0)=f'(0)=1$. Tính giá trị $P=f^3(2)$.

A. $P=-3$. **B.** $P=-\dfrac{11}{3}$. **C.** $P=-\dfrac{23}{3}$. **D.** $P=-6$.

✍ Lời giải.

Xét $\int f''(x)\cdot f^2(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=f^2(x) \\ \mathrm{d}v=f''(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x \\ v=f'(x) \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int f''(x)\cdot f^2(x)\mathrm{d}x &= f'(x)\cdot f^2(x)-\int 2[f'(x)]^2\cdot f(x)\mathrm{d}x \\ \Rightarrow f'(x)\cdot f^2(x) &= \int f''(x)\cdot f^2(x)\mathrm{d}x+2\int [f'(x)]^2\cdot f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int [f''(x)\cdot f^2(x)+2[f'(x)]^2\cdot f(x)]\mathrm{d}x \\ \Rightarrow f'(x)\cdot f^2(x) &= \int (2x-3)\mathrm{d}x=x^2-3x+C. \end{aligned}$$

Chọn $x=0\Rightarrow C=1\Rightarrow f'(x)\cdot f^2(x)=x^2-3x+1\Rightarrow \dfrac{1}{3}f^3(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+x+C$.

Với $x=0$ thì $C=\dfrac{1}{3}$. Vậy $f^3(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+3x+1$. Do đó $f^3(2)=-3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$, có đồ thị (C). Gọi $\Delta\colon y=dx+e$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm A có hoành độ $x=-1$. Biết Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N, $(M,N\neq A)$ có hoành độ lần lượt $x=0$; $x=2$. Cho biết $\int_0^2 (dx-e-f(x))\mathrm{d}x=\dfrac{28}{5}$. Tích phân $\int_{-1}^0 (f(x)-dx-e)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

✍ Lời giải.

Ta có $f(x)-dx-e=ax(x+1)^2(x-2)$.

Theo bài ra có $\int\limits_0^2 (dx-e-f(x))\,\mathrm{d}x=\dfrac{28}{5}\Leftrightarrow -\int\limits_0^2 ax(x+1)^2(x-2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{28}{5}\Leftrightarrow \dfrac{28}{5}a=\dfrac{28}{5}\Leftrightarrow a=1$.

Vậy $\int\limits_{-1}^0 (f(x)-dx-e)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0 x(x+1)^2(x-2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x)$. Biết rằng $f^2(2)=6+8f^2(1)$, $\int\limits_1^2 \dfrac{2x+1}{x+f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\dfrac{11}{16}$. Tính $I=\int\limits_1^2 \dfrac{f(x)+f'(x)}{x+f^2(x)}\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{21}{16}+3\ln 2$. **B.** $I=\dfrac{21}{32}+\dfrac{3}{2}\ln 2$. **C.** $I=\dfrac{21}{32}+\ln 2$. **D.** $I=\dfrac{21}{16}-\dfrac{3}{2}\ln 2$.

✍ Lời giải.

Ta có: $f^2(2)=6+8f^2(1)\Leftrightarrow 2+f^2(2)=8+8f^2(1)\Leftrightarrow \dfrac{2+f^2(2)}{1+f^2(1)}=8$.

$$I=\int\limits_1^2 \frac{f(x)+f'(x)}{x+f^2(x)}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 \frac{f^2(x)+f'(x)\cdot f(x)}{x+f^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_1^2 \frac{(f^2(x)+x)+\left(f'(x)\cdot f(x)-x\right)}{x+f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 \left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+2f'(x)\cdot f(x)-2x-1}{x+f^2(x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_1^2 \left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+2f'(x)\cdot f(x)}{x+f^2(x)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x+f^2(x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_1^2 \mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{1+2f'(x)\cdot f(x)}{x+f^2(x)}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{2x+1}{x+f^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_1^2 \mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}(x+f^2(x))}{x+f^2(x)}-\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{2x+1}{x+f^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=x\Big|_1^2+\frac{1}{2}\ln\left|x+f^2(x)\right|\Big|_1^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{16}$$

$$=(2-1)+\frac{1}{2}\left(\ln\left|2+f^2(2)\right|-\ln\left|1+f^2(1)\right|\right)-\frac{11}{32}$$

$$=\frac{21}{32}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+f^2(2)}{1+f^2(1)}\right|$$

$$=\frac{21}{32}+\frac{1}{2}\ln 8$$

$$=\frac{21}{32}+\frac{3}{2}\ln 2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x\cdot(x+1)\cdot f'(x)+f(x)=x^2+x$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\cdot\ln 3$, $(a,b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của a^2+b^2 là

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{27}{4}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có $x\cdot(x+1)\cdot f'(x)+f(x)=x^2+x\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}f'(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

Nhận thấy $\dfrac{x}{x+1}f'(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}f(x)=\left[\dfrac{x}{x+1}f(x)\right]'$.

Do đó ta được $\left[\dfrac{x}{x+1}f(x)\right]'=\dfrac{x}{x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$.

$\Rightarrow \dfrac{x}{x+1}f(x)=\displaystyle\int\dfrac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x-\ln|x+1|+C$.

Mà ta có $f(1)=-2\ln 2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cdot(-2\ln 2)=1-\ln 2+C\Leftrightarrow C=-1$.

$\Rightarrow \dfrac{x}{x+1}f(x)=x-\ln|x+1|-1$.

Thay $x=2$ vào ta được $\dfrac{2}{3}f(2)=2-\ln 3-1\Leftrightarrow f(2)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3$.

Vậy $a=\dfrac{3}{2}$ và $b=-\dfrac{3}{2}$. Suy ra $P=a^2+b^2=\dfrac{9}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018\cdot x^{2017}\cdot \mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$; $f(0)=2018$. Giá trị của $f(1)$ là

A. $f(1)=2018\cdot \mathrm{e}^{-2018}$. **B.** $f(1)=2019\cdot \mathrm{e}^{-2018}$. **C.** $f(1)=2018\cdot \mathrm{e}^{2018}$. **D.** $f(1)=2019\cdot \mathrm{e}^{2018}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
&f'(x)-2018f(x)=2018\cdot x^{2017}\cdot \mathrm{e}^{2018x}\\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{e}^{-2018x}\left[f'(x)-2018\cdot f(x)\right]=2018x^{2017}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)\right]'=2018x^{2017}\\
\Rightarrow\ &\int_0^1\left[\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int_0^1 2018x^{2017}\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\ &\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)\big|_0^1=x^{2018}\big|_0^1\\
\Rightarrow\ &\mathrm{e}^{-2018}\cdot f(1)-f(0)=1\Rightarrow f(1)=\mathrm{e}^{2018}\cdot[1+f(0)]=2019\cdot \mathrm{e}^{2018}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(-x)+2019f(x)=\mathrm{e}^x,\forall x\in[-1;1]$ (1). Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$. **B.** $I=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2020\mathrm{e}}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2019\mathrm{e}}$.

✍ **Lời giải.**

Trong tích phân I ta đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Nên $I=\displaystyle\int_1^{-1}f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int_{-1}^{1}f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Do đó $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big(f(x)+f(-x)\Big)\,\mathrm{d}x$.

Với phép đặt đó thì đẳng thức (1) trở thành $f(x)+2019f(-x)=\mathrm{e}^{-x},\forall x\in[-1;1]$ (2).

Cộng vế theo vế các đẳng thức (1) và (2) ta được $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{2020}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

Do đó $I=\dfrac{1}{4040}\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4040}\left[\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right]\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2020\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x)f(x)=1 \\ f(x)\neq 1 \end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^3 \dfrac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Từ giả thiết $\begin{cases} f(3-x)f(x)=1 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(3)=2$.

Do $f(3-x)f(x)=1$ nên $[1+f(3-x)]^2[f(x)]^2=[f(x)+1]^2$.

Khi đó ta được

$$I=\int_0^3 \frac{xf'(x)}{[1+f(x)]^2}\,\mathrm{d}x=-\int_0^3 x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+f(x)}\right)=-\frac{x}{1+f(x)}\bigg|_0^3+\int_0^3 \frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x=-1+J.$$

Tính $J=\displaystyle\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=3-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=3$ và $x=3\Rightarrow t=0$.

Khi đó, $J=-\displaystyle\int_3^0 \dfrac{1}{1+f(3-t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(3-t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(3-x)}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2J=\displaystyle\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x+\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(3-x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^3 \dfrac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x+\int_0^3 \dfrac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^3 \mathrm{d}x=3$.

Do đó $J=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $I=-1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn $\max\limits_{[1;3]} f(x)=2$, $\min\limits_{[1;3]} f(x)=\dfrac{1}{3}$ và biểu thức $S=\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_1^3 \dfrac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tích phân $\displaystyle\int_0^8 \dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{6}$. **C.** $\dfrac{14}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{12}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x\Rightarrow 2\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Với $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=8\Rightarrow t=3$.

Vậy $I=\displaystyle\int_0^8 \dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=2\int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ta có $\dfrac{1}{3}\le f(x)\le 2,\ \forall x\in[1;3]\Rightarrow \dfrac{\left(f(x)-\dfrac{1}{3}\right)(f(x)-2)}{f(x)}\le 0,\ \forall x\in[1;3]$.

Khi đó,

$$\int_1^3 \frac{\left(f(x)-\frac{1}{3}\right)(f(x)-2)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \le 0 \Leftrightarrow \int_1^3 \left(f(x)+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{f(x)}-\frac{7}{3}\right)\mathrm{d}x \le 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\cdot\int_1^3 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x-\frac{14}{3}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 \frac{1}{f(x)} \le 7-\frac{3}{2}\cdot\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Nhân cả 2 vế của (1) cho $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ ta được

$$\int_1^3 \frac{1}{f(x)}\cdot\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \le 7\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{3}{2}\cdot\left(\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=-\frac{3}{2}\left(\frac{7}{3}-\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\frac{49}{6}.$$

Như vậy $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_1^3 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{49}{6}$ khi $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{3}$.

Vậy $I=2\cdot\frac{7}{3}=\frac{14}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;\pi]$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Biết $\int_0^{\pi}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos x\cdot f(x)=\frac{\pi}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** $\frac{\pi}{2}+1$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Tính $G=\int_0^{\pi}\cos x\cdot f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\sin x.\end{cases}$

Ta có $G=\sin x.f\,(x)|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\cdot f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi}\sin x\cdot f'(x)\mathrm{d}x.$

Kết hợp giả thiết $G=\frac{\pi}{2}$, ta có $\int_0^{\pi}\sin x\cdot f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_0^{\pi}2\sin x\cdot f'(x)\mathrm{d}x=-\pi.$ (1)

Lại có $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$ (2)

Kết hợp giả thiết $\int_0^{\pi}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$ (3)

Từ (1),(2),(3) ta được

$$\int_0^{\pi}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x+2\int_0^{\pi}f'(x)\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=-\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi}\left\{[f'(x)]^2+2f'(x)\sin x+\sin^2 x\right\}\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi}[f'(x)+\sin x]^2\,\mathrm{d}x=0$$

$$\Rightarrow f'(x)+\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=-\sin x$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=-\sin x$$

$$\Rightarrow f(x)=\cos x+C.$$

Lại có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=\cos x+1.$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\mathrm{d}x=1+\frac{\pi}{2}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa mãn

$$[f'(x)]^2+4f(x)=8x^2+16x-8 \text{ với mọi } x\in[-1;1], f(1)=0.$$

Giá trị của $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Với mọi $x\in[-1;1]$ ta có $[f'(x)]^2+4f(x)=8x^2+16x-8$ nên

$$\int_{-1}^{1}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{1}2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(8x^2+16x-8)\,\mathrm{d}x. \quad (1)$$

Xét $I=\int_{-1}^{1}2f(x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=2\,\mathrm{d}x\end{cases}$, khi đó $\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x\\ v=2x+2.\end{cases}$

Do đó $I=\int_{-1}^{1}2f(x)\,\mathrm{d}x=(2x+2)f(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(2x+2)f'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}(2x+2)f'(x)\,\mathrm{d}x.$

Từ (1) suy ra

$$\int_{-1}^{1}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x-2\int_{-1}^{1}(2x+2)f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}(2x+2)^2\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(12x^2+24x-4)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x-2\int_{-1}^{1}(2x+2)f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}(2x+2)^2\,\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left[f'(x)-(2x+2)\right]^2\,\mathrm{d}x=0$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=2x+2,\forall x\in[-1;1]$$
$$\Leftrightarrow f(x)=x^2+2x+C,\forall x\in[-1;1].$$

Vì $f(1)=0$ nên $C=-3$.

Do đó $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2+2x-3)\,\mathrm{d}x=-\frac{5}{3}$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hàm số chẵn $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=8$. Giá trị của $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 16.

✍ **Lời giải.**

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x.$$

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; $x=-1\Rightarrow t=1$ và $x=0\Rightarrow t=0$. Khi đó

$$\int_{-1}^{0}\frac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=\int_1^0\frac{f(-2t)}{1+5^{-t}}(-\mathrm{d}t)=\int_0^1\frac{5^x f(-2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{5^x f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x.$$

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, ta có

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{5^x\cdot f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[F(2)-F(0)]=8.$$

$\Rightarrow F(2)-F(0)=16$. Do đó $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=F(2)-F(0)=16$.

Chọn đáp án D □

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=2\ln 2$ và $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+3x+2$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tổng a^2+b^2 bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Theo bài ra ta có

$$\frac{x}{x+1}f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x+2}{x+1}\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}f(x)\right]'=\frac{x+2}{x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}.$$

Từ đó dẫn tới $\displaystyle\frac{x}{x+1}f(x)=\int\frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x+\ln|x+1|+C$.

Mặt khác ta có $f(1)=2\ln 2$ nên $C=-1$ hay $\displaystyle\frac{x}{x+1}f(x)=x+\ln|x+1|-1$.

Khi đó $\displaystyle\frac{2}{3}f(2)=2+\ln 3-1\Rightarrow f(2)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\ln 2$ nên $a^2+b^2=\frac{9}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Cho đa thức bậc bốn $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2$. Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f'(x)}{2x}=2$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Cách 1. Ta có $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f'(x)}{2x}=2$, suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=1$.

Đặt $g(x)=\dfrac{f'(x)}{2x}\Rightarrow f'(x)=2x\cdot g(x)$, với $g(0)=1$, suy ra $g(x)=mx^2+nx+1,(m\neq 0)$.

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=0\\&g(x)=0.\end{aligned}\right.$

Do $x=1$, $x=2$ là cực trị nên $\begin{cases}g(1)=0\\g(2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\n=-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

Nên $f'(x)=2x\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+1\right)=x^3-3x^2+2x$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Cách 2. Giả sử $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,a\neq 0$, suy ra $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Từ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f'(x)}{2x}=2$, suy ra $f'(x)=0$ phải có một nghiệm $x=0$, suy ra $d=0$.

Thay $d=0$ vào $f'(x)$ ta được $f'(x)=x(4ax^2+3bx+2c)$.

Mà $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2$ nên $4ax^2+3bx+2c=0$ phải có hai nghiệm là $x=1$ và $x=2$.

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases}-\dfrac{3b}{4a}=3\\\dfrac{2c}{4a}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4a\\c=4a.\end{cases}$

Suy ra $f'(x)=4ax(x^2-3x+2)$. Nên, ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1(4ax^3-12ax^2+8ax)\,\mathrm{d}x\\&=\left(ax^4-4ax^3+4ax^2\right)\Big|_0^1\\&=a-4a+4a=a.\end{aligned}$$

Theo giả thiết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f'(x)}{2x}=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+4a(x^2-3x+2)}{2}=2\Leftrightarrow\dfrac{2+8a}{2}=2\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+3f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=(x-1)\cos x$, $(\forall x\in\mathbb{R})$. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi-4}{2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{\pi-4}{8}$. **D.** $\dfrac{4-\pi}{4}$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-1} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\,\mathrm{d}x = (x-1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = (x-1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-4}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x)+3f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi-4}{2}.$$

Vậy $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi-4}{8}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+2f(\pi-x)=(x+1)\sin x$, $(\forall x\in\mathbb{R})$. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1+\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{2+\pi}{3}$. **C.** $2+\pi$. **D.** 0.

✍ Lời giải.

Thay $x=\pi-x$ ta được

$f(\pi-x)+2f(x)=(\pi-x+1)\sin(\pi-x) \Leftrightarrow 2f(x)+f(\pi-x)=(\pi-x+1)\sin x.$

Ta có $\begin{cases} f(x)+2f(\pi-x)=(\pi-x+1)\sin x \\ 2f(x)+f(\pi-x)=(x+1)\sin x \end{cases}$

$\Rightarrow 3f(x)=(2\pi-3x+1)\sin x$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{2\pi-3x+1}{3}\sin x$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2\pi+1}{3}x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2+\pi}{3}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(\pi-x)=(x-1)\cos x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $-\dfrac{2}{5}$. **C.** $-\dfrac{3}{5}$. **D.** $-\dfrac{4}{5}$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int_0^{\pi} f(\pi-x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(\pi-x)\frac{\mathrm{d}(\pi-x)}{-1} = -\int_{\pi}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Khi đó từ $2f(x)+3f(\pi-x)=(x-1)\cos x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ lấy tích phân hai vế ta được

$$\int_0^{\pi}(2f(x)+3f(\pi-x))\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(x-1)\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^{\pi}f(\pi-x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(x-1)\cos x\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow\quad \int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_0^{\pi}(x-1)\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Ta có

$$\int_0^{\pi}(x-1)\cos x\,\mathrm{d}x=(x-1)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=(x-1)\sin x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_0^{\pi}=-2.$$

Vậy $\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{2}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\dfrac{4}{9}$ và $\left[f'(x)\right]^2=(x+1)\cdot f(x)$. Tính $f(8)$.

A. $f(8)=49$. **B.** $f(8)=256$. **C.** $f(8)=\dfrac{1}{16}$. **D.** $f(8)=\dfrac{49}{64}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\forall x\in(0;+\infty)$ thì $y=f(x)>0$; $x+1>0$.

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(0;+\infty)$.

Do đó $\left[f'(x)\right]^2=(x+1)f(x)\Leftrightarrow f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{x+1}$.

Suy ra $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\sqrt{f(x)}=\frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$.

Vì $f(3)=\dfrac{4}{9}$ nên $C=-2$. Suy ra $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\right)^2$. Vậy $f(8)=49$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{4}{35}$. **B.** $-\dfrac{71}{20}$. **C.** $-\dfrac{79}{20}$. **D.** $-\dfrac{4}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$f'(x)=x^3[f(x)]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3\Rightarrow\int_1^2\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int_1^2x^3\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2=\frac{15}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\frac{15}{4}\Leftrightarrow f(1)=-\frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(2)=0$, $\displaystyle\int_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{45}$ và $\displaystyle\int_1^2(x-1)f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{30}$. Tính $I=\displaystyle\int_1^2f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{1}{12}$. **B.** $I=-\dfrac{1}{15}$. **C.** $I=-\dfrac{1}{36}$. **D.** $I=\dfrac{1}{12}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$-\frac{1}{30}=\int_1^2(x-1)f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)d\left((x-1)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x-1)^2f\,(x)|_{\mathrm{t}}^2-\frac{1}{2}\int_1^2(x-1)^2f'(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_1^2(x-1)^2f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{15}.$$

Ta lại có $\displaystyle\int_1^2(x-1)^4\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\,(x-1)^5\big|_1^2=\frac{1}{5}$.

Từ giả thiết và các kết quả, ta có $\displaystyle 9\int_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-6\int_1^2(x-1)^2f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)^4\,\mathrm{d}x=0$.

Mặt khác $\displaystyle 9\int_1^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-6\int_1^2(x-1)^2f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)^4\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left[3f'(x)-(x-1)^2\right]^2\mathrm{d}x\geq 0$.

Do đó, xét trên đoạn $[1;2]$ ta có $3f'(x)-(x-1)^2=0\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3}(x-1)^2\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{9}(x-1)^3+C$.

Lại do $f(2)=0$ nên $C+\dfrac{1}{9}=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{9}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{9}(x-1)^3-\dfrac{1}{9}$.

Suy ra $\displaystyle I=\frac{1}{9}\int_1^2\left[(x-1)^3-1\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{36}\,(x-1)^4\big|_1^2-\frac{1}{9}\,(x-1)|_1^2=-\frac{1}{12}$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Kết quả $\displaystyle I=\int_{-1}^1\frac{f(x)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=8$. **B.** $I=4$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=-1$; $x=-1\Rightarrow t=1$, ta có

$$I=e\int_{-1}^1\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=-\int_1^{-1}\frac{f(-t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^1\frac{f(-x)}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{e}^xf(-x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(x)=f(-x),\forall x\in[-1;1]\Rightarrow I=\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\mathrm{e}^xf(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Từ đó suy ra

$$I+I=\int_{-1}^1\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^1\frac{\mathrm{e}^xf(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{(\mathrm{e}^x+1)f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1f(x)\,\mathrm{d}x=4.$$

Vậy $I=2$.

Chọn đáp án C □

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1;0]$. Biết $f'(x)=\left(3x^2+2x\right)\mathrm{e}^{-f(x)}$, $\forall x\in[-1;0]$. Tính giá trị biểu thức $A=f(0)-f(-1)$.

A. $A=-1$. **B.** $A=1$. **C.** $A=0$. **D.** $A=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

✍ Lời giải.

Vì $f'(x)=\left(3x^2+2x\right)\mathrm{e}^{-f(x)}$ nên $f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}=3x^2+2x$

$$\Rightarrow \int f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+2x\right)\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)}=x^3+x^2+C.$$

Ta có $\mathrm{e}^{f(0)}=C$ và $\mathrm{e}^{f(-1)}=C$.

Khi đó $\mathrm{e}^{f(0)}=\mathrm{e}^{f(-1)}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(0)-f(-1)}=1\Leftrightarrow f(0)-f(-1)=0$.

Vậy $A=0$.

Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)>0$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$, đồng thời thỏa mãn $f'(0)=0$; $f(0)=1$ và $f''(x)\cdot f(x)+\left[\dfrac{f(x)}{\cos x}\right]^2=\left[f'(x)\right]^2$. Tính $T=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

A. $T=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $T=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $T=\dfrac{3}{4}$. **D.** $T=\dfrac{1}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$f''(x)\cdot f(x)+\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]^2=\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow \frac{f''(x)\cdot f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{f^2(x)}=-\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=-\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=-\tan x+C.$$

Vì $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=1 \end{cases}$ nên $C=0$.

Do đó $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\tan x$. Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$\Rightarrow \ln f\left(\frac{\pi}{3}\right)-\ln f(0)=\ln\frac{1}{2}-\ln 1\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 42. Giả sử hàm f có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(1)=1$ $f(1-x)+x^2f''(x)=2x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

✍ Lời giải.

$f(1-x)+x^2f''(x)=2x+1$ (1).

Trong (1), thay $x=0$ ta được $f(1)=1$.

Lấy tích phân hai vế cận từ 0 đến 1 của (1) ta có:

$$\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 f''(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x+1)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \quad -\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}(1-x) + f'(1) - 2\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 x f'(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Đặt $I_1 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. Vì $\int_0^1 x f'(x)\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} I_1 - 2I = 1 \\ I_1 = 1 - I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 = 1 \\ I = 0. \end{cases}$$

Vậy $I = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 43. Biết $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin x\cos x + 1}{\cos^2 x + \sin x\cos x} dx = a\frac{\pi}{12} + b\ln 2 + c\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin x\cos x + 1}{\cos^2 x + \sin x\cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \tan x + (1+\tan^2 x)}{1+\tan x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1 + \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{12} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x} dx$$

Đặt $t = 1 + \tan x$ ta được $dt = \left(1+\tan^2 x\right)dx$, đổi cận $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2$, $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1+\sqrt{3}$. Ta được,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x} dx = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{t} dt = \ln t\Big|_2^{1+\sqrt{3}} = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln 2$$

Từ đây ta suy ra $a\frac{\pi}{12} + b\ln 2 + c\ln\left(1+\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{12} - \ln 2 + \ln\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Do đó $a = 1, b = -1, c = 1$ suy ra $abc = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=5$ và $f(x)+f(3-x)=x^2-3x+2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{39}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{15}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Thay $x=0$ ta được $f(0)+f(3)=2\Rightarrow f(3)=2-f(0)=2-5=-3$.

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 f(3-x)\,\mathrm{d}x$.

Từ hệ thức đề ra $\int\limits_0^3 (f(x)+f(3-x))\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 (x^2-3x+2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta lại có

$$\int\limits_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^3-\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=3f(3)-\frac{3}{4}=-\frac{39}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=1$ và $f(x)+f(a-x)=x^2-ax+2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương a để tích phân $\int\limits_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x$ không vượt quá $\dfrac{16}{3}$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

✍ **Lời giải.**

Thay $x=0$ ta được $f(0)+f(a)=2\Rightarrow f(a)=2-f(0)=2-1=1$

Ta có: $\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$

Từ hệ thức đề ra: $\int\limits_0^a (f(x)+f(a-x))\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^a (x^2-ax+2)\,\mathrm{d}x=2a-\dfrac{a^3}{6}\Rightarrow\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=a-\dfrac{a^3}{12}$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta lại có

$$\int\limits_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^a-\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=af(a)-\left(a-\frac{a^3}{12}\right)=\frac{a^3}{12}.$$

Yêu cầu bài toán là $\dfrac{a^3}{12}\le\dfrac{16}{3}\Leftrightarrow a^3\le 64\Leftrightarrow a\le 4$.

Vậy có 4 số nguyên dương a thỏa bài toán

Chọn đáp án C □

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Cách 1. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^3}{3}. \end{cases}$

Khi đó: $\dfrac{1}{3} = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}f(x)\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3}f'(x)\,\mathrm{d}x.$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = -1.$ (1)

Mặt khác, do $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 7$ nên

$$\int_0^1 \left[[f'(x)]^2 + 14x^3 f'(x) + 49x^6\right]\mathrm{d}x = 0 = 7 - 14 + 7 = 0.$$

Hay $\displaystyle\int_0^1 \left(f'(x) + 7x^3\right)^2\,\mathrm{d}x = 0.$ (2)

Suy ra $f'(x) + 7x^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{7}{4}x^4 + C.$

Mà $f(1) = 0$ nên $C = \dfrac{7}{4}$, suy ra $f(x) = \dfrac{7}{4}(1 - x^4)$. Khi đó $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{5}.$

Lưu ý. Có thể giải thích vì sao từ (2) suy ra $f'(x) + 7x^3 = 0,\ \forall x \in [0;1]$ như sau: Theo giả thiết ta có hàm số $y = \left(f'(x) + 7x^3\right)^2$ liên tục và không âm trên đoạn $[0;1]$ (do đó, đồ thị hàm số này là một đường nét liền trên đoạn $[0;1]$ và không có điểm nào nằm bên dưới trục Ox). Tích phân ở (2) có giá trị bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \left(f'(x) + 7x^3\right)^2$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$, đường thẳng $x = 1$. Mà theo (2) thì hình phẳng này có diện tích bằng 0 nên $f'(x) + 7x^3 = 0,\ \forall x \in [0;1]$.

Cách 2 (tiếp nối từ (1)). Ta có bất đẳng thức Bunnyakovski đối với tích phân: Nếu hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta luôn có

$$\left[\int_a^b f(x).g(x)dx\right]^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right).\int_a^b g^2(x)dx.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $g(x) = kf(x),\ \forall x \in [a;b]$. Trở lại bài toán. Từ (1), ta có:

$$1 = \left(\int_0^1 x^3 f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 x^6 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}\cdot 7 = 1.$$

Như vậy dấu "=" xảy ra, tức là $f'(x) = kx^3$. Thay trở lại vào (1), ta được:

$$k\int_0^1 x^6 dx = -1 \Rightarrow \frac{k}{7} = -1 \Rightarrow k = -7.$$

Vậy $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\dfrac{7}{4}x^4 + C \overset{\text{do } f(1)=0}{\Rightarrow} f(x) = -\dfrac{7}{4}x^4 + \dfrac{7}{4}.$

Do đó $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{5}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{4}{35}$. **B.** $-\dfrac{71}{20}$. **C.** $-\dfrac{79}{20}$. **D.** $-\dfrac{4}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$f'(x)=x^3[f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2=\frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1)=-\frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\displaystyle\int_1^2 f(-2x)\,\mathrm{d}x=4$.

Tính $I=\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

✍ **Lời giải.**

Xét tích phân $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x=2$.

Đặt $-x=t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=-2$ thì $t=2$; khi $x=0$ thì $t=0$

Do đó: $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x=-\int_2^{\circ} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=2 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$.

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x)=-f(2x)$.

Do đó $\displaystyle\int_1^2 f(-2x)\,\mathrm{d}x=-\int_1^2 f(2x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_1^2 f(2x)\,\mathrm{d}x=-4$.

Xét $\displaystyle\int_1^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $2x=t \Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$; khi $x=2$ thì $t=4$ do đó $\displaystyle\int_1^2 f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t=-4$.

$\Rightarrow \displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t=-8 \Rightarrow \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=-8$.

Vậy: $I=\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=2-8=-6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và $f(-x)+2018f(x)=\mathrm{e}^x$, $\forall x\in[-1;1]$. Tính $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$. **B.** $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2019\mathrm{e}}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2018\mathrm{e}}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Xét $J=\int\limits_{-1}^{1} f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x$, khi đó $J=\int\limits_{1}^{-1} f(t)\mathrm{d}(-t)=\int\limits_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t=I$.

Mà $f(-x)+2018f(x)=\mathrm{e}^x,\ \forall x\in[-1;1]\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1}(f(-x)+2018f(x))\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(-x)\,\mathrm{d}x+2018\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^{1}\Rightarrow 2019I=\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\Rightarrow I=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2019\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(2)=0$, $\int\limits_{1}^{2}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{45}$ và $\int\limits_{1}^{2}(x-1)f(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{30}$. Tính $I=\int\limits_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{1}{12}$. **B.** $I=-\dfrac{1}{15}$. **C.** $I=-\dfrac{1}{36}$. **D.** $I=\dfrac{1}{12}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $-\dfrac{1}{30}=\int\limits_{1}^{2}(x-1)f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}((x-1)^2)$

$=\dfrac{1}{2}(x-1)^2f(x)\Big|_1^2-\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{2}(x-1)^2f'(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_{1}^{2}(x-1)^2f'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{15}$.

Ta lại có $\int\limits_{1}^{2}(x-1)^4\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}(x-1)^5\Big|_1^2=\dfrac{1}{5}$.

Từ giả thiết và các kết quả ta có $9\int\limits_{1}^{2}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-6\int\limits_{1}^{2}(x-1)^2f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(x-1)^4\,\mathrm{d}x=0$.

Mặt khác:

$$9\int\limits_{1}^{2}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-6\int\limits_{1}^{2}(x-1)^2f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}(x-1)^4\,\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}[3f'(x)-(x-1)^2]^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

Do vậy xét trên đoạn $[1;2]$, ta có

$$3f'(x)-(x-1)^2=0\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{9}(x-1)^3+C.$$

Lại do $f(2)=0$ nên $C+\dfrac{1}{9}=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{9}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{9}(x-1)^3-\dfrac{1}{9}$.

Suy ra $I=\dfrac{1}{9}\int\limits_{1}^{2}\left[(x-1)^3-1==\right]\mathrm{d}x=\dfrac{1}{36}(x-1)^4\Big|_1^2-\dfrac{1}{9}(x-1)\Big|_1^2=-\dfrac{1}{12}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$; $[f'(x)]^2+12xf(x)=21x^4-12x$, $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trị của $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{-3}{4}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Lấy tích phân hai vế của đẳng thức đã cho trên đoạn $[0;1]$ ta được

$$\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x+12\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(21x^4-12x)\,\mathrm{d}x=-\frac{9}{5}.$$

Xét tích phân $J=\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$. Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$J=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\left(\frac{x^2}{2}\right)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}d[f(x)]=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ta có

$$\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-6\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x+\frac{9}{5}=0\quad\Leftrightarrow\quad\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x-2\int_0^1 f'(x)\cdot3x^2\,\mathrm{d}x+\int_0^1 9x^4\,\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\quad\int_0^1[f'(x)-3x^2]^2\,\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f'(x)=3x^2,\ \forall x\in[0;1].$$

Do đó $f(x)=x^3-1\Rightarrow\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(x^3-1)\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 52. Biết rằng với mỗi số thực x thì phương trình $t^3+tx-27=0$ có nghiệm dương duy nhất $t=t(x)$ với $t(x)$ là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$. Giá trị của $I=\displaystyle\int_0^{26}[t(x)]^2\,\mathrm{d}x$ là

A. 26. **B.** 48. **C.** 81. **D.** 94.

✍ **Lời giải.**

Với $\forall x\in[0;+\infty)$ ta có $t(x)>0$ thỏa mãn $[t(x)]^3+t(x)\cdot x-27=0$ (1).

Suy ra $\begin{cases}[t(0)]^3-27=0\\ [t(26)]^3+26\cdot t(26)-27=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t(0)=3\\ t(26)=1.\end{cases}$

Mặt khác ta có (1) $\Leftrightarrow x=\dfrac{27}{t(x)}-[t(x)]^2$ (2).

Do $t=t(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ nên với $x_0>0$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0}t=\lim\limits_{x\to x_0}t(x)=t(x_0)=t_0>0$.

Xét

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{t(x)-t(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\frac{t(x)-t(x_0)}{\left[\dfrac{27}{t(x)}-[t(x)]^2\right]-\left[\dfrac{27}{t(x_0)}-[t(x_0)]^2\right]}=\lim_{t\to t_0}\frac{t-t_0}{\left[\dfrac{27}{t}-t^2\right]-\left[\dfrac{27}{t_0}-t_0^2\right]}\\&=\lim_{t\to t_0}\frac{t-t_0}{27\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t_0}\right)-(t^2-t_0^2)}=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{\dfrac{-27}{t\cdot t_0}-(t+t_0)}\\&=-\frac{1}{\dfrac{27}{t_0^2}+2t_0}=-\frac{t_0^2}{2t_0^3+27}\text{ (hữu hạn).}\end{aligned}$$

Suy ra $t=t(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$.

Ta lại có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{t(x)-t(0)}{x-0}=\lim\limits_{t\to 3^\pm}\dfrac{t-3}{\dfrac{27}{t}-t^2}=\lim\limits_{t\to 3^\pm}\dfrac{(t-3)t}{27-t^3}=\lim\limits_{t\to 3^\pm}\dfrac{-t}{t^2+3t+9}=-\dfrac{1}{9}$.

Suy ra $t=t(x)$ có đạo hàm phải tại 0.

Tóm lại $t=t(x)$ có đạo hàm trên$[0;+\infty)$ là $t'(x)$.

Đạo hàm hai vế của (2) ta được

$1=-\dfrac{27\cdot t'(x)}{[t(x)]^2}-2t(x)\cdot t'(x)\Leftrightarrow [t(x)]^2=-27t'(x)-2[t(x)]^3t'(x)$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{26}[t(x)]^2\,\mathrm{d}x=-27\int\limits_0^{26}t'(x)-2\int\limits_0^{26}[t(x)]^3t'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -27\cdot t(x)\Big|_0^{26}-\frac{1}{2}[t(x)]^4\Big|_0^{26}=-27[t(26)-t(0)]-\frac{1}{2}\left\{[t(26)]^4-[t(0)]^4\right\}=94. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x=2$, $\int\limits_0^2 f(4x)\,\mathrm{d}x=6$. Tính $\int\limits_{-2}^2 f\left(3|x|+2\right)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{20}{3}$. **B.** 20. **C.** $\dfrac{40}{3}$. **D.** 40.

✍ **Lời giải.**

Xét $A=\int\limits_0^1 f(2x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=2.\end{cases}$

Suy ra: $A=\int\limits_0^2 f(t)\dfrac{\mathrm{d}t}{2}\Leftrightarrow 2=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t=4\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=4.$

Xét $B=\int\limits_0^2 f(4x)\,\mathrm{d}x$. Đặt $m=4x\Rightarrow \mathrm{d}m=4\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow m=0\\ x=2\Rightarrow m=8.\end{cases}$

Suy ra: $B=\int\limits_0^8 f(m)\dfrac{\mathrm{d}m}{4}\Leftrightarrow 6=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^8 f(m)\,\mathrm{d}m\Leftrightarrow\int\limits_0^8 f(m)\,\mathrm{d}m=24\Rightarrow\int\limits_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x=24.$

Ta có:

$$\begin{aligned} I=\int\limits_{-2}^2 f\left(3|x|+2\right)\mathrm{d}x &= \int\limits_{-2}^0 f\left(3|x|+2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f\left(3|x|+2\right)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-2}^0 f(-3x+2)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f(3x+2)\,\mathrm{d}x=I_1+I_2. \end{aligned}$$

Đặt $h=-3x+2\Rightarrow \mathrm{d}h=-3\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-2\Rightarrow h=8\\ x=0\Rightarrow h=2.\end{cases}$

Suy ra: $I_1=\int\limits_8^2 f(h)\dfrac{\mathrm{d}h}{-3}=\dfrac{1}{3}\int\limits_2^8 f(h)\,\mathrm{d}h=\dfrac{1}{3}\int\limits_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x.$

Ta có: $\int\limits_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

Nên $I_1 = \dfrac{1}{3}(24-4) = \dfrac{20}{3}$.

Đặt $k = 3x+2 \Rightarrow \mathrm{d}k = 3\,\mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow k = 2 \\ x = 2 \Rightarrow k = 8. \end{cases}$

Suy ra: $I_2 = \displaystyle\int_2^8 f(k)\frac{\mathrm{d}k}{3} = \frac{1}{3}\int_2^8 f(k)\,\mathrm{d}k = \frac{1}{3}\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{20}{3}$.

Vậy ta có $I = \dfrac{20}{3} + \dfrac{20}{3} = \dfrac{40}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 54. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(x)+f(1-x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x \in [0;1]$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{3}{4}+2\ln 2$. **B.** $3+\ln 2$. **C.** $\dfrac{3}{4}+\ln 2$. **D.** $\dfrac{3}{2}+2\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Theo giả thiết, ta có: $f(x)+f(1-x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x \in [0;1]$ và $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên

$$\int_0^1 [f(x)+f(1-x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+2x+3}{x+1}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(x+1)^2+2}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad (1).$$

Đặt $1-x = t$ thì $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, với $x = 0 \Rightarrow t = 1$, với $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Do đó:

$$\int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad (2).$$

Lại có $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)^2+2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x+1+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}+2\ln 2 \quad (3).$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}+2\ln 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}+\ln 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa mãn $f(1) = 0$, $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2+16x-8$ với mọi x thuộc $[-1;1]$. Giá trị của $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có:

$$(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2+16x-8 \Rightarrow \int_{-1}^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^1 2f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 (8x^2+16x-8)\,\mathrm{d}x \quad (1).$$

Xét $I = \displaystyle\int_{-1}^1 2f(x)\,\mathrm{d}x$, Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = 2\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = 2x+2. \end{cases}$

Do đó $I = \displaystyle\int_{-1}^1 2f(x)\,\mathrm{d}x = (2x+2)f(x)\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (2x+2)f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^1 (2x+2)f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Từ (1): $\int\limits_{-1}^{1}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x+2\int\limits_{-1}^{1}2f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}(8x^2+16x-8)\,\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_{-1}^{1}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x-2\int\limits_{-1}^{1}(2x+2)f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}(2x+2)^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}(12x^2+24x-4)\,\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\int\limits_{-1}^{1}(f'(x)-(2x+2))^2\,\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow f'(x)=2x+2\Rightarrow f(x)=x^2+2x+C.$

Vì $f(1)=0$ nên $C=-3$.

Suy ra $\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}(x^2+2x-3)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{5}{3}.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 56. Cho hàm số chẵn $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=8$. Giá trị của $\int\limits_{0}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 16.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\dfrac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x=-t\Rightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; $x=-1\Rightarrow t=1$; $x=0\Rightarrow t=0$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{0}\dfrac{f(-2t)}{1+5^{-t}}(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{0}^{1}.\dfrac{5^xf(-2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{5^xf(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x.$

Do đó $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{5^x\cdot f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\dfrac{f(2x)}{1+5^x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}f(2x)\,\mathrm{d}x.$

$=\dfrac{1}{2}[F(2)-F(0)]=8\Rightarrow F(2)-F(0)=16\Rightarrow\int\limits_{0}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x=F(2)-F(0)=16.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 57. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

A. $I=4\ln 2+\dfrac{15}{8}.$ **B.** $I=4\ln 2-\dfrac{15}{8}.$ **C.** $I=\dfrac{5}{2}.$ **D.** $I=\dfrac{3}{2}.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $2I=2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

Đổi cận $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=2$, $x=2\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}.$

Khi đó,

$$2I = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

$$I + 2I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{2f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left[\frac{f(x)}{x} + \frac{2f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right]\mathrm{d}x = 3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \mathrm{d}x = \frac{9}{2}.$$

Vậy $I = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \displaystyle\int\limits_0^1 (2f(x)+3x)f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 (4f(x)+x)\sqrt{xf(x)}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{-1}{24}$. **B.** $\dfrac{-1}{8}$. **C.** $\dfrac{-1}{12}$. **D.** $\dfrac{-1}{6}$.

✍ **Lời giải.**

$$M = \int\limits_0^1 (2f(x)+3x)f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 (4f(x)+x)\sqrt{xf(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_0^1 \left[(2f(x)+3x)f(x) - (4f(x)+x)\sqrt{xf(x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^1 \left[16f^2(x) - 32f(x)\cdot\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{x} + 24xf(x) - 8f(x)x\sqrt{x} + x^2 - x^2\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^1 \left[\left(2\sqrt{f(x)} - \sqrt{x}\right)^4 - x^2\right]\mathrm{d}x \geqslant -\frac{1}{8}\int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{24}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 59. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_1^2 (x+1)^2 \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = m\mathrm{e}^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó m, n, p, q là các số nguyên dương và $\dfrac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T = m+n+p+q$.

A. $T = 11$. **B.** $T = 10$. **C.** $T = 7$. **D.** $T = 8$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $I = \displaystyle\int\limits_1^2 (x+1)^2 \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = K + H$, trong đó

$$K = \int\limits_1^2 2x\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x, H = \int\limits_1^2 (x^2+1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Xét $K = \displaystyle\int\limits_1^2 2x\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}$ và $\mathrm{d}v = 2x\,\mathrm{d}x$, ta có $\mathrm{d}u = \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$ và $v = x^2$.

Từ đó ta có $K = x^2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 (x^2+1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$, suy ra $K + \int\limits_1^2 (x^2+1)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2$ nên

$$I = x^2\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 = 4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - 1.$$

Từ đó suy ra $m=4, n=1, p=3, q=2$ và $T=10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x) + \left[f'(x)\right]^2 = 0$. Biết $f(0)=1$, $f(2)=e^4$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. $e^{\frac{3}{4}}$. **B.** e. **C.** $e^{\frac{3}{2}}$. **D.** e^2.

✍ **Lời giải.**

Từ giả thiết ta suy ra $f(x)>0,\ \forall x\in[0;2]$.

$[f(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x) + \left[f'(x)\right]^2 = 0 \Rightarrow [f(x)]^2 = f(x)\cdot f''(x) - \left[f'(x)\right]^2 \overset{f\neq 0}{\Rightarrow} \dfrac{f''\cdot f - (f')^2}{f^2} = 1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{f'}{f}\right)' = 1 \Rightarrow \dfrac{f'}{f} = x + C_1 \Rightarrow (\ln|f|)' = x + C_1 \Rightarrow \ln|f| = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$

$\Rightarrow |f(x)| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2} \overset{f>0}{\Rightarrow} f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2}$.

Vì $f(0)=1,\ f(2)=e^4$ nên $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 + x}$.

Vậy $f(1) = e^{\frac{3}{2}}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 61. Biết $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x\sin x + \cos x)^2} = -\frac{a\pi}{b + c\pi\sqrt{3}} + d\sqrt{3}$, với a, b, c, d là các số nguyên dương. Tính $P = a+b+c+d$.

A. $P=7$. **B.** $P=10$. **C.** $P=8$. **D.** $P=9$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x\sin x + \cos x)^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2}\cdot\frac{x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \dfrac{x}{\cos x}$ và $\mathrm{d}v = \dfrac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2}\mathrm{d}x$. Khi đó $\mathrm{d}u = \dfrac{x\sin x + \cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ và $v = -\dfrac{1}{x\sin x + \cos x}$.

Do đó

$$I = -\frac{x}{\cos x(x\sin x + \cos x)}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = -\frac{4\pi}{3+\pi\sqrt{3}} + \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{4\pi}{3+\pi\sqrt{3}} + \sqrt{3}.$$

Suy ra $a=4$, $b=3$, $c=1$, $d=1$. Vì vậy $P = 4+3+1+1 = 9$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 62. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = \dfrac{3}{5}$, $\displaystyle\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \frac{4}{9}$ và $\displaystyle\int\limits_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{37}{180}$. Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 [f(x)-1]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{2}{30}$. **B.** $-\dfrac{1}{10}$. **C.** $-\dfrac{2}{30}$. **D.** $\dfrac{1}{10}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = x^3\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$.

Suy ra $\dfrac{37}{180} = \displaystyle\int_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - 4\cdot\dfrac{37}{180} = -\dfrac{2}{9}$.

Khi đó

$$\int_0^1 \left[f'(x) + 2x^4\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x + 4\int_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x + 4\int_0^1 x^8\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9} + 4\cdot\left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{4}{9} = 0. \quad (1)$$

Mặt khác $\left[f'(x) + 2x^4\right]^2 \geq 0$ xét trên đoạn $[0;1]$.

Nên $\displaystyle\int_0^1 \left[f'(x) + 2x^4\right]^2 \mathrm{d}x \geq 0$ (2) .

Từ (1) và (2) đẳng thức xảy ra khi $f'(x) + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2x^4$.

Từ đó $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(-2x^4\right)\mathrm{d}x = -\frac{2x^5}{5} + C$.

Mà $f(1) = \dfrac{3}{5} \Rightarrow C = 1$ nên $f(x) = -\dfrac{2x^5}{5} + 1$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 [f(x) - 1]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{2x^5}{5} + 1\right)\mathrm{d}x = -\frac{2}{30}$.

LỜI BÌNH : Ngoài cách giải trên ta còn có cách giải nhanh sau

— Trước hết tính được $\displaystyle\int_0^1 x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{9} \Leftrightarrow \int_0^1 \left[-2x^4 f'(x)\right]\mathrm{d}x = \frac{4}{9}$ (1).

— Theo giả thiết $\displaystyle\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{9}$ (2).

— Từ (1) và (2) ta có thể chọn $-2x^4 f'(x) = \left[f'(x)\right]^2 \Rightarrow f'(x) = -2x^4$.

Chọn đáp án C □

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = 2e^x - 4$ và $f(0) = f'(0) = 2$. Giá trị của $f^2(1)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(6;7)$. **B**. $(10;11)$. **C**. $(8;9)$. **D**. $(9;10)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $[f'(x)]^2 + f(x)\cdot f''(x) = 2e^x - 4 \Leftrightarrow [f(x)\cdot f'(x)]' = (2e^x - 4x)' \Leftrightarrow f(x)\cdot f'(x) = 2e^x - 4x + C$.

Thay $x=0 \Rightarrow f(0).f'(0)=2e^0-4\cdot 0+C \Rightarrow C=2$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad f(x)\cdot f'(x)=2e^x-4x+2\\
&\Rightarrow \quad \int_0^1 f(x)\cdot f'(x)\,dx=\int_0^1 (2e^x-4x+2)\,dx\\
&\Rightarrow \quad \int_0^1 f(x)\,d(f(x))=(2e^x-2x^2+2x)\Big|_0^1\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1=2e-1\\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}[f^2(1)-f^2(0)]=2e-2\\
&\Rightarrow \quad [f^2(1)-f^2(0)]=4e-4\\
&\Rightarrow \quad f^2(1)=4e\in(10;11).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 64. Tìm $f(9)$, biết rằng $\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = x\cos(\pi x)$.

A. $f(9)=-\frac{1}{6}$. **B.** $f(9)=\frac{1}{6}$. **C.** $f(9)=-\frac{1}{9}$. **D.** $f(9)=\frac{1}{9}$.

✍ Lời giải.

Gọi F là một nguyên hàm của f.

Ta có $\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = F\left(x^2\right)-F(0) \Leftrightarrow x\cos(\pi x)=F\left(x^2\right)-F(0)$.

Đạo hàm hai vế, ta được $\cos(\pi x)-x\pi\sin(\pi x)=2xf\left(x^2\right)$.

Thay $x=3$ có $2\cdot 3\cdot f\left(3^2\right)=-3\pi\sin(3\pi)+\cos(3\pi)$.

Suy ra $f(9)=-\frac{1}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x)\cdot f''(x)=2\mathrm{e}^x-4$ và $f(0)=f'(0)=2$. Giá trị của $f^2(1)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(6;7)$. **B.** $(10;11)$. **C.** $(8;9)$. **D.** $(9;10)$.

✍ Lời giải.

Ta có $\left[f'(x)\right]^2+f(x)\cdot f''(x)=2\mathrm{e}^x-4 \Leftrightarrow \left[f(x)\cdot f'(x)\right]'=(2\mathrm{e}^x-4x)'$.

$\Leftrightarrow f(x)\cdot f'(x)=2\mathrm{e}^x-4x+C$

Thay $x=0 \Rightarrow f(0).f'(0)=2\mathrm{e}^0-4.0+C \Rightarrow C=2$.

$\Rightarrow f(x)\cdot f'(x)=2\mathrm{e}^x-4x+2 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\cdot f'(x)\cdot \mathrm{d}x=\int_0^1 \left(2\mathrm{e}^x-4x+2\right)\mathrm{d}x$ (đổi kí hiệu tích phân cuối).

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}(f(x))=\left(2\mathrm{e}^x-2x^2+2x\right)\Big|_0^1 \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1=2\mathrm{e}-1$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[f^2(1)-f^2(0)\right]=2\mathrm{e}-2 \Rightarrow f^2(1)-f^2(0)=4\mathrm{e}-4 \Rightarrow f^2(1)=4\mathrm{e}\in(10;11)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\left(\frac{x^4-1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$.

A. $\mathrm{e}^2+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$. **B.** $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^2$. **C.** $\mathrm{e}^2-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$. **D.** $\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}} \\ \mathrm{d}v=\dfrac{x^4-1}{x^3}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{2}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right) \end{cases}$.

Suy ra $I=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

$=\mathrm{e}^2-\dfrac{17}{8}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$

Tính $J=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$

Đặt $u=x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow \mathrm{d}u=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$

Đổi cận $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u=\dfrac{5}{2}$, $x=1\Rightarrow u=2$.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int_{\frac{5}{2}}^{2}(u^2-2)\mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{\frac{5}{2}}^{2}(u^2-2)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^u\right)=\frac{1}{2}(u^2-2)\mathrm{e}^u\Big|_{\frac{5}{2}}^{2}-\int_{\frac{5}{2}}^{2}u\mathrm{e}^u\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^2-\frac{17}{8}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}-\int_{\frac{5}{2}}^{2}u\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^u\right)=\mathrm{e}^2-\frac{17}{8}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}-\left(u\mathrm{e}^u\right)\Big|_{\frac{5}{2}}^{2}+\int_{\frac{5}{2}}^{2}\mathrm{e}^u\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^2-\frac{17}{8}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}-2\mathrm{e}^2+\frac{5}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}+\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}=-\frac{5}{8}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Vậy $I=\mathrm{e}^2-\dfrac{17}{8}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}+\dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}=\mathrm{e}^2-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$.

Chọn đáp án C □

Câu 67. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)^2}=-\frac{a\pi}{b+c\pi\sqrt{3}}+d\sqrt{3}$, với a, b, c, d là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c+d$.

A. $P=9$. **B.** $P=10$. **C.** $P=8$. **D.** $P=7$.

✍ **Lời giải.**

Đặt

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)^2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2\left(\tan^2 x+1\right)}{(x\tan x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2\tan^2 x+2x\tan x+1-2x\tan x-2+1+x^2}{(x\tan x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[1-\frac{2}{x\tan x+1}+\frac{x^2+1}{(x\tan x+1)^2}\right]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Xét tích phân $K=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2+1}{(x\tan x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{(x\tan x+1)^2}\mathrm{d}x \Rightarrow v=\dfrac{\tan x}{x\tan x+1} \end{cases}$

$$K=\left(x^2+1\right)\cdot\frac{\tan x}{x\tan x+1}\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2x\tan x}{x\tan x+1}\mathrm{d}x=\left(x^2+1\right)\cdot\frac{\tan x}{x\tan x+1}\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(2-\frac{2}{x\tan x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow I=-\frac{\pi}{3}+\left(\frac{\pi^2}{9}+1\right)\frac{\sqrt{3}}{\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{3}+1}=\frac{-\pi+3\sqrt{3}}{\pi\sqrt{3}+3}=-\frac{4\pi}{3+\pi\sqrt{3}}+\sqrt{3}.$$

$\Rightarrow a=4;b=3;c=1;d=1\Rightarrow P=9.$

+ Cách khác:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

Đặt: $\begin{cases} u=\dfrac{x}{\cos x} \\ \mathrm{d}v=\dfrac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\ v=-\dfrac{1}{x\sin x+\cos x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{1}{(x\sin x+\cos x)}\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}+\tan x\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{4\pi}{3+\pi\sqrt{3}}+\sqrt{3}$$

Vậy $a=4;b=3;c=1;d=1$ suy ra $P=9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=\dfrac{3}{5}$, $\displaystyle\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{4}{9}$ và $\displaystyle\int_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{37}{180}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1\left[f(x)-1\right]\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{15}$. **B.** $-\dfrac{1}{15}$. **C.** $-\dfrac{1}{10}$. **D.** $\dfrac{1}{10}$.

✍ **Lời giải.**

Xét $I=\int\limits_0^1 x^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{37}{180}$. Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=x^3\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^4}{4}. \end{cases}$

$I=\dfrac{x^4}{4}f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 \dfrac{x^4}{4}f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \dfrac{3}{20}-\int\limits_0^1 \dfrac{x^4}{4}f'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{37}{180} \Leftrightarrow 2\int\limits_0^1 2x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{8}{9}.$

Lại có: $\int\limits_0^1 \left(2x^4\right)^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{4}{9}.$

Suy ra:

$$\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x+2\int\limits_0^1 2x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 \left(2x^4\right)^2\,\mathrm{d}x=\frac{4}{9}=\frac{4}{9}-\frac{8}{9}+\frac{4}{9}=0$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x)+2x^4\right]^2\,\mathrm{d}x=0 \Rightarrow f'(x)=-2x^4 \Rightarrow f(x)=-\frac{2x^5}{5}+C.$$

Mà $f(1)=\dfrac{3}{5} \Rightarrow C=1$ nên $f(x)=-\dfrac{2x^5}{5}+1.$

Vậy $\int\limits_0^1 \left[f(x)-1\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \left(-\dfrac{2x^5}{5}\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{15}.$

Chọn đáp án B □

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+f(-x)=\cos^2 x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{\pi}{2}+2\ln 2.$ **B.** $I=\dfrac{\pi}{4}.$ **C.** $I=\dfrac{3\pi}{4}.$ **D.** $I=\dfrac{\pi}{4}+\ln 2.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $x=-t \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t.$

Khi $x=0$ thì $t=0$, khi $x=-\dfrac{\pi}{2}$ thì $t=\dfrac{\pi}{2}.$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x &&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x &&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(-x)+f(x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x &&= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} &&= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$, $f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\dfrac{1}{4+x^2}$. Tính $I=\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\pi}{20}$. **B.** $\dfrac{\pi}{10}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{10}$.

✍ **Lời giải.**

Xét $I=\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=-u \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

— Với $x=-2 \Rightarrow u=2$.

— Với $x=2 \Rightarrow u=-2$.

Suy ra $I=-\displaystyle\int_{2}^{-2} f(-u)\,\mathrm{d}u=\int_{-2}^{2} f(-u)\,\mathrm{d}u=\int_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Từ đó ta có $5I=2I+3I=2\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+3\int_{-2}^{2} f(-x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\dfrac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

Tính $J=\displaystyle\int_{-2}^{2}\dfrac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=2\tan v \Rightarrow \mathrm{d}x=2(1+\tan^2 v)\,\mathrm{d}v$.

Đổi cận

— Với $x=-2 \Rightarrow v=-\dfrac{\pi}{4}$.

— Với $x=2 \Rightarrow v=\dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra $J=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{4\tan^2 v+4}\cdot 2(1+\tan^2 v)\,\mathrm{d}v=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}v=\dfrac{\pi}{4}$.

Từ đó suy ra $I=\dfrac{\pi}{20}$.

Chọn đáp án A □

Câu 71. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Kết quả $\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Xét tích phân $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=-x$, suy ra $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

— Với $x=-1 \Rightarrow u=1$.

— Với $x=1 \Rightarrow u=-1$.

Suy ra $I=-\int\limits_{1}^{-1}\dfrac{f(-u)}{1+\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{e}^{u}f(u)}{1+\mathrm{e}^{u}}\,\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{e}^{x}f(x)}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x.$

Từ đó suy ra $I+I=\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{f(x)}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{e}^{x}f(x)}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=4\Rightarrow I=2.$

Chọn đáp án C □

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int\limits_{0}^{1}xf(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}$ và $\int\limits_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^{2}\mathrm{d}x=\dfrac{9}{5}$. Tính tích phân $\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{3}{4}$. **B.** $I=\dfrac{1}{5}$. **C.** $I=\dfrac{1}{4}$. **D.** $I=\dfrac{4}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{0}^{1}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}\dfrac{x^{2}}{2}=\dfrac{x^{2}}{2}f(x)\Big|_{0}^{1}-\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^{2}}{2}f'(x)\,\mathrm{d}x.$

Từ đó suy ra $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^{2}}{2}f'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{2}}{2}f(x)\Big|_{0}^{1}-\int\limits_{0}^{1}xf(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{10}.$ (1)

Ta có $\int\limits_{0}^{1}x^{4}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{5}}{5}\Big|_{0}^{1}=\dfrac{1}{5}.$ (2)

Do $\int\limits_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^{2}\mathrm{d}x=\dfrac{9}{5}$ nên kết hợp với (1) và (2), ta có

$$\int\limits_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^{2}\mathrm{d}x-2\int\limits_{0}^{1}3x^{2}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}9x^{4}\,\mathrm{d}x=\frac{9}{5}-\frac{18}{5}+\frac{9}{5}=0. \quad (3)$$

Từ (3) $\Rightarrow\int\limits_{0}^{1}\left[f'(x)-3x^{2}\right]^{2}\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)=3x^{2}\Rightarrow f(x)=x^{3}+C.$

Theo giả thiết $f(1)=1\Rightarrow 1+C=1\Rightarrow C=0.$

Do đó ta có $\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}x^{3}\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^{4}}{4}\Big|_{0}^{1}=\dfrac{1}{4}.$

Vậy $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}.$

• **Lưu ý:** *Việc tính ra* $\int\limits_{0}^{1}x^{2}f'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{5}$ *thì chỉ sau một bước tích phân từng phần từ giả thiết* $\int\limits_{0}^{1}xf(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}.$

Tuy nhiên tại sao lại xuất hiện $3x^{2}$ *thì ta cần chú ý bài toán tìm* k *thỏa mãn*

$$\int\limits_{0}^{1}\left[f'(x)-kx^{2}\right]^{2}\mathrm{d}x=0. \quad (4)$$

Ta có (4) *tương đương với*

$$\int\limits_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^{2}\mathrm{d}x-2\int\limits_{0}^{1}kx^{2}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}k^{2}x^{4}\,\mathrm{d}x=\frac{9}{5}-\frac{6k}{5}+\frac{k^{2}}{5}=0.$$

Chọn đáp án C □

Câu 73. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2xf(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=\mathrm{e}^2$. **B.** $f(1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. **D.** $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x)+2xf(x)=\mathrm{e}^{-x^2} &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2}f'(x)+2x\mathrm{e}^{x^2}f(x)=1\\ &\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{x^2}f(x)\right]'=1\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2}f(x)=x+C\\ &\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x+C}{\mathrm{e}^{x^2}} \end{aligned}$$

Mặt khác $f(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

Vậy $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 74. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;4\pi)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F'(x)=f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ trên $(0;4\pi)$.

$F'(x)=f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=0\Leftrightarrow x\cos x-\sin x=0$ trên $(0;4\pi)$.

Đặt $g(x)=x\cos x-\sin x$ trên $(0;4\pi)$.

Ta có $g'(x)=-x\cdot\sin x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi\\ x=2\pi\\ x=3\pi\end{array}\right.$ trên $(0;4\pi)$.

Từ đó có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	0		π	x_1	2π	x_2	3π	x_3	4π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	$-\pi$	↗	0	↘	-3π	↗	0	↗	4π

Vì $g(x)$ liên tục và đồng biến trên $[\pi;2\pi]$ và $g(\pi)\cdot g(2\pi)<0$ nên tồn tại duy nhất $x_1\in(\pi;2\pi)$ sao cho $g(x_1)=0$.

Tương tự ta có $g(x_2)=0$, $g(x_3)=0$ với $x_2\in(2\pi;3\pi)$, $x_3\in(3\pi;4\pi)$.

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta thấy $g(x)<0$ khi $x\in(0;x_1)$ và $x\in(x_2;x_3)$; $g(x)>0$ khi $x\in(x_1;x_2)$ và $x\in(x_3;4\pi)$.

Dấu của $f(x)$ là dấu của $g(x)$ trên $(0;4\pi)$. Do đó ta có bảng biến thiên của $F(x)$:

x	0		x_1		x_2		x_3		4π
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	

Vậy hàm số $y = F(x)$ có 3 cực trị.

Chọn đáp án C □

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{9}{2}$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\cdot\cos\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{6}{\pi}$. **B.** $\dfrac{2}{\pi}$. **C.** $\dfrac{4}{\pi}$. **D.** $\dfrac{1}{\pi}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u = \cos\dfrac{\pi x}{2} \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\dfrac{\pi}{2}\cdot\sin\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$.

Áp dụng tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1 f'(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \cos\frac{\pi x}{2}\cdot f(x)\Big|_0^1 + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

Suy ra $\begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{9}{2} \\ \displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\sin\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2} \\ \displaystyle\int\limits_0^1 \sin^2\dfrac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Sử dụng đồng nhất thức ta có

$$\int\limits_0^1 \left[f(x) - k\cdot\sin\frac{\pi x}{2}\right]^2\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2k\int\limits_0^1 f(x)\sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x + k^2\int\limits_0^1 f'(x)\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{2} - 2k\cdot\frac{3}{2} + k^2\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 - 6k + 9 = 0 \Leftrightarrow k = 3.$$

Vậy $\int\limits_0^1 \left[f(x) - 3\sin\dfrac{\pi x}{2}\right]\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x) = 3\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

Ta được

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{6}{\pi}\cdot\int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{6}{\pi}\cdot\left(-\cos\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{6}{\pi}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 76. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $f(3)=21$, $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Tính tích phân $I = \int_0^1 xf'(3x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=9$. **B.** $I=12$. **C.** $I=15$. **D.** $I=6$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $3x = t \Rightarrow 3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{3}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=3 \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^3 \frac{t}{3}f'(t)\frac{dt}{3} = \frac{1}{9}\int_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x.$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{9}\left[xf(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{9}(3\cdot 21 - 9) = 6.$$

Chọn đáp án D □

Câu 77. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x = 10$ và $f(0)=3$.

Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=-7$. **B.** $I=13$. **C.** $I=7$. **D.** $I=-13$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases} u=\cos^2 x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -\sin 2x\,\mathrm{d}x \\ v = f(x). \end{cases}$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$10 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot\cos^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\,\mathrm{d}x = -3 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\,\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2x\,\mathrm{d}x = 13.$$

Chọn đáp án B □

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\cos x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Xét tích phân $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos x f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$.

Ta có $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

Ta có $I=\int\limits_0^1 t^2f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$(tính chất không phụ thuộc biến số).

Ta có $\int\limits_0^1 x^2d(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3f(x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3f'(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\int\limits_0^1 x^3f'(x)\,\mathrm{d}x=-1$.

Ta có $\int\limits_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+14\int\limits_0^1 x^3f'(x)\,\mathrm{d}x+49\int\limits_0^1 x^6\,\mathrm{d}x=7-14+7=0$.

Do đó $\int\limits_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f'(x)+7x^3=0\Leftrightarrow f'(x)=-7x^3\Rightarrow f(x)=-\dfrac{7}{4}x^4+C$.

Theo giả thiết $f(1)=0\Rightarrow C=\dfrac{7}{4}\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\dfrac{7}{4}x^4+\dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{7}{5}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{7}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 79. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)x$.

A. π. **B.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{\pi}$. **D.** $\dfrac{1}{\pi}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $\begin{cases}u=\cos(\pi x)\\ \mathrm{d}v=f'(x)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x\\ v=f(x).\end{cases}$

Ta có

$$\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x=f(x)\cos(\pi x)\Big|_0^1+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-f(1)-f(0)+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Ta có

$$\int_0^1 [f(x)-\sin(\pi x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \sin^2(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi x)}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right)\Big|_0^1 = 0 \quad (*).$$

Từ $[f(x)-\sin(\pi x)]^2 \geq 0$ trên $[0;1]$, kết hợp với $(*)$, ta có $f(x)=\sin(\pi x)$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi x) = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$.

Chọn đáp án C □

Câu 80. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{21}$, $f(1)=0$ và $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}$. Giá trị của $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{5}{12}$. **B.** $-\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $-\dfrac{7}{10}$.

✍ **Lời giải.**

Ta thấy

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\cdot f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3\cdot f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^3\cdot f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{7}.$$

Ta thấy

$$\int_0^1 \left[[f'(x)]^2 - 2\cdot x^3\cdot f'(x) + x^6\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{7} - \frac{2}{7} + \int_0^1 x^6\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x)-x^3]^2\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^3$$

$$\overset{f(1)=0}{\Rightarrow} f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}.$$

Cách khác:

Ta có $\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7} \\ \displaystyle\int_0^1 x^3\cdot f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)f'(x)-x^3]\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = x^3.$

Chọn đáp án B □

Câu 81. Biết $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\cdot\mathrm{e}^{\frac{c}{d}}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và các phân số $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc-ad$.

A. 12. **B.** 1. **C.** 24. **D.** 64.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$

Đặt $I=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$ và $J=\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần ta có $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\end{cases}.$

Khi đó $J=x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{12}}^{12}-\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{12}}^{12}-I\Rightarrow I+J=x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{12}}^{12}=\dfrac{143}{12}\mathrm{e}^{\frac{145}{12}}.$

Vậy $bc-ad=12\cdot145-143\cdot12=24$.

Chọn đáp án C □

Câu 82. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0$, $f'(0)\neq0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x)f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x=a\mathrm{e}^2+b$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x)$

$\Rightarrow\left[\dfrac{1}{2}f^2(x)+6x^3\right]'=\left[(3x^2+x)f(x)\right]'$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x)+C$, với C là hằng số.

Mặt khác, theo giả thiết $f(0)=0$ nên $C=0$.

Khi đó $\dfrac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có

$$\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=(3x^2+x)f(x)\quad\Leftrightarrow f^2(x)+12x^3=(6x^2+2x)f(x)$$

$$\Leftrightarrow\left[f(x)-2x\right]\left[f(x)-6x^2\right]=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}f(x)=2x\\ f(x)=6x^2.\end{bmatrix}$$

— Với $f(x)=6x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f'(0)=0$ (loại).

— Với $f(x)=2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có

$$\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(x+1)\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\mathrm{e}^2-\frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a - b = 1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 83. Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

✍ Lời giải.

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Khi đó $f(x) = F(t)\Big|_{2x}^{x^2} = F(x^2) - F(2x)$.

$\Rightarrow f'(x) = 2xF'(x^2) - 2F'(2x) = 2x \cdot \dfrac{2x^2}{1+x^4} - 2 \cdot \dfrac{4x}{1+4x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{8x^5+4x^3-8x}{(1+x^4)(1+4x^2)}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^5+4x^3-8x = 0 \Leftrightarrow 4x(2x^4+x^2-2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \\ x^2 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = x_1 = \dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2} \\ x = x_2 = -\dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{17}}}{2}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_2		0		x_1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$f(x_2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(x_1)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: Hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 84. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f\left(x^2\right)}{x}\mathrm{d}x$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 10..

✍ Lời giải.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f\left(t^2\right)}{t}\mathrm{d}t = 6.$

Đặt $t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t$. Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 8 \Rightarrow t = \sqrt{2}. \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{f\left(t^2\right)}{t^6}\cdot 6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int_1^{\sqrt{2}} \frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t = 6 \Rightarrow \int_1^{\sqrt{2}} \frac{f\left(t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Vậy $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{f\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x = 6+1 = 7.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\displaystyle\int_1^2 f(-2x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Tính $I = \displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -6$. **B.** $I = -10$. **C.** $I = 10$. **D.** $I = 6$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = -2x \Rightarrow \mathrm{d}t = -2\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = -2$; $x = 2 \Rightarrow t = -4$.

Do đó $4 = \displaystyle\int_1^2 f(-2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{-4} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-4}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{-4}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t = 8$

Lại có $f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-x) = -f(x)$.

Do đó $2 = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

Nên $\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-4}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 8-2 = 6$.

Vậy $I = \displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-4}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - f(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2+2x-1}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = \mathrm{e}$. Giá trị của $f(3)$ bằng

A. $3\mathrm{e}^7 - 1$. **B.** $3\mathrm{e}^5 - 1$. **C.** $3\mathrm{e}^7$. **D.** $3\mathrm{e}^5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} & f'(x) - f(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2+2x-1}{2}} \\ \Leftrightarrow\ & \left(f'(x) - f(x)\right)\mathrm{e}^{-x} = (x^2+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}} \\ \Leftrightarrow\ & \left(f(x)\mathrm{e}^{-x}\right)' = (x^2+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}. \end{aligned}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\begin{aligned} f(x)\mathrm{e}^{-x} &= \int (x^2+1)\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int x^2\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}. \end{cases}$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(x)\mathrm{e}^{-x} &= x\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}} - \int \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}\mathrm{d}x \\ &= x\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}} + C. \end{aligned}$$

Do đó $f(x)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}} + C$.

Với $f(1) = \mathrm{e} \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$.

Vậy $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{x^2+2x-1}{2}}$. Suy ra $f(3) = 3\mathrm{e}^7$.

Chọn đáp án C □

Câu 87. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết $f(1) = 1$ và $f(x) = xf'(x) + \ln x$, $\forall x \in (0;+\infty)$. Giá trị của $f(\mathrm{e})$ bằng

A. e. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải.

Xét $x \in (0;+\infty)$. Ta có

$$f(x) = xf'(x) + \ln x \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} &\int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{f(x)}{x}\right)' \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{f(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} - \frac{f(1)}{1} = \frac{1}{x}\cdot\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \frac{f(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\mathrm{e}} - 1 \Leftrightarrow f(\mathrm{e}) = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 88. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x) - f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [0;1]$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi}{12}$. **D.** $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Xét $x \in [0;1]$. Ta có

$$2f(x) - f(1-x) = \sqrt{1-x^2}. \tag{1}$$

Thay x bởi $1-x$, ta được

$$2f(1-x) - f(x) = \sqrt{2x-x^2}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$f(x) = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2x-x^2}.$$

Vậy

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2x-x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in[1;3]$, đồng thời

$$f'(x)(1+f(x))^2=[(f(x))^2(x-1)]^2 \text{ và } f(1)=-1.$$

Biết rằng $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b\,(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z})$, tính tổng $S=a+b^2$.

A. $S=2$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=4$. **D.** $S=0$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&f'(x)(1+f(x))^2=[(f(x))^2(x-1)]^2\\
\Leftrightarrow\ &(x-1)^2=\frac{f'(x)(1+f(x))^2}{(f(x))^4}\\
\Leftrightarrow\ &\int\frac{f'(x)(1+f(x))^2}{(f(x))^4}\mathrm{d}x=\int(x-1)^2\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &\int\left(\frac{1}{(f(x))^2}+\frac{2}{(f(x))^3}+\frac{1}{(f(x))^4}\right)\mathrm{d}(f(x))=\frac{1}{3}(x-1)^3+C\\
\Leftrightarrow\ &-\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{(f(x))^2}-\frac{1}{3(f(x))^3}=\frac{1}{3}(x-1)^3+C,\text{ do } f(1)=-1\Rightarrow C=\frac{1}{3}\\
\Leftrightarrow\ &-\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{(f(x))^2}-\frac{1}{3(f(x))^3}=\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{3}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{(f(x))^3}+\frac{3}{(f(x))^2}+\frac{3}{f(x)}=-(x-1)^3-1\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^3=(1-x)^3\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}=-x\\
\Leftrightarrow\ &f(x)=-\frac{1}{x}\Leftrightarrow\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=-\ln|x|\Big|_1^3=-\ln 3.
\end{aligned}$$

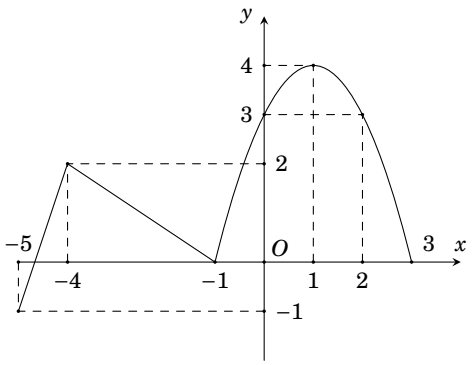
Vậy $S=a+b^2=-1+0^2=-1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 90.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ bên (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$). Biết $f(0)=0$, giá trị của $2f(-5)+3f(2)$ bằng

A. 33. **B.** $\frac{109}{3}$. **C.** $\frac{35}{3}$. **D.** 11.



✍ Lời giải.

Dựa vào đồ thị đã cho ta tính được $f'(x)=\begin{cases}3x+14 & \text{nếu } -5\le x\le -4\\ -\frac{2}{3}x-\frac{2}{3} & \text{nếu } -4\le x\le -1\\ -x^2+2x+3 & \text{nếu } x\ge -1.\end{cases}$

Ta có

— $f(-4)-f(-5)=\int_{-5}^{-4}f'(x)\mathrm{d}x=\int_{-5}^{-4}(3x+14)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Suy ra $f(-4)-f(-5)=-\frac{1}{2}$. (1)

— $f(-1)-f(-4)=\int\limits_{-4}^{-1}f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-4}^{-1}\left(-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=3$. Suy ra $f(-1)-f(-4)=3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $f(-1)-f(-5)=\dfrac{7}{2}$. (3)

Mặt khác,

— $f(0)-f(-1)=\int\limits_{-1}^{0}f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}(-x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x=\dfrac{5}{3}$. Suy ra $f(0)-f(-1)=\dfrac{5}{3}$. (4)

— $f(2)-f(0)=\int\limits_{0}^{2}f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}(-x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x=\dfrac{22}{3}$. Suy ra $f(2)-f(0)=\dfrac{22}{3}$. (5)

Mà $f(0)=0$, từ (4) và (5) suy ra $f(-1)=-\dfrac{5}{3}$, $f(2)=\dfrac{22}{3}$.

Do đó, từ (3) suy ra $f(-5)=f(-1)-\dfrac{7}{2}=-\dfrac{5}{3}-\dfrac{7}{2}=-\dfrac{31}{6}$.

Vậy $2f(-5)+3f(2)=2\cdot\left(-\dfrac{31}{6}\right)+3\cdot\dfrac{22}{3}=\dfrac{35}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2018f(0)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\int\limits_{0}^{1}\dfrac{1}{[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left[f'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x$ bằng $2\ln a$. Tính $a+1$.

A. 2019. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{6}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$M=\int\limits_{0}^{1}\left[\frac{1}{[f(x)]^2}+\left[f'(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x\geq\int\limits_{0}^{1}2\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=2\ln f(x)\Big|_0^1=2\ln\frac{f(1)}{f(0)}=2\ln 2018.$$

Vậy $a+1=2019$.

Chọn đáp án A □

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=0$; $\left[f'(x)\right]^2+12xf(x)=21x^4-12x$, $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trị của $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $I=-\dfrac{1}{4}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{0}^{1}xf(x)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}x^2f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Do vậy, ta thấy

$$\int\limits_{0}^{1}\left[\left[f'(x)\right]^2+12xf(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(21x^4-12x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\quad\int\limits_{0}^{1}\left[f'(x)-3x^2\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(30x^4-12x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 \left[f'(x)-3x^2\right]^2 \mathrm{d}x = 0$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$
$$\Rightarrow \quad f(x) = x^3 - 1.$$

Ta được $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^3-1\right)\mathrm{d}x = -\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 93. Cho biết hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;3]$ và có $f(3)=4$; thỏa mãn điều kiện $\left(f'(x)\right)^2 = 8x^2 - 20 - 4f(x)$. Tính $f(6)$.

A. $f(6)=8$. **B.** $f(6)=36$. **C.** $f(6)=31$. **D.** $f(6)=41$.

✍ **Lời giải.**

Lấy tích phân hai vế của giả thiết, cận từ 0 đến 3 ta được

$$\int_0^3 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^3 \left(8x^2-20-4f(x)\right)\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \int_0^3 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^3 \left(8x^2-20\right)\mathrm{d}x - 4\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \int_0^3 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{8x^3}{3}-20x\right)\Big|_0^3 - 4\cdot I \text{ với } I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \int_0^3 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 12 - 4\cdot I \quad (*)$$

Đối với $I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$, đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ v = x. \end{cases}$

Suy ra $I = xf(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x = 3f(3) - \int_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x = 12 - \int_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x.$

Thay vào $(*)$, ta được

$$\int_0^3 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = -36 + 4\int_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x.$$
$$\Leftrightarrow \int_0^3 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x - 4\int_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x + 36 = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_0^3 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x - 4\int_0^3 xf'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^3 4x^2\,\mathrm{d}x = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_0^3 \left(f'(x)-2x\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f'(x)-2x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = x^2 + C.$$

Mà $f(3)=4 \Rightarrow 4 = 9 + C \Leftrightarrow C = -5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 5 \Rightarrow f(6) = 31$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 94. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\dfrac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\dfrac{4\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=4\ln^2 2$. **B.** $I=8\ln^2 2$. **C.** $I=8\ln 2$. **D.** $I=4+2\ln^2 2$.

✍ Lời giải.

Lấy tích phân hai vế từ 1 đến 4, ta được

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^4 \frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x+\int_1^4 \frac{4\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^4 f\left(2\sqrt{x}-1\right)d\left(2\sqrt{x}-1\right)+4\int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}(\ln x).$$

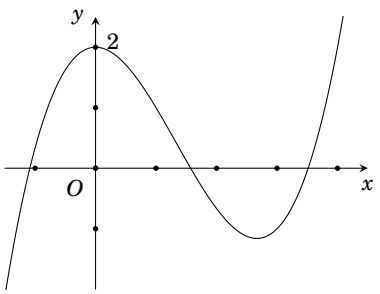
Do $I_1=\displaystyle\int_1^4 f\left(2\sqrt{x}-1\right)d\left(2\sqrt{x}-1\right)=\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ nên ta có

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x+2\ln^2 x\Big|_1^4 \Rightarrow \int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x=2\ln^2 4=8\ln^2 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 95.

Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $\displaystyle\int_1^4 x\cdot f''(x-1)\,\mathrm{d}x=7$ và $\displaystyle\int_1^2 2x\cdot f'(x^2-1)\,\mathrm{d}x=-3$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=3$ là



A. $y=x-4$. **B.** $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$.

C. $y=2x-7$. **D.** $y=3x-10$.

✍ Lời giải.

— Ta có $\displaystyle\int_1^2 2x\cdot f'(x^2-1)\,\mathrm{d}x=\int_1^2 \cdot f'(x^2-1)\,\mathrm{d}(x^2-1)=f(x^2-1)\Big|_1^2=f(3)-f(0)$.

Do đó $f(3)-f(0)=-3$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có $f(0)=2$ nên suy ra $f(3)=-1$.

— Xét $I=\displaystyle\int_1^4 x\cdot f''(x-1)\,\mathrm{d}x=7$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f''(x-1)\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f'(x-1)\end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned}I &= xf'(x-1)\Big|_1^4-\int_1^4 f'(x-1)\,\mathrm{d}x\\ &= xf'(x-1)\Big|_1^4-f(x-1)\Big|_1^4\\ &= 4f'(3)-(f(3)-f(0))\\ &= 4f'(3)+3.\end{aligned}$$

Suy ra $4f'(3)+3=7\Rightarrow f'(3)=1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=3$ là

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y+1=1(x-3)\Leftrightarrow y=x-4.$$

Chọn đáp án A □

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$. Biết rằng ba số

$$\int_0^1 (f(x))^{2018}\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 (f(x))^{2019}\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 (f(x))^{2020}\mathrm{d}x$$

theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Giá trị của biểu thức $\int_0^1 \left[(f(x))^2+(1-f(x))^2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 9.

✍ **Lời giải.**

Theo giả thiết ta có

$$\int_0^1 (f(x))^{2018}\mathrm{d}x+\int_0^1 (f(x))^{2020}\mathrm{d}x=2\int_0^1 (f(x))^{2019}\mathrm{d}x$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 (f(x))^{2018}\cdot(1-f(x))^2\mathrm{d}x=0.$$

Do $(f(x))^{2018}\cdot(1-f(x))^2$ liên tục, không âm trên đoạn $[0;1]$ nên $f(x)\cdot(1-f(x))=0,\ \forall x\in[0;1]$.

Vậy

$$\int_0^1 \left(f(x)\right)^2+\left(1-f(x)\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1 [1-2f(x)(1-f(x))]\mathrm{d}x=\int_0^1 1\,\mathrm{d}x=1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $4f^3(x)+f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B**. $\frac{1}{2}$. **C**. $\frac{5}{16}$. **D**. $-\frac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=f(x)\Rightarrow 4t^3+t=x\Rightarrow \left(12t^2+1\right)\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận

— Với $x=0\Rightarrow t=0$.

— Với $x=1\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Ta có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} t\left(12t^2+1\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}} \left(12t^3+t\right)\mathrm{d}t=\left(3t^4+\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{16}$.

Chọn đáp án C □

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f''(x)\cdot f^2(x)+2[f'(x)]^2\cdot f(x)=2x-3,\ \forall x\in\mathbb{R};\ f(0)=f'(0)=1$. Tính giá trị $P=f^3(2)$.

A. $P=-3$. **B**. $P=-\frac{11}{3}$. **C**. $P=-\frac{23}{3}$. **D**. $P=-6$.

✍ Lời giải.

Xét $\int f''(x)\cdot f^2(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = f^2(x) \\ \mathrm{d}v = f''(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2f'(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x \\ v = f'(x) \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int f''(x)\cdot f^2(x)\mathrm{d}x &= f'(x)\cdot f^2(x) - \int 2[f'(x)]^2\cdot f(x)\mathrm{d}x \\ \Rightarrow f'(x)\cdot f^2(x) &= \int f''(x)\cdot f^2(x)\mathrm{d}x + 2\int [f'(x)]^2\cdot f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int [f''(x)\cdot f^2(x) + 2[f'(x)]^2\cdot f(x)]\mathrm{d}x \\ \Rightarrow f'(x)\cdot f^2(x) &= \int (2x-3)\mathrm{d}x = x^2 - 3x + C. \end{aligned}$$

Chọn $x = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f'(x)\cdot f^2(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{3}f^3(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + x + C$.

Với $x = 0$ thì $C = \dfrac{1}{3}$. Vậy $f^3(x) = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 3x + 1$. Do đó $f^3(2) = -3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - 2018f(x) = 2018\cdot x^{2017}\cdot \mathrm{e}^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$; $f(0) = 2018$. Giá trị của $f(1)$ là

A. $f(1) = 2018\cdot \mathrm{e}^{-2018}$. **B.** $f(1) = 2019\cdot \mathrm{e}^{-2018}$. **C.** $f(1) = 2018\cdot \mathrm{e}^{2018}$. **D.** $f(1) = 2019\cdot \mathrm{e}^{2018}$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & f'(x) - 2018f(x) = 2018\cdot x^{2017}\cdot \mathrm{e}^{2018x} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^{-2018x}\left[f'(x) - 2018\cdot f(x)\right] = 2018x^{2017} \\ \Leftrightarrow\ & \left[\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)\right]' = 2018x^{2017} \\ \Rightarrow\ & \int_0^1 \left[\mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)\right]'\mathrm{d}x = \int_0^1 2018x^{2017}\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow\ & \mathrm{e}^{-2018x}\cdot f(x)\Big|_0^1 = x^{2018}\Big|_0^1 \\ \Rightarrow\ & \mathrm{e}^{-2018}\cdot f(1) - f(0) = 1 \Rightarrow f(1) = \mathrm{e}^{2018}\cdot[1 + f(0)] = 2019\cdot \mathrm{e}^{2018}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[0;5]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^5 xf'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x = 8, f(5) = \ln 5$.

Tính $I = \displaystyle\int_0^5 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. -33. **B.** 33. **C.** 17. **D.** -17.

✍ Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int_0^5 xf'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^5 x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{f(x)}\right) = x\mathrm{e}^{f(x)}\Big|_0^5 - \int_0^5 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$.

Kết hợp với giả thiết ta có

$$\int_0^5 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{f(x)}\Big|_0^5 - \int_0^5 xf'(x)\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x = 5\mathrm{e}^{f(5)} - 8 = 25 - 8 = 17.$$

Vậy $\int\limits_0^5 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = 17$.

Chọn đáp án C □

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(-x)+2019f(x)=\mathrm{e}^x, \forall x\in[-1;1]$ (1). Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{\mathrm{e}}$. **B.** $I=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2020\mathrm{e}}$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2019\mathrm{e}}$.

✍ **Lời giải.**

Trong tích phân I ta đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Nên $I=\int\limits_{1}^{-1} f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{-1}^{1} f(-x)\,\mathrm{d}x$.

Do đó $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\Big(f(x)+f(-x)\Big)\,\mathrm{d}x$.

Với phép đặt đó thì đẳng thức (1) trở thành $f(x)+2019f(-x)=\mathrm{e}^{-x}, \forall x\in[-1;1]$ (2).

Cộng vế theo vế các đẳng thức (1) và (2) ta được $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{2020}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

Do đó $I=\dfrac{1}{4040}\int\limits_{-1}^{1}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4040}\left[\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right]\Big|_{-1}^{1}=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2020\mathrm{e}}$.

Chọn đáp án B □

Câu 102. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x)f(x)=1 \\ f(x)\neq 1 \end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3 \dfrac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{3}{2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Từ giả thiết $\begin{cases} f(3-x)f(x)=1 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow f(3)=2$.

Do $f(3-x)f(x)=1$ nên $[1+f(3-x)]^2[f(x)]^2=[f(x)+1]^2$.

Khi đó ta được

$$I=\int\limits_0^3 \frac{xf'(x)}{[1+f(x)]^2}\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^3 x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+f(x)}\right)=-\frac{x}{1+f(x)}\Big|_0^3+\int\limits_0^3\frac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x=-1+J.$$

Tính $J=\int\limits_0^3 \dfrac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=3-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=3$ và $x=3\Rightarrow t=0$.

Khi đó, $J=-\int\limits_3^0 \dfrac{1}{1+f(3-t)}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^3 \dfrac{1}{1+f(3-t)}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^3 \dfrac{1}{1+f(3-x)}\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $2J=\int\limits_0^3 \dfrac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 \dfrac{1}{1+f(3-x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 \dfrac{1}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 \dfrac{f(x)}{1+f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 \mathrm{d}x=3$.

Do đó $J=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $I=-1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)-2f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=x\sin 2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $-\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{12}$. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x\sin 2x+2f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,\mathrm{d}x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &= \frac{\pi}{4}-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{4}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Suy ra

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[1;4]$, $f(1)=\dfrac{1}{3}$, $f'(1)=\dfrac{2}{5}$ và thỏa mãn $2f'(x)+xf''(x)=\sqrt{x},\forall x\in[1;4]$. Tính $I=\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{139}{75}$. **B.** $I=\dfrac{213}{25}$. **C.** $I=\dfrac{263}{75}$. **D.** $I=\dfrac{119}{25}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $(x^2f'(x))'=2xf'(x)+x^2f''(x)=x(2f'(x)+xf''(x))=x\sqrt{x}$.

$\Rightarrow x^2f'(x)=\displaystyle\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$.

$\Rightarrow f'(1)=\dfrac{2}{5}+C\Rightarrow\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}+C\Rightarrow C=0$.

$\Rightarrow x^2f'(x)=\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{5}x^{\frac{1}{2}}$.

$\Rightarrow f(x)=\displaystyle\int\frac{2}{5}x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{15}x^{\frac{3}{2}}+C$.

$\Rightarrow f(1)=\dfrac{4}{15}+C\Rightarrow\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{15}+C\Rightarrow C=\dfrac{1}{15}$.

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{4}{15}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{15}$.

Vậy $I=\displaystyle\int_1^4\left(\dfrac{4}{15}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{15}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{8}{75}x^{\frac{5}{2}}+\dfrac{1}{15}x\right)\Big|_1^4=\dfrac{92}{25}-\dfrac{13}{75}=\dfrac{263}{75}$.

Chọn đáp án C □

Câu 105. Biết $I=\displaystyle\int_1^2\dfrac{x(1+\mathrm{e}^x)+\ln x+1}{(x\ln x+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b\ln 2+\mathrm{e}^c}+\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=3$. **B.** $P=6$. **C.** $P=1$. **D.** $P=7$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$I=\int_1^2\frac{x(1+\mathrm{e}^x)+\ln x+1}{(x\ln x+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^2\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{x\ln x+\mathrm{e}^x}\right)=-\frac{x+1}{x\ln x+\mathrm{e}^x}\Big|_1^2=\frac{-3}{2\ln 2+\mathrm{e}^2}+\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Suy ra $a=-3,b=c=2$. Vậy

$$P=a+b+c=-3+2+2=1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 106. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f'(x)]^2\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

✍ Lời giải.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\sin x.\end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x f(x)\mathrm{d}x=\sin x f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

Ta có $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$. Suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left([f'(x)]^2+2\sin x f'(x)+\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=0$.

Đẳng thức trên tương đương với $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f'(x)+\sin x]^2\,\mathrm{d}x=0$.

Mà $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f'(x)+\sin x]^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0$ nên đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f'(x)=-\sin x$.

Suy ra $f(x)=\displaystyle\int-\sin x\,\mathrm{d}x=\cos x+C$.

Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ nên $C=0$.

Vậy $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 107. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)\cdot f(2-x)=e^{2x^2-4x}$, với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{16}{3}$. **B.** $I=-\dfrac{16}{5}$. **C.** $I=-\dfrac{14}{3}$. **D.** $I=-\dfrac{32}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Có $f(x)\cdot f(2-x)=e^{2x^2-4x}$, thay $x=0$ ta được $f(0)\cdot f(2)=1\Rightarrow f(2)=\dfrac{1}{f(0)}=1$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=(x^3-3x^2)\ln f(x)\Big|_0^2-\int_0^2 \ln f(x)\,\mathrm{d}(x^3-3x^2)\\ &= -4\ln f(2)-\int_0^2 (3x^2-6x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^2 (3x^2-6x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Xét $A=\displaystyle\int_0^2 (3x^2-6x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=2-t$, suy ra

— $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$

— $3x^2-6x=3(2-t)^2-6(2-t)=12-12t+3t^2-12+6t=3t^2-6t$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (3x^2-6x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_2^0 (3t^2-6t)\ln f(2-t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^2 (3t^2-6t)\ln f(2-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2 (3x^2-6x)\ln f(2-x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Lại có $f(x)\cdot f(2-x)=e^{2x^2-4x}\Rightarrow f(2-x)=\dfrac{e^{2x^2-4x}}{f(x)}\Rightarrow \ln f(2-x)=2x^2-4x-\ln f(x)$.

Nên $A=\displaystyle\int_0^2 (3x^2-6x)(2x^2-4x-\ln f(x))\,\mathrm{d}x$.

Suy ra

$$\begin{aligned} 2A &= \int_0^2 (3x^2-6x)(2x^2-4x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 (6x^4-12x^3-12x^3+24x^2)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 (6x^4-24x^3+24x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{32}{5}\\ &\Rightarrow\ A=\frac{16}{5}. \end{aligned}$$

Vậy $I=-\dfrac{16}{5}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 108. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$ và $\displaystyle\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

✍ Lời giải.

Đặt $u=\sqrt{x}\Rightarrow u^2=x\Rightarrow 2u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. Do đó $\int\limits_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2uf\left(u\right)\mathrm{d}u$.

Suy ra $\int\limits_0^1 2uf\left(u\right)\mathrm{d}u=\frac{2}{5}\Rightarrow\int\limits_0^1 2xf\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=2x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=x^2\mathrm{d}x.\end{cases}$

$\frac{2}{5}=\int\limits_0^1 2xf\left(x\right)\mathrm{d}x=x^2f(x)\big|_0^1-\int\limits_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=1-\int\limits_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$.

Ta có $\frac{9}{25}=\left(\int\limits_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int\limits_0^1 x^4\,\mathrm{d}x\cdot\int\limits_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x=\frac{9}{25}$.

Dấu bằng xảy ra khi $f'(x)=kx^2$. Mặt khác $\int\limits_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\Rightarrow k=3$.

Vậy $f'(x)=3x^2$, $f(x)=x^3+C$, $f(1)1$ nên $C=0$. Vậy $f(x)=x^3$.

$\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án C □

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=2-\frac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x.$$

Mặt khác ta có $\frac{2-\pi}{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos(2x-\frac{\pi}{2})\right)\mathrm{d}x=0$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Nên ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

Chọn đáp án C □

Câu 110. Biết $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}} = \ln\left(a\sqrt{6}+b\sqrt{3}+c\sqrt{2}+d\right)$ với a,b,c,d là các số nguyên. Tính $P=a+b+c+d$.

A. $P=45$. **B.** $P=65$. **C.** $P=93$. **D.** $P=17$.

✍ **Lời giải.**

— Đặt $u=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ ta có $u^2=\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$ nên $\begin{cases} x+1=\dfrac{1}{u^2-1} \\ \mathrm{d}x=-\dfrac{2u}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u. \end{cases}$

Đổi cận $x=1$ thì $u=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x=2$ thì $u=\sqrt{\frac{4}{3}}$.

— Ta có

$$\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}} = \int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}} = \int\limits_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \frac{-\frac{2u}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u}{\frac{1}{u^2-1}\cdot u} = \int\limits_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \frac{-2\mathrm{d}u}{u^2-1}$$

$$= \int\limits_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u$$

$$= (\ln(u+1)-\ln(u-1))\Big|_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}}$$

$$= \ln\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \ln(2+\sqrt{3})^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

$$= \ln(-14\sqrt{6}+20\sqrt{3}-24\sqrt{2}+35).$$

— Vậy $a+b+c+d=17$.

Chọn đáp án D □

Câu 111. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{5}{2}$. **C.** $I=4\ln 2-\frac{15}{8}$. **D.** $I=4\ln 2+\frac{15}{8}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=\frac{1}{t}\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=2$, $x=2\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_2^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot t\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x.$

Ta có $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x \Leftrightarrow \dfrac{f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}=3$

$$\Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{3f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{9}{2} \Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 112. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(1)=1+\mathrm{e}$; $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+xf'(x)$ $\forall x\in(0;+\infty)$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $1+2\sqrt{\mathrm{e}}$. **B.** $1+\sqrt{\mathrm{e}}$. **C.** $2+2\sqrt{\mathrm{e}}$. **D.** $2+\sqrt{\mathrm{e}}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
& f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+xf'(x) \quad \forall x>0\\
\Leftrightarrow\ & f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{x}f(x)\right)'=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\\
\Rightarrow\ & \int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{x}f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}f(2)-f(1)=\int\limits_{1}^{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}f(2)=\sqrt{\mathrm{e}}-\mathrm{e}+f(1)\\
\Leftrightarrow\ & f(2)=2\sqrt{\mathrm{e}}+2.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 113. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ và thỏa mãn $2xf'(x)-f(x)=2x\sqrt{x}$, $\forall x\in[1;4]$. Biết rằng $f(1)=0$, tính $I=\displaystyle\int\limits_{1}^{4}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{22}{3}$. **B.** $I=\dfrac{20}{3}$. **C.** $I=\dfrac{8}{3}$. **D.** $I=\dfrac{14}{3}$.

✍ **Lời giải.**

— Với mọi $x\in[1;4]$, ta có

$$\begin{aligned}
2xf'(x)-f(x)=2x\sqrt{x} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot f'(x)-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\cdot f(x)=1\\
&\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot f(x)\right]'=1.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\int_1^4 \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot f(x)\right]' \mathrm{d}x = \int_1^4 \mathrm{d}x\\ \Leftrightarrow\ &\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot f(x)\right]\Big|_1^4 = x\Big|_1^4\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\cdot f(4) - f(1) = 3 \Rightarrow f(4) = 6.\end{aligned}$$

— Với mọi $x \in [1;4]$, ta có

$$\begin{aligned}2xf'(x) - f(x) = 2x\sqrt{x} \ &\Leftrightarrow\ 2f'(x) - \frac{f(x)}{x} = 2\sqrt{x}\\ &\Leftrightarrow\ 2f'(x) - 2\sqrt{x} = \frac{f(x)}{x}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x &= \int_1^4 \left[2f'(x) - 2\sqrt{x}\right]\mathrm{d}x\\ &= [2f(x)]\Big|_1^4 - \left(\frac{4}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_1^4\\ &= 2f(4) - 2f(1) - \frac{28}{3} = 2\cdot 6 - 2\cdot 0 - \frac{28}{3} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 114. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(2) = 0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{45}$ và $\int_1^2 (x-1)f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{30}$. Tính $I = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{1}{36}$. **B.** $I = -\frac{1}{15}$. **C.** $I = \frac{1}{12}$. **D.** $I = -\frac{1}{12}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}&\int_1^2 (x-1)f(x)\,\mathrm{d}x\\ =\ &\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right)\\ =\ &\left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right)f(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x\\ =\ &\frac{1}{2}f(2) - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{30}\\ \Rightarrow\ &\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{30}(*)\end{aligned}$$

và $\begin{cases} \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{20} & (**) \\ \displaystyle\int_1^2 [f'(x)]^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{45} & (***) \end{cases}$

Từ $(*);(**);(***)$ suy ra

$$\int_1^2 \left(f'(x)-\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 \mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2}{3}-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{3}+\frac{1}{3}x+C.$$

Mặt khác $f(2)=0 \Rightarrow C=-\dfrac{2}{9}$.

$\Rightarrow \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{12}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 115. Giả sử $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\left(b\sqrt{2}-\frac{c\sqrt{10}}{a^3}\right)$ (với $a,b,c\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{b}{a}$ là phân số tối giản). Khi đó giá trị $a+bc$ bằng

A. 43. **B.** 23. **C.** $y=33$. **D.** 13.

Lời giải.

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-\frac{10\sqrt{10}}{27}\right).$$

Do $\dfrac{b}{a}$ tối giản suy ra $a=3,b=2,c=10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 116. cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0;\pi]$ và thỏa mãn $f(0)=f(\pi)=2018$; $\displaystyle\int_0^\pi \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x = 2\pi$; $\displaystyle\int_0^\pi \sin 2x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$. Tính $I=\displaystyle\int_0^\pi \cos x f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=2018$. **B.** $I=2018\pi$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải.

$$\int_0^\pi \sin 2x f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos 2x f(x)\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} 4\cos 2x.f'(x)\,\mathrm{d}x = 4\pi \Rightarrow \int_0^{\pi} \left(\left(f'(x)\right)^2 - 4\cos 2x.f'(x) + 4\cos^2 2x\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \left(f'(x) - 2\cos 2x\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow f'(x) = 2\cos 2x \Rightarrow f(x) = \sin 2x + C$$

$\Rightarrow f(x) = \sin 2x + 2018.$

Vậy $I = \int_0^{\pi} \cos x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos x(\sin 2x + 2018)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}.$

Chọn đáp án C □

Câu 117. Biết $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}} = \ln(a\sqrt{6} + b\sqrt{3} + c\sqrt{2} + d)$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $P = a + b + c + d$.

A. $P = 93$. **B.** $P = 65$. **C.** $P = 45$. **D.** $P = 17$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $u = \sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}} \Rightarrow u^2 = \dfrac{x+2}{x+1} = 1 + \dfrac{1}{x+1}$. Suy ra $\begin{cases} x+1 = \dfrac{1}{u^2-1} \\ \mathrm{d}x = -\dfrac{2u}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u \end{cases}$.

Đổi cận: $x = 1$ thì $u = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $x = 2$ thì $u = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}} = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \frac{-\dfrac{2u}{(u^2-1)^2}\mathrm{d}u}{\dfrac{1}{u^2-1}\cdot u} = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \frac{-2\,\mathrm{d}u}{u^2-1}$$

$$= \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u$$

$$= (\ln(u+1) - \ln(u-1))\Big|_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}}$$

$$= \ln\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = (2+\sqrt{3})^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

$$= -14\sqrt{6} + 20\sqrt{3} - 24\sqrt{2} + 35.$$

Vậy $a + b + c + d = 17$.

Chọn đáp án D □

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(2018 - x) = 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^{2018} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 4036. **B.** 2018. **C.** 1009. **D.** 1009^2.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t = 2018 - x \Rightarrow x = 2018 - t \Rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0$ thì $t = 2018$, $x = 2018$ thì $t = 0$.

Ta có

$$I=\int\limits_0^{2018} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2018} f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{2018}^{0} f(2018-x)(-\mathrm{d}x)=\int\limits_0^{2018} f(2018-x)\,\mathrm{d}x.$$

Do đó

$$2I=\int\limits_0^{2018} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{2018} f(2018-x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2018}[f(x)+f(2018-x)]\,\mathrm{d}x=2x|_0^{2018}=2\cdot 2018.$$

Vậy $I=2018$.

Chọn đáp án B □

Câu 119. Biết $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{3+(x-2)\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=a+b\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ với a, b là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $a-2b=5$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=5$. **D.** $a-2b=7$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1+x\mathrm{e}^x+2-2\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=1+2\int\limits_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=1+2J.$

Lại có $I=\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(1+x)\mathrm{e}^x+3-3\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{d(x\mathrm{e}^x+1)}{x\mathrm{e}^x+1}+3\int\limits_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\ln(\mathrm{e}+1)+3J.$

Do đó, ta có $\begin{cases} I=1+2J \\ I=\ln(\mathrm{e}+1)+3J \end{cases}\Rightarrow I=1-2\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

Suy ra $a=1$, $b=-2$. Vậy $a-2b=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 120. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1)=0,\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-2\ln 2 \text{ và } \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=2\ln 2-\frac{3}{2}$$

Tích phân $\displaystyle\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{1-\ln 2}{2}$. **B.** $\dfrac{1-2\ln 2}{2}$. **C.** $\dfrac{3-4\ln 2}{2}$. **D.** $\dfrac{3-\ln 2}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\left[1-\frac{1}{x+1}f(x)\right]\Big|_0^1-\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x.$

Suy ra $\displaystyle\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-2\ln 2.$

Hơn nữa ta tính được:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x \\
=\ &\int_0^1 \left[1-2\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right] \mathrm{d}x \\
=\ &\left(x-2\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^1 \\
=\ &\frac{3}{2}-2\ln 2
\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right) f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\int_0^1 \left[f'(x)+\frac{1}{x+1}-1\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \\
\Rightarrow\ &f'(x) = 1-\frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

Suy ra $f(x)=x-\ln(x+1)+C$.

Vì $f(1)=0$ nên $C=\ln 2-1$.

Ta tính được $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 [x-\ln(x+1)+\ln 2-1]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}-\ln 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 121. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$, $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{30}$, $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{30}$. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{11}{12}$. **B.** $\dfrac{11}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{30}$. **D.** $\dfrac{11}{30}$.

✍ **Lời giải.**

Ta xét tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 (2x-1)f(x)\,\mathrm{d}x$.

Theo công thức tích từng phần ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (2x-1)f(x)\,\mathrm{d}x &= \left(x^2-x\right)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(x^2-x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \left(x^2-x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Do giả thiết suy ra $-\displaystyle\int_0^1 \left(x^2-x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{30} \Leftrightarrow \int_0^1 \left(x^2-x\right)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{30}$.

Mặt khác

$$\int_0^1 \left(x^2-x\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^4-2x^3+x^2\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{1}{30}.$$

Khi đó ta có

$$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 \left(x^2-x\right) f'(x) \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(x^2-x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{30} - 2\cdot\frac{1}{30} + \frac{1}{30} = 0.$$

Hay

$$\int_0^1 \left[f'(x)-\left(x^2-x\right)\right]^2 \mathrm{d}x = 0.$$

Suy ra $f'(x)-\left(x^2-x\right)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^2-x$.

Ta có

$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2-x\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C.$$

Theo giả thiết $f(0)=1$ suy ra $C=1$. Do đó $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+1$.

Khi đó

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{12}-\frac{1}{6}+1 = \frac{11}{12}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 122. Tính tích phân $I = 2\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x\cdot 2018^{x^6}\,\mathrm{d}x + \int_{2018}^{2018^8} \sqrt[3]{\log_{2018} x}\,\mathrm{d}x$.

A. 2.2018^8-2018. **B.** 2018^8-2018. **C.** $2.2018^8-\sqrt[3]{2018}$. **D.** $2018^8-\sqrt[3]{2018}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

— $I_1 = 2\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x.2018^{x^6}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 2018^{t^3}\,\mathrm{d}t$ (với $t=x^2$).

— $I_2 = \displaystyle\int_{2018}^{2018^8} \sqrt[3]{\log_{2018} x}\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt[3]{\log_{2018} x} \Rightarrow t^3=\log_{2018} x \Rightarrow x=2018^{t^3} \Rightarrow \mathrm{d}x=\mathrm{d}2018^{t^3}$.

Mặt khác, với $x=2018$ thì $t=1$, với $t=2018^2$ thì $t=2$.

Do đó $I_2 = \displaystyle\int_1^2 t\,\mathrm{d}2018^{t^3} = t\cdot 2018^{t^3}\Big|_1^2 - \int_1^2 2018^{t^3}\,\mathrm{d}t$.

Vậy $I = I_1+I_2 = t\cdot 2018^{t^3}\Big|_1^2 = 2.2018^8-2018$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 123. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn $f(x)-8x^3f(x^4)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $\dfrac{a-b\sqrt{2}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{c},\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -10.

✍ Lời giải.

Ta có $f(x)=8x^3f(x^4)-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 8x^3f(x^4)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$ (1)

Lại có $\displaystyle\int_0^1 8x^3f(x^4)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 2f(x^4)\,\mathrm{d}(x^4)=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2I.$

Xét tích phân $J=\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow t\,\mathrm{d}t=x\,\mathrm{d}x$. Với $x=0$ thì $t=1$ và $x=1$ thì $t=\sqrt{2}$ nên ta có

$$J=\int_0^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)t\,\mathrm{d}t}{t}=\int_0^{\sqrt{2}}(t^2-1)\,\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$

Kết hợp với (1), ta có $I=2I-\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}\Rightarrow I=\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $a=2,b=1,c=3$, dẫn tới $a+b+c=6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 124. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$, $f(0)=1$ và $f(-4)=2$. Giá trị của biểu thức $f(2)+f(-3)$ bằng

A. 12. **B.** $3-20\ln 2$. **C.** $\ln 2$. **D.** $10+\ln 2$.

✍ Lời giải.

Có $f(2)+f(-3)=[f(2)+f(0)]+[f(-3)-f(-4)]+3=\displaystyle\int_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-4}^{-3} f'(x)\,\mathrm{d}x+3.$

Ta lại có $\displaystyle\int_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{3x-1}{x+2}\,\mathrm{d}x=6-7\ln 2.$

Và $\displaystyle\int_{-4}^{-3} f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-4}^{-3}\frac{3x-1}{x+2}\,\mathrm{d}x=3+7\ln 2.$

Vậy $f(2)+f(-3)=6-7\ln 2+3+7\ln 2+3=12.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 125. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $(f'(x))^2=e^x\cdot f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $e-2$. **B.** $e-1$. **C.** e^2-2. **D.** e^2-1.

✍ Lời giải.

Do hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên cũng có đạo hàm tại $x=0$, thay $x=0$ vào giả thiết ta được: $(f'(0))^2=e^0\cdot f(0)=1\Rightarrow f'(0)=\pm 1$.

Lại do hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(0)=1$.

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức $(f'(x))^2=e^x\cdot f(x)$, ta được:

$2f'(x)\cdot f''(x)=e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)=(f'(x))^2+e^x\cdot f'(x)$ (1).

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên đồng biến trên $[0;1]$, mà $f(0)=1$ nên $f(x)>0,\forall x\in[0;1]$

Vậy giả sử $f'(x)=0$ tại $x_0\in[0;1]$

Khi đó theo giả thiết ta có $\left(f'(x)\right)^2 = e^x \cdot f(x)$

$\Rightarrow \left(f'(x_0)\right)^2 = e^{x_0} \cdot f(x_0) \Leftrightarrow 0 = e^{x_0} \cdot f(x_0)$

Mà $e^{x_0} > 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$ (vô lý)

Vậy $f'(x) > 0, \forall x \in [0;1]$.

Nếu $f'(x) \neq 0$ thì $(1) \Leftrightarrow 2f''(x) = f'(x) + e^x \Rightarrow 2f'(x) = f(x) + e^x + C$.

Thay $x = 0$ ta được

$$2 = 1 + 1 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow 2f'(x) = f(x) + e^x \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x) + e^x}{2}$$

$$\Rightarrow (f'(x))^2 = \left(\frac{f(x) + e^x}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow e^x \cdot f(x) = \left(\frac{f(x) + e^x}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (f(x) - e^x)^2 = 0 \Rightarrow f(x) = e^x.$$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 126. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn : $f(1+2x) + f(1-2x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int\limits_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

A. $I = 2 - \dfrac{\pi}{2}$. **B.** $I = 1 - \dfrac{\pi}{4}$. **C.** $I = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{8}$. **D.** $I = \dfrac{\pi}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Từ giả thiết ta thay x bởi $\dfrac{x-1}{2}$, ta có

$$f(x) + f(2-x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}$$

Lại có

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} f(2-x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad 2I = \int_{-1}^{3} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}\,dx = \int_{-1}^{3} dx - 4\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2 + 4}$$

Đặt $x - 1 = 2\tan t$.

$$\Rightarrow \int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{(x-1)^2 + 4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2I = 4 - \pi \Leftrightarrow I = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 127. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính $\int\limits_1^5 xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{17}{4}$. **C.** $\dfrac{33}{4}$. **D.** $\dfrac{15}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x^3+3x+1)=3x+2 \Leftrightarrow (3x^2+3)f(x^3+3x+1)=(3x+2)(3x^2+3)$.
Đặt $t=x^3+3x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=(3x^2+3)\,\mathrm{d}x$. Suy ra,

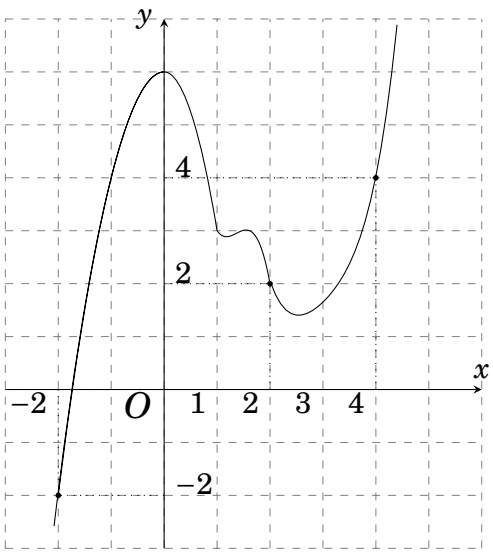
$$\int\limits_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 (9x^3+6x^2+9x+6)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{9}{4}x^4+2x^3+\frac{9}{2}x^2+6x\right)\Big|_0^1=\frac{59}{4}.$$

Ta có

$$\int\limits_1^5 xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^5 x\,\mathrm{d}(f(x))=xf(x)\Big|_1^5-\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=25-2-\frac{59}{4}=\frac{33}{4}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 128.
Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình bên. Khi đó giá trị của biểu thức $\int\limits_0^4 f'(x-2)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f'(x+2)\,\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?



A. 2. **B.** -2. **C.** 10. **D.** 6.

✍ **Lời giải.**
Tính $\int\limits_0^4 f'(x-2)\,\mathrm{d}x$. Đặt $t=x-2$. Khi đó

$$\int\limits_0^4 f'(x-2)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^2 f'(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^2 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tính $\int\limits_0^2 f'(x+2)\,\mathrm{d}x$. Đặt $u=x+2$. Khi đó

$$\int\limits_0^2 f'(x+2)\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^4 f'(u)\,\mathrm{d}u=\int\limits_2^4 f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy

$$\int\limits_0^4 f'(x-2)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 f'(x+2)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^4 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{-2}^4=f(4)-f(-2)=6.$$

Chọn đáp án D □

Câu 129. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[1;\mathrm{e}]$. Biết $f(\mathrm{e})=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$, $\int\limits_1^{\mathrm{e}}[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$. Tính $f\left(\mathrm{e}^{2018}\right)$.

A. $2018\mathrm{e}^{2018}+\mathrm{e}$. **B.** $2018\mathrm{e}^{2018}+\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. **C.** $2017\mathrm{e}^{2018}+\mathrm{e}$. **D.** $2017\mathrm{e}^{2018}+\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Xét tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f(x)'\mathrm{d}x\\ v=\ln x.\end{cases}$

Khi đó $I=f(x)\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}}{2}-\int_1^{\mathrm{e}}f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_1^{\mathrm{e}}f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}}{2}-\frac{1}{2}$ (1).

Mặt khác ta có $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\ln^2 x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2$.

Khi đó xét $J=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\left[f'(x)-\ln x\right]^2\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\left[f'(x)^2\right]\mathrm{d}x-2\int_1^{\mathrm{e}}f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}\ln^2 x\,\mathrm{d}x=1-(e-1)+e-2=0$.

Hay $f'(x)=\ln x\Rightarrow f(x)=\displaystyle\int\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$, mà $f(\mathrm{e})=\dfrac{\mathrm{e}}{2}\Rightarrow C=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

$\Rightarrow f(x)=x\ln x-x+\dfrac{\mathrm{e}}{2}\Rightarrow f\left(\mathrm{e}^{2018}\right)=2018\mathrm{e}^{2018}-\mathrm{e}^{2018}+\dfrac{2}{2}=2017\mathrm{e}^{2018}+\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 130. Biết $I=\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{x}{x^2-1+\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính tổng $S=3a+2b$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{5}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow x^2=t^2-1\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$, đổi cận $\begin{cases}x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2\\ x=2\sqrt{2}\Rightarrow t=3.\end{cases}$

Khi đó $I=\displaystyle\int_2^3\frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+t-2}=\int_2^3\left(\frac{2/3}{t+2}+\frac{1/3}{t-1}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\ln|t+2|\Big|_2^3+\frac{1}{3}\ln|t-1|\Big|_2^3=\frac{2}{3}\ln 5-\ln 2$.

Từ đó $a=\dfrac{2}{3};b=-1\Rightarrow S=3a+2b=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 131. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(x)\neq 0,\forall x\in[4;8]$. Biết rằng $\displaystyle\int_4^8\frac{\left[f'(x)\right]^2}{[f(x)]^4}\mathrm{d}x=1$ và $f(4)=\dfrac{1}{4},f(8)=\dfrac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{8}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_4^8\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{f(x)}\Big|_4^8=\frac{1}{f(4)}-\frac{1}{f(8)}=2$ và $\displaystyle\int_4^8\mathrm{d}x=4$.

Suy ra

$$\int_4^8\left[\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}-\frac{1}{2}\right]^2\mathrm{d}x=\int_4^8\frac{\left[f'(x)\right]^2}{[f(x)]^4}\mathrm{d}x-\int_4^8\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_4^8\mathrm{d}x=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2}, \forall x \in [4;8]$$
$$\Rightarrow \quad \int_4^6 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \int_4^6 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{f(x)}\Big|_4^6 = \frac{x}{2}\Big|_4^6$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f(4)} - \frac{1}{f(6)} = 1$$
$$\Rightarrow \quad f(6) = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 132. Cho tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x}\,\mathrm{d}x = a\pi^2 + b - \ln\frac{c}{\pi}$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính giá trị của biểu thức $P = ac^3 + b$.

A. $P = \frac{5}{4}$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = \frac{3}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \cos x)^2 + 1 - \sin x}{x + \cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \cos x + \frac{1 - \sin x}{x + \cos x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(x + \cos x)}{x + \cos x}$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + \sin x + \ln|x + \cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + 1 + \ln\frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\pi^2 + 1 - \ln\frac{2}{\pi}.$$

Suy ra $a = \frac{1}{8}, b = 1, c = 2$.

Vậy $P = ac^3 + b = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 133. Cho hàm số $y = f(x) > 0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$; $g(x)$ là hàm số thỏa mãn $g(x) = 1 + 1008\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ và $g(x) = f^2(x)$. Tính $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}x$.

A. 1014. **B.** 253. **C.** $\frac{507}{2}$. **D.** $\frac{1017}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $g(x)=1+1008\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow g'(x)=1008f(x)$, $g(0)=1+1008\displaystyle\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

$f^2(x)=g(x)\Rightarrow f(x)=\sqrt{g(x)}\Rightarrow g'(x)=1008\sqrt{g(x)}\Rightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)}=1008$.

Lấy tích phân hai vế trên $[0;t]$, ta được

$$\int_0^t \frac{g'(x)\,\mathrm{d}x}{g(x)}=\int_0^t 1008\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2\sqrt{g(x)}\Big|_0^t=1008|_0^t \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{g(x)}-1\right)=1008 \Leftrightarrow \sqrt{g(t)}=504t+1.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (504x+1)\,\mathrm{d}x=253.$$

Chọn đáp án B □

Câu 134. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f(1)=0$ và $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\mathrm{e}-2$. **B.** $I=\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$. **C.** $I=2\mathrm{e}-1$. **D.** $I=\mathrm{e}+1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $((x-1)\mathrm{e}^x)''=(x\mathrm{e}^x)'=(x+1)\mathrm{e}^x$.

Ta có

$$\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\left(x\mathrm{e}^x\right)=x\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vậy $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

Xét

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 x^2\cdot \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right)\\
&= \frac{x^2\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\cdot 2x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\\
&= \frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\mathrm{e}^2}{2}+\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^1 [f'(x)+x\mathrm{e}^x]^2\,\mathrm{d}x=0.$$

Từ đó ta có $f'(x)=-xe^x$ hay $f(x)=-(x-1)e^x+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C=0$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\int\limits_0^1 -(x-1)e^x\,dx=-(x-2)e^x\Big|_0^1=e-2$.

Chọn đáp án A □

Câu 135. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ và $f(x)\neq 0$ với mọi $x\in(0;+\infty)$, $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ và $2f(1)=-1$. Biết rằng $\int\limits_1^2 xf(x)\,dx=\ln\dfrac{a}{b}$ $(a,b\in\mathbb{N}^*)$ với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{a}{b}>1$. **B.** $b-a=5$. **C.** $a+b=5$. **D.** $ab=2018$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$. Do đó $\int\dfrac{f'(x)\,dx}{f^2(x)}=\int\dfrac{dx}{2x+1}$, suy ra $-\dfrac{1}{f(x)}=2x^2+x+c$ hay $f(x)=-\dfrac{1}{x^2+x+c}$.
Vì $2f(1)=-1$ nên $c=0$. Từ đó suy ra

$$f(x)=-\frac{1}{x^2+x}.$$

Do đó $\int\limits_1^2 xf(x)\,dx=-\int\limits_1^2\dfrac{1}{x+1}\,dx=\ln\dfrac{2}{3}$. Suy ra $a+b=5$.

Chọn đáp án C □

Câu 136. Cho hàm số f liên tục, $f(x)>-1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=0$ và $f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

A. 0. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7.

✍ **Lời giải.**

Với điều kiện đã cho, ta có

$$f'(x)\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1}\Rightarrow\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)+1}}=\int\frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow\int\frac{d(f(x)+1)}{\sqrt{f(x)+1}}=\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow\sqrt{f(x)+1}=\sqrt{x^2+1}+C.$$

Vì $f(0)=0$ nên $C=0$. Từ đó ta có $\sqrt{f(\sqrt{3})+1}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}+0\Rightarrow f(\sqrt{3})=3$.

Chọn đáp án C □

Câu 137. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$ có $f(1)=1;f(4)=3\ln\dfrac{5}{2}+1$. Biết $\int\limits_1^4\dfrac{f'(x)}{x+1}dx=\dfrac{9}{10}$ và $\int\limits_1^4 x(f'(x))^2dx=9\ln\dfrac{5}{2}-\dfrac{27}{10}$. Tính $\int\limits_1^4 f(x)dx$.

A. $5\ln\dfrac{5}{2}-6$. **B.** $5\ln\dfrac{5}{2}+6$. **C.** $15\ln\dfrac{5}{2}-6$. **D.** $15\ln\dfrac{5}{2}+6$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^4 f'(x)dx=f(4)-f(1)=3\ln\dfrac{5}{2}$.

$$\int_1^4\frac{xf'(x)}{x+1}dx=\int_1^4\left(f'(x)-\frac{f'(x)}{x+1}\right)dx=\int_1^4 f'(x)dx-\int_1^4\frac{f'(x)}{x+1}dx=3\ln\frac{5}{2}-\frac{9}{10}.$$

$$\int_1^4\frac{x}{(x+1)^2}dx=\int_1^4\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\left(\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}\right)\Big|_1^4=\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{10}.$$

Xét tích phân

$$\begin{aligned}\int_1^4 x\left(f'(x)-\frac{3}{(x+1)^2}\right)^2\mathrm{d}x &= \int_1^4\left[x(f'(x))^2-\frac{6xf'(x)}{x+1}+\frac{9x}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x\\ &= \int_1^4\left[x(f'(x))^2\right]\mathrm{d}x-6\int_1^4\frac{xf'(x)}{x+1}\mathrm{d}x+9\int_1^4\frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x\\ &= 9\ln\frac{5}{2}-\frac{27}{10}-6\left(3\ln\frac{5}{2}-\frac{9}{10}\right)+9\left(\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{10}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Mặt khác, $\int_1^4 x\left(f'(x)-\frac{3}{(x+1)^2}\right)^2\mathrm{d}x\geq 0$ nên ta được $f'(x)=\frac{3}{x+1}$.

Do đó $f(x)=\int\frac{3}{x+1}\mathrm{d}x=3\ln|x+1|+C$.

Kết hợp với $f(1)=1\Rightarrow 3\ln 2+C=1\Leftrightarrow C=1-3\ln 2$.

Ta được $f(x)=3\ln|x+1|+1-3\ln 2\Rightarrow\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4(3\ln|x+1|+1-3\ln 2)\mathrm{d}x=15\ln\frac{5}{2}-6$.

Chọn đáp án C □

Câu 138. Cho hàm số $f(x)$ xác định liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x-\int_0^1 2xf(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}=0$. Tính $I=\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}\mathrm{d}x$?

A. $I=1-\ln 2$. **B.** $I=\frac{3}{2}-\ln 2$. **C.** $I=1+\ln 2$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}&\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x-\int_0^1 2xf(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}=0\\ \Leftrightarrow\ &\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x-\int_0^1 2xf(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=0\\ \Leftrightarrow\ &\int_0^1[f(x)-x]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f(x)-x=0\Leftrightarrow f(x)=x.\end{aligned}$$

Vậy ta suy ra $I=\int_0^1\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x\big|_0^1-\ln|x+1|\big|_0^1=1-\ln 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 139. Cho hàm số $y=f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f(1)=\mathrm{e}f(0)=\mathrm{e}$ và $\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2\mathrm{d}x\leq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(2)=2$. **B.** $f(2)=\mathrm{e}^2$. **C.** $f(2)=\mathrm{e}^{-2}$. **D.** $f(2)=\frac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Từ $f(1)=\mathrm{e}f(0)=\mathrm{e}$, ta suy ra $f(1)=\mathrm{e}$, $f(0)=1$.

Ta có $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\ln f(x)\big|_0^1=\ln f(1)-\ln f(0)=\ln \mathrm{e}-\ln 1=1.$

Mặt khác, dễ thấy $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x=1.$

Do đó ta suy ra

$$\begin{aligned}&\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2\mathrm{d}x-2\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}x\le 1-2+1\\ \Leftrightarrow\ &\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right]^2\mathrm{d}x\le 0\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}-1=0\left(\text{vì }\left[\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right]^2\ge 0\right)\\ \Rightarrow\ &\frac{f'(x)}{f(x)}=1\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x\Rightarrow\ln f(x)=x+C.\end{aligned}$$

Vì $f(0)=1$ nên $\ln f(0)=0+C\Rightarrow\ln 1=0+C\Rightarrow C=0$.

Như vậy $\ln f(x)=x\Rightarrow f(x)=\mathrm{e}^x$, suy ra $f(2)=\mathrm{e}^2$.

Chọn đáp án B □

Câu 140. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Biết $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính $T=f(-2)+f(0)+f(5)$.

A. $\dfrac{1}{2}\ln 2-1$. **B.** $\ln 2+1$. **C.** $\ln 2-1$. **D.** $\dfrac{1}{2}\ln 2+1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)-(x-1)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & \text{x>1}\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & \text{-1<x<1}\\ \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_3 & \text{x<-1}\end{cases}.$$

Với $f(-3)+f(3)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln 2+C_1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+C_3=0\Leftrightarrow C_1+C_3=0.$

Với $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln 3+C_2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}+C_3=0\Leftrightarrow C_2=1.$

Vậy $T=f(-2)+f(0)+f(5)=\dfrac{1}{2}\ln 3+C_3+C_2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}+C_2+C_1=\dfrac{1}{2}\ln 2+1.$

Chọn đáp án D □

Câu 141. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\ln f(x)+f(x)-1=\ln\left[\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2}\right]$.

Tính $I=\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x.$

A. $I=-12$. **B.** $I=8$. **C.** $I=12$. **D.** $I=\dfrac{3}{4}$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
&\ln f(x)+f(x)-1=\ln\left[\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2}\right]\\
\Rightarrow\ &\ln\left[f(x)\mathrm{e}^{f(x)-1}\right]=\ln\left[\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2}\right]\\
\Rightarrow\ &f(x)\mathrm{e}f(x)-1=\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{x^2}\\
\Rightarrow\ &f(x)=x^2+1\\
\Rightarrow\ &I=\int\limits_0^1 x\left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 142. Biết $I=\displaystyle\int\limits_2^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$, trong đó a,b,c là những số nguyên. Tính biểu thức $\left(a+b^2+3c^2\right)$.

A. 6. **B**. 5. **C**. 8. **D**. 9.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_2^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \int\limits_2^3\sqrt{\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \int\limits_2^3\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&= x+\ln|x-1|-\ln|x|\Big|_2^3\\
&= 1+2\ln 2-\ln 3.
\end{aligned}$$

Vậy $a=1,\ b=2,\ c=-1,\ a+b^2+3c^2=8$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 143. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x)=(x^2+3)f(x+1)$. Biết rằng $f(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, tính $I=\displaystyle\int\limits_0^2(2x-1)f''(x)\mathrm{d}x$.

A. -4. **B**. 4. **C**. 8. **D**. 0.

✍ **Lời giải.**

Từ giả thiết $f^2(1-x)=(x^2+3)f(x+1)$, ta thay lần lượt $x=1$ và $x=-1$ vào ta được

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}f^2(0)=4f(2)\\ f^2(2)=4f(0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f^2(0)=4f(2);f(2)\geq 0;f(0)\geq 0\\ f^4(2)=16f^2(0)=64f(2)\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}f^2(0)=4f(2);f(2)\geq 0;f(0)\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}f(2)=4\\ f(2)=0\ (\text{loại})\end{array}\right.\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\ f(2)=f(0)=4.
\end{aligned}$$

Lấy đạo hàm hai vế ta có $-2f(1-x)f'(1-x)=(x^2+3)f'(x+1)+2xf(x+1)$.

Thay $x=1$, $x=-1$ ta có

$$\begin{cases}-2f(0)f'(0)=4f'(2)+2f(2)\\-2f(2)f'(2)=4f'(0)-2f(0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2f'(0)+f'(2)=-2\\f'(0)+2f'(2)-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(0)=-2\\f'(2)=2.\end{cases}$$

Do đó $I=\displaystyle\int_0^1(2x-1)f''(x)\,\mathrm{d}x=(2x-1)f'(x)\Big|_0^1-2\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=3f'(2)+f'(0)-2[f(2)-f(0)]=4.$

Chọn đáp án B □

Câu 144. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $af(b)+bf(a)\le\dfrac{2018}{\pi}$ với mọi $a,b\in[0;1]$.

Tìm giá trị lớn nhất của tích phân $M=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. 1009. **B.** $\dfrac{1009}{2}$. **C.** $\dfrac{1009}{\pi}$. **D.** $\dfrac{2018}{\pi}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $x=\sin t$, ta có $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận ta được $M=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f(\sin t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$ (1)

Đặt $x=\cos u$, ta có $\mathrm{d}x=-\sin u\,\mathrm{d}u$.

Đổi cận ta được $M=-\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin u\cdot f(\cos u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot f(\cos x)\,\mathrm{d}x.$ (2)

Từ (1) và (2) ta được

$$2M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin x\cdot f(\cos x)+\cos x\cdot f(\sin x)]\,\mathrm{d}x$$

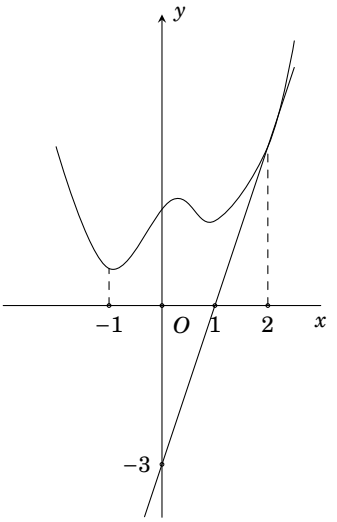
$$\Rightarrow 2M\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2018}{\pi}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow M\le\frac{1009}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 145.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại $x=-1$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 2. Tính $\displaystyle\int_1^4 f''(x-2)\,\mathrm{d}x$



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Đường thẳng $\Delta : y = 3x - 3$. Vậy $f'(2) = 3$.

Từ giả thiết ta có $\displaystyle\int_1^4 f''(x-2)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(2) - f'(-1) = 3 - 0 = 3$.

Chọn đáp án A □

Câu 146. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x^2} + x^4 - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(4)$ là

A. $f(2) = \mathrm{e}^4 + 4$. **B.** $f(2) = 4\mathrm{e}^4$. **C.** $f(2) = \mathrm{e}^4 + 8$. **D.** $f(2) = 1$.

✍ **Lời giải.**

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Từ giả thiết ta có $F(x^2) - F(0) = \mathrm{e}^{x^2} + x^4 - 1$. Lấy đạo hàm hai vế ta được $2x \cdot f(x^2) = 2x\mathrm{e}^{x^2} + 4x^3 \Leftrightarrow f(x^2) = \mathrm{e}^{x^2} + 2x^2$.

Vậy $f(4) = \mathrm{e}^4 + 8$.

Chọn đáp án C □

Câu 147. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = f(x) + x^2 \cdot \mathrm{e}^x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Tính $f(3)$.

A. $6\mathrm{e}^3 + 3$. **B.** $6\mathrm{e}^2 + 2$. **C.** $3\mathrm{e}^2 - 1$. **D.** $9\mathrm{e}^3 - 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) = f(x) + x^2 \cdot \mathrm{e}^x + 1 &\Leftrightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x\left(f(x)\mathrm{e}^{-x} + x^2 + \mathrm{e}^{-x}\right) \\ &\Leftrightarrow f'(x)\mathrm{e}^{-x} = f(x)\mathrm{e}^{-x} + x^2 + \mathrm{e}^{-x} \\ &\Leftrightarrow f'(x)\mathrm{e}^{-x} - f(x)\mathrm{e}^{-x} = x^2 + \mathrm{e}^{-x} \\ &\Leftrightarrow \left(f(x)\mathrm{e}^{-x}\right)' = x^2 + \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} &\int_0^3 \left(f(x)\mathrm{e}^{-x}\right)'\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(x^2 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left(f(x)\mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_0^3 = \left(\frac{x^3}{3} - \mathrm{e}^{-x}\right)\Big|_0^3 \\ &\Leftrightarrow \frac{f(3)}{\mathrm{e}^3} - f(0) = \left(9 - \frac{1}{\mathrm{e}^3}\right) - (0 - 1) \Leftrightarrow f(3) = 9\mathrm{e}^3 - 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 148. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, $f(x) > 0$ và $f(x) \cdot f(a-x) = 1$ trên đoạn $[0;a]$. Tính $I = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1 + f(x)}$ theo a.

A. $I = \dfrac{3a}{2}$. **B.** $I = 2a$. **C.** $I = 3a$. **D.** $I = \dfrac{a}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $x = a - t$ ta có $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ và $I = \displaystyle\int_a^0 \frac{-\mathrm{d}t}{1 + f(a-t)} = \int_0^a \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{1 + f(t)} = \int_0^a \mathrm{d}t - I$.

Từ đó suy ra $2I = \displaystyle\int_0^a \mathrm{d}t = a \Leftrightarrow I = \frac{a}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 149. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)[f(x)-\cos x]\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{16}-\dfrac{\pi}{32}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $a+b$ bằng

A. 12. **B.** -11. **C.** 19. **D.** 7.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)[f(x)-\cos x]\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{16}-\frac{\pi}{32}\\
\Leftrightarrow\ &\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(f^2(x)-\cos x\cdot f(x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{4}\cos^2 x\right)\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow\ &\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(f^2(x)-\cos x\cdot f(x)+\frac{1}{4}\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=0\\
\Leftrightarrow\ &\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(f(x)-\frac{1}{2}\cos x\right)^2\mathrm{d}x=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(f(x)-\frac{1}{2}\cos x\right)^2=0\\
\Leftrightarrow\ &f(x)=\frac{1}{2}\cos x.
\end{aligned}$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{\frac{3}{16}}$.

Vậy $a+b=19$.

Chọn đáp án C □

Câu 150. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=0$, $f(1)=1$ và $\displaystyle\int_0^1 \frac{[f'(x)]^2}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}-1}$. Tích phân $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)(\mathrm{e}-2)}$. **D.** $\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)|_0^1=f(1)-f(0)=1$.

Ta tính tích phân sau

$$\begin{aligned}
\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}-\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}-1}\right)^2\mathrm{d}x &= \int_0^1\frac{[f'(x)]^2}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x-\frac{2}{\mathrm{e}-1}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{(\mathrm{e}-1)^2}\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}-1}-\frac{2}{\mathrm{e}-1}+\frac{\mathrm{e}-1}{(\mathrm{e}-1)^2}=0
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}=\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{\mathrm{e}-1}$, $\forall x\in[0;1]$ hay $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}-1}$, $\forall x\in[0;1]$.

Vậy $f(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}-1}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}-1}+C$.

Với $f(0)=0$ ta có $C=\dfrac{-1}{\mathrm{e}-1}$ hay $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}-1}$.

Do đó $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left.\dfrac{\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}-1}\right|_0^1=\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$.

Chọn đáp án A □

Câu 151. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn đẳng thức sau $f(x)+2xf\left(x^2\right)+3x^2f\left(x^3\right)=\sqrt{1-x^2}$, $\forall x\in[0;1]$. Tính $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{24}$. **C.** $\dfrac{\pi}{36}$. **D.** $\dfrac{\pi}{12}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 2xf(x^2)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 3x^2f(x^3)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x^2)\,\mathrm{d}(x^2)+\int_0^1 f(x^3)\,\mathrm{d}(x^3)=\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0^2}^{1^2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0^3}^{1^3} f(x)\,\mathrm{d}x=3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}.$$

Chọn đáp án D □

4.1 ĐÁP ÁN

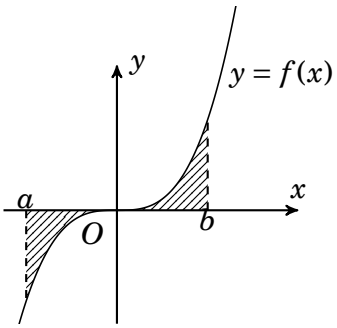
1. C	2. C	3. C	4. A	5. B	6. A	7. D	8. B	9. C	10. B
11. A	12. A	13. C	14. B	15. D	16. C	17. B	18. A	19. B	20. A
21. D	22. B	23. D	24. D	25. B	26. B	27. C	28. B	29. A	30. D
31. A	32. B	33. C	34. B	35. B	36. A	37. D	38. A	39. C	40. C
41. D	42. B	43. A	44. A	45. C	46. A	47. D	48. B	49. B	50. A
51. A	52. D	53. C	54. C	55. A	56. D	57. D	58. A	59. B	60. C
61. D	62. C	63. B	64. A	65. B	66. C	67. A	68. B	69. B	70. A
71. C	72. C	73. D	74. C	75. A	76. D	77. B	78. A	79. C	80. B
81. C	82. A	83. D	84. A	85. A	86. C	87. C	88. A	89. B	90. C
91. A	92. A	93. C	94. B	95. A	96. C	97. C	98. A	99. D	100. C
101. B	102. B	103. B	104. C	105. C	106. C	107. B	108. C	109. C	110. D
111. A	112. C	113. C	114. D	115. B	116. C	117. D	118. B	119. A	120. B
121. A	122. A	123. A	124. A	125. B	126. A	127. C	128. D	129. D	130. B
131. C	132. B	133. B	134. A	135. C	136. C	137. C	138. A	139. B	140. D
141. D	142. C	143. B	144. B	145. A	146. C	147. D	148. D	149. C	150. A
151. D									

BÀI 3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1 HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI MỘT ĐƯỜNG CONG VÀ TRỤC HOÀNH

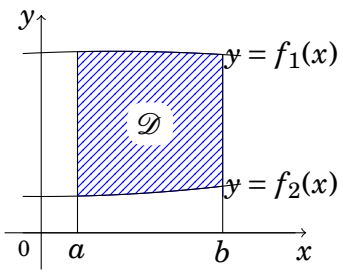
Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$



2 HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI HAI ĐƯỜNG CONG

Cho hai hàm số $y=f_1(x)$ và $y=f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $\mathscr{D}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x=a,\ x=b$.

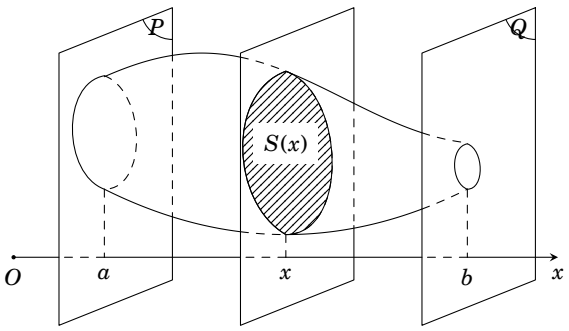
Diện tích hình phẳng $\mathscr{D}$ được tính bởi công thức sau $S=\displaystyle\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\,\mathrm{d}x$



B TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

1. Thể tích vật thể

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V=\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

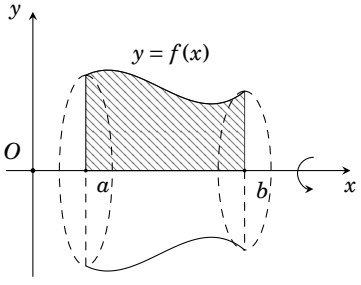


2. Thể tích khối tròn xoay

① Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:

$$\begin{cases}(C):\ y=f(x)\\ Ox:\ y=0\\ x=a\\ x=b.\end{cases}$$

$V_{Ox}=\pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$

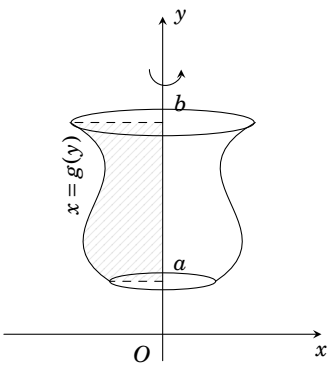


② Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y)$, trục tung và hai

đường thẳng $y=c$, $y=d$ quanh trục Oy:

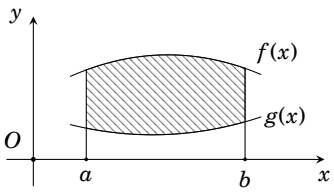
$$\begin{cases}(C): x=g(y)\\ Oy: x=0\\ y=c\\ y=d.\end{cases}$$

$$V_{Oy}=\pi\int_c^d [g(y)]^2\,\mathrm{d}y.$$



③ Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:

$$V=\pi\int_a^b \left|f^2(x)-g^2(x)\right|\,\mathrm{d}x.$$

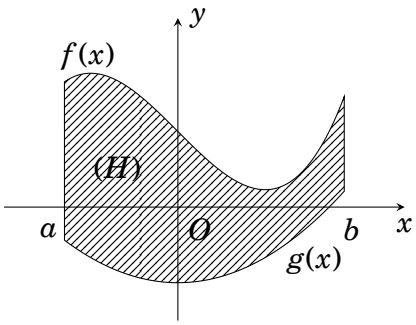


C DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1 DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

1.1 Diện tích hình phẳng

Hình phẳng (H) giới hạn bởi $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\ (C_2): y=g(x)\\ x=a, x=b\,(a<b)\end{cases}$ thì diện tích của (H) được xác đinh bởi công thức $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.



Phương pháp 1. Phương pháp đại số (phương pháp tự luận)

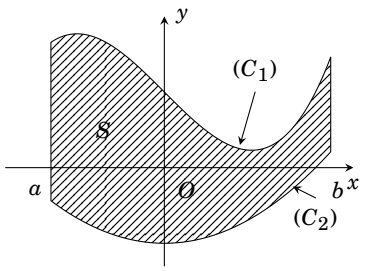
— Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=g(x)$ tìm nghiệm $x_i\in[a;b]$.

— Lập bảng xét dấu $f(x)-g(x)$, chẳng hạn

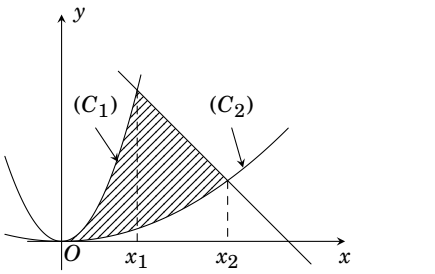
x	a		x_1		x_2		b
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^{x_1}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}[g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{b}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Phương pháp 2. Phương pháp hình học (nếu 3 đường ta nên sử dụng hình học)



Hình 1



Hình 2

Hình 1 do (C_1) nằm trên (C_2) nên $S = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x$.

Hình 2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi ba đường, trong $[0;x_1]$ thì (C_1) nằm trên (C_2) nằm dưới nên $S_1 = \int\limits_0^{x_1} [f_1(x) - f_2(x)]\,\mathrm{d}x$ và trong $[x_1;x_2]$ thì đường d nằm trên và (C_2) nằm dưới nên $S_2 = \int\limits_{x_1}^{x_2} [ax + b - f_2(x)]\,\mathrm{d}x$.

Khi đó diện tích hình 2 là $S = S_1 + S_2$ là phần gạch sọc như hình vẽ.

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường sau

$$(H): \{y = x^3 + 11x - 6, y = 6x^2, x = 0, x = 2\}.$$

ĐS: $\dfrac{5}{2}$

Lời giải: Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + 11x - 6 = 6x^2 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \text{ (loại).} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu biểu thức $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

x	0		1		2
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$		$-$	0	$+$	

$$S = \int\limits_0^2 |x^3 - 6x^2 + 11x - 6|\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 2. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường sau

$$(H): \{y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \pi\}.$$

.

ĐS: $2\sqrt{2}$

Lời giải: Xét phương trình hoành độ giao điểm $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$.

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}x = \left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|(\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|(\cos x + \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right| = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường sau

$$(H):\{y=\sqrt{x+1}, y=5-x, y=1\}.$$

ĐS: $\dfrac{13}{6}$

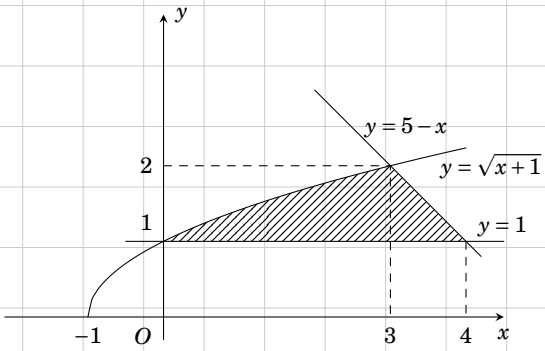
Lời giải: • Cách 1. Từ phương trình $y=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=y^2-1\,(y\geq 0)$; $y=5-x\Rightarrow x=5-y$.

Xét phương trình tung độ giao điểm: $y^2+y-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2\\ y=-3 \text{ (loại)}.\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int\limits_1^2 |y^2+y-6|\,\mathrm{d}y=-\int\limits_1^2 (y^2+y-6)\,\mathrm{d}y=-\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}-6y\right)\Big|_1^2=\frac{23}{3}-\frac{31}{6}=\frac{13}{6}.$$

• Cách 2. Vẽ đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x+1}$, $y=5-x$, $y=1$ như hình bên. Giải các phương trình hoành độ giao điểm từ đó ta được các giao điểm giữa các đồ thị là $(0;1)$, $(3;2)$, $(4,1)$.



Dựa vào đồ thị diện tích hình cần tính là miền gạch sọc

$$S=\int\limits_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_3^4 (5-x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{13}{6}.$$

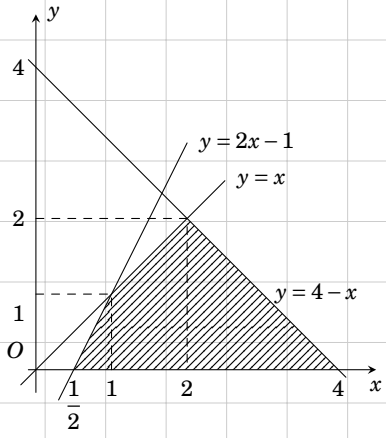
Ví dụ 4. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng sau

$$(H):\{y=\min\{x;2x-1;4-x\}, Ox\}.$$

ĐS: $\dfrac{55}{12}$

Lời giải:

Vẽ đồ thị các hàm số $y=x$, $y=2x-1$, $y=4-x$ như hình bên. Giải các phương trình hoành độ giao điểm từ đó ta được các giao điểm giữa các đồ thị là $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $(1;1)$, $(2;2)$, $(4;0)$.



Dựa vào đồ thị, diện tích hình cần tính là miền gạch sọc

$$S=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^4 (4-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+2=\frac{15}{4}.$$

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường sau

① $(H):\{y=x^3-x, y=2x, x=-1, x=1\}$. **ĐS:** $\dfrac{5}{2}$

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1]\\ x=\sqrt{3}\notin[-1;1]\\ x=-\sqrt{3}\notin[-1;1].\end{array}\right.$

Bảng xét dấu biểu thức x^3-3x

x	-1		0		1
x^3-3x		$+$	0	$-$	

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int\limits_{-1}^{1}|x^3-3x|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}(x^3-3x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}(-x^3+3x)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=\frac{5}{2}.$$

□

② $(H):\{y=x,y=x+\sin^2 x,x=0,x=\pi\}$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}$

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x=x+\sin^2 x\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên đoạn $[0;\pi]$ phương trình có 2 nghiệm $x=0,x=\pi$.

$$S=\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{0}^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

□

③ $(H):\{y=x^3-4x,Ox,x=-2,x=5\}$. **ĐS:** $\dfrac{473}{4}$

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2.\end{array}\right.$

Bảng xét dấu biểu thức x^3-4x

x	-2		0		2		5
x^3-4x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned}S&=\int\limits_{-2}^{5}|x^3-4x|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}|x^3-4x|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}|x^3-4x|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}|x^3-4x|\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{-2}^{0}(x^3-4x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{2}(x^3-4x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}(x^3-4x)\,\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2\right)\Big|_{0}^{2}+\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2\right)\Big|_{2}^{5}\\&=4+4+\frac{425}{4}+4=\frac{473}{4}.\end{aligned}$$

□

④ $(H):\{y=x^4-3x^2-4,Ox,x=0,x=3\}$. **ĐS:** $\dfrac{144}{5}$

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\ (\text{loại}).\end{array}\right.$

Bảng xét dấu biểu thức x^4-3x^2-4

x	0		2		3
x^4-3x^2-4		$-$	0	$+$	

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 |x^4-3x^2-4|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 |x^4-3x^2-4|\,\mathrm{d}x + \int_2^3 |x^4-3x^2-4|\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^2 (x^4-3x^2-4)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (x^4-3x^2-4)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left(\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right)\Big|_2^3 \\ &= \frac{48}{5}+\frac{48}{5}+\frac{48}{5} = \frac{144}{5}. \end{aligned}$$

□

⑤ $(H):\{y=\cos^2 x, Ox, Oy, x=\pi\}$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}$

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$.

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

□

⑥ $(H):\{y=x^3-x, y=x-x^2\}$. **ĐS:** $\dfrac{37}{12}$

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-x = x-x^2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu biểu thức x^3+x^2-2x

x	-2		0		1
x^3+x^2-2x		$+$	0	$-$	

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 |x^3+x^2-2x|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 |x^3+x^2-2x|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |x^3+x^2-2x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^0 (x^3+x^2-2x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (x^3+x^2-2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_{-2}^0 - \left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}.$$

□

⑦ $(H):\{y=x^2+2x, y=x^3\}$. **ĐS:** $\frac{37}{12}$

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu biểu thức x^3+x^2-2x

x	-1		0		2
x^3-x^2-2x		$+$	0	$-$	

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2}|x^3-x^2-2x|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}|x^3-x^2-2x|\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}|x^3-x^2-2x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,\mathrm{d}x-\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_{0}^{2} \\ &= \frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}. \end{aligned}$$

□

⑧ $(H):\{y=-2x^3+x^2+x+5, y=x^2-x+5\}$. **ĐS:** 1

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x^3+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu biểu thức $-2x^3+2x$

x	-1		0		1
$-2x^3+2x$		$-$	0	$+$	

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1}|-2x^3+2x|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}|-2x^3+2x|\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}|-2x^3+2x|\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-1}^{0}(-2x^3+2x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(-2x^3+2x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= -\left(-\frac{1}{2}x^4+x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{2}x^4+x^2\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

□

⑨ $(H):\{y=x^4-10x^2+9, Ox\}$. **ĐS:** $\frac{784}{15}$

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-10x^2+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 3. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu biểu thức x^4-10x^2+9

x	-3		-1		1		3
x^4-10x^2+9		$-$	0	$+$	0	$-$	

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{3}|x^4-10x^2+9|\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1}|x^4-10x^2+9|\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}|x^4-10x^2+9|\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}|x^4-10x^2+9|\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{-3}^{-1}(x^4-10x^2+9)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}(x^4-10x^2+9)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}(x^4-10x^2+9)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left(\frac{x^5}{5}-\frac{10}{3}x^3+9x\right)\Big|_{-3}^{-1}+\left(\frac{x^5}{5}-\frac{10}{3}x^3+9x\right)\Big|_{-1}^{1}-\left(\frac{x^5}{5}-\frac{10}{3}x^3+9x\right)\Big|_{1}^{3} \\ &= -\left(-\frac{88}{15}-\frac{72}{5}\right)+\left(\frac{88}{15}+\frac{88}{15}\right)-\left(-\frac{72}{5}-\frac{88}{15}\right)=\frac{784}{15}. \end{aligned}$$

□

⑩ $(H):\{y=(\mathrm{e}+1)x, y=(1+\mathrm{e}^x)x\}$. **ĐS:** $\frac{\mathrm{e}-2}{2}$

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{0}^{1}|x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})|\,\mathrm{d}x=-\int_{0}^{1}x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})\,\mathrm{d}x=-\int_{0}^{1}x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}\int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}\cdot x^2}{2}\Big|_{0}^{1}=-\left(x\mathrm{e}^x\big|_0^1-\int_{0}^{1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right)+\frac{\mathrm{e}}{2}=-\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x\Big|_0^1\right)+\frac{\mathrm{e}}{2}=\frac{\mathrm{e}-2}{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường sau

① $(H):\{y=\sqrt{x+2}, y=4-x, y=1\}$. **ĐS:** $\dfrac{13}{6}$

✍ Lời giải.

• Cách 1. Từ phương trình $y=\sqrt{x+2} \Rightarrow x=y^2-2\,(y\geq 0)$; $y=4-x \Rightarrow x=4-y$.

Xét phương trình tung độ giao điểm: $y^2+y-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-3 \text{ (loại).}\end{array}\right.$

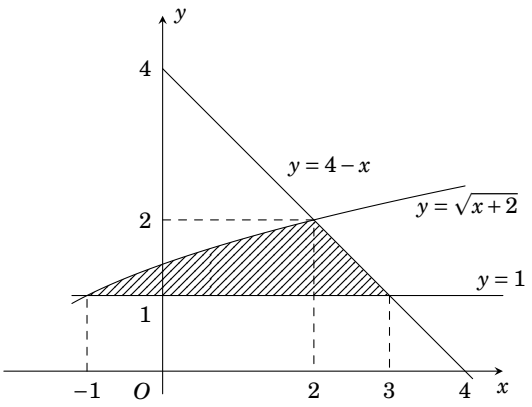
Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int\limits_1^2 |y^2+y-6|\,\mathrm{d}y=-\int\limits_1^2 (y^2+y-6)\,\mathrm{d}y=-\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}-6y\right)\Big|_1^2=\frac{23}{3}-\frac{31}{6}=\frac{13}{6}.$$

• Cách 2. Vẽ đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x+2}$, $y=4-x$, $y=1$ như hình bên. Giải các phương trình hoành độ giao điểm từ đó ta được các giao điểm giữa các đồ thị là $(-1;1)$, $(2;2)$, $(3,1)$.

Dựa vào đồ thị diện tích hình cần tính là miền gạch sọc

$$S=\int\limits_{-1}^2 \left(\sqrt{x+2}-1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 (4-x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{13}{6}.$$



□

② $(H):\{y=\sqrt{x}, y=2-x, y=0\}$. **ĐS:** $\dfrac{7}{6}$

✍ Lời giải.

• Cách 1. Từ phương trình $y=\sqrt{x} \Rightarrow x=y^2\,(y\geq 0)$; $y=2-x \Rightarrow x=2-y$.

Xét phương trình tung độ giao điểm: $y^2+y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-2 \text{ (loại).}\end{array}\right.$

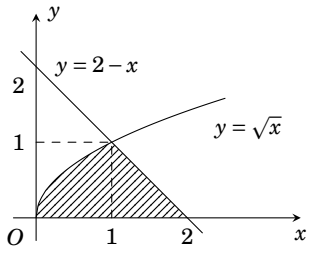
Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int\limits_0^1 |y^2+y-2|\,\mathrm{d}y=-\int\limits_0^1 (y^2+y-2)\,\mathrm{d}y=-\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}-2y\right)\Big|_0^1=\frac{7}{6}.$$

• Cách 2. Vẽ đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ như hình bên. Giải các phương trình hoành độ giao điểm từ đó ta được các giao điểm giữa các đồ thị là $(0;0)$, $(1;1)$, $(2,0)$.

Dựa vào đồ thị diện tích hình cần tính là miền gạch sọc

$$S=\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 (2-x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}.$$



□

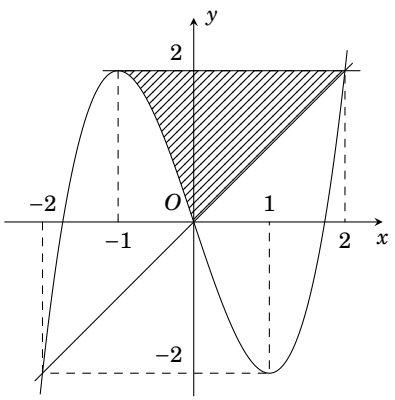
③ $(H):\{y=x^3-3x, y=2, y=x\}$. **ĐS:** $\dfrac{11}{4}$

✍ Lời giải.

Vẽ đồ thị các hàm số $y=x^3-3x$, $y=2$, $y=x$ như hình bên. Giải các phương trình hoành độ giao điểm từ đó ta được các giao điểm giữa các đồ thị là $(0;0)$, $(-1;2)$, $(2;2)$.

Dựa vào đồ thị, diện tích hình cần tính là miền gạch sọc

$$S=\int_{-1}^{0}\left(2-x^3+3x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}(2-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}+2=\frac{11}{4}.$$



□

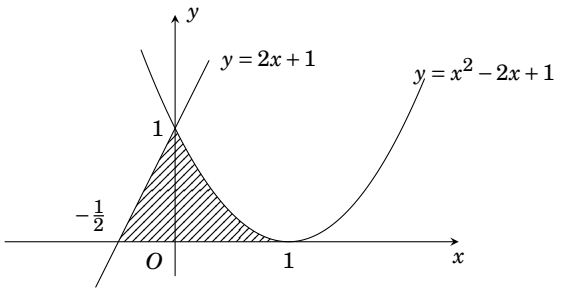
④ $(H):\{y=\min\{x^2-2x+1;2x+1\},Ox\}$. **ĐS:** $\dfrac{7}{12}$

✍ **Lời giải.**

Vẽ đồ thị các hàm số $y=x^2-2x+1$, $y=2x+1$ như hình bên. Giải các phương trình hoành độ giao điểm từ đó ta được các giao điểm giữa các đồ thị là $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $(0;1)$, $(1;0)$.

Dựa vào đồ thị, diện tích hình cần tính là miền gạch sọc

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(2x+1)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}.$$



□

1.2 Tìm vận tốc, gia tốc, quãng đường trong vật lí

Ví dụ 5. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-4t+20$ m/s trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét? **Lời giải:** Khi vật dừng lại thì $v=0\Rightarrow -4t+20=0\Leftrightarrow t=5$ s.

Quãng đường vật đi được trong thời gian này là:

$$s=\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^5(-4t+20)\,\mathrm{d}t=(-2t^2+20t)\Big|_0^5=50\text{ m}.$$

Ví dụ 6. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=16$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+3t$ m/s^2. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 4 s kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. **Lời giải:** Ta có: $v(t)=\displaystyle\int(t^2+3t)\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+C$.

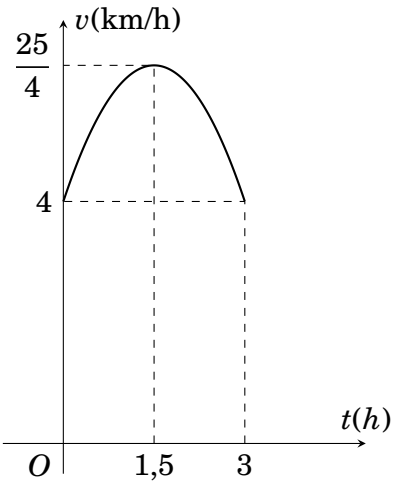
Khi đó $v_0=v(0)=C=16\Rightarrow v(t)=\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{3t^2}{2}+16$.

Quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 4 s kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là:

$$s=\int_0^4 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^4\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+16\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^4}{12}+\frac{t^3}{2}+16t\right)\Big|_0^4=\frac{352}{3}\text{ m}.$$

Ví dụ 7.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v km/h phụ thuộc vào thời gian t h có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(\frac{3}{2};\frac{25}{4}\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.

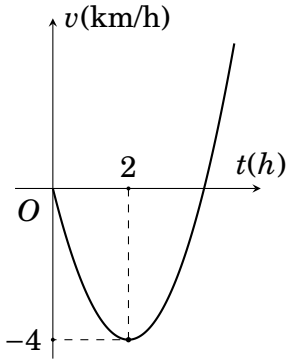


Lời giải: Gọi phương trình vận tốc của vật là $v(t)=at^2+bt+c$.
Khi đó đồ thị hàm số $v=v(t)$ là một parabol có đỉnh $I\left(\frac{3}{2};\frac{25}{4}\right)$ và đi qua điểm $A(0;4)$ nên có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3}{2} \\ a\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+b\cdot\dfrac{3}{2}+c=\dfrac{25}{4} \\ 4=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow v(t)=-t^2+3t+4.$$

Do đó quãng đường vật di chuyển được trong thời gian 3 giờ là $S=\int_0^3\left(-t^2+3t+4\right)\mathrm{d}t=\frac{33}{2}$ km.

Ví dụ 8.
Một vật chuyển động với vận tốc $v_0=15$ m/s thì tăng tốc với gia tốc a m/s^2 phụ thuộc thời gian t s có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I(2;-4)$ và có trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.



Lời giải: Gọi phương trình gia tốc của vật là $a(t)=at^2+bt+c$.
Đồ thị gia tốc đi qua điểm $O(0;0)$ và có đỉnh $(2;-4)$ nên ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 0=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \\ -4=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \Rightarrow a(t)=t^2-4t. \\ c=0 \end{cases}$$

Vận tốc của vật là: $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(t^2-4t)\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}-2t^2+C$. Vì $v_0=v(0)=15\Rightarrow C=15$.

Vật bắt đầu tăng tốc khi: $a\ge 0\Leftrightarrow t^2-4t\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le 0 \\ t\ge 4 \end{array}\right.$. Vì $t\ge 0$ nên vật bắt đầu tăng tốc khi $t=4$ s.

Quãng đường vật đi được sau 3 s kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là $s=\int_4^7\left(\frac{t^3}{3}-2t^2+15\right)\mathrm{d}t=\frac{151}{4}$ m.

Bài 3. Một ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 15$ m/s trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét? **ĐS:** $\frac{45}{2}$ m

Lời giải.

Khi vật dừng lại thì $v = 0 \Rightarrow -5t + 15 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ s.

Quãng đường vật đi được trong thời gian này là:

$$s = \int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^3 (-5t + 15)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 15t\right)\Big|_0^3 = \frac{45}{2} \text{ m}.$$

□

Bài 4. Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 150 - 15t$ m/s. Hỏi rằng trong 5 s trước khi dừng hẳn vật di chuyển được bao nhiêu mét? **ĐS:** $\frac{375}{2}$ m

Lời giải.

Khi vật dừng lại thì $v = 0 \Rightarrow 150 - 15t = 0 \Leftrightarrow t = 10$ s.

Quãng đường vật đi được trong 5 s trước khi dừng hẳn là

$$s = \int_5^{10} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_5^{10} (150 - 15t)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{15}{2}t^2 + 150t\right)\Big|_5^{10} = \frac{375}{2} \text{ m}.$$

□

Bài 5. Một ô tô đang chạy đều với vận tốc b m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -4t + b$ m/s. Biết từ khi đạp phanh đến lúc dừng hẳn thì ô tô di chuyển được 50 m. Tìm vận tốc ban đầu b. **ĐS:** 20 m/s

Lời giải.

Khi vật dừng lại thì $v = 0 \Rightarrow -4t + b = 0 \Leftrightarrow t = \frac{b}{4}$ s.

Quãng đường vật đi được trong thời gian này là:

$$50 = \int_0^{\frac{b}{4}} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{b}{4}} (-4t + b)\,\mathrm{d}t = (-2t^2 + bt)\Big|_0^{\frac{b}{4}} = \frac{b^2}{8} \Rightarrow b^2 = 400 \Leftrightarrow b = 20 \text{ m/s}.$$

□

Bài 6. Một ô tô xuất phát với vận tốc $v_1(t) = 2t + 12$ m/s sau khi đi được khoảng thời gian t_1 thì bất ngờ gặp chướng ngại vật nên tài xế phanh gấp với vận tốc $v_2(t) = 24 - 6t$ m/s và đi thêm một khoảng thời gian t_2 nữa thì dừng lại. Hỏi từ khi xuất phát đến lúc dừng lại thì xe ô tô đã đi được bao nhiêu mét? **ĐS:** 156 m

Lời giải.

Khi xe bắt đầu phanh thì vận tốc xe lúc đó là $v = 24$ m/s $\Rightarrow 2t_1 + 12 = 24 \Leftrightarrow t_1 = 6$ s.

Đến khi xe dừng lại thì $v_2 = 0 \Leftrightarrow 24 - 6t_2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 4$ s.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xuất phát đến lúc dừng lại là

$$s = \int_0^6 v_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^4 v_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^6 (2t + 12)\,\mathrm{d}t + \int_0^4 (24 - 6t)\,\mathrm{d}t = (t^2 + 12t)\Big|_0^6 + (24t - 3t^2)\Big|_0^4 = 156 \text{ m}.$$

□

Bài 7. Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 18$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 5t$ m/s^2. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 s kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. **ĐS:** $\frac{333}{4}$ m

Lời giải.

Ta có: $v(t)=\int(t^2+5t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{5t^2}{2}+C$.

Khi đó $v_0=v(0)=C=18\Rightarrow v(t)=\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{5t^2}{2}+18$.

Quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 s kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là:

$$s=\int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^3\left(\frac{t^3}{3}+\frac{5t^2}{2}+18\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^4}{12}+\frac{5t^3}{6}+18t\right)\Big|_0^3=\frac{333}{4}\text{ m}.$$

□

Bài 8. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+5t$ m/s^2. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 s kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. **ĐS:** $\dfrac{4300}{3}$ m

✍ **Lời giải.**

Ta có: $v(t)=\int(t^2+3t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{3t^2}{2}+C$.

Khi đó $v_0=v(0)=C=10\Rightarrow v(t)=\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{3t^2}{2}+10$.

Quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 10 s kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là:

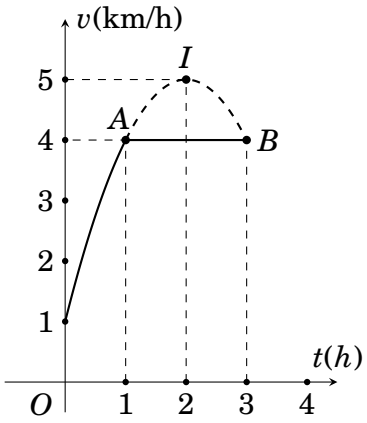
$$s=\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{10}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^4}{12}+\frac{t^3}{2}+10t\right)\Big|_0^{10}=\frac{4300}{3}\text{ m}.$$

□

Bài 9.

Vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v km/h phụ thuộc vào thời gian t h có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

ĐS: $\dfrac{32}{3}$ km



✍ **Lời giải.**

Gọi phương trình vận tốc của vật là $v(t)=at^2+bt+c$.

Khi đó đồ thị hàm số $v=v(t)$ là một parabol có đỉnh $I(2;5)$ và đi qua điểm $D(0;1)$ nên có hệ phương trình

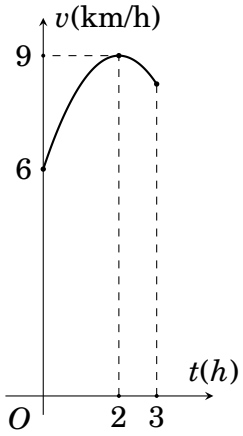
$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=2\\ a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=5\\ 1=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=4\\ c=1\end{cases}\Rightarrow v(t)=-t^2+4t+1.$$

Do đó quãng đường vật di chuyển được trong thời gian 3 giờ là $S=\displaystyle\int_0^1\left(-t^2+4t+1\right)\mathrm{d}t+4\cdot(3-1)=\dfrac{32}{3}$ km. □

Bài 10.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v km/h phụ thuộc thời gian t h có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.

ĐS: $\dfrac{99}{4}$ km



✍ Lời giải.

Gọi phương trình vận tốc của vật là $v(t)=at^2+bt+c$.

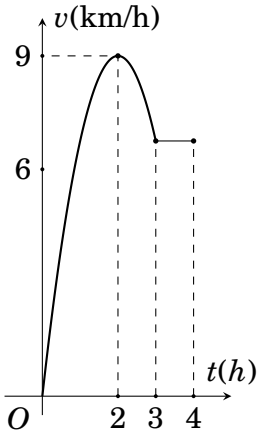
Khi đó đồ thị hàm số $v=v(t)$ là một parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $D(0;6)$ nên có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=2 \\ a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=9 \\ 6=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{4} \\ b=3 \\ c=6 \end{cases} \Rightarrow v(t)=-\frac{3}{4}t^2+3t+6.$$

Do đó quãng đường vật di chuyển được trong thời gian 3 giờ là $S=\displaystyle\int_0^3\left(-\frac{3}{4}t^2+3t+6\right)\mathrm{d}t=\frac{99}{4}$ km. □

Bài 11.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v km/h phụ thuộc thời gian t h có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó. **ĐS:** 27 km



✍ Lời giải.

Gọi phương trình vận tốc của vật là $v(t)=at^2+bt+c$.

Khi đó đồ thị hàm số $v=v(t)$ là một parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $D(0;0)$ nên có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=2 \\ a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=9 \\ 0=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{9}{4} \\ b=9 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow v(t)=-\frac{9}{4}t^2+9t.$$

Khi $t=3\Rightarrow v=v(3)=\dfrac{27}{4}$ m/s. Do đó quãng đường vật di chuyển được trong thời gian 4 giờ là

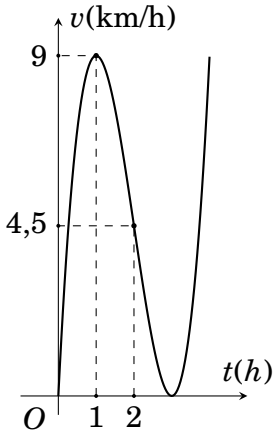
$$S=\int_0^3\left(-\frac{9}{4}t^2+9t\right)\mathrm{d}t+\frac{27}{4}(4-3)=27 \text{ km}.$$

□

Bài 12.

Một vật chuyển động trong t giờ với vận tốc v km/h phụ thuộc thời gian t h có đồ thị của vận tốc là một hàm bậc ba như hình bên. Đồ thị hàm số đạt điểm cực đại $A(1;9)$. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được cho đến thời điểm $v=0$.

ĐS: $\dfrac{243}{16}$ km



✍ Lời giải.

Gọi phương trình vận tốc của vật là $v(t)=at^3+bt^2+ct+d \Rightarrow v'(t)=3at^2+2bt+c$.

Đồ thị vận tốc đi qua điểm $(0;0)$, $A(1;9)$ và $(2;4{,}5)$ nên ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 0=a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d \\ 9=a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d \\ 0=3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c \\ 4{,}5=a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+b+c=9 \\ 3a+2b+c=0 \\ 8a+4b+2c=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{9}{4} \\ b=-\dfrac{27}{2} \\ c=\dfrac{81}{4} \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow v(t)=\frac{9}{4}t^3-\frac{27}{2}t^2+\frac{81}{4}t.$$

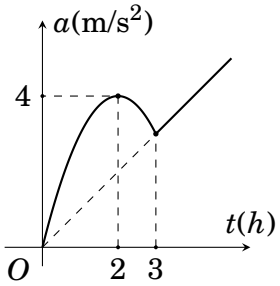
Khi $v(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{4}t^3-\dfrac{27}{2}t^2+\dfrac{81}{4}t=0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{4}t(t^2-6t+9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=3. \end{array}\right.$

Quãng đường vật chuyển động đến khi vận tốc bằng 0 là: $s=\displaystyle\int_0^3 \left(\frac{9}{4}t^3-\frac{27}{2}t^2+\frac{81}{4}t\right)\mathrm{d}t=\frac{243}{16}$ km. □

Bài 13.

Một vật chuyển động trong 4 giây với gia tốc a m/s^2 phụ thuộc thời gian t s có đồ thị của gia tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động đồ thị là một parabol có đỉnh $I(2;4)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giây đó. Biết rằng vận tốc của vật tại giây thứ 3 bằng 18 m/s.

ĐS: $\dfrac{1715}{36}$ m



✍ Lời giải.

Gọi phương trình gia tốc của vật (trong khoảng thời gian 3 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động) là $a_1(t)=at^2+bt+c$.

Đồ thị gia tốc đi qua điểm $O(0;0)$ và có đỉnh $(2;4)$ nên ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 0=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \\ 4=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow a_1(t)=-t^2+4t.$$

Khi $t=3 \Rightarrow a=a_1(3)=-3^2+4\cdot 3=3$ m/s^2.

Gọi phương trình gia tốc kể từ thời điểm $t=3$ giây trở đi là $a_2(t)=dt+e$.

Đồ thị gia tốc đi qua điểm $(0;0)$ và $(3,3)$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} d\cdot 0+e=0 \\ d\cdot 3+e=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=1 \\ e=0 \end{cases} \Rightarrow a_2(t)=t.$

Vận tốc của vật trước 3 giây là: $v_1(t)=\int a_1(t)\,\mathrm{d}t=\int(-t^2+4t)\,\mathrm{d}t=-\dfrac{t^3}{3}+2t^2+C_1$.

Vì $v(3)=18\Leftrightarrow-\dfrac{3^3}{3}+2\cdot3^2+C_1=18\Leftrightarrow C_1=9\Rightarrow v_1(t)=-\dfrac{t^3}{3}+2t^2+9$.

Vật tốc của vật sau 3 giây là $v_2(t)=\int a_2(t)\,\mathrm{d}t=\int t\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}t^2+C_2$.

Vì $v(3)=18\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cdot3^2+C_2=18\Leftrightarrow C_2=13{,}5\Rightarrow v_2(t)=\dfrac{1}{2}t^2+13{,}5$.

Quãng đường vật đi được sau 4 s kể từ lúc bắt đầu chuyển động là

$$s=\int_0^3\left(-\frac{t^3}{3}+2t^2+9\right)\mathrm{d}t+\int_3^4\left(-\frac{t^2}{2}+13{,}5\right)\mathrm{d}t=\frac{1715}{36}\text{ m}.$$

□

2 THỂ TÍCH

2.1 Thể tích của vật thể

Tính thể tích của vật thể

① Tính $S(x)$.

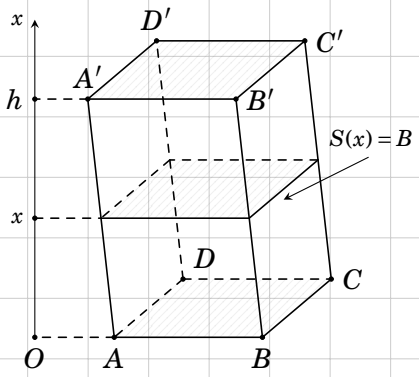
② Xác định cận a, b.

③ Tính tích phân $V=\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 9. Tính thể tích khối lăng trụ, biết diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h.

Lời giải:

Chọn trục Ox song song với đường cao của khối lăng trụ, còn hai đáy nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x=0$ và $x=h$ (hình vẽ).



Hiển nhiên một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox, cắt lăng trụ theo một thiết diện có diện tích không đổi $S(x)=B\,(0\le x\le h)$.

Áp dụng công thức tích thể tích vật thể, ta có:

$$V=\int_0^h S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^h B\,\mathrm{d}x=Bx\Big|_0^h=Bh.$$

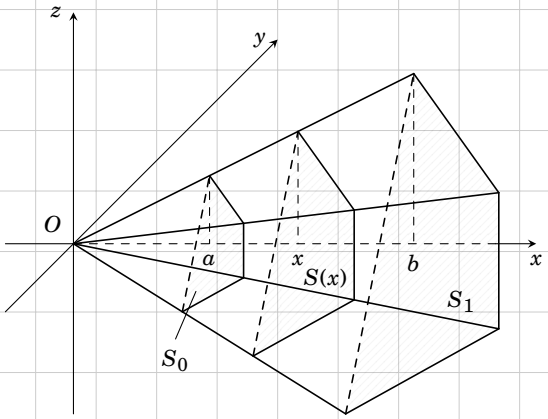
Ví dụ 10. Cho khối chóp cụt có chiều cao h, diện tích đáy nhỏ và đáy lớn theo thứ tự là S_0, S_1. Chứng minh thể tích thể tích V của nó là $V=\dfrac{h}{3}\left(S_0+S_1+\sqrt{S_0S_1}\right)$.

Lời giải:

Ta có $\dfrac{S(x)}{S_1}=\left(\dfrac{x}{b}\right)^2 \Rightarrow S(x)=\dfrac{S_1x^2}{b^2}$.

$$V = \int_a^b \frac{S_1x^2}{b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{S_1}{b^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{S_1}{3b^2}\left(b^3-a^3\right)$$
$$= \frac{S_1(b-a)}{3}\frac{\left(b^2+ba+a^2\right)}{b^2}.$$

Thay $b-a=h$ và $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{S_0}{S_1}$, ta được $V=\dfrac{h}{3}\left(S_0+S_1+\sqrt{S_0S_1}\right)$.



Ví dụ 11. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(1\le x\le 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng $3x$ và $2\sqrt{3x^2-2}$.

Lời giải: Diện tích thiết diện là $S(x)=3x\sqrt{3x^2-2}$.

Suy ra thể tích vật thể tạo thành là

$$V=\int_1^3 S(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^3 3x\sqrt{3x^2-2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{3x^2-2}\,\mathrm{d}(3x^2-2)=\frac{1}{3}\sqrt{(3x^2-2)^3}\Big|_1^3=\frac{124}{3}.$$

Bài 14. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng x và $2\sqrt{9-x^2}$. **ĐS:** $V=18$.

✍ **Lời giải.**

Diện tích thiết diện là $S(x)=2x\sqrt{9-x^2}$.

Suy ra thể tích vật thể tạo thành là

$$V=\int_1^3 S(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^3 2x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x=-\int_1^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}(9-x^2)=-\frac{2}{3}\sqrt{(9-x^2)^3}\Big|_0^3=18.$$

□

Bài 15. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le\pi)$ là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$. **ĐS:** $V=2\sqrt{3}$.

✍ **Lời giải.**

Diện tích thiết diện là $S(x)=\dfrac{(2\sqrt{\sin x})^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\sin x$.

Suy ra thể tích vật thể tạo thành là

$$V=\int_0^\pi S(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^\pi\sqrt{3}\sin x\,\mathrm{d}x=-\sqrt{3}\cos x\Big|_0^\pi=2\sqrt{3}.$$

□

Bài 16. Thể tích vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=2$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 2)$ là một nửa hình tròn đường kính $\sqrt{5}x^2$. **ĐS:** $V=4\pi$.

✍ **Lời giải.**

Diện tích thiết diện là $S(x)=\pi\left(\dfrac{\sqrt{5}x^2}{2}\right)^2=\dfrac{5\pi}{4}x^4$.

Suy ra thể tích vật thể tạo thành là

$$V=\int_0^2 S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 \frac{5\pi}{4}x^4\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}x^5\Big|_0^2=4\pi.$$

□

Bài 17. Xét trong không gian $Oxyz$, tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1$ và $x=1$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(-1\le x\le 1)$ là một hình vuông cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$. **ĐS:** $V=\dfrac{16}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Diện tích của thiết diện là $S(x)=\left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2=4(1-x^2)$.

Vậy thể tích vật thể tạo thành là $V=\displaystyle\int_{-1}^{1}4(1-x^2)\,\mathrm{d}x=4\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{16}{3}$. □

Bài 18. Xét trong không gian $Oxyz$, tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=1$ và $x=4$ biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(1\le x\le 4)$ là một hình vuông cạnh là $\sqrt{x}$. **ĐS:** $V=\dfrac{15}{2}$.

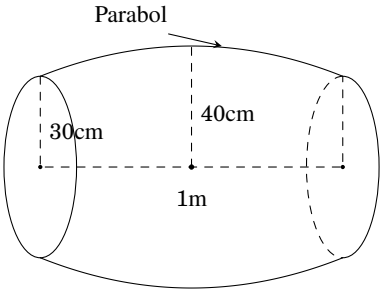
✍ **Lời giải.**

Diện tích của thiết diện là $S(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$.

Vậy thể tích vật thể tạo thành là $V=\displaystyle\int_1^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_1^4=\frac{15}{2}$. □

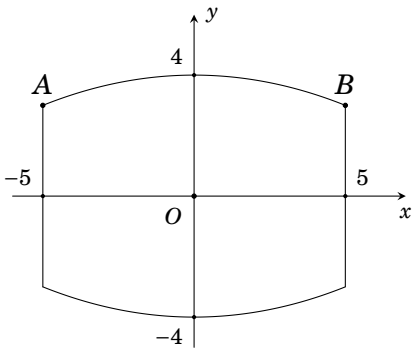
Bài 19.

Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính 40 cm, chiều dài của trống là 1 m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường parabol. Tính thể tích của cái trống. **ĐS:** $V=425{,}2$ lít.



✍ **Lời giải.**

Mặt phẳng đi qua trục của trống cắt trống ta được hình. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Parabol đi qua 3 điểm $A(-5;3)$, $(0;4)$, $B(5;3)$ là $y=-0{,}04x^2+4$.

Thiết diện vuông góc với trục của cái trống là một hình tròn. Diện tích của thiết diện là $S(x)=\pi R^2=\pi(-0{,}04x^2+4)^2=\pi\left(\dfrac{1}{625}x^4-\dfrac{8}{25}x^2+16\right)$.

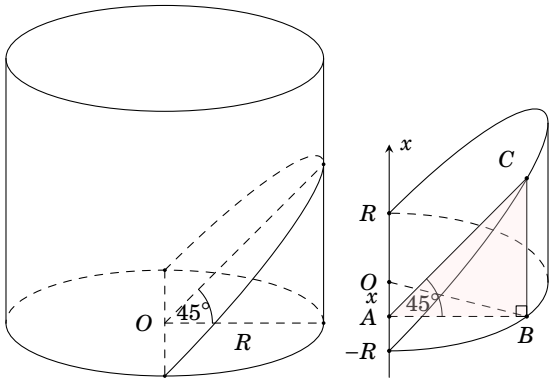
Vậy thể tích của cái trống là

$$\begin{aligned}V&=\int_{-5}^{5}S(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-5}^{5}\pi\left(\frac{1}{625}x^4-\frac{8}{25}x^2+16\right)\mathrm{d}x\\&=\pi\left(\frac{1}{625}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{8}{25}\cdot\frac{x^3}{3}+16x\right)\Big|_{-5}^{5}\approx 425{,}2.\end{aligned}$$

□

Bài 20. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R. Tính thể tích vật thể tạo thành bởi đáy của hình trụ và mặt phẳng qua đường kính đáy, biết mặt phẳng tạo với đáy một góc 45°. **ĐS:** $V = \dfrac{2R^3}{3}$.

✍ **Lời giải.**



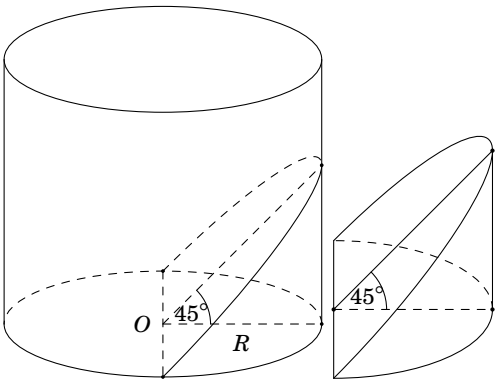
Chọn trục tọa độ như hình vẽ, thiết diện vuông góc với Ox là tam giác vuông cân tại B.

Ta có $AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow S(x) = S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)$.

Vậy thể tích vật thể tạo thành là $V = \displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{2R^3}{3}$. □

Bài 21.

Một vật thể bằng gỗ có dạng khối trụ với bán kính đáy bằng 10cm. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng có giao tuyến với đáy là một đường kính của đáy và tạo với đáy góc 45° (như hình vẽ). Tính thể tích V của khối gỗ bé. **ĐS:** $V = \dfrac{2000}{3}\mathrm{cm}^3$.

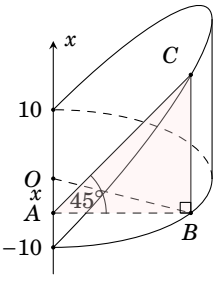


✍ **Lời giải.**

Chọn trục tọa độ như hình vẽ, thiết diện vuông góc với Ox là tam giác vuông cân tại B.

Ta có $AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{10^2 - x^2} \Rightarrow S(x) = S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}(100 - x^2)$.

Vậy thể tích vật thể tạo thành là $V = \displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{1}{2}(100 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(100x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-10}^{10} = \dfrac{2000}{3}\mathrm{cm}^3$.



□

2.2 Tính thể tích của vật thể tròn xoay

① Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox: $V_{Ox} = \pi \displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

② Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục tung và

hai đường thẳng $y=c$, $y=d$ quanh trục Oy: $V_{Oy}=\pi\displaystyle\int_c^d [g(y)]^2\,\mathrm{d}y$.

Ví dụ 12. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thanh khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

ĐS: $V=\pi(\pi+1)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $V_{Ox}=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)\,\mathrm{d}x=\pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1)$. □

Ví dụ 13. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

ĐS: $V=2\pi(\pi+1)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $V_{Ox}=\pi\displaystyle\int_0^{\pi} y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(2+\sin x)\,\mathrm{d}x=\pi(2x-\cos x)\Big|_0^{\pi}=2\pi(\pi+1)$. □

Ví dụ 14. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Lời giải: Ta có $V_{Ox}=\pi\displaystyle\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\pi\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi(\mathrm{e}^2-1)}{2}$.

Ví dụ 15. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Lời giải: Ta có $V_{Ox}=\pi\displaystyle\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\frac{4\pi}{3}$.

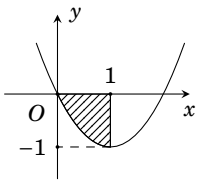
Bài 22. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$.

ĐS: $\dfrac{8\pi}{15}$

✍ **Lời giải.**

Thể tích của khối tròn xoay cần tính là

$$V=\pi\int_0^1 \left[(x^2-2x)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{8\pi}{15}.$$



□

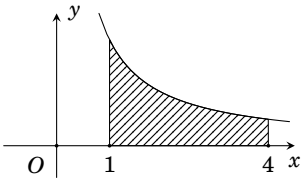
Bài 23. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{2}{x}$, $y=0$, $x=1$ và $x=4$.

ĐS: 3π

✍ **Lời giải.**

Thể tích của khối tròn xoay cần tính là

$$V=\pi\int_1^4\left(\frac{2}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^4\frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x=4\pi\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4=3\pi.$$



□

Bài 24. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=0$, $y=x\sqrt{\ln(x+1)}$, $x=1$ xung quanh trục Ox. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{18}(12\ln 2-5)$

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm $x\sqrt{\ln(x+1)}=0 \Leftrightarrow x=0$.

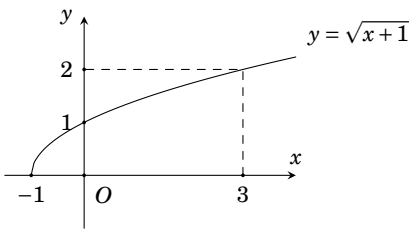
Từ đó suy ra thể tích của khối tròn xoay cần tính là

$$V=\pi\int\limits_0^1\left(x\sqrt{\ln(x+1)}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 x^2\ln(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi x^3\ln(x+1)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{18}(12\ln 2-5).$$

□

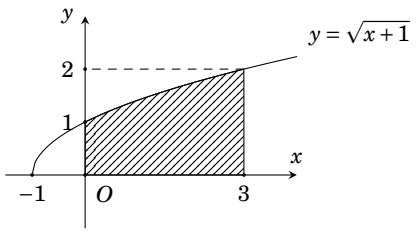
Bài 25.

Một bác thợ gốm làm một cái lọ có dáng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x+1}$ (đồ thị như hình vẽ bên dưới) và trục Ox quay quanh trục Ox. Biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Tính thể tích V của lọ. **ĐS:** $V=\dfrac{15\pi}{2}\mathrm{dm}^3$



✍ **Lời giải.**

Đáy lọ có đường kính bằng 2 dm ứng với $x=0$, miệng lọ có đường kính bằng 4 dm ứng với $x=3$.



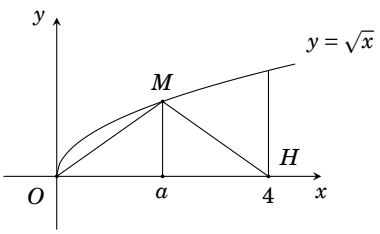
Từ đó suy ra thể tích của khối tròn xoay cần tính là

$$V=\pi\int\limits_0^3(x+1)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^3=\frac{15\pi}{2}.$$

□

Bài 26.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a$, $(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle OMH$ quanh trục Ox. Biết $V=2V_1$. Tính a. **ĐS:** $a=3$



✍ **Lời giải.**

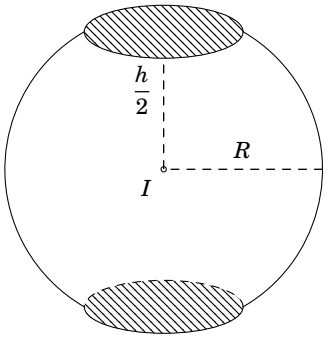
Ta có $V=\pi\int\limits_0^4 x\,\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4=8\pi$. Từ đó suy ra $V_1=4\pi$.

Mà $V_1=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 4a$ nên suy ra $a=3$.

□

Bài 27.

Coi cái trống trường là vật thể giới hạn bởi một mặt cầu bán kính $R=0{,}5$ m và hai mặt phẳng song song cách đều tâm I. Biết chiều cao của trống là $h=0{,}8$ m. Tính thể tích V của cái trống. **ĐS:** $V=\dfrac{59\pi}{375}\mathrm{m}^3$



✍ Lời giải.

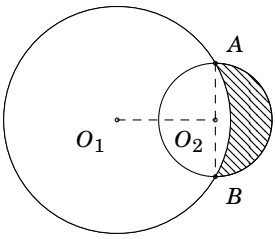
Ta coi phần hình cầu bị cắt là chỏm cầu có chiều cao $h_1 = 0{,}1$ m, nên $V_{\text{chỏm cầu}} = \pi h_1^2\left(R - \dfrac{h_1}{3}\right)$.

Ta có $V_{\text{trống}} = V_{\text{cầu}} - 2V_{\text{chỏm cầu}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 - 2\pi(h_1)^2\left(R - \dfrac{h_1}{3}\right) = \dfrac{59\pi}{375}$.

□

Bài 28.

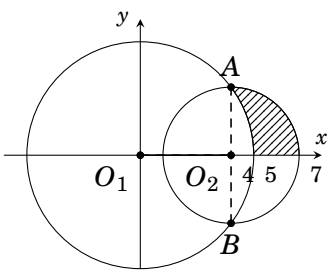
Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A và B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2). Gọi (D) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2, ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành? **ĐS:** $V = \dfrac{40\pi}{3}$



✍ Lời giải.

Lập hệ trục toạ độ với gốc là O_1, tia Ox trùng với tia O_1O_2 ta có miền D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = \sqrt{9 - (x-4)^2}$, $x = 4$, $x = 7$.
Từ đó suy ra thể tích của khối tròn xoay cần tính là

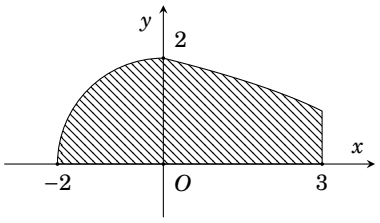
$$\begin{aligned} V &= \pi\int_4^7 \left[9 - (x-4)^2\right]\mathrm{d}x - \pi\int_4^5 \left(25 - x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[9x - \frac{(x-4)^3}{3}\right]\Big|_4^7 - \pi\left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_4^5 = \frac{40\pi}{3}. \end{aligned}$$



□

Bài 29.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $\dfrac{1}{4}$ cung tròn có bán kính $R = 2$, đường cong $y = \sqrt{4 - x}$ và trục hoành, $x = 3$ (miền tô đậm như hình). Tính thể tích V khối tạo thành khi cho (H) quay quanh Ox. **ĐS:** $V = \dfrac{77\pi}{6}$



✍ Lời giải.

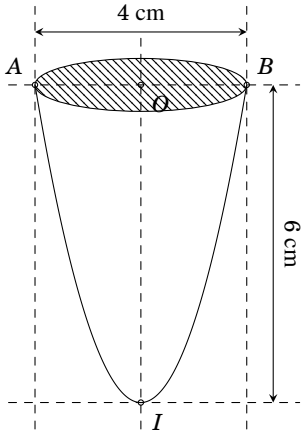
Thể tích của khối tròn xoay cần tính là

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-2}^{0}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x + \pi\int_0^3\left(\sqrt{4-x}\right)^2\mathrm{d}x = \pi\int_{-2}^{0}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x + \pi\int_0^3(4-x)\mathrm{d}x \\ &= \pi\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{0} + \pi\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3 = \frac{16\pi}{3} + \frac{15\pi}{2} = \frac{77\pi}{6}. \end{aligned}$$

□

Bài 30.

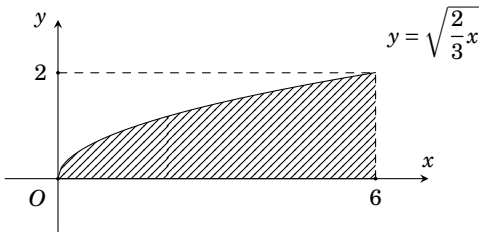
Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích V (cm^3) của vật thể đã cho. **ĐS:** $V = 12\pi$



✍ Lời giải.

Cái ly chính bằng vật thể tròn xoay sinh bởi miền D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\dfrac{2x}{3}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 6$ khi quay quanh trục Ox. Từ đó suy ra thể tích của khối tròn xoay cần tính là

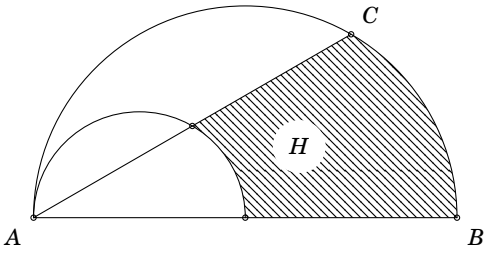
$$V = \pi \int_0^6 \left(\frac{2x}{3}\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^2}{3}\right)\Big|_0^6 = 12\pi.$$



□

Bài 31.

Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 8π và $\widehat{BAC} = 30°$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB. **ĐS:** $V = \dfrac{98\pi}{3}$



✍ Lời giải.

Nửa đường tròn đường kính AB có diện tích bằng 8π, suy ra $R = \dfrac{AB}{2} = 4$.

Lập hệ trục toạ độ như hình vẽ bên, nhận thấy đường thẳng AC có phương trình $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ (d).

Đường tròn lớn có phương trình $x^2 + y^2 = 16$.

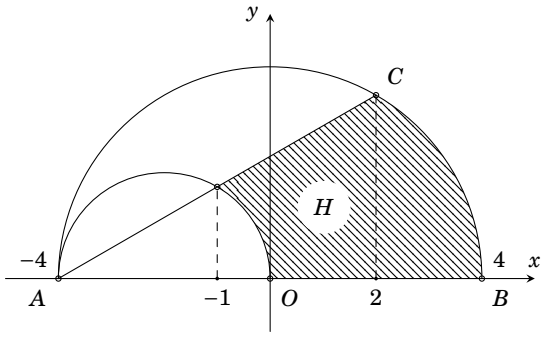
Đường tròn nhỏ có phương trình $(x+2)^2 + y^2 = 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đường tròn lớn là

$$x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với đường tròn nhỏ là

$$(x+2)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -4. \end{array}\right.$$



Từ đó ta suy ra thể tích khối tròn xoay cần tính bằng

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^{2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_{2}^{4}\left(16-x^2\right)\mathrm{d}x-\pi\int_{-1}^{0}\left[4-(x+2)^2\right]\mathrm{d}x \\ &= \pi\left(\frac{(x+4)^3}{9}\right)\Big|_{-1}^{2}+\pi\left(16x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{2}^{4}-\pi\left(-2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{98\pi}{3}. \end{aligned}$$

□

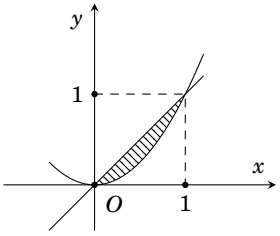
Bài 32. Tính thể tích V của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y=x^2$ và đường thẳng $d\colon y=x$ quay xung quanh trục Ox. **ĐS:** $V=\dfrac{2\pi}{15}$

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2=x\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$

Ta thấy trong khoảng $[0;1]$ thì $x^2\geq x^4$. Vậy thể tích vật thể tạo thành là

$$V=\pi\int_{0}^{1}\left|(x^2)^2-(x)^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int_{0}^{1}\left|x^4-x^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int_{0}^{1}\left(x^2-x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{2\pi}{15}.$$



□

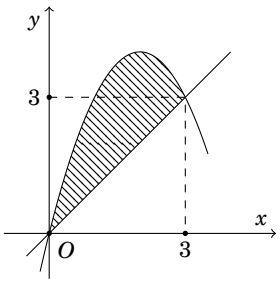
Bài 33. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $(C)\colon y=-x^2+4x$ và đường thẳng $d\colon y=x$. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay do hình phẳng (H) quay xung quanh trục hoành. **ĐS:** $V=\dfrac{108\pi}{5}$

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm là $-x^2+4x=x\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3.\end{array}\right.$

Vậy thể tích vật thể tạo thành là

$$V=\pi\int_{0}^{3}\left|(-x^2+4x)^2-(x)^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int_{0}^{3}\left(x^4-8x^3+15x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-2x^4+5x^3\right)\Big|_{0}^{3}=\frac{108\pi}{5}.$$



□

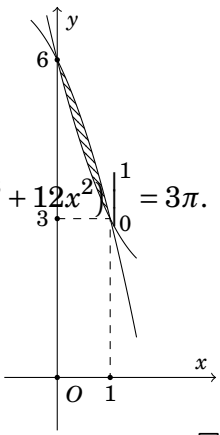
Bài 34. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục hoành Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=x^2-4x+6$ và $y=-x^2-2x+6$. **ĐS:** $V=3\pi$

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2-4x+6=-x^2-2x+6\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$

Vậy thể tích vật thể tạo thành là

$$V=\pi\int_{0}^{1}\left|(-x^2-2x+6)^2-(x^2-4x+6)^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int_{0}^{1}\left(12x^3-36x^2+24x\right)\mathrm{d}x=\pi\left(3x^4-12x^3+12x^2\right)\Big|_{0}^{1}=3\pi.$$

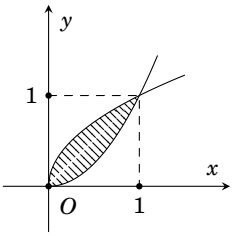


□

Bài 35. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$ xung quanh trục hoành Ox. **ĐS:** $V = \dfrac{3\pi}{10}$

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$



Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là

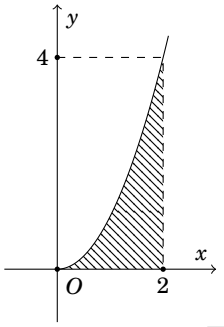
$$V = \pi \int\limits_0^1 \left|(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right| \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{10}.$$

□

Bài 36. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox. **ĐS:** $V = \dfrac{32\pi}{5}$

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.



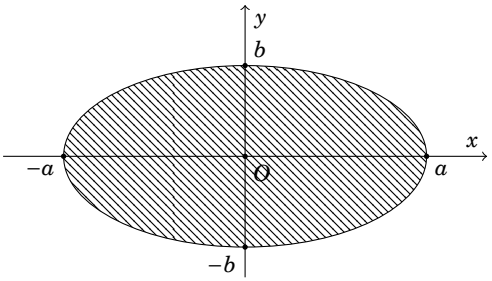
Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là

$$V = \pi \int\limits_0^2 \left|(x^2)^2\right| \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^2 x^4\,\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

□

Bài 37.

Tính thể tích của khối elip $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b > 0)$ khi xoay quanh trục



① Trục hoành Ox. **ĐS:** $\dfrac{4\pi}{3}ab^2$

② Trục tung Oy. **ĐS:** $\dfrac{4\pi}{3}a^2b$

✍ Lời giải.

① Trục hoành Ox. Elip giao với $Ox\colon y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a$.

Từ phương trình elip $\Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$.

$V_{Ox} = \pi \displaystyle\int\limits_{-a}^{a} y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = 2\pi b^2 \int\limits_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = 2\pi b^2\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a = 2\pi b^2\left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}ab^2$.

Vậy $V_{Ox} = \dfrac{4\pi}{3}ab^2$.

② Trục tung Oy. Elip giao với trục Oy, $x = 0$ là $\dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \Leftrightarrow y = \pm b$.

Từ phương trình elip $\Rightarrow \dfrac{a^2}{a^2} = 1 - \dfrac{y^2}{b^2} \Rightarrow x^2 = a^2\left(1 - \dfrac{y^2}{b^2}\right)$.

$$V_{Oy}=\pi\int\limits_{-b}^{b}x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int\limits_{-b}^{b}a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y=2\pi a^2\int\limits_{0}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y=2\pi a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_0^b=2\pi a^2\left(b-\frac{b}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}a^2b.$$ Vậy $V_{Oy}=\frac{4\pi}{3}a^2b$.

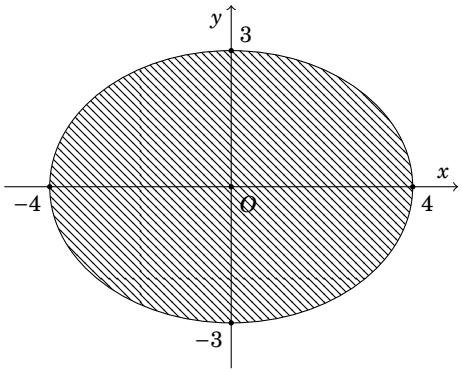
□

Bài 38.

Tính thể tích của khối elip (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ khi xoay (E) xung quanh trục

① Trục hoành Ox. **ĐS:** $V=48\pi$

② Trục tung Oy. **ĐS:** $V=64\pi$



✍ **Lời giải.**

① Trục hoành Ox. Áp dụng công thức bài 31 ta có $V_{Ox}=\frac{4\pi}{3}ab^2$, mà $a=4$, $b=3$.

Vậy $V_{Ox}=\frac{4\pi}{3}\cdot4\cdot3^2=48\pi$.

② Trục tung Oy. Áp dụng công thức bài 31 ta có $V_{Oy}=\frac{4\pi}{3}a^2b$, mà $a=4$, $b=3$.

Vậy $V_{Oy}=\frac{4\pi}{3}\cdot4^2\cdot3=64\pi$.

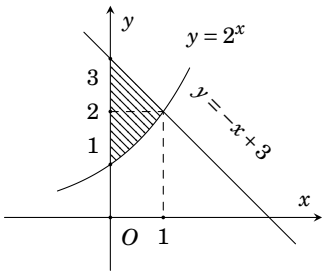
□

Bài 39.

Tính thể tích vật thể tròn xoay khi cho phần gạch sọc như hình vẽ xoay xung quanh

① Trục hoành Ox. **ĐS:** $\frac{(19\ln4-9)\pi}{3\ln4}$

② Trục tung Oy. **ĐS:** $\frac{(7\ln^22-12\ln2+6)\pi}{3\ln^22}$



✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm là $2^x=3-x\Leftrightarrow2^x+x-3=0\Leftrightarrow x=1$ (vì hàm số $f(x)=2^x+x-3$ đồng biến và $f(1)=0$).

① Trục hoành Ox. Dễ thấy trong đoạn $[0;1]$ thì $3-x\geq2\geq2^x\Rightarrow3-x\geq2^x$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là

$$V_{Ox}=\pi\int\limits_{0}^{1}\left|(3-x)^2-(2^x)^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{0}^{1}\left[(3-x)^2-(2^x)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\left(-\frac{(3-x)^3}{3}-\frac{4^x}{\ln4}\right)\Big|_0^1=\frac{(19\ln4-9)\pi}{3\ln4}.$$

② Trục tung Oy.

$2^x=y\Leftrightarrow x=\log_2y=\frac{\ln y}{\ln2}$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V_{Oy}=\pi\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{\ln y}{\ln2}\right)^2\mathrm{d}y+\pi\int\limits_{2}^{3}(3-y)^2\,\mathrm{d}y=A+B$.

$$B=\pi\int_2^3(3-y)^2\,\mathrm{d}y=\pi\left(-\frac{(3-y)^3}{3}\right)\Big|_2^3=\frac{\pi}{3}.$$

$$A=\frac{\pi}{\ln^2 2}\int_1^2\ln^2 y\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{\ln^2 2}\cdot M,\text{trong đó } M=\int_1^2\ln^2 y\,\mathrm{d}y.$$

$$\text{Đặt }\begin{cases}u_1=\ln^2 y\\ \mathrm{d}v_1=\mathrm{d}y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u_1=\dfrac{2\ln y}{y}\mathrm{d}y\\ v_1=y\end{cases}\Rightarrow M=\left(y\ln^2 y\right)\Big|_1^2-\int_1^2 2\ln y\,\mathrm{d}y=2\ln^2 2-N.$$

Ta đi tính $N=\displaystyle\int_1^2 2\ln y\,\mathrm{d}y$.

$$\text{Đặt }\begin{cases}u_2=2\ln y\\ \mathrm{d}v_2=\mathrm{d}y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u_2=\dfrac{2}{y}\mathrm{d}y\\ v_2=y\end{cases}\Rightarrow N=(2y\ln y)\Big|_1^2-\int_1^2 2\,\mathrm{d}y=(2y\ln y-2y)\Big|_1^2=4\ln 2-2.$$

Ta có $M=2\ln^2 2-N=2\ln^2 2-4\ln 2+2$.

Khi đó $V_{Oy}=A+B=\dfrac{(7\ln^2 2-12\ln 2+6)\pi}{3\ln^2 2}$.

□

D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1 NHẬN BIẾT

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$. Gọi S là diện tích của (H). Chọn khẳng định **sai**.

A. $S=-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Do hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ nên $S=-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là công thức sai.

Chọn đáp án A □

Câu 2. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=x-1$, $x=0$, $x=2$ và trục Ox. Diện tích S của hình phẳng D được tính bởi công thức

A. $S=\left|\displaystyle\int_0^2(x-1)\,\mathrm{d}x\right|$. **B.** $S=\displaystyle\int_0^2(1-x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_0^2|x-1|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_0^2(x-1)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo lí thuyết sách giáo khoa chọn $S=\displaystyle\int_0^2|x-1|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường $x=a$, $x=b$. Diện tích hình phẳng được tính theo công thức nào sau đây?

A. $S=\displaystyle\int_a^b|f(x)+g(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\left|\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\right|$.

✍ **Lời giải.**

Câu hỏi lý thuyết.

Chọn đáp án C □

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số đó và các đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$. Diện tích S của hình phẳng D được tính bằng công thức

A. $S=\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$, các đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Viết công thức tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\ln 4$, bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le \ln 4)$, có thiết diện là một hình vuông có độ dài là $\sqrt{x\mathrm{e}^x}$.

A. $V=\pi\int\limits_0^{\ln 4} x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_0^{\ln 4} \sqrt{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int\limits_0^{\ln 4} x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_0^{\ln 4} [x\mathrm{e}^x]^2\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(a\le x\le b)$ có thiết diện $S(x)$ là

$$V=\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

Do đó $V=\int\limits_0^{\ln 4} x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được tính theo công thức

A. $S=\pi\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức.

Chọn đáp án D □

Câu 7. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+3x-2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là

A. $V=\int\limits_1^2 \left|x^2-3x+2\right| \mathrm{d}x$.

B. $V=\int\limits_1^2 \left|x^2-3x+2\right|^2 \mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int\limits_1^2 \left(x^2-3x+2\right)^2 \mathrm{d}x$.

D. $V=\pi\int\limits_1^2 \left|x^2-3x+2\right| \mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức tính thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ là $V=\pi\int\limits_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$ $(a<b)$ là

A. $S=\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\left|S=\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right|$.

✍ **Lời giải.**

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$ $(a<b)$ là $S=\int\limits_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$; V là thể tích của khối tròn xoay tạo được khi quay (H) quanh trục Ox. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V=\pi\int\limits_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int\limits_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức ta có $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 10. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đó và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Diện tích S của hình phẳng D được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b [f(x)-g(x)] \mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b [g(x)-f(x)] \mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)| \mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\int\limits_a^b f(x)-g(x)\mathrm{d}x\right|$.

✍ **Lời giải.**

Công thức đúng là $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)| \mathrm{d}x$

Chọn đáp án C □

Câu 11. Cho các hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x),y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a;x=b$. Diện tích S được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\left|\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,dx-\int\limits_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Công thức diện tích hình phẳng là $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 12. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int\limits_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Định nghĩa diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$.

Chọn đáp án A □

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a,x=b,(a<b)$ được tính bởi công thức

A. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. **C.** $\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Định lí SGK.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số đó và các đường thẳng $x=a,x=b(a<b)$. Diện tích S của hình phẳng D được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\left|\int\limits_a^b [|f(x)-g(x)|]\,\mathrm{d}x\right|$.

✍ **Lời giải.**

Chọn $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính bởi công thức

A. $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

B. $S=\left|\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_a^b |g(x)|\mathrm{d}x$.

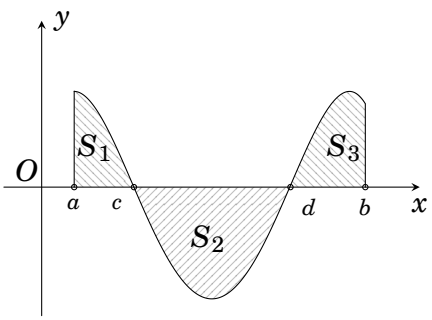
✍ **Lời giải.**

Theo định nghĩa sách giáo khoa ta có $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 16.

Tổng diện tích $S=S_1+S_2+S_3$ trong hình vẽ được tính bằng tích phân nào sau đây?



A. $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_d^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^d f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_d^b f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_d^b f(x)\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Từ hình vẽ, ta thấy $\begin{cases} S_1=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x \\ S_2=\int\limits_c^d [-f(x)]\,\mathrm{d}x \Rightarrow S=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_c^d f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_d^b f(x)\mathrm{d}x. \\ S_3=\int\limits_d^b f(x)\mathrm{d}x \end{cases}$

Chọn đáp án B □

Câu 17. Công thức tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$ là

A. $S=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\pi\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Công thức tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$ và $x=b$ là $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 18. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cùng liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $\mathscr{D}$ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Diện tích của $\mathscr{D}$ được tính

theo công thức

A. $\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$. **C.** $\int\limits_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

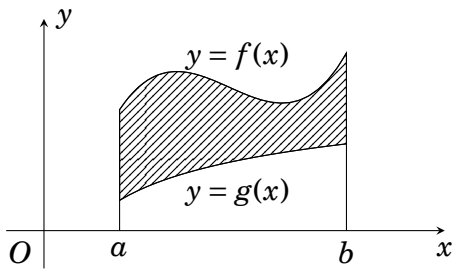
✍ **Lời giải.**

Diện tích của $\mathscr{D}$ được tính theo công thức $\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 19.

Cho hình phẳng trong hình bên (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào trong các công thức sau đây?



A. $V=\pi\int\limits_a^b \left[g^2(x)-f^2(x)\right]\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_a^b \left[f^2(x)-g^2(x)\right]\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích khối tròn xoay trên được tính theo công thức $V=\pi\int\limits_a^b \left|f^2(x)-g^2(x)\right|\mathrm{d}x$.

Vì ta thấy đồ thị $f(x)$ luôn nằm phía trên đồ thị $g(x)$ trên $[a;b]$ nên $f(x)\geq g(x), \forall x\in[a;b]$.

Vậy $V=\pi\int\limits_a^b \left[f^2(x)-g^2(x)\right]\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V=2\int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=2\pi^2\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $V=2\pi^2\int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V=\pi\int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=2\pi^2\int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

C. $V=2\int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=2\pi^2\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức (6) trang 120 SGK Giải tích 12 cơ bản, ta chọn $V=\pi\int\limits_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 22. Thể tích khối tròn xoay có được khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, y=0, x=0, x=1$ bằng

A. $V=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $V=\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{2}{3}$. **D.** $V=\dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

$V=\pi\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V=\pi^2\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=2\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức trong sách giáo khoa, thì công thức tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 24. Thể tích khối tròn xoay tạo được do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{x}{4}$; $y=0$; $x=1$; $x=4$ quay quanh trục Ox là

A. $\dfrac{21\pi}{16}$. **B.** $\dfrac{15}{16}$. **C.** $\dfrac{21}{16}$. **D.** $\dfrac{15\pi}{8}$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích của khối tròn xoay là $V=\pi\int\limits_1^4 \left(\dfrac{x}{4}\right)^2\,\mathrm{d}x=\left.\dfrac{\pi x^3}{48}\right|_1^4=\dfrac{21\pi}{16}$.

Chọn đáp án A □

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$. Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V=\int\limits_a^b f(x^2)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_a^b f(x^2)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo lý thuyết SGK.

Chọn đáp án C □

Câu 26. Cho hàm số (C): $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường (C); $y=0$; $x=a$; $x=b$. Quay (H) quanh trục Ox ta được một khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

✍ Lời giải.

Khối tròn xoay có thể tích là $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hàm số $y=\pi^x$ có đồ thị (C). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=2$, $x=3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính bởi công thức

A. $V=\pi^2\int\limits_2^3 \pi^x\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^3\int\limits_2^3 \pi^x\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_2^3 \pi^{2x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_3^2 \pi^{2x}\,\mathrm{d}x$.

✍ Lời giải.

Ta có $V=\pi\int\limits_2^3 \left(\pi^x\right)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_2^3 \pi^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 28. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int\limits_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

✍ Lời giải.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ được tính theo công thức $S=\int\limits_0^2 \left|\mathrm{e}^x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 29. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_0^2 2^x\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\int_0^2 2^{2x}\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_0^2 2^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int_0^2 2^x\mathrm{d}x$.

✍ Lời giải.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là $S=\int\limits_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 30. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\pi\int\limits_0^2 (x^2+3)^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_0^2 (x^2+3)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int\limits_0^2 (x^2+3)^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int\limits_0^2 (x^2+3)\,\mathrm{d}x$.

✍ Lời giải.

Thể tích của khối tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^2 (x^2+3)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 31. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\pi\displaystyle\int_1^2(x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_1^2(x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_1^2(x^2+2)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\displaystyle\int_1^2(x^2+2)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh Ox là $V=\pi\displaystyle\int_1^2(x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 32. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành, $x=2$ và $x=3$ là

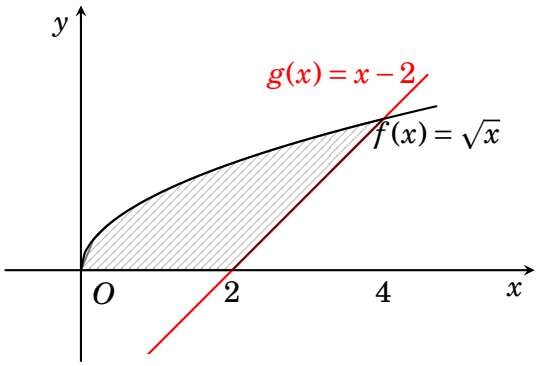
A. $S=\displaystyle\int_2^3 f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_2^3|f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int_2^3 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Do giả thiết suy ra diện tích hình phẳng bằng $S=\displaystyle\int_2^3|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình sau



A. $S=\dfrac{8}{3}$. **B.** $S=\dfrac{10}{3}$. **C.** $S=\dfrac{11}{3}$. **D.** $S=\dfrac{7}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Dựa vào hình vẽ, ta có hình phẳng được giới hạn bởi các đường $\begin{cases}y=\sqrt{x}\\ y=x-2\\ y=0.\end{cases}$

Suy ra $S=\displaystyle\int_0^2\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_2^4(\sqrt{x}-x+2)\mathrm{d}x=\dfrac{10}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V=\pi-1$. **B.** $V=\pi+1$. **C.** $V=\pi(\pi-1)$. **D.** $V=\pi(\pi+1)$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh trục hoành

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)dx=\pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Chọn đáp án D □

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox, các đường thẳng $x=a$, $x=b$ và V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V=\pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

The công thức thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox là $V=\pi\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox được định bởi công thức

A. $V=\pi\displaystyle\int_0^3 3^{x+1}\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_0^3 3^{x+1}\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_0^3 9^x\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\displaystyle\int_0^3 9^x\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox được định bởi công thức

$$V=\pi\int_0^3 y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^3 9^x\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 37. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4^x$, $y=0$, $x=1$ và $x=3$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox được định bởi công thức

A. $V=\pi\displaystyle\int_1^3 4^{2x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_1^3 4^{x+1}\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_1^3 4^{2x+1}\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\displaystyle\int_1^3 16^x\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox được định bởi công thức

$$V=\pi\int_1^3 y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^3 4^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án A □

Câu 38. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b$ $(a<b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$; $(a<b)$, xung quanh trục Ox được tính theo công thức $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=2\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi^2\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Đây chỉ là công thức theo lý thuyết của sách giáo khoa: $V=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 40. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ được tính theo công thức $S=\displaystyle\int_0^2 \left|\mathrm{e}^x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 41. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\displaystyle\int_0^2 2^x\mathrm{d}x$. **B.** $S=\pi\displaystyle\int_0^2 2^{2x}\mathrm{d}x$. **C.** $S=\displaystyle\int_0^2 2^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int_0^2 2^x\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là $S=\displaystyle\int_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 42. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2$, $y=0$, $x=1$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\pi\displaystyle\int_1^2 (x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_1^2 (x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_1^2 (x^2+2)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\displaystyle\int_1^2 (x^2+2)\,\mathrm{d}x$.

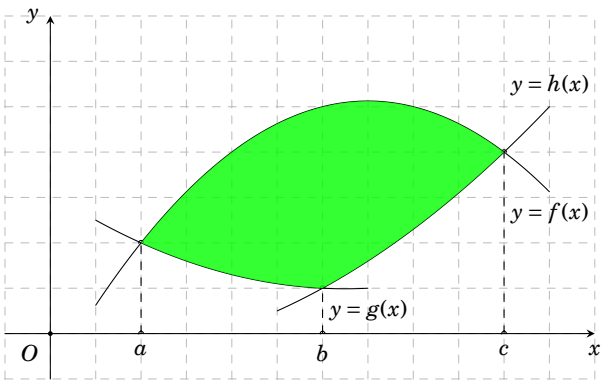
✍ **Lời giải.**

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh Ox là $V=\pi\displaystyle\int_1^2 (x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 43.

Hình phẳng được gạch sọc trong hình vẽ sau đây có diện tích là:



A. $S=\int\limits_a^c |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_b^c |f(x)-h(x)|\mathrm{d}x.$

B. $S=\int\limits_a^c |h(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_b^c |h(x)-f(x)|\mathrm{d}x.$

C. $S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_b^c |f(x)-h(x)|\mathrm{d}x.$

D. $S=\int\limits_a^b |h(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_b^c |h(x)-f(x)|\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

$S=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_b^c |f(x)-h(x)|\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$ và đường thẳng $x=b$ là

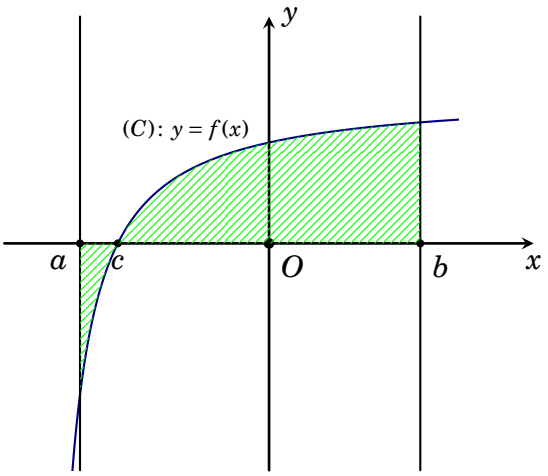
A. $S=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$ **C.** $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\pi\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

Công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$ và đường thẳng $x=b$ là $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án B □

Câu 45. Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b\,(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức



A. $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

B. $S=-\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

C. $S=\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|.$

D. $S=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có

$$S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c [0-f(x)]\mathrm{d}x+\int\limits_c^b [f(x)-0]\mathrm{d}x=-\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 46. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(x+2)^2$, $y=0$, $x=1$, $x=3$ là

A. 30. **B.** 18. **C.** $\dfrac{98}{3}$. **D.** 21.

✍ **Lời giải.**

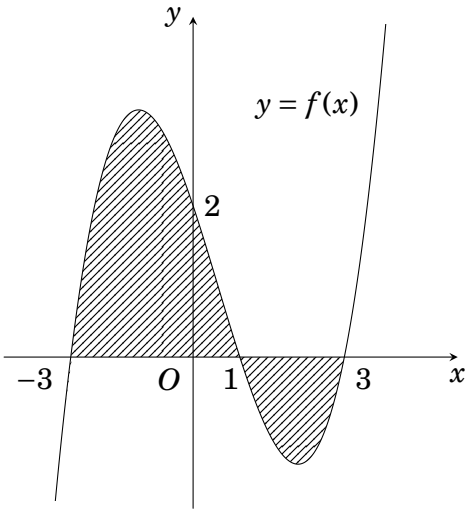
Gọi S là diện tích hình phẳng cần tìm. Khi đó $S=\displaystyle\int_1^3 (x+2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(x+2)^3\Big|_1^3=\frac{98}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 47.

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.

Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox (phần gạch sọc) được tính bởi công thức



A. $S=\left|\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **B.** $S=\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f(x)\geqslant 0$ với $x\in[-3;1]$, $f(x)\leqslant 0$ với $x\in[1;3]$.

Do đó $S=\displaystyle\int_{-3}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$, $(a<b)$ có diện tích S là

A. $S=\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Diện tích S của hình phẳng là $S=\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 49. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1;x=1$ được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ quay quanh trục hoành tạo thành vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Câu hỏi lý thuyết chọn "$\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$".

Chọn đáp án B □

Câu 51. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=\dfrac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, các đường thẳng $y=0,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$.

Khi (H) quay xung quanh trục Ox được vật thể tròn xoay có thể tích $V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=7$, $\displaystyle\int_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=8$, $\displaystyle\int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x=9$. Giá trị của $I=\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=5$. **B.** $I=6$. **C.** $I=7$. **D.** $I=8$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_3^{10} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x=8-9=-1$

Khi đó $I=\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\,\mathrm{d}x=7-1=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Cho các hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\displaystyle\int_a^a kf(x)\,\mathrm{d}x=0$. **B.** $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x=x\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Dựa vào các đáp án ta dễ dàng nhận thấy các đáp án A, C, D đúng, đáp án B sai.

Chọn đáp án B □

Câu 54. Cho $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<I<\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}<I<\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}<I<\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}<I<1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\,\mathrm{d}(\cos x)=-\dfrac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{1}{3}\left(\cos^3\dfrac{\pi}{3}-\cos^3 0\right)=\dfrac{7}{24}$.

Chọn đáp án A □

Câu 55. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\ln 2}\left(\mathrm{e}^{4x}+1\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{15}{4}+\ln 2$. **B.** $I=4+\ln 2$. **C.** $I=\dfrac{17}{4}+\ln 2$. **D.** $I=\dfrac{15}{2}+\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\left(\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}+x\right)\Big|_0^{\ln 2}=\left(\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{4\ln 2}+\ln 2\right)-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}+\ln 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 56. Biết $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x=3$, $\int\limits_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x=9$. Tích phân $\int\limits_2^5[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 12.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_2^5[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x=3+9=12$.

Chọn đáp án D □

Câu 57. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5}{4}$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,\mathrm{d}x=F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,\mathrm{d}x=F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 58. Tích phân $\int\limits_1^2(x+3)^2\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 61. **B.** $\dfrac{61}{3}$. **C.** $\dfrac{61}{9}$. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

$\int\limits_1^2(x+3)^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2(x+3)^2\,\mathrm{d}(x+3)=\dfrac{(x+3)^3}{3}\Big|_1^2=\dfrac{61}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 59. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số bất kỳ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^a f(x)\mathrm{d}x=0.$ **B.** $\int\limits_a^b cf(x)\mathrm{d}x=c\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x.$ **D.** $\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

Theo tính chất trong sách giáo khoa thì $\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ sai.

Chọn đáp án C □

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2;3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2;3)$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{2}[f(x)+2x]\,\mathrm{d}x$, biết $F(-1)=1$, $F(2)=4$.

A. $I=6.$ **B.** $I=10.$ **C.** $I=3.$ **D.** $I=9.$

✍ **Lời giải.**

$$I=\int\limits_{-1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{2}2x\,\mathrm{d}x=F(x)|_{-1}^{2}+x^2\big|_{-1}^{2}=F(2)-F(-1)+4-1=4-1+3=6.$$

Chọn đáp án A □

Câu 61. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^b|g(x)|\,\mathrm{d}x.$ **B.** $\int\limits_a^b(f(x)\cdot g(x))\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^b[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$ **D.** $\int\limits_a^b|f(x)+g(x)|\,\mathrm{d}x=\left|\int\limits_a^b[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x\right|.$

✍ **Lời giải.**

Theo tính chất của tích phân ta có

$$\int\limits_a^b[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 62. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và h, k là các hằng số. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_a^b[hf(x)-kg(x)]\,\mathrm{d}x=h\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-k\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

B. $\int\limits_b^a[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^b[h+kf(x)]\,\mathrm{d}x=h+k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

D. $\int\limits_a^b[f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x=f(x)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

Theo tính chất của tích phân ta có

$$\int_a^b [hf(x)-kg(x)]\,\mathrm{d}x = h\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - k\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$.
Tính $I=\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\dfrac{7}{2}$.

✍ **Lời giải.**

$I=\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^2 = f(2)-f(1)=1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 64. Tích phân $\int_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+3}$ bằng

A. $\dfrac{16}{225}$. **B.** $\log\dfrac{5}{3}$. **C.** $\ln\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{15}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+3} = \ln|x+3|\Big|_0^2 = \ln|2+3|-\ln|0+3| = \ln\dfrac{5}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 65. Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10$, $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6$.
Tính $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 10.$

Tương tự $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 6.$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} u+3v=10 \\ 2u-v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases}$, trong đó $u=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$, $v=\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4+2=6.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Cho $a<b<c$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 12$, $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Khi đó giá trị của $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = 12 - 4 = 8.$

Chọn đáp án C □

Câu 67. Tính tích phân $\int\limits_0^\pi \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^\pi \sin 3x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^\pi = -\dfrac{1}{3}(-1-1) = \dfrac{2}{3}.$

Chọn đáp án B □

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $I = \int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\dfrac{7}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1.$

Chọn đáp án A □

Câu 69. Cho $\int\limits_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_{-2}^4 f(t)\,\mathrm{d}t = -4$. Tính $\int\limits_2^4 f(y)\mathrm{d}y$.

A. $I=5$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-5$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int\limits_{-2}^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_2^4 f(y)\mathrm{d}y = \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int\limits_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -4 - 1 = -5.$

Vậy $\int\limits_2^4 f(y)\mathrm{d}y = -5.$

Chọn đáp án D □

Câu 70. Tích phân $I = \int\limits_0^{2019} 2^x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $2^{2019}-1$. **B.** $\dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}$. **C.** $\dfrac{2^{2019}}{\ln 2}$. **D.** 2^{2019}.

✍ **Lời giải.**

$I = \int\limits_0^{2019} 2^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^{2019} = \dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}.$

Chọn đáp án B □

Câu 71. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Giá trị của $\int\limits_0^2 [f(x) - 5g(x) + x]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $I = \int\limits_0^2 [f(x) - 5g(x) + x]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 5\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^2 x\,\mathrm{d}x.$

Do đó : $I = 3 - 5(-1) + \dfrac{1}{2}(2^2 - 0^2) = 10.$

Chọn đáp án D □

Câu 72. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$, khi đó $\int\limits_0^2 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int\limits_0^2 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 3 - (-2) = 8.$

Chọn đáp án C □

Câu 73. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $(a < b)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$ **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$ **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -2\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án B □

Câu 74. Cho các hằng số a, b, $k\,(k \neq 0)$ và hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A. $\int\limits_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$ **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$ **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

✍ **Lời giải.**

Mệnh đề $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \neq \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ là mệnh đề sai vì $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Chọn đáp án D □

Câu 75. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$

A. $I = 5.$ **B.** $I = -3.$ **C.** $I = 3.$ **D.** $P = 4.$

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x=1+4=5.$

Chọn đáp án A □

Câu 76. Giá trị của $\int\limits_0^1 \left(2019x^{2018}-1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B**. $2^{2017}+1$. **C**. $2^{2017}-1$. **D**. 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\int\limits_0^1 \left(2019x^{2018}-1\right)\mathrm{d}x=\left(x^{2019}-x\right)\Big|_0^1=0.$

Chọn đáp án A □

Câu 77. Cho $\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=3\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tích phân $\int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 0.

✍ **Lời giải.**

$\int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3+1=4.$

Chọn đáp án B □

Câu 78. Tích phân $\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $\ln 2-1$. **B**. $-\ln 2$. **C**. $\ln 2$. **D**. $1-\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$

Chọn đáp án C □

Câu 79. Tích phân $I=\int\limits_0^2 \mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B**. 0. **C**. 1. **D**. 2.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^2 \mathrm{d}x=x\Big|_0^2=2.$

Chọn đáp án D □

Câu 80. Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B**. 1. **C**. $\frac{\pi}{2}$. **D**. π.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$

Chọn đáp án B □

Câu 81. Cho $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị của tích phân $L = \int\limits_0^3 [2f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

A. $L = 4$. **B.** $L = -1$. **C.** $L = -4$. **D.** $L = 1$.

✍ **Lời giải.**

$$L = \int\limits_0^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2\cdot 2 - 3 = 1.$$

Chọn đáp án D □

Câu 82. Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$ thì $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3 - 1 = 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 83. Giá trị tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1}$ bằng

A. $\log 2$. **B.** $\ln 2$. **C.** 1. **D.** $-\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1||_0^1 = \ln 2$.

Chọn đáp án B □

Câu 84. Tính $I = \int\limits_0^1 (3x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int\limits_0^1 (3x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x = \left(x^3 - x^2 + 3x\right)\Big|_0^1 = 3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 85. Khẳng định nào trong các khẳng định sau **đúng** với mọi hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kì thuộc K?

A. $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\int\limits_a^b [f(x)\cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b \dfrac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$.

D. $\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$.

✍ **Lời giải.**

Một trong các tính chất của tích phân là $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

A. $F(9) = -6$. **B.** $F(9) = 6$. **C.** $F(9) = 12$. **D.** $F(9) = -12$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 9 \Leftrightarrow F(9) - F(0) = 9 \Leftrightarrow F(9) = 9 + F(0) = 9 + 3 = 12$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 87. Tính tích phân $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\log 2$. **B.** 1. **C.** $\ln 2$. **D.** $-\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

$\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 88. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\limits_a^a kf(x)\,\mathrm{d}x = 0$. **B.** $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = x\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Biểu thức $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = x\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sai, vì một hàm khác hằng số không thể đưa ra ngoài dấu tích phân.

Chọn đáp án B ☐

Câu 89. Cho $F(x) = \left(ax^2 + bx - c\right)\mathrm{e}^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(2018x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^{2x}$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Tính $T = a + 2b + 4c$.

A. $T = 1011$. **B.** $T = -3035$. **C.** $T = 1007$. **D.** $T = -5053$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$f(x) = F'(x) = (2ax + b)\mathrm{e}^{2x} + 2\left(ax^2 + bx - c\right)\mathrm{e}^{2x} = \left[2ax^2 + (2a + 2b)x + (b - 2c)\right]\mathrm{e}^2.$$

Suy ra

$$\begin{cases} 2a & = 2018 \\ 2a + 2b & = -3 \\ b - 2c & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1009 \\ b = -\dfrac{2021}{2} \\ c = -\dfrac{2023}{4}. \end{cases}$$

Vậy $T = a + 2b + 4c = -3035$.

Chọn đáp án B ☐

Câu 90. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(1)-f(0)=2$. Tích phân $I=\int\limits_0^1 [f'(x)-\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $1-\mathrm{e}$. **B.** $1+\mathrm{e}$. **C.** $3-\mathrm{e}$. **D.** $3+\mathrm{e}$.

✍ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \left(f'(x)-\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= f(x)\Big|_0^1 - \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = f(1)-f(0)-(\mathrm{e}-\mathrm{e}^0) \\ &= 3-\mathrm{e}. \end{aligned}$$

Vậy $I=3-\mathrm{e}$.

Chọn đáp án C □

Câu 91. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^2 2g(x)\,\mathrm{d}x=8$. Khi đó $\int\limits_1^2 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** 18. **D.** 0.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x=4 \Rightarrow \int\limits_1^2 [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=6$.

Chọn đáp án B □

Câu 92. Cho tích phân $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=32$. Tính tích phân $J=\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. 32. **B.** 64. **C.** 8. **D.** 16.

✍ **Lời giải.**

Đặt $t=2x \Rightarrow \mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$. Với $x=0$ thì $t=0$, $x=2$ thì $t=4$.

Suy ra $\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 32=16$.

Chọn đáp án D □

Câu 93. Cho tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $J=\int\limits_0^2 [3f(x)-2]\,\mathrm{d}x$.

A. $J=6$. **B.** $J=2$. **C.** $J=8$. **D.** $J=4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $J=\int\limits_0^2 [3f(x)-2]\mathrm{d}x=3\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-2\int\limits_0^2 \mathrm{d}x=3\cdot 2-(2x)\Big|_0^2=6-4=2$.

Chọn đáp án B □

Câu 94. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x=7$, khi đó $\int\limits_0^2 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** -18. **C.** 24. **D.** 10.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^2 [f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3+3\times 7 = 24.$

Chọn đáp án C □

Câu 95. Tích phân $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$. **B.** $\dfrac{2}{3}\ln 2$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\dfrac{1}{3}\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln 4 - \frac{1}{3}\ln 1 = \frac{2}{3}\ln 2.$$

Chọn đáp án B □

Câu 96. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$, $\int\limits_4^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $\int\limits_1^{12} f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 17$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 11$. **D.** $I = 7$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 9-5 = 4.$$

Suy ra

$$\int\limits_1^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_4^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = 4+3 = 7.$$

Chọn đáp án D □

Câu 97. Cho $\int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 6$ và $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 18.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 6+3 = 9.$

Chọn đáp án C □

Câu 98. Giả sử $f(x)$ là một hàm số bất kì liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$ và $a,b,c,b+c \in (\alpha;\beta)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo các tính chất của tích phân, ta suy ra

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là khẳng định đúng.

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{b+c}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là khẳng định đúng.

— $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ là khẳng định đúng vì

$$\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Vậy $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ là khẳng định **sai**.

Chọn đáp án B □

Câu 99. Cho $\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Tích phân $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + (-1) = 1.$

Vậy $\int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Chọn đáp án C □

Câu 100. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 7$, khi đó $\int\limits_0^2 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 10. **C.** 24. **D.** -18.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^2 [f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 + 3 \cdot 7 = 24.$

Chọn đáp án C □

Câu 101. Cho $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$, khi đó $\int\limits_0^2 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^2 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 3 - (-2) = 8.$

Chọn đáp án C □

Câu 102. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$ **B.** $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x.$

C. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t.$ **D.** $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

Theo lý thuyết, ta có $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án B □

Câu 103. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$, giá trị của $\int\limits_0^1 [f(x)+2g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** -1. **C.** 5. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\int\limits_0^1 [f(x)+2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 2\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 + 2(-2) = -1.$$

Chọn đáp án B □

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = -6$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = -4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = -4.$

Chọn đáp án D □

Câu 105. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$. Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = b - a.$ **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b).$

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = a - b.$ **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$

✍ **Lời giải.**

Áp dụng định nghĩa của tích phân ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$

Chọn đáp án D □

Câu 106. Giá trị của $\int\limits_0^1 (2019x^{2018} - 1)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** $2^{2017} + 1$. **C.** $2^{2017} - 1$. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 (2019x^{2018} - 1)\,\mathrm{d}x = \left(x^{2019} - x\right)\Big|_0^1 = 0.$

Chọn đáp án A □

Câu 107. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 \dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$.

A. $I=\ln 3-1$. **B.** $I=\ln\sqrt{3}$. **C.** $I=\ln 2+1$. **D.** $I=\ln 2-1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_1^2 \dfrac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2=\dfrac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)=\dfrac{1}{2}\ln 3=\ln\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 108. Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^0 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=(x^2+x)\Big|_{-1}^0=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 109. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K và các hằng số $a,b,c\in K$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k\in\mathbb{R}$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\neq\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 110. Cho hai số thực a, b tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)+F(a)$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức lý thuyết thì $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 111. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b(a<b)$ được tính theo công thức

A. $S=\int\limits_a^b \pi|f(x)|\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Do định nghĩa ta có $S=\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 112. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(2)=2$, $f(3)=5$; hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $[2;3]$. Khi đó $\int\limits_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 10. **D.** 7.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức lý thuyết ta có $\int\limits_2^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_2^3=f(3)-f(2)=5-2=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ biết $F(0)=2$ và $F(1)=5$.

A. $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-3$. **B.** $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=7$. **C.** $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$. **D.** $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)=5-2=3$.

Chọn đáp án D □

Câu 114. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=1$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=9$. Giá trị của $f(3)$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** 10. **D.** 9.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_0^3\Leftrightarrow 9=f(3)-f(0)\Leftrightarrow f(3)=9+f(0)=10$.

Chọn đáp án C □

Câu 115. Tích phân $I=\int\limits_0^1 \dfrac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=2\ln 2$. **B.** $I=2\ln 3$. **C.** $I=\ln 2$. **D.** $I=\ln 3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^1 \dfrac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x=\ln|2x+1|\Big|_0^1=\ln 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 116. Kí hiệu z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+1=0$. Giá trị của z_1+z_2 bằng

A. i. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $-i$.

✍ **Lời giải.**

Áp dụng định lý Vi-ét ta có $z_1+z_2=-1$.

Chọn đáp án B □

Câu 117. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=1$, $\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=3$. **D.** $I=4$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x=1+4=5$.

Chọn đáp án A □

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=9$, $\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=4$. Tính giá trị của $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=36$. **C.** $I=\dfrac{9}{4}$. **D.** $I=13$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=9+4=13$.

Chọn đáp án D □

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=2$ thì tích phân $\int\limits_0^3[x-3f(x)]\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^3[x-3f(x)]\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 x\mathrm{d}x-3\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2\Big|_0^3-6=\dfrac{9}{2}-6=-\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 120. Cho $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=6$ và $\int\limits_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x=8$. Giá trị của $\int\limits_1^5[4f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 10.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^5[4f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=4\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x=4\cdot 6-8=16$.

Chọn đáp án A □

Câu 121. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{-1}^5[2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=-5$; $\int\limits_{-1}^5[3f(x)-5g(x)]\,\mathrm{d}x=21$. Tính $\int\limits_{-1}^5[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. -5. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

✍ **Lời giải.**

Đặt $I_1=\int\limits_{-1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$, $I_2=\int\limits_{-1}^{5}g(x)\mathrm{d}x$. Ta có

$$\int\limits_{-1}^{5}[2f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=-5\Leftrightarrow 2\int\limits_{-1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x+3\int\limits_{-1}^{5}g(x)\,\mathrm{d}x=-5\Rightarrow 2I_1+3I_2=-5.$$
$$\int\limits_{-1}^{5}[3f(x)-5g(x)]\,\mathrm{d}x=21\Leftrightarrow 3\int\limits_{-1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x-5\int\limits_{-1}^{5}g(x)\,\mathrm{d}x=21\Rightarrow 3I_1-5I_2=21.$$

Từ đó suy ra $I_1=2$, $I_2=-3$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{5}[f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{5}f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{5}g(x)\,\mathrm{d}x=I_1+I_2=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 122. Kết quả của tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=1$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 123. Cho các số thực a, b $(a<b)$. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thì

A. $\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=f'(a)-f'(b)$. **B.** $\int\limits_{a}^{b}f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$.

C. $\int\limits_{a}^{b}f'(x)\mathrm{d}x=f(a)-f(b)$. **D.** $\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=f'(b)-f'(a)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{a}^{b}f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_a^{b}=f(b)-f(a)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 124. Cho $\int_1^5 h(x)\mathrm{d}x=4$ và $\int_1^7 h(x)\mathrm{d}x=10$, khi đó $\int_5^7 h(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_1^7 h(x)\mathrm{d}x=\int_1^5 h(x)\mathrm{d}x+\int_5^7 h(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int_5^7 h(x)\mathrm{d}x=\int_1^7 h(x)\mathrm{d}x-\int_1^5 h(x)\mathrm{d}x=10-4=6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 125. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $F(x)$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. $\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(b)+F(a)$. **B.** $\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức Newton-Leibniz ta có: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Chọn đáp án B □

Câu 126. Cho $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4$, khi đó $\int\limits_1^3 [4f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 19.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_1^3 [4f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 4\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 4 \cdot 3 - 4 = 8$.

Chọn đáp án B □

Câu 127. Cho $\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $I = \int\limits_1^{-1} [2f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $I = -7$. **B.** $I = 7$. **C.** $I = -14$. **D.** $I = 14$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$I = \int\limits_1^{-1} [2f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1}^1 [2f(x) - 5g(x)]\,\mathrm{d}x = 5\int\limits_{-1}^1 g(x)\,\mathrm{d}x - 2\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 7.$$

Chọn đáp án B □

Câu 128. Biết $\int\limits_{2018}^{2019} f(x)\,\mathrm{d}x = -2$, $\int\limits_{2018}^{2019} g(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tích phân $\int\limits_{2018}^{2019} [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -2. **C.** 22. **D.** -10.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_{2018}^{2019} [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{2018}^{2019} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{2018}^{2019} g(x)\,\mathrm{d}x = -4 - 6 = -10$.

Chọn đáp án D □

Câu 129. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $a < c < b$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với k là hằng số.

C. $\int\limits_a^b \dfrac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo tính chất của tích phân xác định ta có

$$\int\limits_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với k là hằng số.

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

Ta không có tính chất $\int\limits_a^b \dfrac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$

Chọn đáp án C □

Câu 130. Biết $\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 9, \int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -5$. Tính $K = \int\limits_1^3 [2f(x) - 3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $K = 3$. **B.** $K = 33$. **C.** $K = 4$. **D.** $K = 14$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $K = 2\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - 3\int\limits_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 9 - 3\cdot(-5) = 33.$

Chọn đáp án B □

Câu 131. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$. **B.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) + F(a)$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F'(b) - F'(a)$.

✍ **Lời giải.**

Theo định nghĩa tích phân xác định ta có $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$

Chọn đáp án B □

Câu 132. Tính $I = \int\limits_1^3 \left(4x^3 + 3x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I = 92$. **B.** $I = 68$. **C.** $I = -68$. **D.** $I = -92$.

✍ **Lời giải.**

$I = \int\limits_1^3 \left(4x^3 + 3x\right)\mathrm{d}x = \left(x^4 + \dfrac{3}{2}x^2\right)\Big|_1^3 = 92.$

Chọn đáp án A □

Câu 133. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, $f(1) = 15$, $f(4) = 8$. Tính $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x$

A. $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 7$. **B.** $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 3$. **C.** $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = 23$. **D.** $\int\limits_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = -7$.

✍ **Lời giải.**

$$\int_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(1) = 8 - 15 = -7.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 134. Tích phân $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2}$ bằng

A. $\dfrac{16}{225}$. **B.** $\log\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{15}$. **D.** $\ln\dfrac{4}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln|x+2||_1^2 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 135. Cho $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. Tính giá trị của tích phân $L = \int_0^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. $L = 4$. **B.** $L = -1$. **C.** $L = -4$. **D.** $L = 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $L = \int_0^3 [2f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 2 - 3 = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 136. Tích phân $\int_0^2 \left(x^2 - 3x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{-10}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** 12.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_0^2 \left(x^2 - 3x\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \dfrac{-10}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 137. Tính tính phân $\int_0^1 x(x+1)\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_0^1 x(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+x)\,\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{5}{6}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 138. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 6$, $\int_0^1 (2x-2)f'(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. -3. **B.** -9. **C.** 3. **D.** 6.

✍ **Lời giải.**

Gọi $I = \int_0^1 (2x-2)f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x-2 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$ ta chọn $\begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

$$I = (2x-2)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 2f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 6 = 2f(0) - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) - 3 = 3.$$

Chọn đáp án C □

Câu 139. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 36$. **B.** $I = 4$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = 8$.

✍ **Lời giải.**

$$I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 + 6 = 8.$$

Chọn đáp án D □

Câu 140. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0;2]$ và $f(0) = -1$, biết $\int_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $f(2)$.

A. $f(2) = 2$. **B.** $f(2) = 6$. **C.** $f(2) = 4$. **D.** $f(2) = 5$.

✍ **Lời giải.**

$$\int_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^2 = f(2) - f(0) = 5 \Leftrightarrow f(2) = 4.$$

Chọn đáp án C □

Câu 141. Giả sử tích phân $I = \int_1^6 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \ln M$, tìm M.

A. $M = 4{,}33$. **B.** $M = 13$. **C.** $M = \frac{13}{3}$. **D.** $M = \sqrt{\frac{13}{3}}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int_1^6 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_1^6 = \frac{1}{2}\ln 13 - \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Chọn đáp án D □

Câu 142. Cho biết $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\int_2^5 g(t)\,\mathrm{d}t = 9$. Tính $\int_2^5 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x$.

A. -6. **B.** -15. **C.** 12. **D.** 21.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int_2^5 [f(x) - 2g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 3 - 2\cdot 9 = -15$.

Chọn đáp án B □

Câu 143. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây.

A. $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a<c<b)$. **D.** $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Khẳng định "$\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$" là khẳng định sai.

Chọn đáp án A □

Câu 144. Tích phân $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ bằng

A. e. **B.** $\mathrm{e}+1$. **C.** 1. **D.** $\mathrm{e}-1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\big|_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}-1$.

Chọn đáp án D □

Câu 145. Tính $I = \int\limits_0^{2018} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

A. $I = \mathrm{e}^{2018}-1$. **B.** $I = \mathrm{e}^{2019}-1$. **C.** $I = \mathrm{e}^{2019}$. **D.** $I = \mathrm{e}^{2018}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = \int\limits_0^{2018} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\big|_0^{2018} = \mathrm{e}^{2018}-1$.

Chọn đáp án A □

Câu 146. Tính $I = \int\limits_0^2 2018\,\mathrm{d}x$.

A. 4036. **B.** 2018. **C.** 0. **D.** 4026.

✍ **Lời giải.**

Ta có $I = 2018\,x\big|_0^2 = 4036$.

Chọn đáp án A □

Câu 147. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

A. $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = x\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Khẳng định **sai** là $\int\limits_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = x\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 148. Tính tích phân $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1}$.

A. $\ln\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\log\dfrac{3}{2}$. **D.** $\ln 6$.

✍ **Lời giải.**

Tính tích phân $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_1^2 = \ln\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 149. Tích phân $\displaystyle\int_4^8 \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$ bằng

A. $\ln 9 - \ln 5$. **B.** $\ln 5 - \ln 9$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{1}{81} - \dfrac{1}{25}$.

✍ **Lời giải.**

$\displaystyle\int_4^8 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_4^8 = \ln 9 - \ln 5$.

Chọn đáp án A □

Câu 150. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Diện tích S của D được tính theo công thức

A. $S = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. **C.** $S = \left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Theo công thức ta có $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 151. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I = 2(\mathrm{e}^2 - 1)$. **B.** $I = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$. **C.** $I = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$. **D.** $I = \mathrm{e}^2 - 1$.

✍ **Lời giải.**

$I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 152. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^5 - \dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^4 - \dfrac{1}{2}$. **D.** $\mathrm{e}^4 - 1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^4 - \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 153. Giá trị tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+4}{x+3}\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln\dfrac{5}{3}$. **B.** $1 + \ln\dfrac{4}{3}$. **C.** $\ln\dfrac{3}{5}$. **D.** $1 - \ln\dfrac{3}{5}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+4}{x+3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1+\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = (x+\ln|x+3|)\Big|_0^1 = 1+\ln\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án B □

1.1 ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. C	4. D	5. C	6. D	7. C	8. B	9. C	10. C
11. A	12. A	13. D	14. C	15. A	16. B	17. B	18. A	19. D	20. D
21. A	22. A	23. B	24. A	25. C	26. C	27. C	28. B	29. A	30. A
31. A	32. B	33. B	34. D	35. A	36. C	37. A	38. A	39. A	40. B
41. A	42. A	43. C	44. B	45. B	46. C	47. C	48. A	49. B	50. B
51. C	52. B	53. B	54. A	55. A	56. D	57. D	58. B	59. C	60. A
61. C	62. A	63. A	64. C	65. B	66. C	67. B	68. A	69. D	70. B
71. D	72. C	73. B	74. D	75. A	76. A	77. B	78. C	79. D	80. B
81. D	82. B	83. B	84. C	85. A	86. C	87. C	88. B	89. B	90. C
91. B	92. D	93. B	94. C	95. B	96. D	97. C	98. B	99. C	100. C
101. C	102. B	103. B	104. D	105. D	106. A	107. B	108. A	109. D	110. A
111. B	112. A	113. D	114. C	115. D	116. B	117. A	118. D	119. D	120. A
121. D	122. A	123. B	124. C	125. B	126. B	127. B	128. D	129. C	130. B
131. B	132. A	133. D	134. D	135. D	136. B	137. A	138. C	139. D	140. C
141. D	142. B	143. A	144. D	145. A	146. A	147. B	148. A	149. A	150. B
151. C	152. C	153. B							

2 THÔNG HIỂU

Câu 1. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C)\colon y=\dfrac{4}{x}$ và đường thẳng $(d)\colon y=5-x$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

A. $V=51\pi$. **B.** $V=33\pi$. **C.** $V=9\pi$. **D.** $V=18\pi$.

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{4}{x}=5-x \Leftrightarrow 4=5x-x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Mặt khác với mọi $x\in[1;4]$ ta có $\dfrac{4}{x}\le 5-x$ nên $V=\pi\displaystyle\int_1^4\left[(5-x)^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2\right]\mathrm{d}x=9\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi D_1 là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, các đường $x=0$, $x=1$ và trục Ox. Gọi D_2 là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2f(x)$, các đường $x=0$, $x=1$ và trục Ox. Quay các hình phẳng D_1, D_2 quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

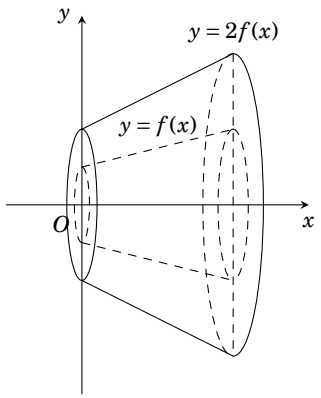
A. $V_2=V_1$. **B.** $V_2=2V_1$. **C.** $V_2=4V_1$. **D.** $V_2=8V_1$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$V_1 = \int_0^1 \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$V_2 = \int_0^1 \pi (2f(x))^2\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x = 4V_1.$$

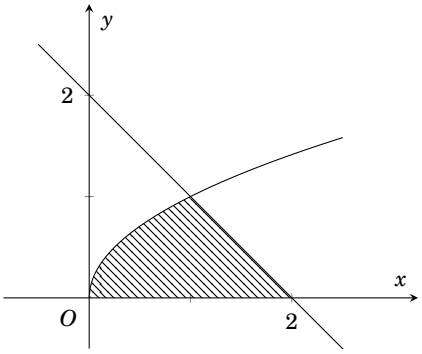


Chọn đáp án C □

Câu 3.

Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, đường thẳng $y=2-x$ và trục hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng trên khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{5\pi}{4}$. **B.** $\frac{4\pi}{3}$. **C.** $\frac{7\pi}{6}$. **D.** $\frac{5\pi}{6}$.



✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x}=2-x \Leftrightarrow x=1$.

Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng đã cho khi quay quanh trục Ox là

$$V_{Ox} = \pi\int_0^1 (\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x + \pi\int_1^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \pi\int_1^2 (x^2-4x+4)\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Big|_1^2\right] = \frac{5\pi}{6}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 4. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng

A. $V=\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **B.** $V=\frac{\pi(\mathrm{e}^2+1)}{2}$. **C.** $V=\frac{\pi(\mathrm{e}^2-1)}{2}$. **D.** $\frac{\pi\mathrm{e}^2}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là

$$V=\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi(\mathrm{e}^2-1)}{2}$$

.

Chọn đáp án C □

Câu 5. Gọi (H) là hình phẳng tạo bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x^3-x^2-2x}$ và trục hoành. Khi cho (H) quay quanh trục hoành ta được khối tròn xoay có thể tích là

A. $\frac{13}{6}\pi$. **B.** $\frac{9}{4}\pi$. **C.** $\frac{5}{12}\pi$. **D.** $\frac{8}{3}\pi$.

✍ **Lời giải.**

Xét $x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1 \vee x=2$.

Điều kiện $x^3-x^2-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1;0] \cup [2;+\infty]$.

Vậy khối tròn xoay tạo thành có thể tích là

$$V=\pi \int\limits_{-1}^{0} y^2 \,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{5}{12}\pi.$$

Chọn đáp án C □

Câu 6. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\pi-1$. **B.** $V=\pi+1$. **C.** $V=\pi(\pi-1)$. **D.** $V=\pi(\pi+1)$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích V là

$$V=\pi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2+\cos x})^2 \,\mathrm{d}x=\pi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos x) \,\mathrm{d}x=\pi(\pi+1).$$

Chọn đáp án D □

Câu 7. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y=x^2$ và đường thẳng $d\colon y=2x$ quay quanh trục Ox.

A. $\pi \int\limits_{0}^{2} \left(x^2-2x\right)^2 \,\mathrm{d}x$.

B. $\pi \int\limits_{0}^{2} 4x^2 \,\mathrm{d}x-\pi \int\limits_{0}^{2} x^4 \,\mathrm{d}x$.

C. $\pi \int\limits_{0}^{2} 4x^2 \,\mathrm{d}x+\pi \int\limits_{0}^{2} x^4 \,\mathrm{d}x$.

D. $\pi \int\limits_{0}^{2} \left(2x-x^2\right) \,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d, ta có

$$x^2=2x \Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=2.$$

Trên đoạn $[0;2]$ ta thấy $2x \geq x^2$ nên thể tích cần tìm là

$$V=\pi \int\limits_{0}^{3} \left(4x^2-x^4\right) \,\mathrm{d}x=\pi \int\limits_{0}^{2} 4x^2 \,\mathrm{d}x-\pi \int\limits_{0}^{2} x^4 \,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án B □

Câu 8. Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P)\colon y=x^2$ và đường thẳng $(d)\colon y=2x$ quay xung quanh trục Ox bằng

A. $\pi \int\limits_{0}^{2} 4x^2 \,\mathrm{d}x+\pi \int\limits_{0}^{2} x^4 \,\mathrm{d}x$.

B. $\pi \int\limits_{0}^{2} (x^2-2x)^2 \,\mathrm{d}x$.

C. $\pi \int\limits_{0}^{2} (2x-x^2) \,\mathrm{d}x$.

D. $\pi \int\limits_{0}^{2} 4x^2 \,\mathrm{d}x-\pi \int\limits_{0}^{2} x^4 \,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Do $x^2<2x$, $\forall x \in (0;2)$ nên thể tích khối tròn xoay được tính bởi công thức

$$V=\pi\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2 x^4\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D □

Câu 9. Thể tích khối tròn xoay tạo bởi khi quay quanh trục hoành của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2-2x$; $y=0$; $x=0$; $x=1$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{8\pi}{15}$ (đvtt). **B.** $\dfrac{7\pi}{3}$ (đvtt). **C.** $\dfrac{15\pi}{8}$ (đvtt). **D.** $\dfrac{8\pi}{7}$ (đvtt).

✍ **Lời giải.**

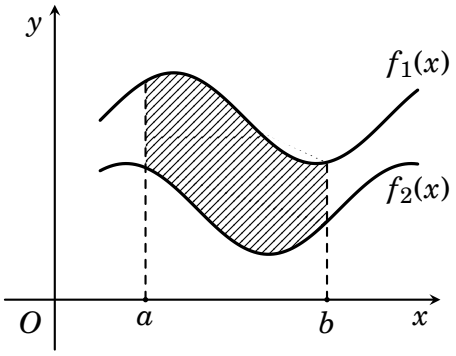
Thể tích cần tính

$$V=\pi\int\limits_0^1 (x^2-2x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 (x^4-4x^3+4x^2)\,\mathrm{d}x=\pi\cdot\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{8\pi}{15}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 10.

Cho hình phẳng trong hình (phần gạch chéo) quay quanh trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



A. $V=\pi\int\limits_a^b [f_1(x)-f_2(x)]^2\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int\limits_a^b \left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int\limits_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int\limits_a^b \left[f_1^2(x)-f_2^2(x)\right]\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là $V=\pi\int\limits_a^b \left[f_1^2(x)-f_2^2(x)\right]\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án D □

Câu 11. Tính thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$ quanh trục Ox.

A. $V=\dfrac{3\pi}{10}$. **B.** $V=\dfrac{\pi}{10}$. **C.** $V=\dfrac{7\pi}{10}$. **D.** $V=\dfrac{9\pi}{10}$.

✍ **Lời giải.**

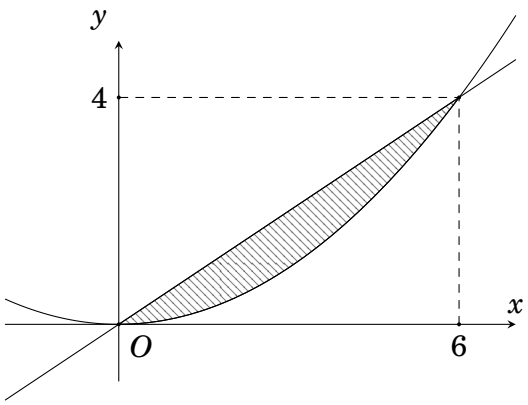
Điều kiện $x\geq 0$. Xét phương trình $x^2=\sqrt{x}\Leftrightarrow x^4=x\Leftrightarrow x\cdot\left(x^3-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$

Thể tích $V=\pi\cdot\int\limits_0^1\left|\left(x^2\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right|\mathrm{d}x=\pi\cdot\int\limits_0^1\left(x-x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\cdot\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\dfrac{3\pi}{10}$.

Chọn đáp án A □

Câu 12.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{x^2}{9}$ và đường thẳng $-2x+3y=0$. Tính thể tích V của khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) (phần tô sọc) quanh trục hoành.



A. $V=4\pi$. **B.** $V=\dfrac{96\pi}{5}$.

C. $V=\dfrac{64\pi}{5}$. **D.** $V=\dfrac{625\pi}{81}$.

✍ **Lời giải.**

Dựa vào hình vẽ ta có

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_0^6\left[\left(\frac{2x}{3}\right)^2-\left(\frac{x^2}{9}\right)^2\right]\mathrm{d}x\\ &= \pi\int_0^6\left(\frac{4x^2}{9}-\frac{x^4}{81}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{4x^3}{27}-\frac{x^5}{405}\right)\Big|_0^6\\ &= \frac{64\pi}{5}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 13. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$; $y=0$ quay quanh trục Ox.

A. $\dfrac{14\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{17\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{48\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{15}$.

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm là $2x-x^2=0\Leftrightarrow x=0$ hay $x=2$.

Thể tích của khối tròn xoay là: $V=\pi\displaystyle\int_0^2(2x-x^2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-e^x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=2$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục hoành.

A. $V=\pi\left(6-e^2-e\right)$. **B.** $V=6-e^2+e$. **C.** $V=6-e^2-e$. **D.** $V=\pi\left(6-e^2+e\right)$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích của khối tròn xoay là

$$V=\pi\int_1^2(4x-e^x)\,\mathrm{d}=\pi\left(2x^2-e^x\right)\Big|_1^2=\pi\left(6-e^2+e\right).$$

Chọn đáp án D □

Câu 15. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=\sqrt{x}$.

A. $\dfrac{\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{10}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{10}$.

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=\sqrt{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1. \end{array}\right.$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành là

$$V=\pi\int\limits_0^1 \left|x^4-x\right|\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1 (x-x^4)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3\pi}{10}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 16. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\ln x$, $y=0$, $x=\mathrm{e}$ quay quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng $\frac{\pi}{a}\left(b\mathrm{e}^3-2\right)$. Tính $a+b$.

A. 30. **B.** 33. **C.** 32. **D.** 29.

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình giới hạn quanh trục Ox là

$$V=\pi\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{27}(5\mathrm{e}^3-2).$$

Vậy $a=27$, $b=5$, suy ra $a+b=32$.

Chọn đáp án C □

Câu 17. Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y=x^2$ và đường thẳng $d\colon y=2x$ quay quanh trục Ox bằng

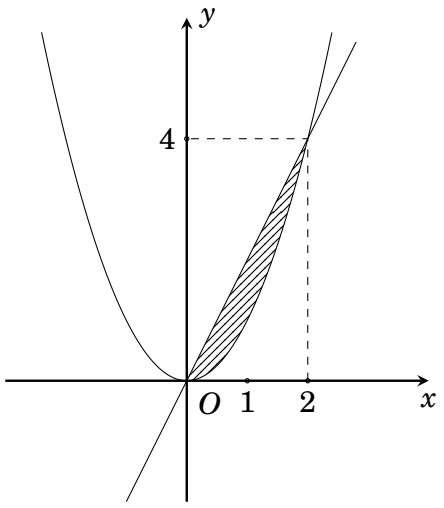
A. $\pi\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int\limits_0^2 \left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x$.

C. $\pi\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x+\pi\int\limits_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\int\limits_0^2 \left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình

$$x^2=2x \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$



Khi đó miền phẳng là phần gạch chéo hình bên. Gọi V là thể tích khối tròn xoay khi quay miền phẳng đó quanh trục Ox ta có $V=\pi\int\limits_0^2 (2x)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2 \left(x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 18. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 3)$ là một hình tròn có đường kính bằng $\sqrt{36-3x^2}$.

A. $V=\frac{81\pi}{4}$. **B.** $V=\frac{81}{4}$. **C.** $V=81\pi$. **D.** $V=81$.

✍ Lời giải.

Diện tích của thiết diện đó là $S(x)=\pi\cdot\left(\dfrac{\sqrt{36-3x^2}}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{4}\cdot(36-3x^2)$.

Thể tích vật thể tròn xoay đó là

$$V=\int\limits_0^3\dfrac{\pi}{4}\cdot(36-3x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}\int\limits_0^3(36-3x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}\cdot(36x-x^3)\Big|_0^3=\dfrac{81\pi}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 19. Độ lớn của vận tốc của một vật thay đổi theo thời gian $v=f(t)$ (m/s) trong đó $f(t)$ nhận giá trị dương. Quãng đường đi được (tính theo đơn vị mét) từ thời điểm $t=a$ (s) đến thời điểm $t=b$ (s), $(0<a<b)$, được tính theo công thức

A. $f(b)-f(a)$. **B.** $\displaystyle\int\limits_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$. **C.** $\displaystyle\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. **D.** $f(a)-f(b)$.

✍ Lời giải.

Gọi công thức tính độ dài quãng đường đi được theo thời gian là $s=g(t)$ (m). Khi đó, $g(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$.

Do đó $g(b)-g(a)=\displaystyle\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20. Một vật di chuyển với gia tốc $a(t)=-20(1+2t)^{-2}$ (m/s^2). Khi $t=0$ thì vận tốc của vật là 30 m/s. Tính quãng đường vật đó đi được sau 2 giây đầu tiên.

A. 47 m. **B.** 48 m. **C.** 49 m. **D.** 46 m.

✍ Lời giải.

$v(t)=\displaystyle\int a(t)\,\mathrm{d}t=\int\dfrac{-20}{(1+2t)^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{10}{1+2t}+C$.

Vì $v(0)=30\Rightarrow 10+C=30\Leftrightarrow C=20$. Suy ra quãng đường cần tính là

$$s=\int\limits_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^2\left(\dfrac{10}{1+2t}+20\right)\mathrm{d}t=(5\ln(1+2t)+20t)\Big|_0^2\approx 48.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Một vật chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-10$ m/s^2, vận tốc ban đầu là $v_0=120$ m/s. Tính quãng đường di chuyển của vật từ thời điểm $t_0=0$ đến lúc dừng hẳn.

A. 1440 m. **B.** 1000 m. **C.** 680 m. **D.** 720 m.

✍ Lời giải.

Vận tốc của vật đó cho bởi $v(t)=120-10t$. Vật đó dừng sau $\dfrac{120}{10}=12$ giây. Quãng đường vật đó đã di chuyển được là

$$\int\limits_0^{12}(120-10t)\,\mathrm{d}t=720\text{ (m)}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 22. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π. **B.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

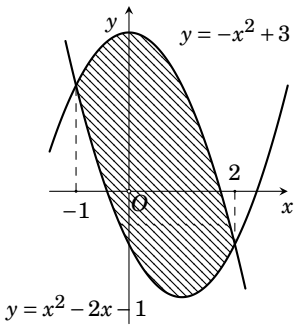
✍ Lời giải.

$$V=\pi\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x=\left.\frac{\pi x^2}{2}\right|_1^2=\frac{3\pi}{2}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 23.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-2x+2)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x-2)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

✍ Lời giải.

$$S=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x.$$

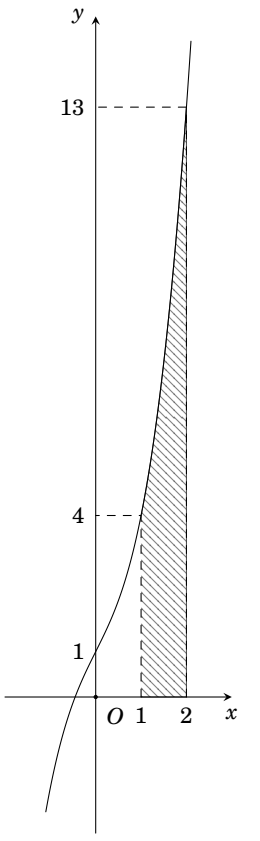
Chọn đáp án D □

Câu 24. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3+2x+1$, trục hoành, $x=1$ và $x=2$ bằng

A. $\dfrac{31}{4}$. **B.** $\dfrac{49}{4}$. **C.** $\dfrac{21}{4}$. **D.** $\dfrac{39}{4}$.

✍ Lời giải.

Gọi S là diện tích hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=x^3+2x+1$, trục hoành, $x=1$ và $x=2$. Khi đó D là phần gạch sọc như hình bên.



Khi đó

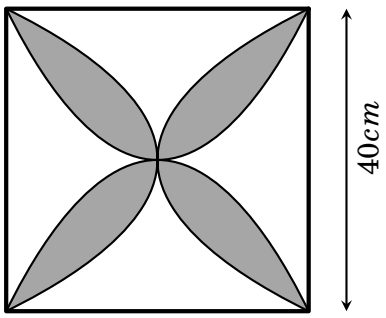
$$S=\int\limits_1^2\left(x^3+2x+1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^4}{4}+x^2+x\right)\right|_1^2=\frac{31}{4}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 25.

Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm được thiết kế như hình bên. Diện tích mỗi cánh hoa (phần tô đậm) bằng :

A. $\frac{800}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\frac{400}{3}\text{cm}^2$. **C.** 250cm^2. **D.** 800cm^2.

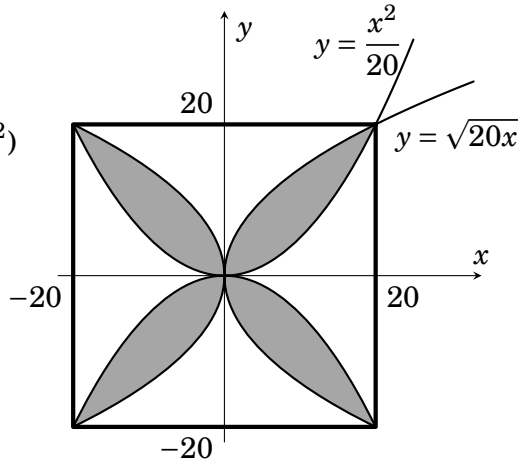


✍ Lời giải.

Diện tích một cánh hoa là diện tích hình phẳng được tính theo công thức sau:

$$S=\int_0^{20}\left(\sqrt{20x}-\frac{1}{20}x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}\sqrt{20}\sqrt{x^3}-\frac{1}{60}x^3\right)\Big|_0^{20}=\frac{400}{3}(\text{cm}^2)$$

.



Chọn đáp án B □

Câu 26. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2-4x+6$ và $y=-x^2-2x+6$ bằng

A. π. **B.** 2π. **C.** 3π. **D.** $\pi-1$.

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$$x^2-4x+6=-x^2-2x+6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1.\end{array}\right.$$

Thể tích khối tròn xuay là

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1\left|\left(x^2-4x+6\right)^2-\left(-x^2-2x+6\right)^2\right|\mathrm{d}x\\&=\left|\pi\int_0^1\left(-12x^3+36x^2-24x\right)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\pi\int_0^1\left(-12x^3+36x^2-24x\right)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\pi(-3x^4+12x^3-12x^2)\Big|_0^1\right|=3\pi.\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Câu 27. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D với $AB=AD=\frac{CD}{2}=a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh AB. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

A. $V=\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{5\pi a^3}{3}$. **C.** $V=\pi a^3$. **D.** $\frac{7\pi a^3}{3}$.

✍ Lời giải.

Gọi V_1 là thể tích khối nón có đường sinh là BC , bán kính $R = AD = a$, chiều cao $h = a$. Khi đó $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi a^2 \cdot a = \dfrac{a^3}{3}\pi$.
Gọi V_2 là thể tích khối trụ có đường sinh là $DC = 2a$, bán kính $R = AD = a$, chiều cao $h' = 2a$. Khi đó $V_2 = \pi R^2 h' = \pi \cdot a^2 . 2a = 2a^3\pi$.
Thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành là $V = V_2 - V_1 = 2a^3\pi - \dfrac{a^3\pi}{3} = \dfrac{5a^3\pi}{3}$.

Chọn đáp án B □

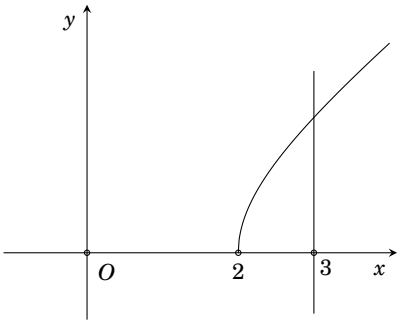
Câu 28. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2-4}$, trục Ox, đường thẳng $x = 3$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục hoành.

A. $V = \dfrac{7\pi}{3}$ (đvtt). **B.** $V = \dfrac{5\pi}{3}$ (đvtt). **C.** $V = 2\pi$ (đvtt). **D.** $V = 3\pi$ (đvtt).

✍ Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\sqrt{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$



Khi đó hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2-4}$, trục Ox, $x = 2$, $x = 3$.
Thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh Ox là

$$V = \pi \int_2^3 (x^2-4)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_2^3 = \frac{7\pi}{3}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 29. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\ln x$, trục Ox và đường thẳng $x = \mathrm{e}$.

A. $S = \dfrac{\mathrm{e}^2+3}{4}$. **B.** $S = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **C.** $S = \dfrac{\mathrm{e}^2+1}{2}$. **D.** $S = \dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là $x\ln x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ \ln x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} |x\ln x|\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$.

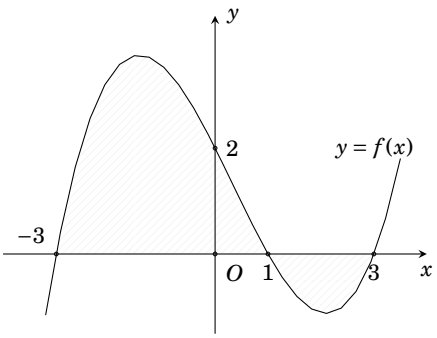
Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Khi đó $S = \dfrac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 30.

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox (phần gạch sọc) được tính bởi công thức



A. $S=\left|\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$. **B.** $S=\int\limits_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Ta có diện tích cần tính bằng

$$S=\int\limits_{-3}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{1}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án C □

Câu 31. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\tan x};y=0;x=0;x=\dfrac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi\ln 3}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi\ln 2}{2}$. **D.** $\pi\ln 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $V=\pi\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x=-\pi\ln|\cos x|\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\pi\ln\sqrt{2}=\dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

Chọn đáp án C □

Câu 32. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (H) của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S là

A. $2\ln 2+1$ (đvdt). **B.** $2\ln 2-1$ (đvdt). **C.** $\ln 2+1$ (đvdt). **D.** $\ln 2-1$ (đvdt).

✍ **Lời giải.**

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\dfrac{x-1}{x+1}=0\Leftrightarrow x=1$. Vậy diện tích hình phẳng S là

$$S=\int\limits_{0}^{1}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left|1-\frac{2}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\left|x\Big|_{0}^{1}-2\ln(x+1)\Big|_{0}^{1}\right|=|1-2\ln 2|=2\ln 2-1\text{ (đvdt)}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 33. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y=x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=1$. Biết $S=a\sqrt{2}+b$, với $(a,b\in\mathbb{Q})$ và a,b viết dạng các phân số tối giản. Tính $a+b$.

A. $a+b=\dfrac{1}{6}$. **B.** $a+b=\dfrac{1}{2}$. **C.** $a+b=\dfrac{1}{3}$. **D.** $a+b=0$.

✍ **Lời giải.**

Hoành độ giao điểm của $(\mathscr{C})$ và trục Ox là nghiệm của phương trình

$$x\sqrt{1+x^2}=0\Leftrightarrow x=0.$$

Suy ra

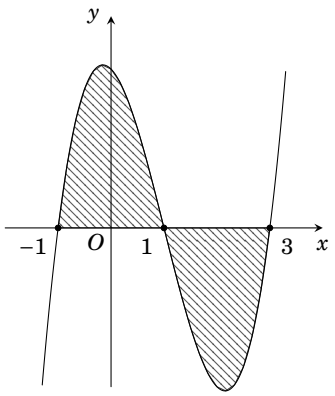
$$S=\int\limits_{0}^{1}x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1+x^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}.$$

Do đó $a=\dfrac{2}{3}$, $b=-\dfrac{1}{3}$.

Vậy $a+b=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 34. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-\dfrac{1}{3}x+1$ và trục hoành như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=2\displaystyle\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=2\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\displaystyle\int_{-1}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành:

$$\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{3}x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3.\end{array}\right.$$

Từ hình vẽ ta thấy $f(x)>0$, $\forall x\in(-1;1)$ và $f(x)<0$, $\forall x\in(1;3)$.

Do đó diện tích S được tính bởi

$$S=\int_{-1}^{3}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

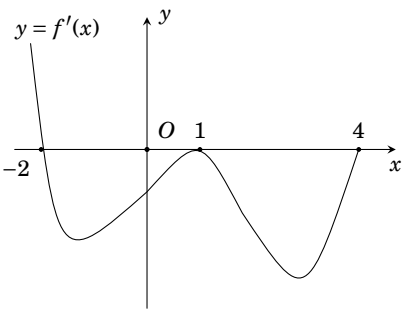
vì $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{3}x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$ và $\displaystyle\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{3}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{3}x+1\right)\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}$.

Vậy mệnh đề **sai** là $S=2\displaystyle\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 35.

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1)=3$. Giá trị của biểu thức $f(-2)+f(4)$ bằng



A. 21. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

✍ Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, kết hợp với giả thiết ta có

— $\displaystyle\int_{-2}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x = -9 \Rightarrow f(1) - f(-2) = -9 \Rightarrow f(-2) = 9 + f(1) = 12.$

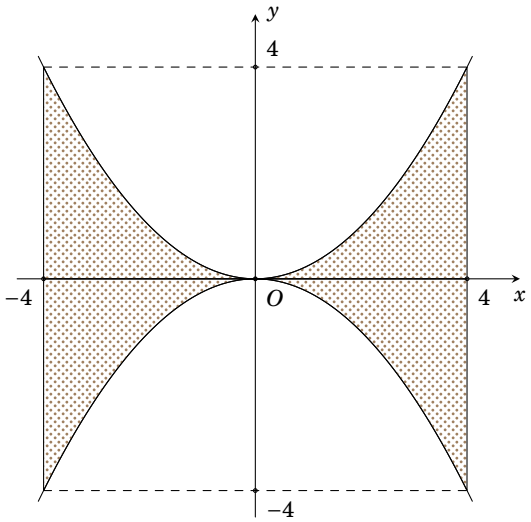
— $\displaystyle\int_{1}^{4} f'(x)\,\mathrm{d}x = 12 \Rightarrow f(4) - f(1) = -12 \Rightarrow f(4) = -12 + f(1) = -9.$

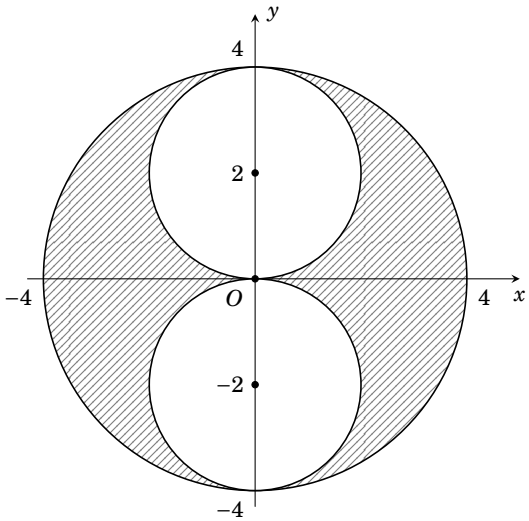
— Vậy $f(-2) + f(4) = 3$.

Chọn đáp án C □

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{x^2}{4}$, $y = -\dfrac{x^2}{4}$, $x = -4$, $x = 4$ và (H_2) là hình gồm các điểm $(x;y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \le 16$, $x^2 + (y-2)^2 \ge 4$, $x^2 + (y+2)^2 \ge 4$. Cho (H_1) và (H_2) quay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $V_1 = V_2$. **B.** $V_1 = \dfrac{1}{2}V_2$. **C.** $V_1 = 2V_2$. **D.** $V_1 = \dfrac{2}{3}V_2$.





✍ **Lời giải.**

— Tính thể tích V_1.

– Thể tích khối trụ bán kính $r = 4$, chiều cao $h = 8$ là $V = \pi r^2 h = 128\pi$.

– $y = \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 4y \Rightarrow x = 2\sqrt{y}$ với $x \ge 0$. Thể tích hình giới hạn bởi parabol $y = \dfrac{x^2}{4}$, trục tung, đường thẳng $y = 4$ quay quanh Oy là

$$V_{(P)} = \pi \int_0^4 x^2\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^4 4y\,\mathrm{d}y = 32\pi.$$

Suy ra thể tích sinh bởi (H_1) là

$$V_1 = V - 2 \cdot V_{(P)} = 128\pi - 2 \cdot 32\pi = 64\pi.$$

— Tính thể tích V_2.

– Thể tích khối cầu bán kính $R = 4$ là $V_L = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{256}{3}\pi$.

– Thể tích khối cầu bán kính $r = 2$ là $V_N = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{32}{3}\pi$.

Suy thể tích sinh bởi (H_2) là

$$V_2 = V_L - 2 \cdot V_N = \frac{256\pi}{3} - \frac{2 \cdot 32\pi}{3} = 64\pi.$$

Vậy $V_1 = V_2$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 37. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \pi - 1$. **B.** $V = (\pi - 1)\pi$. **C.** $V = (\pi + 1)\pi$. **D.** $V = \pi + 1$.

✍ **Lời giải.**

Thể tích $V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2+\cos x})^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos x)\,\mathrm{d}x = \pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi+1)\pi$.

Chọn đáp án C ☐

Câu 38. Cho hình phẳng $\mathscr{D}$ giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay $\mathscr{D}$ quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2(\pi + 1)$. **B.** $V = 2\pi(\pi + 1)$. **C.** $V = 2\pi^2$. **D.** $V = 2\pi$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$-1 \le \sin x \le 1$

$\Leftrightarrow 1 \le 2 + \sin x \le 3$

$\Leftrightarrow 1 \le y \le \sqrt{3}$

Do vậy đường cong $y = \sqrt{2+\sin x}$ không cắt trục hoành. Vậy, ta có

$$V = \pi \int_0^{\pi} (2+\sin x)\,\mathrm{d}x = (2x - \cos x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi(\pi+1).$$

Chọn đáp án B ☐

Câu 39. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $V = 2\pi$. **C.** $V = \dfrac{4}{3}$. **D.** $V = 2$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $V = \pi \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{4\pi}{3}$.

Chọn đáp án A ☐

Câu 40. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$.

A. $\dfrac{37}{12}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** $\dfrac{81}{12}$. **D.** 13.

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số:

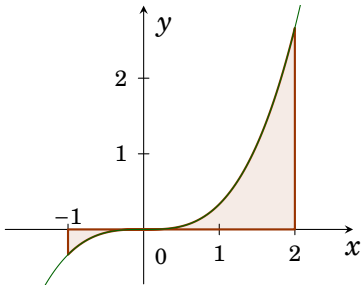
$$x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$ là

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\left|x^3+x^2-2x\right|\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)\,\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)\,\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_{0}^{1}\\&=\frac{8}{3}-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 41.
Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x=-1$, $x=2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $S=b-a$. **B.** $S=b+a$.
C. $S=-b+a$. **D.** $S=-b-a$.

✍ **Lời giải.**

Ta có: $S=\int_{-1}^{2}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}|f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-a+b.$

Chọn đáp án A □

Câu 42. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(1\leqslant x\leqslant 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V=32+2\sqrt{15}$. **B.** $V=\dfrac{124\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{124}{3}$. **D.** $V=\left(32+2\sqrt{15}\right)\pi$.

✍ **Lời giải.**

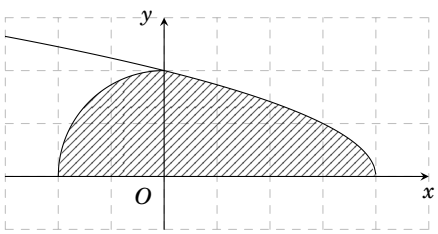
Diện tích thiết diện là $S(x)=3x\sqrt{3x^2-2}$.

Suy ra thể tích vật thể tạo thành là: $V=\int_{1}^{3}S(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{3}3x\sqrt{3x^2-2}\mathrm{d}x$.

Sử dụng MTCT ta được : $V=\dfrac{124}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 43. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $\dfrac{1}{4}$ cung tròn có bán kính $R=2$, đường cong $y=\sqrt{4-x}$ và trục hoành (miền tô đậm như hình vẽ). Tính thể tích V của khối tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục Ox



A. $V=\dfrac{40\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{66\pi}{7}$. **C.** $V=\dfrac{77\pi}{6}$. **D.** $V=\dfrac{8\pi}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Phương trình đường tròn tâm O có bán kính bằng 2 là $x^2+y^2=4$.

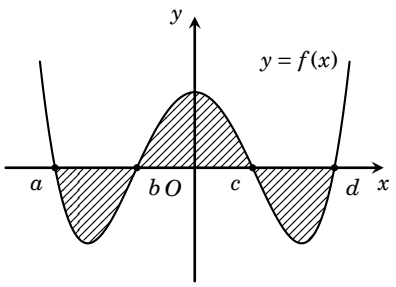
Vậy phương trình của nữa đường tròn tren trục hoành là $y=\sqrt{4-x}$.

Do đó: $V=\pi\left[\int\limits_{-2}^{0}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{4}(4-x)\mathrm{d}x\right]=\dfrac{40}{3}\pi.$

Chọn đáp án A □

Câu 44.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành (như hình vẽ). Khẳng định nào sau đây **đúng**?



A. $S=\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{d}f(x)\mathrm{d}x.$

B. $S=\left|\int\limits_{a}^{d}f(x)\mathrm{d}x\right|.$

C. $S=-\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{c}^{d}f(x)\mathrm{d}x.$

D. $S=\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{b}^{c}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{c}^{d}f(x)\mathrm{d}x.$

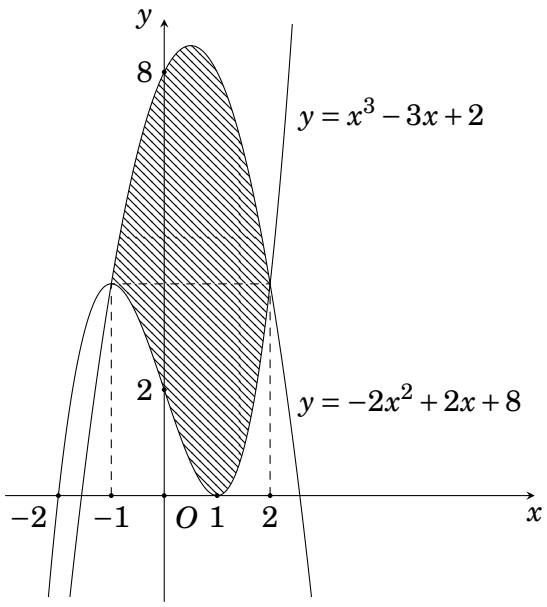
✍ **Lời giải.**

Ta thấy trong $[a;b]$ thì $f(x)<0$, trong $[b;c]$ thì $f(x)>0$, và trong $[c;d]$ thì $f(x)<0$.

Chọn đáp án D □

Câu 45.

Diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào sau đây?



A. $S=\int\limits_{-1}^{2}(-x^3-2x^2+5x+6)\mathrm{d}x.$

B. $S=\int\limits_{-1}^{2}(x^3-2x^2-x+10)\mathrm{d}x.$

C. $S=\int\limits_{-1}^{2}(x^3+2x^2-5x-6)\mathrm{d}x.$

D. $S=\int\limits_{-1}^{2}(x^3+2x^2-x-10)\mathrm{d}x.$

✍ **Lời giải.**

Diện tích hình phẳng $S=\int\limits_{-1}^{2}[-2x^2+2x+8-(x^3-3x+2)]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}(-x^3-2x^2+5x+6)\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án A □

Câu 46. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng bất kỳ vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(1\leqslant x\leqslant 3)$ thì được thiết diện là tam giác đều có độ dài cạnh là $\sqrt{3x^2+4}$.

A. $\dfrac{17\sqrt{3}}{4}.$ **B.** $V=\dfrac{17\sqrt{3}}{2}\pi.$ **C.** $\dfrac{17\sqrt{3}}{4}\pi.$ **D.** $\dfrac{17\sqrt{3}}{2}.$

✍ **Lời giải.**

Giả sử thiết diện là tam giác đều ABC.

Diện tích của thiết diện: $S(x)=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(3x^2+4)$

Thể tích khối vật thể $V=\displaystyle\int_1^3\dfrac{\sqrt{3}}{4}(3x^2+4)\,\mathrm{d}x=\dfrac{17\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án D □

Câu 47. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=4$, biết rằng khi cắt bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x(1\leqslant x\leqslant 4)$ thì được thiết diện là lục giác đều có độ dài cạnh là $2x$.

A. $V=63\sqrt{3}\pi$. **B.** $V=126\sqrt{3}$. **C.** $V=63\sqrt{3}$. **D.** $V=126\sqrt{3}\pi$.

✍ **Lời giải.**

Thiết diện tại điểm có hoành độ x là lục giác đều có cạnh $2x$ nên nó có diện tích

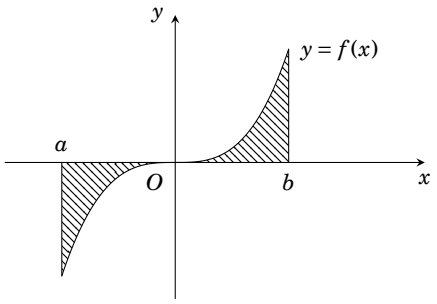
$$S(x)=6\dfrac{(2x)^2\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}x^2.$$

Thể tích vật thể cần tìm là $V=\displaystyle\int_1^4 S(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^4 6\sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x=2\sqrt{3}x^3\Big|_1^4=126\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 48.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ bên). Giả sử S_D là diện tích của hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án dưới đây?



A. $S_D=\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $S_D=-\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S_D=\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $S_D=-\displaystyle\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Nhìn đồ thị ta thấy $f(x)\leqslant 0,\ \forall x\in[a;0]$ và $f(x)\geqslant 0,\ \forall x\in[0;b]$.

Vậy $S_D=\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^0|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 49. Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\leqslant x\leqslant 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

A. $V=\dfrac{4}{3}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=4\sqrt{3}$. **D.** $V=\sqrt{3}$.

✍ **Lời giải.**

Diện tích thiết diện: $S_\Delta=\dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_{\Im}=\int_0^2\frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2x^2(2-x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 50. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\dfrac{343}{12}$. **B.** $S=\dfrac{793}{4}$. **C.** $S=\dfrac{397}{4}$. **D.** $S=\dfrac{937}{12}$.

✍ **Lời giải.**

Hoành độ giao điểm của hai đường cong là nghiệm của phương trình:

$$-x^3+12x=-x^2\Leftrightarrow -x^3+12x+x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-3\\x=0.\end{array}\right.$$

Ta có $S=\displaystyle\int_{-3}^{0}|-x^3+12x+x^2|\,\mathrm{d}x+\int_0^4|-x^3+12x+x^2|\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{-3}^{0}(x^3-12x-x^2)\,\mathrm{d}x+\int_0^4(-x^3+12x+x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{99}{4}+\frac{160}{3}=\frac{937}{12}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 51. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

A. $S=\dfrac{10}{3}$. **B.** $S=\dfrac{8}{3}$. **C.** $S=\dfrac{13}{3}$. **D.** $S=\dfrac{5}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có $S=\displaystyle\int_1^2(x^2+2)\,\mathrm{d}x=\frac{13}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 52. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\dfrac{32\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{64\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{21\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{15}$.

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2.\end{array}\right.$

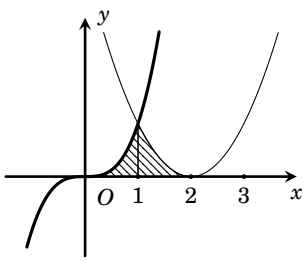
Khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay giới hạn bởi $\begin{cases}y=x^2\\y=2x\\x=0\\x=2.\end{cases}$

Do đó thể tích của khối tròn xoay là $V=\pi\displaystyle\int_0^2\left|(x^2)^2-(2x)^2\right|\,\mathrm{d}x=\frac{64\pi}{15}$.

Chọn đáp án B □

Câu 53.

Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2-4x+4$, đường cong $y=x^3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích S của hình (H).



A. $S=\dfrac{11}{2}$. **B.** $S=\dfrac{7}{12}$. **C.** $S=\dfrac{20}{3}$. **D.** $S=-\dfrac{11}{2}$.

✍ Lời giải.

Parabol $y=x^2-4x+4$ có đỉnh $I(2;0)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^2-4x+4$ và $y=x^3$ là

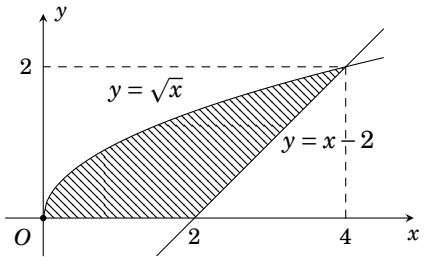
$$x^3-x^2+4x-4=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+4)=0\Leftrightarrow x=1.$$

Khi đó, diện tích $S=\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x+\int_1^2(x^2-4x+4)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{12}$.

Chọn đáp án B □

Câu 54.

Tích diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) trong hình bên.



A. $S=\dfrac{8}{3}$. **B.** $S=\dfrac{10}{3}$. **C.** $S=\dfrac{11}{3}$. **D.** $S=\dfrac{7}{3}$.

✍ Lời giải.

Dựa và hình vẽ, ta có hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x},y=x-2,y=0$.

Vậy $S=\displaystyle\int_0^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+\int_2^4\left(\sqrt{x}-x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{10}{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 55. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

A. $V=\pi-1$. **B.** $V=\pi+1$. **C.** $V=\pi(\pi-1)$. **D.** $V=\pi(\pi+1)$.

✍ Lời giải.

Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh trục hoành là

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)\,\mathrm{d}x=\pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Chọn đáp án D □

Câu 56. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2,y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\displaystyle\int_0^2(2x-x^2)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\displaystyle\int_0^2(2x-x^2)^2\,\mathrm{d}x$. **C.** $\displaystyle\int_0^2(2x-x^2)^2\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\displaystyle\int_0^2(2x-x^2)\,\mathrm{d}x$.

✍ Lời giải.

Ta có: $2x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$

Theo công thức thể tích giới hạn bởi các đường ta có: $\pi \displaystyle\int_0^2 (2x-x^2)^2\,\mathrm{d}x$.

Chọn đáp án B □

Câu 57. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=xe^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ quanh trục hoành bằng $\pi(ae^4+b)$. Giá trị $a+b$ là

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

✍ **Lời giải.**

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V=\pi \displaystyle\int_0^2 x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x=\pi\cdot I$.

Đặt: $\begin{cases} u=x^2 \\ \mathrm{d}v=e^{2x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$. Ta có: $I=\left(\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}\right)\Big|_0^2-\displaystyle\int_0^2 xe^{2x}\,\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}\right)\Big|_0^2-I_1$.

Tính I_1.

Đặt: $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=e^{2x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$. Do đó $I_1=\dfrac{x\cdot e^{2x}}{2}\Big|_0^2-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right)\Big|_0^2-\left(\frac{1}{2}xe^{2x}\right)\Big|_0^2+\frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right)\Big|_0^2-\left(\frac{1}{2}xe^{2x}\right)\Big|_0^2+\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)\Big|_0^2 \\ &= \left(2e^4-e^4+\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}e^4-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Do đó: $V=\pi\left(\dfrac{5}{4}e^4-\dfrac{1}{4}\right)\Rightarrow a=\dfrac{5}{4}$, $b=-\dfrac{1}{4}$. Vậy $a+b=1$.

Chọn đáp án C □

Câu 58. Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}$, $x=1$, $x=2$, $y=0$ xung quanh trục Ox bằng

A. $\pi(e^2+e)$. **B.** $\pi(e^2-e)$. **C.** πe. **D.** πe^2.

✍ **Lời giải.**

Thể tích $V=\pi \displaystyle\int_1^2 \left(x^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 xe^x\,\mathrm{d}x=\pi\left(xe^x|_1^2-\int_1^2 e^x\,\mathrm{d}x\right)=\pi e^2$ (đvtt).

Chọn đáp án D □

Câu 59. Tính thể tích vật thể bị giới hạn bởi các mặt phẳng $x=0$ và $x=1$, biết thiết diện của vật thể khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\,(0\le x\le 1)$ là một hình vuông có độ dài cạnh $\sqrt{x(e^x-1)}$.

A. $V=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $V=\dfrac{e-1}{2}$. **C.** $V=\dfrac{1}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\pi(e-1)}{2}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $V=\displaystyle\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x(e^x-1)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x - x. \end{cases}$

Suy ra $V = x(\mathrm{e}^x - x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (\mathrm{e}^x - x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1 - \left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \mathrm{e} - 1 - \left(\mathrm{e} - \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}.$

Chọn đáp án C □

Câu 60. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành, $x = 2$ khi quay quanh trục hoành.

A. $V = \frac{\pi}{2}$. **B.** $V = \frac{1}{2}$. **C.** $V = 2\pi$. **D.** $V = 2$.

✍ Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đường $y = \sqrt{x-1}$ và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

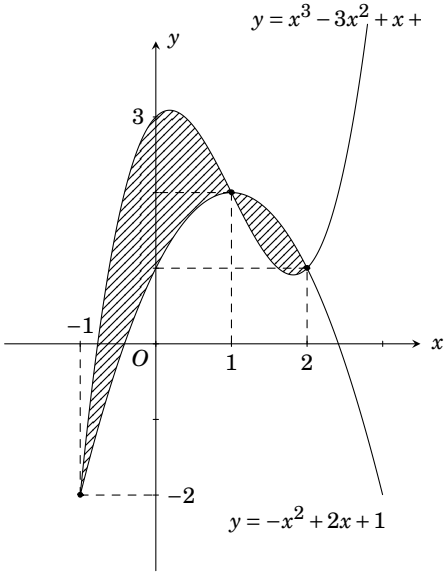
Thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành, $x = 1$, $x = 2$ khi quay quanh trục hoành là

$$V = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{x-1}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 61.

Cho đồ thị hai hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$ và $y = -x^2 + 2x + 1$. Diện tích hình phẳng được tô màu tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2)\,\mathrm{d}x.$

B. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x^2 + x - 2)\,\mathrm{d}x.$

C. $\int_{-1}^{1} (-x^3 + 2x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^3 - 2x^2 + x - 2)\,\mathrm{d}x.$

D. $\int_{-1}^{2} (-x^3 + 2x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x.$

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$$x^3 - 3x^2 + x + 3 = -x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \pm 1 \\ x = 2. \end{bmatrix}$$

Do đó diện tích cần tìm là $\int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2)\,\mathrm{d}x.$

Chọn đáp án A □

Câu 62. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi parabol (P): $y = 3 - x^2$ và đường thẳng $y = -2x + 3$.

A. $S = \dfrac{4}{3}$ (đvdt). **B.** $S = \dfrac{3}{4}$ (đvdt). **C.** $S = -\dfrac{3}{4}$ (đvdt). **D.** $S = -\dfrac{4}{3}$ (đvdt).

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình $3 - x^2 = -2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Vậy $S = \displaystyle\int_0^2 \left|(3 - x^2) - (-2x + 3)\right| \mathrm{d}x = \int_0^2 \left|-x^2 + 2x\right| \mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}$ (đvdt).

Chọn đáp án A □

Câu 63. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1$, $x = 4$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích bằng

A. $\dfrac{42\pi}{5}$. **B.** 3π. **C.** $\dfrac{4\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{128\pi}{25}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $V = \pi \displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right) \mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^5}{20} - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^4 = \frac{42\pi}{5}$.

Chọn đáp án A □

Câu 64. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \cos x$; $y = 0$; $x = 0$ và $x = \dfrac{\pi}{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay có được khi quay (H) quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$. **B.** 2π. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{2}$.

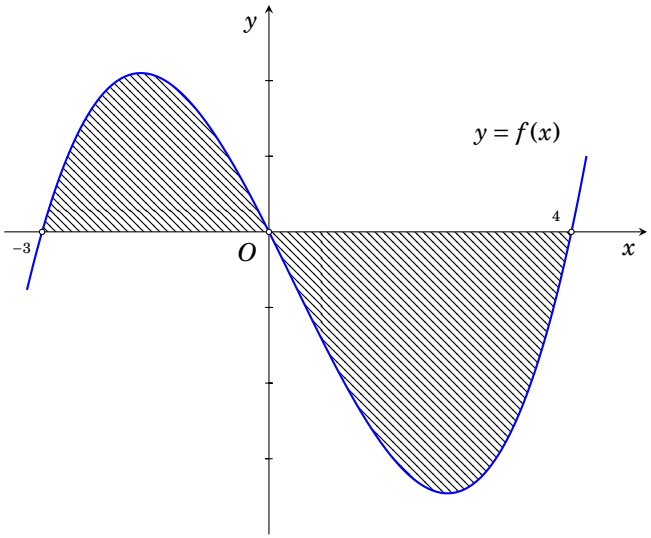
✍ **Lời giải.**

Ta có: $V_H = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$.

Chọn đáp án A □

Câu 65. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Diện tích hình phẳng (phần có dấu gạch trong hình) là:



A. $S = \displaystyle\int_{-3}^{0} f(x) \mathrm{d}x - \int_0^4 f(x) \mathrm{d}x$.

B. $S = \displaystyle\int_{-3}^{0} f(x) \mathrm{d}x + \int_0^4 f(x) \mathrm{d}x$.

C. $S = \left|\displaystyle\int_{-3}^{4} f(x) \mathrm{d}x\right|$.

D. $S = \displaystyle\int_{-3}^{4} f(x) \mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

Dựa vào đồ thị ta thấy: trong đoạn $[-3;0]$, $f(x) \geqslant 0$ và trong đoạn $[0;4]$, $f(x) \leqslant 0$

Ta có $S = \displaystyle\int_{-3}^{4} |f(x)| \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} |f(x)| \mathrm{d}x + \int_0^4 |f(x)| \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} f(x) \mathrm{d}x - \int_0^4 f(x) \mathrm{d}x$.

Chọn đáp án A □

Câu 66. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường cong $y=\dfrac{x-3}{x+1}$; trục hoành và trục tung. Khối tròn xoay được tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích $V=\pi(a+b\ln 2)$ với $a,\,b\in\mathbb{Z}$. Tính $T=a+b$.

A. $T=3$. **B.** $T=6$. **C.** $T=10$. **D.** $T=-1$.

✍ Lời giải.

Ta có giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm phương trình:

$$\frac{x-3}{x+1}=0\Leftrightarrow x=3.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}V=\pi\int\limits_0^3\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x &= \pi\int\limits_0^3\left(1-\frac{4}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^3\left(1-\frac{8}{x+1}+\frac{16}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \pi\left(x-8\ln|x+1|-\frac{16}{x+1}\right)\Big|_0^3=\pi(15-16\ln 2).\end{aligned}$$

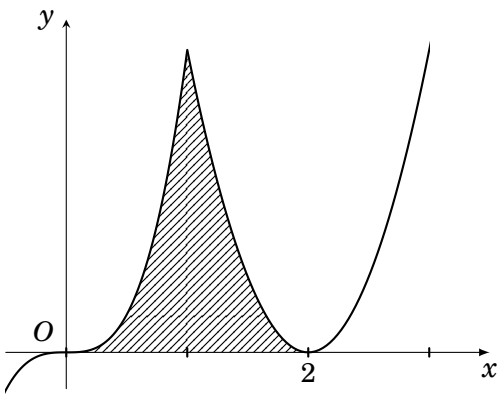
Vậy $T=a+b=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 67.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=(x-2)^2$, đường cong $y=x^3$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên) bằng

A. $S=\dfrac{11}{2}$. **B.** $S=\dfrac{73}{12}$. **C.** $S=\dfrac{7}{12}$. **D.** $S=\dfrac{5}{2}$.



✍ Lời giải.

Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=(x-2)^2$ và $y=x^3$ là $x=1$.

Vậy $S=\displaystyle\int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(x-2)^2\,\mathrm{d}x$ hay $S=\dfrac{7}{12}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 68. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0<a<1$; $\dfrac{1}{8}<b<1$; $\dfrac{3}{8}<c<1$. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3}{16}\log_a\left(\dfrac{b}{2}-\dfrac{1}{16}\right)+\dfrac{1}{4}\log_b\left(\dfrac{c}{2}-\dfrac{3}{16}\right)+\dfrac{1}{3}\log_c a$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{3}\leqslant M<2$. **B.** $M\geqslant 2$. **C.** $\sqrt{2}\leqslant M<\sqrt{3}$. **D.** $M<\sqrt{2}$.

✍ Lời giải.

Ta có

— $\dfrac{b}{2}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{8b-1}{16}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{8b-1}{4}\leqslant\left(\dfrac{2b}{2}\right)^2=b^2$.

— $\dfrac{c}{2}-\dfrac{3}{16}=\dfrac{8c-3}{16}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8c-3}{2}\leqslant\left(\dfrac{4c}{4}\right)^4=c^4$.

Suy ra

$$\begin{aligned}P &= \frac{3}{16}\log_a\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{c}{2}-\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{3}\log_c a\\ &\geqslant \frac{3}{16}\log_a b^2+\frac{1}{4}\log_b c^4+\frac{1}{3}\log_a c\\ &= \frac{3}{8}\log_a b+\log_b c+\frac{1}{3}\log_a c\\ &\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{16}}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{P}_{\min}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}8b-1=1\\ 8c-3=1\\ \dfrac{3}{8}\log_a b=\log_b c=\dfrac{1}{3}\log_c a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{1}{4}\\ c=\dfrac{1}{2}\\ a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$

Chọn đáp án C □

Câu 69. Để làm cống thoát nước cho một con đường người ta cần đúc 200 ống hình trụ bằng bê tông có đường kính trong lòng ống là 1m và chiều cao của mỗi ống bằng 2m, độ dày của thành ống là 8 cm. Biết rằng 1 m^3 bê tông thì cần đúng 10 bao xi-măng. Hỏi cần bao nhiêu bao xi-măng để đúc 200 ống trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. 1086 bao. **B.** 1025 bao. **C.** 2091 bao. **D.** 523 bao.

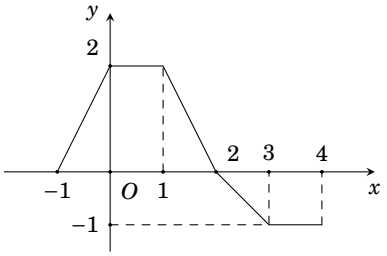
✍ Lời giải.

Ta có thể tích của mỗi ống là $V=\pi\cdot 2\cdot(0{,}5+0{,}08)^2-\pi\cdot 2\cdot(0{,}5)^2=\dfrac{108\pi}{625}(\mathrm{m}^3)$.

Như vậy cần tất cả $\dfrac{108\pi}{625}\cdot 200\cdot 10=1085{,}73$ bao xi-măng.

Chọn đáp án A □

Câu 70. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;4]$ và có đồ thị trên $[-1;4]$ như hình vẽ bên. $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng



A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{11}{2}$. **C.** 5. **D.** 3.

✍ Lời giải.

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng diện tích hình thang có độ dài hai cạnh đáy bằng 3 và 1, đường cao bằng 2, do đó $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot(3+1)\cdot 2=4$.

Vì trên $[2;4]$, $f(x)<0$ nên tương tự trên ta có $\displaystyle\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{2}^{4}-f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot 1=-\frac{3}{2}$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án A □

2.1 ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. C	5. C	6. D	7. B	8. D	9. A	10. D
11. A	12. C	13. D	14. D	15. D	16. C	17. A	18. A	19. C	20. B
21. D	22. B	23. D	24. A	25. B	26. C	27. B	28. A	29. D	30. C
31. C	32. B	33. C	34. B	35. C	36. A	37. C	38. B	39. A	40. A
41. A	42. C	43. A	44. D	45. A	46. D	47. B	48. B	49. B	50. D
51. C	52. B	53. B	54. B	55. D	56. B	57. C	58. D	59. C	60. A
61. A	62. A	63. A	64. A	65. A	66. D	67. C	68. C	69. A	70. A

3 VẬN DỤNG THẤP

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết rằng diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 9$ bằng 12. Tính $I = \int\limits_{1}^{3} xf(x^2)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 6$. **B.** $I = 24$. **C.** $I = 2\sqrt{3}$. **D.** $I = 144$.

Lời giải.

Diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 9$ bằng 12

$\Rightarrow \int\limits_{1}^{9} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 12.$

Mà hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên khoảng $(0;+\infty)$ nên $\int\limits_{1}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x = 12.$

Ta có

$$I = \int_{1}^{3} xf(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{1}^{3} f(x^2)\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\int_{1}^{9} f(t)\,\mathrm{d}(t) = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6.$$

Chọn đáp án A □

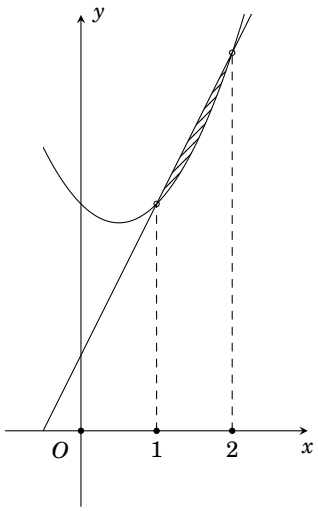
Câu 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = 2x + 1$ và đồ thị hàm số $y = x^2 - x + 3$.

A. $\dfrac{1}{7}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $-\dfrac{1}{6}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$



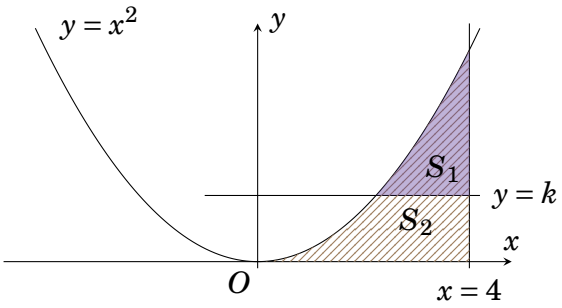
Gọi S là diện tích cần tìm thì

$$S = \left|\int_{1}^{2} (x^2 - 3x + 2)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{1}^{2}\right| = \frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 3.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=4$. Đường thẳng $y=k$ $(0<k<16)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 (hình vẽ). Tìm k để $S_1=S_2$.



A. $k=8$. **B.** $k=4$. **C.** $k=5$. **D.** $k=3$.

✍ Lời giải.

Gọi S là diện tích hình phẳng (H). Vì $S_1=S_2$ nên

$$2S_1=S_1+S_2=S=\int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_0^4=\frac{64}{3}\Rightarrow S_1=\frac{32}{3}.$$

Mặt khác, $S_1=\displaystyle\int\limits_{\sqrt{k}}^4 (x^2-k)\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_{\sqrt{k}}^4-kx|_{\sqrt{k}}^4=\frac{64}{3}+\frac{2k\sqrt{k}}{3}-4k$. Suy ra,

$$\frac{64}{3}+\frac{2k\sqrt{k}}{3}-4k=\frac{32}{3}\Leftrightarrow 2k\sqrt{k}-12k+32=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{k}=2\\ \sqrt{k}=2+2\sqrt{3}\ \text{(loại)}\\ \sqrt{k}=2-2\sqrt{3}\ \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.\Rightarrow k=4.$$

Chọn đáp án B □

Câu 4. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\dfrac{397}{4}$. **B.** $S=\dfrac{937}{12}$. **C.** $S=\dfrac{343}{12}$. **D.** $S=\dfrac{793}{4}$.

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (S) và (H) là

$$-x^3+12x=-x^2\Leftrightarrow x^3-x^2-12x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\\ x=-3.\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}S=\int\limits_{-3}^4\left|(-x^3+12x+x^2)\right|\,\mathrm{d}x&=\int\limits_{-3}^0\left|(-x^3+12x+x^2)\right|\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^4\left|(-x^3+12x+x^2)\right|\,\mathrm{d}x\\&=\int\limits_{-3}^0(x^3-12x-x^2)\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^4(-x^3+12x+x^2)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{937}{12}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

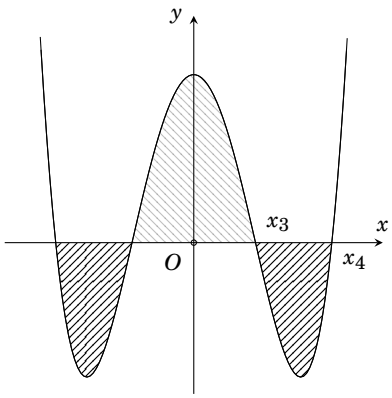
Câu 5. Cho hàm số $y=x^4-4x^2+m$ có đồ thị (C_m). Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $m\in(-1;1)$. **B.** $m\in(2;3)$. **C.** $m\in(3;5)$. **D.** $m\in(5;+\infty)$.

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là

$$x^4-4x^2+m=0. \quad (1)$$



Đặt $t=x^2$, phương trình (1) trở thành

$$t^2-4t+m=0. \quad (2)$$

Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt khi phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m>0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<4.$$

Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm dương của (2) với $t_1<t_2$. Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt theo thứ tự là $x_1=-\sqrt{t_1}$, $x_2=-\sqrt{t_2}$, $x_3=\sqrt{t_1}$, $x_4=\sqrt{t_2}$. Do tính đối xứng qua trục Oy của (C_m) nên yêu cầu của bài toán trở thành

$$\begin{aligned} &\int_0^{x_3}(x^4-4x^2+m)\mathrm{d}x=\int_{x_3}^{x_4}(-x^4+4x^2-m)\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\ &\int_0^{x_4}(x^4-4x^2+m)\mathrm{d}x=0 \\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{3}+mx\right)\Big|_0^{x_4}=0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{x_4^5}{5}-\frac{4x_4^3}{3}+mx_4=0 \\ \Leftrightarrow\ &3x_4^4-20x_4^2+15m=0. \end{aligned}$$

Suy ra x_4 là nghiệm của hệ phương trình

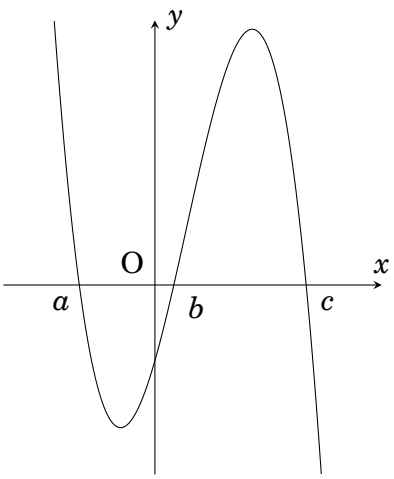
$$\begin{cases} x_4^4-4x_4^2+m=0 \\ 3x_4^4-20x_4^2+15m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x_4^4-40x_4^2=0 \\ 3x_4^4-20x_4^2+15m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_4^2=0 \\ m=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_4^2=\dfrac{10}{3} \\ m=\dfrac{20}{9}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, suy ra $m=\dfrac{20}{9}\in(2;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 6.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ (như hình vẽ bên) cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$. Xét 4 mệnh đề sau



(1) $f(c)>f(a)>f(b)$.

(2) $f(c)>f(b)>f(a)$.

(3) $f(a)>f(b)>f(c)$.

(4) $f(a)>f(b)$.

Trong các mệnh đề trên, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

✍ **Lời giải.**

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(c)$	↘	

Do đó $f(a)>f(b)$.

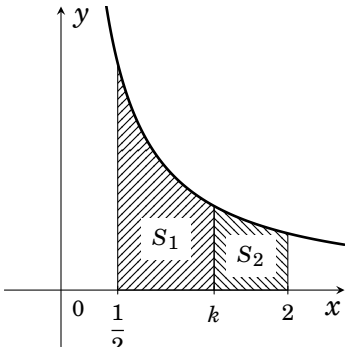
Lại có diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f'(x)$ với trục hoành trên đoạn $[a;b]$ nhỏ hơn diện tích hình phẳng giới hạn bởi $f'(x)$ với trục hoành trên đoạn $[b;c]$, do đó

$$\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x<\int_b^c |f'(x)|\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow -(f(b)-f(a))<f(c)-f(b) \Leftrightarrow f(a)<f(c).$$

Chọn đáp án C □

Câu 7.

Cho hình cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{1}{x}, x=\dfrac{1}{2}, x=2$ và trục hoành. Đường thẳng $x=k\left(\dfrac{1}{2}<k<2\right)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của k để $S_1=3S_2$.



A. $k=\sqrt{2}$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\dfrac{7}{5}$. **D.** $k=\sqrt{3}$.

✍ **Lời giải.**

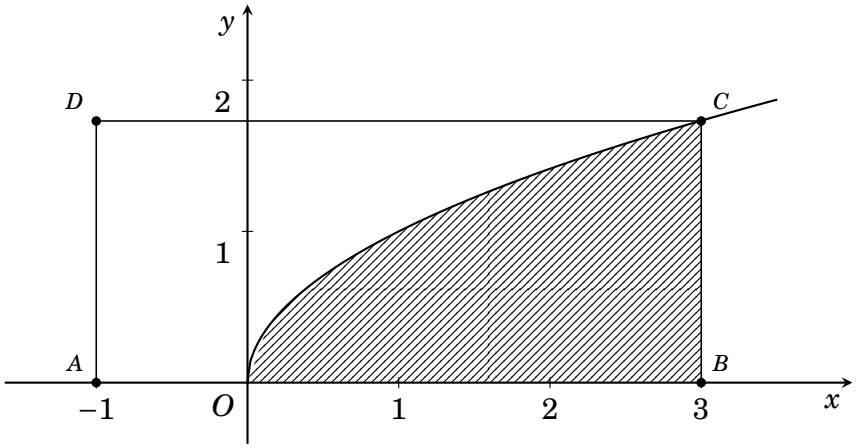
Ta có $\begin{cases} S_1+S_2=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=2\ln 2 \\ S_1=3S_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln 2}{2}=S_2 \\ S_2=\displaystyle\int_k^2\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln 2-\ln k \end{cases} \Rightarrow \ln k=\dfrac{\ln 2}{2} \Rightarrow k=\sqrt{2}.$

Chọn đáp án A □

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $C\left(a;\sqrt{a}\right)$, với $a>0$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tìm a.

A. $a=\dfrac{1}{2}$. **B.** $a=4$. **C.** $a=9$. **D.** $a=3$.

✍ **Lời giải.**



Gọi $ABCD$ là hình chữ nhật (H) với AB nằm trên trục Ox.

Nhận thấy đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và đi qua $C(a;\sqrt{a})$.

Do đó nó chia hình chữ nhật $ABCD$ ra làm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2.

Gọi S_1 là phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox, $x=0$, $x=a$ và S_2 là phần diện tích còn lại.

Ta có $S_1=\displaystyle\int_0^a \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Khi $x=0\Rightarrow t=0$, $x=a\Rightarrow t=\sqrt{a}$.

Do đó $S_1=\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} 2t^2\,\mathrm{d}t=\left(\frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^{\sqrt{a}}=\frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a+1$, $AD=\sqrt{a}$.

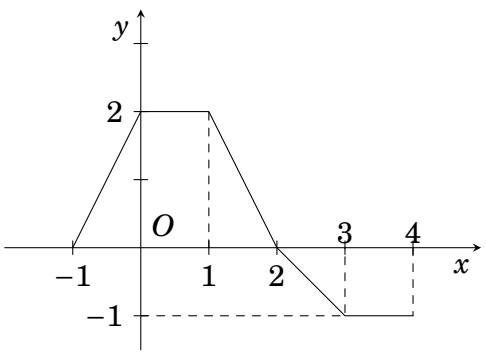
Khi đó $S_2=S_{ABCD}-S_1=\sqrt{a}(a+1)-\dfrac{2a\sqrt{a}}{3}=\dfrac{a\sqrt{a}}{3}+\sqrt{3}$.

Theo đề bài ta có $S_1=S_2\Leftrightarrow\dfrac{2a\sqrt{a}}{3}=\dfrac{a\sqrt{a}}{3}+\sqrt{a}\Leftrightarrow a\sqrt{a}=3\sqrt{a}\Leftrightarrow a=3$ (do $a>0$).

Chọn đáp án (D) □

Câu 9.

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1;4]$ như hình vẽ. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{-1}^{4}|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

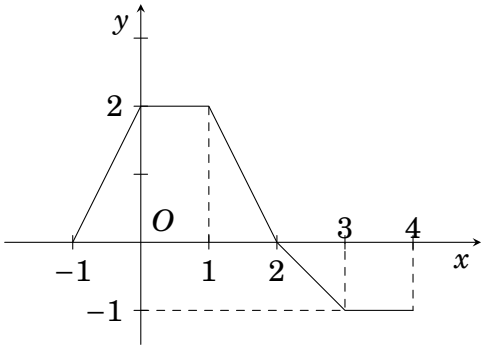


A. $I=\dfrac{5}{2}$. **B.** $I=\dfrac{11}{2}$. **C.** $I=5$. **D.** $I=3$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}(3+1)\cdot 2 - \frac{1}{2}(1+2)\cdot 1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

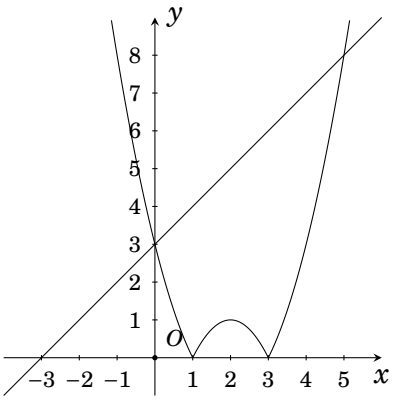


Chọn đáp án A □

Câu 10.

Cho hình phẳng $(\mathscr{H})$ giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = |x^2 - 4x + 3|$ và đường thẳng $y = x + 3$. Tính diện tích S của hình phẳng $(\mathscr{H})$.

A. $S = \dfrac{39}{2}$. **B.** $S = \dfrac{47}{2}$. **C.** $S = \dfrac{169}{6}$. **D.** $S = \dfrac{109}{6}$.



✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = x + 3$ là

$$|x^2 - 4x + 3| = x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5. \end{array}\right.$$

Từ đồ thị, diện tích S của hình phẳng $(\mathscr{H})$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_{0}^{1} \left[(x+3) - (x^2 - 4x + 3)\right] \mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \left[(x+3) - (-x^2 + 4x - 3)\right] \mathrm{d}x + \\ &\quad + \int_{3}^{5} \left[(x+3) - (x^2 - 4x + 3)\right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{1} (-x^2 + 5x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} (x^2 - 3x + 6)\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{5} (-x^2 + 5x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \frac{109}{6}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Câu 11. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x$, $y = x^2$, $y = 1$ trên miền $x \geq 0$, $y \leq 1$ là

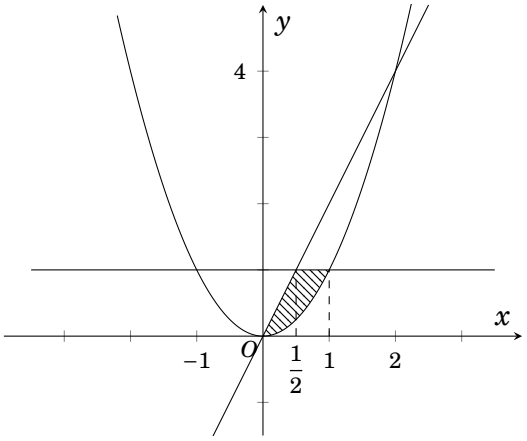
A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{12}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Phương trình hoành độ giao điểm $2x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.



Từ hình vẽ ta có diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{5}{12}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2x - x^2$ và trục hoành.

A. $S = \dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $S = \dfrac{4}{3}$. **C.** $S = \dfrac{5\pi}{6}$. **D.** $S = \dfrac{5}{6}$.

✍ **Lời giải.**

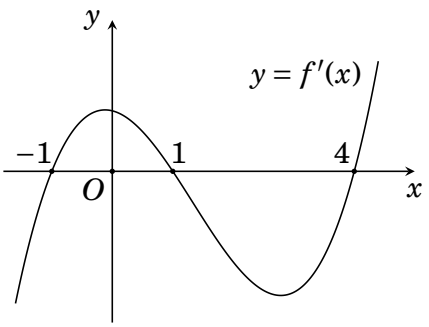
Xét phương trình: $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

$$\Rightarrow S = \int_0^2 |2x - x^2|\,dx = \left|\int_0^2 (2x - x^2)\,dx\right| = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 13.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị.

B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

C. $f(-1) < f(4) < f(1)$.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$ bằng $f(4)$.

✍ **Lời giải.**

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy

$$\int_{-1}^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x < \int_{1}^{4} -f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(1) - f(-1) < -f(4) + f(1) \Leftrightarrow f(-1) > f(4).$$

Suy ra, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$ bằng $f(4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 14. Cho $\mathscr{H}$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2+2$ và các tiếp tuyến của parabol đó tại điểm có tung độ bằng 3. Diện tích của $\mathscr{H}$ bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

✍ Lời giải.

Ta có $y_0=3\Rightarrow x_0^2+2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=-1\end{array}\right.$, ta được hai phương trình tiếp tuyến $y=2x+1$ và $y=-2x+1$.

Diện tích giới hạn bởi parabol và các tiếp tuyến là

$$S=\int\limits_{-1}^{0}\left|x^2+2+2x-1\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left|x^2+2-2x-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left|x^2+2x+1\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left|x^2-2x+1\right|\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

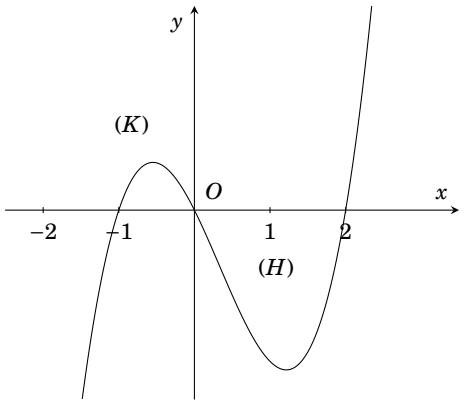
Chọn đáp án B □

Câu 15.

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Diện tích hình phẳng $(K),(H)$ lần lượt là $\dfrac{5}{12}$ và $\dfrac{8}{3}$. Biết $f(-1)=\dfrac{19}{12}$, tính $f(2)$.

A. $f(2)=\dfrac{11}{6}$. **B.** $f(2)=-\dfrac{2}{3}$.

C. $f(2)=3$. **D.** $f(2)=0$.



✍ Lời giải.

Ta có $S_{(K)}=\displaystyle\int\limits_{-1}^{0}f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\big|_{-1}^{0}=f(0)-f(-1)=\frac{5}{12}$.

$S_{(H)}=-\displaystyle\int\limits_{0}^{2}f'(x)\mathrm{d}x=(-f(x))\big|_{0}^{2}=f(0)-f(2)=\frac{8}{3}$.

Suy ra $f(2)-f(-1)=-\dfrac{9}{4}\Rightarrow f(2)=f(-1)-\dfrac{9}{4}=\dfrac{19}{12}-\dfrac{9}{4}=-\dfrac{2}{3}$.

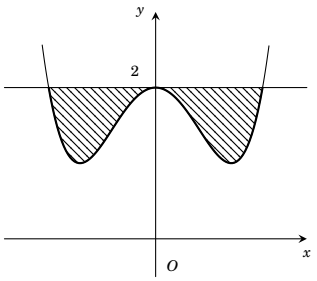
Chọn đáp án B □

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{2}-2m^2x^2+2$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\dfrac{64}{15}$ là

A. $\{\pm1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\left\{\pm1;\pm\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $\left\{\pm1;\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

✍ Lời giải.

Hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $\frac{1}{2}\cdot(-2m^2)<0\Leftrightarrow m^2>0\Leftrightarrow m\neq 0$.



Với $m\neq 0$, đồ thị hàm số có điểm cực đại là $A(0;2)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=2$ và đồ thị hàm số $y=\frac{x^4}{2}-2m^2x^2+2$ là

$$\frac{x^4}{2}-2m^2x^2+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2|m|.\end{array}\right.$$

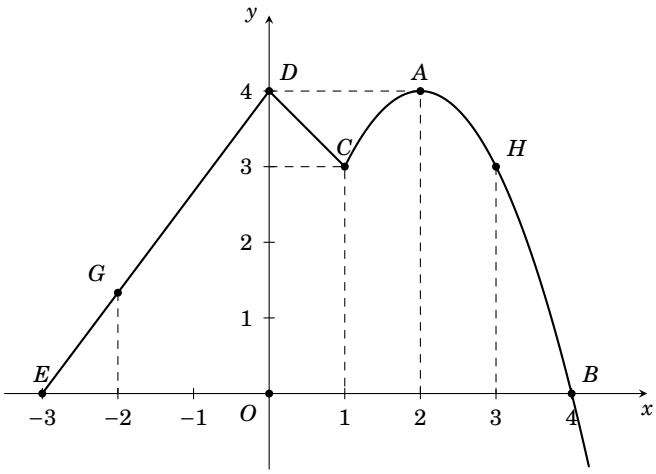
Diện tích hình phẳng cần tính là

$$\frac{64}{15}=2\int_0^{2|m|}\left(2m^2x^2-\frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{32}{15}=\left(\frac{2m^2x^3}{3}-\frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^{2|m|}$$

$$\Leftrightarrow\frac{32}{15}|m|^5=\frac{32}{15}\Leftrightarrow|m|^5=1\Leftrightarrow m=\pm 1$$

Chọn đáp án A □

Câu 17. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;5]$ như hình vẽ dưới đây (phần cong của đồ thị là một phần của Parabol $y=ax^2+bx+c$). Tính $I=\int_{-2}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.



A. $I=\frac{53}{3}$. **B.** $I=\frac{97}{6}$. **C.** $I=\frac{43}{2}$. **D.** $I=\frac{95}{6}$.

✍ Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có $y=f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x+4 & \text{nếu } -3\le x<0\\ -x+4 & \text{nếu } 0\le x<1\\ -x^2+4x & \text{nếu } 1\le x\le 5\end{cases}$. Suy ra

$$I=\int_{-2}^{3}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}f(x)\mathrm{d}x$$

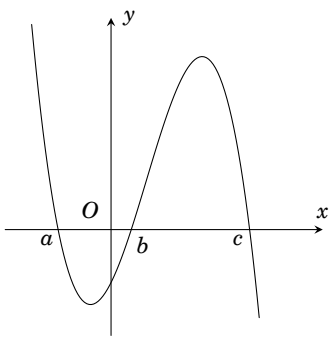
$$=\int_{-2}^{0}\left(\frac{4}{3}x+4\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(-x+4)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}(-x^2+4x)\mathrm{d}x$$

$$= \left(-\frac{2x^2}{3}+4x\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(-\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{0}^{1} + \left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Big|_{1}^{3}$$
$$= \frac{97}{6}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 18.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $f(a) > f(b) > f(c)$. **B.** $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(c) > f(a) > f(b)$. **D.** $f(b) > f(a) > f(c)$.

✍ **Lời giải.**

Ta có $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x < 0$ nên $f(b) < f(a)$. Tương tự, $f(c) - f(b) = \int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x > 0$ nên $f(c) > f(b)$.

Xét $f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x > 0$ nên $f(c) > f(a)$.

Vậy $f(c) > f(a) > f(b)$.

Chọn đáp án C □

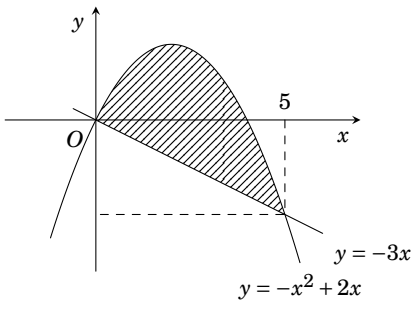
Câu 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x$ và $y = -3x$.

A. $\frac{125}{2}$. **B.** $\frac{125}{3}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{125}{8}$.

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$-x^2 + 2x = -3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5. \end{array}\right.$$



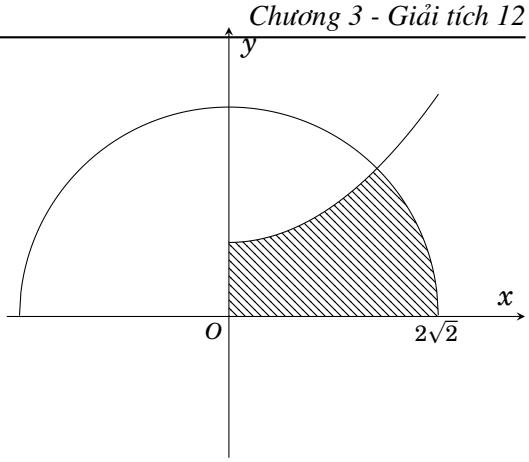
Diện tích S của hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^5 \left|(-x^2+2x)-(-3x)\right|\mathrm{d}x = \left|\int_0^5 (-x^2+5x)\mathrm{d}x\right| = \frac{125}{6}.$$

Chọn đáp án C □

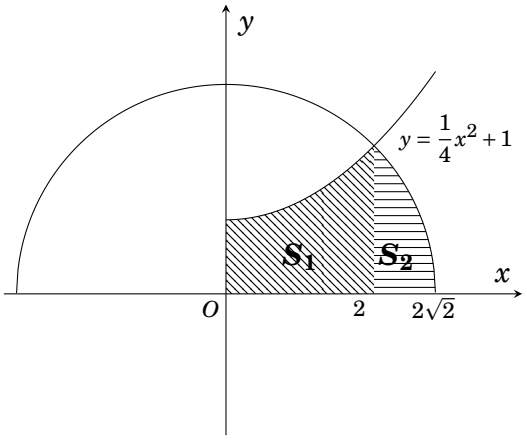
Câu 20.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ với $(0\le x\le 2\sqrt{2})$, nửa đường tròn $y=\sqrt{8-x^2}$ và trục hoành, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{3\pi+14}{6}$. **B.** $\dfrac{2\pi+2}{3}$. **C.** $\dfrac{3\pi+4}{6}$. **D.** $\dfrac{3\pi+2}{3}$.

✍ **Lời giải.**



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và nửa đường tròn là:

$$\frac{1}{4}x^2=\sqrt{8-x^2}\Leftrightarrow x=\pm 2.$$

Trên khoảng $\left(0;2\sqrt{2}\right)$, hai đường cong giao nhau tại điểm có hoành độ bằng 2.

Gọi S_1 là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi parabol, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2$.

Gọi S_2 là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đường tròn, trục hoành, đường thẳng $x=2\sqrt{2}$ và đường thẳng $x=2$ thì $S_H=S_1+S_2$. Ta có $S_2=\displaystyle\int\limits_2^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $a=\dfrac{x}{2\sqrt{2}}\Rightarrow \mathrm{d}x=2\sqrt{2}da$. Ta được $S_2=8\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{1-a^2}\mathrm{d}a$.

Đặt $a=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}a=\cos t\mathrm{d}t$. Ta được

$$S_2=8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=(4t+2\sin 2t)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2.$$

Dễ có $S_1=\displaystyle\int\limits_0^2\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\Rightarrow S_H=S_1+S_2=\frac{3\pi+2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Tính diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x=4,x=9$ và đường cong có phương trình $y^2=8x$.

A. $\dfrac{76\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{152}{3}$. **C.** $76\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{152\sqrt{2}}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Viết lại $y^2 = 8x \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{2x}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm:

$$S = 2\int_4^9 2\sqrt{2x} = 4\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_4^9 = \frac{152\sqrt{2}}{3}.$$

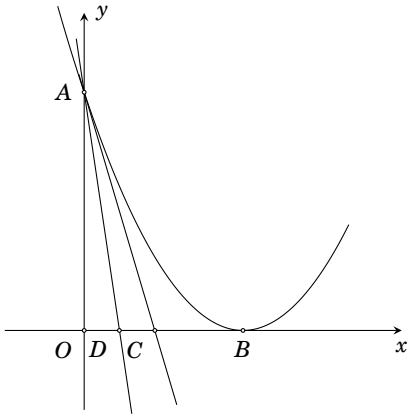
Chọn đáp án D □

Câu 22. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (x-3)^2$, trục tung và trục hoành. Gọi k_1, k_2 $(k_1 > k_2)$ là hệ số góc của hai đường thẳng cùng đi qua $A(0;9)$ và chia (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tính $k_1 - k_2$.

A. $\frac{13}{2}$. **B.** 7. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{27}{4}$.

Lời giải.

$y = (x-3)^2$ cắt trục tung tại $A(0;9)$ và trục hoành tại $B(3;0)$.



Diện tích (H) là

$$\int_0^3 (x-3)^2\,\mathrm{d}x = \frac{(x-3)^3}{3}\Big|_0^3 = 9.$$

Gọi giao điểm của hai đường thẳng có hệ số góc $k_1; k_2$ với trục hoành là $C(c;0)$ và $D(d;0)$.

Do $k_1 > k_2$ nên $OC > OD$.

Theo giả thiết ta có $S_{OAD} = S_{ACD} = \frac{1}{3}S_{(H)} = 3$.

Mà $S_{OAD} = \frac{1}{2}\cdot OA\cdot OD = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot OD \Rightarrow OD = \frac{3}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{3}$.

Tương tự $CD = \frac{2}{3} \Rightarrow OC = \frac{4}{3}$.

Ta có: $k_1 = -\tan\widehat{ACO} = -\frac{OA}{OC} = -\frac{9}{\frac{4}{3}} = \frac{-27}{4}$;

$k_2 = -\tan\widehat{ADO} = -\frac{OA}{OD} = -\frac{9}{\frac{2}{3}} = \frac{-27}{2}$.

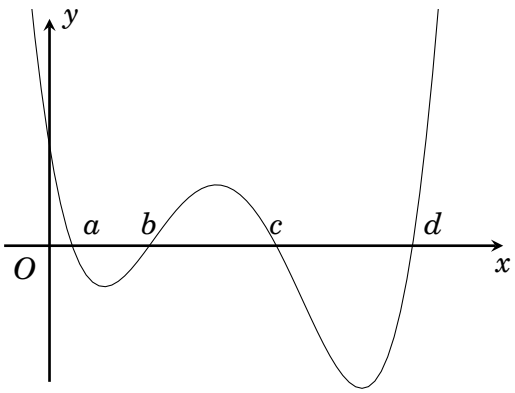
Vậy $k_1 - k_2 = \frac{27}{4}$.

Chọn đáp án D □

Câu 23.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a, b, c, d(như hình vẽ). Xác định số khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

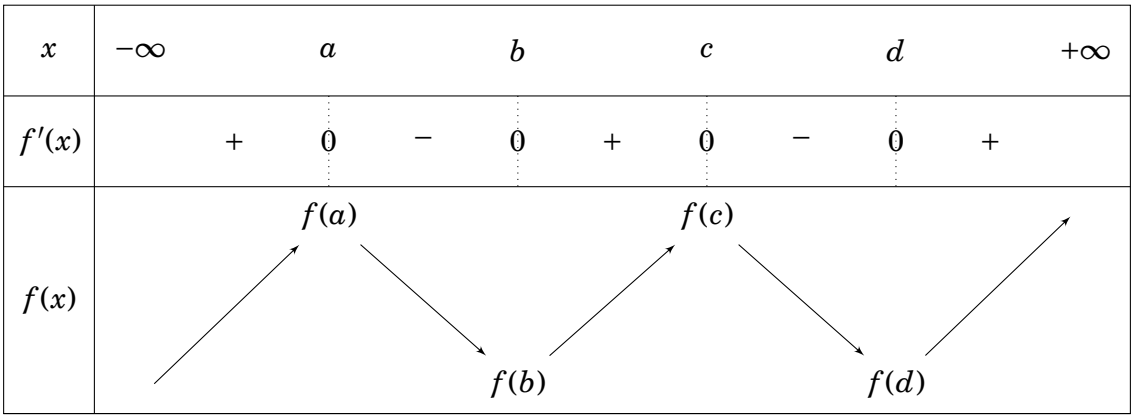
1. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(\infty; a)$.
2. Hàm số $y = g(x) = f(1-2x)$ đạt cực tiểu tại $x = \frac{1-b}{2}$.
3. $\max\limits_{x\in[a;d]} f(x) = f(c)$; $\min\limits_{x\in[a;d]} f(x) = f(d)$.



A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Từ giả thiết của bài toán ta có bảng biến thiên sau



Nhìn vào hình vẽ ta thấy

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx < \int_b^c |f'(x)|\,dx < \int_c^d |f'(x)|\,dx \Rightarrow 0 < f(a)-f(b) < f(c)-f(b) < f(c)-f(d)$$

$$\Rightarrow f(c) > f(a) > f(b) > f(d)$$

$$\Rightarrow \max_{[0;d]} f(x) = f(c); \min_{[0;d]} f(x) = f(d)$$

Vậy (1), (2) sai và (3) đúng.

Chọn đáp án A □

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, dương và nghịch biến trên $[0;2]$ và có $f(1) = 1$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, $y = \dfrac{1}{f(x)}$, hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$. Công thức tính diện tích hình (H) là

A. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1-f^2(x)}{f(x)}\,dx$.

B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{f^2(x)-1}{f(x)}\,dx + \int_1^2 \frac{1-f^2(x)}{f(x)}\,dx$.

C. $\displaystyle\int_0^2 \frac{f^2(x)-1}{f(x)}\,dx$.

D. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-f^2(x)}{f(x)}\,dx + \int_1^2 \frac{f^2(x)-1}{f(x)}\,dx$.

✍ **Lời giải.**

Vì $f(x)$ là hàm nghịch biến trên $[0;2]$ nên

— Với $x \in [1;2]$ thì $f(x) \le f(1) = 1$.

— Với $x \in [0;1]$ thì $f(x) \ge f(1) = 1$.

Diện tích hình (H) là

$$S = \int_0^2 |f(x) - \frac{1}{f(x)}|\,dx = \int_0^1 f(x) - \frac{1}{f(x)} + \int_1^2 \frac{1}{f(x)} - f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{f^2(x)-1}{f(x)}\,dx + \int_1^2 \frac{1-f^2(x)}{f(x)}\,dx.$$

Chọn đáp án B □

Câu 25. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong $y = x^2 - 2x$ và $y = 2x^2 - x - 2$ là

A. $\dfrac{9}{2}$.

B. 4.

C. 5.

D. 9.

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2-2x=2x^2-x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$

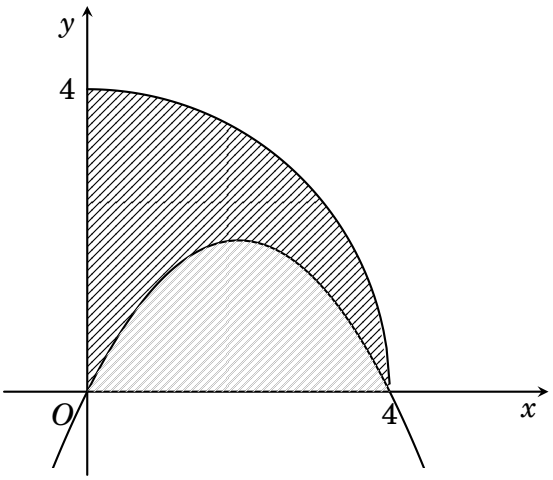
Vậy $\displaystyle\int_{-2}^{1}\left|(x^2-2x)-(2x^2-x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26.

Cho hình phẳng D giới hạn bởi parabol $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{16-x^2}$, với $(0\le x\le 4)$, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích của hình D.

A. $8\pi-\frac{16}{3}$. **B.** $2\pi-\frac{16}{3}$. **C.** $4\pi+\frac{16}{3}$. **D.** $4\pi-\frac{16}{3}$.



✍ **Lời giải.**

Ta có $S=\frac{1}{4}\pi 4^2-\displaystyle\int_0^4\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\mathrm{d}x=4\pi-\frac{16}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-x$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x=1$ và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

✍ **Lời giải.**

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị của hàm số $y=x^2-x$ tại điểm $x=1$ là $y=x-1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

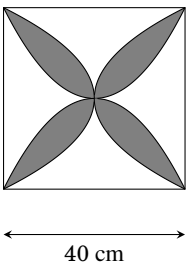
$$S=\int_0^2\left|x^2-x-(x-1)\right|\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2-2x+1)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)\Big|_0^2=\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 28.

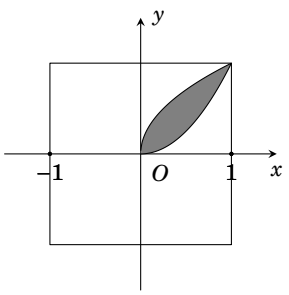
Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm. Người ta đã dùng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (phần tô đậm như hình vẽ). Diện tích của mỗi cánh hoa đó bằng

A. 200 cm^2. **B.** $\frac{800}{3}$ cm^2. **C.** $\frac{400}{3}$ cm^2. **D.** $\frac{200}{3}$ cm^2.



✍ **Lời giải.**

Đặt hình vuông vào hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, cạnh của hình vuông ta có thể coi có độ dài bằng 2 trên hệ trục tọa độ.



Khi đó diện tích một cánh hoa chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2$ và $y=\sqrt{x}$. Ta có

$$S_1=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

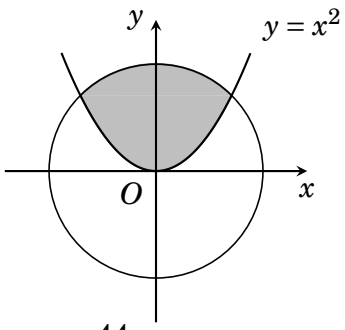
Vậy thực tế diện tích của mỗi cánh hoa là

$$S=20\times 20\times S_1=\frac{400}{3}\text{cm}^2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 29.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2$ và đường tròn $x^2+y^2=2$ (Phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành



A. $\frac{22\pi}{15}$. **B.** $\frac{\pi}{5}$. **C.** $\frac{5\pi}{3}$. **D.** $\frac{44\pi}{15}$.

✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=x^2$ và đường tròn $x^2+y^2=2$, ta có

$$x^2+x^4=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1.\end{array}\right.$$

Khi đó thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là

$$V=\pi\int_{-1}^1|2-x^2-x^4|\,\mathrm{d}x=\pi\int_{-1}^1(2-x^2-x^4)\,\mathrm{d}x=\pi\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^1=\frac{44\pi}{15}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 30. Cho hình phẳng D giới hạn bởi các hàm số $y=\frac{x^2}{2}, y=\sqrt{2x}$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\frac{4\pi}{3}$. **B.** $V=\frac{28\pi}{5}$. **C.** $V=\frac{36\pi}{35}$. **D.** $V=\frac{12\pi}{5}$.

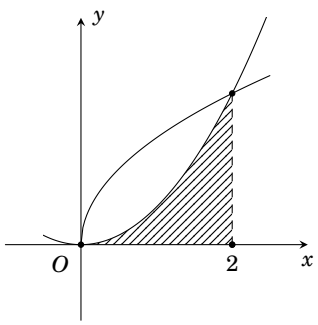
✍ **Lời giải.**

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x^2}{2}=\sqrt{2x}\Leftrightarrow\frac{x^4}{4}=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2.\end{array}\right.$$

Gọi D_1 là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x}, y=0, x=0, x=2$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D_1 quanh trục hoành có thể tích V_1.

Gọi D_2 là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{x^2}{2}, y=0, x=0, x=2$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D_2 quanh trục hoành có thể tích V_2.



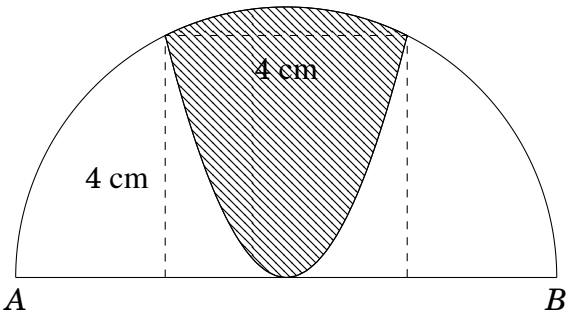
Khi đó

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^2\frac{x^4}{4}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(2x-\frac{x^4}{4}\right)\mathrm{d}x=\pi\left(x^2-\frac{x^5}{20}\right)\Big|_0^2=\frac{12\pi}{5}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 31.

Cho nửa đường tròn đường kính $AB=4\sqrt{5}$. Trên đó người ta vẽ parabol có đỉnh trùng với tâm của nửa hình tròn, trục đối xứng là đường kính vuông góc với AB. Parabol cắt nửa đường tròn tại hai điểm cách nhau 4 cm và khoảng cách từ hai điểm đó đến AB bằng nhau và bằng 4 cm. Sau đó người ta cắt bỏ phần

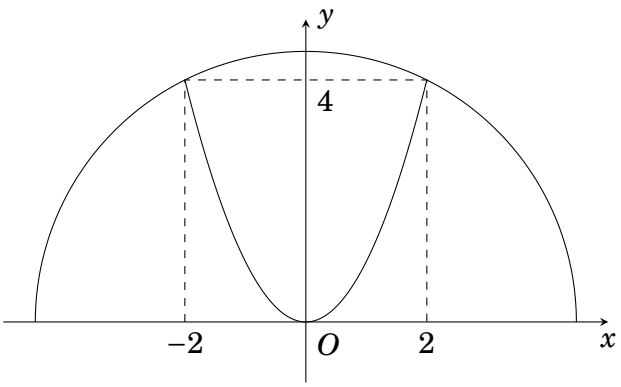


hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và parabol (phần gạch sọc trong hình vẽ). Đem phần còn lại quay xung quanh trục AB. Thể tích của khối tròn xoay thu được bằng

A. $V=\dfrac{\pi}{15}\left(800\sqrt{5}-464\right)\text{ cm}^3$.
B. $V=\dfrac{\pi}{3}\left(800\sqrt{5}-928\right)\text{ cm}^3$.
C. $V=\dfrac{\pi}{5}\left(800\sqrt{5}-928\right)\text{ cm}^3$.
D. $V=\dfrac{\pi}{15}\left(800\sqrt{5}-928\right)\text{ cm}^3$.

✍ **Lời giải.**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình đường tròn là $y=\sqrt{20-x^2}$ và phương trình của parabol là $y=x^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm là $\sqrt{20-x^2}=x^2\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Do tính chất đối xứng của hình vẽ nên ta có thể tích vật thể tròn xoay được tính theo công thức

$$V=2\left[\pi\int_0^{2\sqrt{5}}(20-x^2)\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^2\left(20-x^2-x^4\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{15}\pi\left(800\sqrt{5}-928\right).$$

Chọn đáp án D □

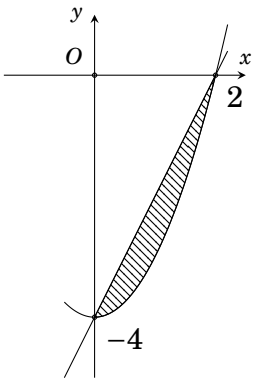
Câu 32. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4$, $y=2x-4$, $x=0$, $x=2$ quanh trục Ox.

A. $\dfrac{32\pi}{7}$. **B.** $\dfrac{22\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{32\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{32\pi}{5}$.

✍ Lời giải.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$x^2-4=2x-4 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2. \end{array}\right.$$



Thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V=\pi\int\limits_0^2\left[(x^2-4)^2-(2x-4)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(x^4-12x^2+16x\right)\mathrm{d}x=\frac{32\pi}{5}.$$

Chọn đáp án D □

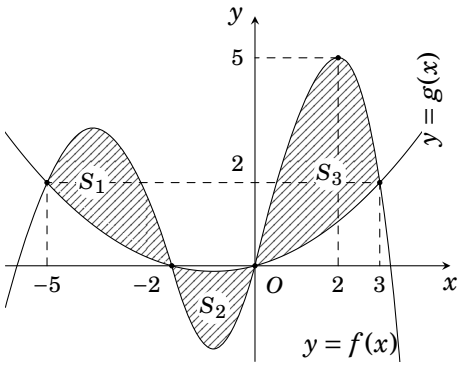
Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$.

Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và parabol $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m, n, p.

Tích phân $\displaystyle\int\limits_{-5}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-m+n-p-\dfrac{208}{45}$. **B.** $m-n+p+\dfrac{208}{45}$.

C. $m-n+p-\dfrac{208}{45}$. **D.** $-m+n-p+\dfrac{208}{45}$.



✍ Lời giải.

Ta có $\displaystyle\int\limits_{-5}^{3}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_{-5}^{-2}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x}_{S_1}+\underbrace{\int\limits_{-2}^{0}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x}_{-S_2}+\underbrace{\int\limits_{0}^{3}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x}_{S_3}.$

Do đó $\displaystyle\int\limits_{-5}^{3}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=m-n+p$. Suy ra $\displaystyle\int\limits_{-5}^{3}f(x)\mathrm{d}x=m-n+p+\int\limits_{-5}^{3}g(x)\mathrm{d}x$.

Dựa vào đồ thị thì parabol $(P)\colon y=g(x)=ax^2+bx+c$ đi qua $O(0,0)$, $A(-2,0)$ và $B(3;2)$ nên

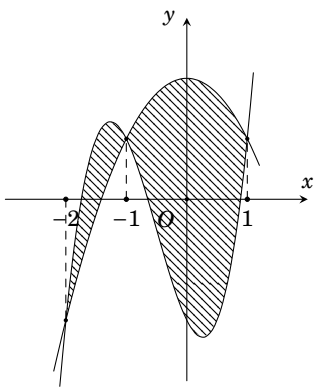
$$\left\{\begin{array}{l} c=0 \\ 4a-2b+c=0 \\ 9a+3b+c=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{2}{15} \\ b=\dfrac{4}{15} \\ c=0. \end{array}\right.$$

Vậy $\displaystyle\int\limits_{-5}^{3}f(x)\mathrm{d}x=m-n+p+\int\limits_{-5}^{3}\left(\frac{2}{15}x^2+\frac{4}{15}x\right)\mathrm{d}x=m-n+p+\frac{208}{45}$.

Chọn đáp án B □

Câu 34.

Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2;-1;1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{37}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{37}{12}$.

✍ Lời giải.

Ta có $f(x)-g(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4$ (1).

Mặt khác phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ nên

$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow(x+2)(x+1)(x-1)=0\Leftrightarrow x^3+2x^2-x-2=0\ (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra $f(x)-g(x)=2x^3+4x^2-2x-4$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-2}^{-1}(2x^3+4x^2-2x-4)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}(2x^3+4x^2-2x-4)\,\mathrm{d}x=\frac{37}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 35. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{120}t^2+\dfrac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có giá tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 25 (m/s). **B.** 36 (m/s). **C.** 30 (m/s). **D.** 21 (m/s).

✍ Lời giải.

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int a\,\mathrm{d}t=at+C$ mà $v_B(0)=0\Rightarrow v_B(t)=at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm bằng nhau do đó

$$\int_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{15}at\,\mathrm{d}t\Leftrightarrow 225=a\cdot\frac{225}{2}\Leftrightarrow a=2.$$

Vậy vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t)=2\cdot 15=30$ (m/s).

Chọn đáp án C □

Câu 36. Một mặt phẳng chứa trục của một khối tròn xoay, cắt hình đó thành một hình elip có trục lớn bằng 12 (cm), trục bé bằng 8 (cm) và trục lớn nằm trên trục của khối tròn xoay. Thể tích của khối đó bằng

A. 96π cm^3. **B.** 192π cm^3. **C.** 256π cm^3. **D.** 128π cm^3.

✍ Lời giải.

Gọi phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Độ dài trục lớn $2a=12\Rightarrow a=6$. Độ dài trục bé $2b=8\Rightarrow b=4$.

Vậy elip có phương trình là $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

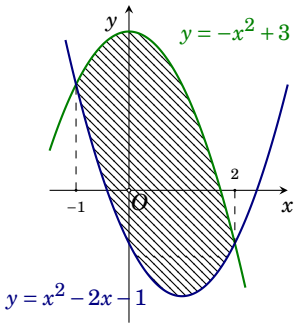
Thể tích của khối tròn xoay là

$$V=\pi\int\limits_{-6}^{6}16\left(1-\frac{x^2}{36}\right)=\pi\left(16x-\frac{x^3}{108}\right)\Big|_{-6}^{6}=128\pi\text{ cm}^3.$$

Chọn đáp án D □

Câu 37.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}(-2x+2)\,\mathrm{d}x$.

C. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}(2x-2)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x$.

✍ **Lời giải.**

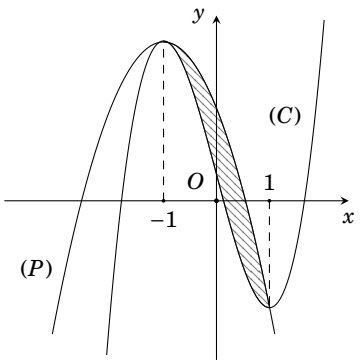
$$S=\int\limits_{-1}^{2}\left[(-x^2+3)-(x^2-2x-1)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x.$$

Chọn đáp án D □

Câu 38.

Cho hai hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$, $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p$, $(m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(2;3)$.



✍ **Lời giải.**

Từ hình vẽ, ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) có hai nghiệm là $x=-1$ và $x=1$. Do đó ta có $\begin{cases}1+a+b+c=m+n+p\\-1+a-b+c=m-n+p\end{cases}\Rightarrow 2+2b=2n\Rightarrow n=b+1.$ (1)

Mà (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x=-1\Rightarrow-\dfrac{n}{2m}=-1\Rightarrow n=2m.$ (2)

Mặt khác (C) có hai điểm cực trị là $x=-1$ và $x=1$ suy ra $\begin{cases}3+2a+b=0\\3-2a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=-3.\end{cases}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\begin{cases}a=0\\b=-3\\n=-2\\m=-1\\c-p=-1\end{cases}$. Do đó $y=x^3-3x+c$ (C); $y=-x^2-2x+p$.

Vậy diện tích phần gạch sọc là $S=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\left|x^3+x^2-x-1\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Vậy $S\in(1;2)$.

Chọn đáp án B □

Câu 39. Tính thể tích V của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=4$, biết rằng khi cắt bởi mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0<x<4)$ thì được thiết diện là nửa hình tròn có bán kính $R=x\sqrt{4-x}$.

A. $V=\dfrac{64}{3}$. **B.** $V=\dfrac{32}{3}$. **C.** $V=\dfrac{64\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{32\pi}{3}$.

✍ Lời giải.

Diện tích thiết diện là

$$S(x)=\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}\pi x^2(4-x).$$

Vậy thể tích cần tìm là

$$V=\int_0^4 S(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^4 \pi x^2(4-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi\int_0^4\left(4x^2-x^3\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^4=\frac{32\pi}{3}.$$

Chọn đáp án D □

Câu 40. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh Ox.

A. $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2+1\right)}{2}$. **B.** $V=\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}$. **C.** $V=\dfrac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\pi\mathrm{e}^2}{2}$.

✍ Lời giải.

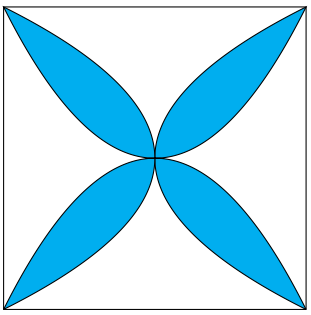
Thể tích của khối tròn xoay được sinh ra khi (H) quay quanh Ox là

$$V=\int_0^1\pi\left(\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi\left(\mathrm{e}^2-1\right)}{2}.$$

Chọn đáp án C □

Câu 41.

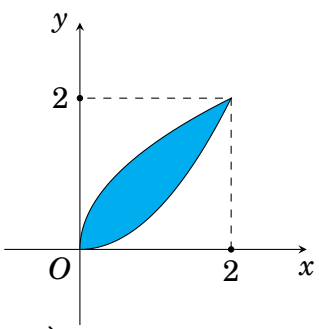
Sàn của một viện bảo tàng mỹ thuật được lát bằng những viên gạch hình vuông cạnh 40 cm như hình bên. Biết rằng người thiết kế đã sử dụng các đường cong có phương trình $4x^2=y^4$ và $4y^2=x^4$ để tạo hoa văn cho viên gạch. Diện tích phần được tô đậm gần nhất với giá trị nào dưới đây?



A. 533 cm^2. **B.** 266 cm^2. **C.** 534 cm^2. **D.** 267 cm^2.

✍ Lời giải.

Do tính đối xứng nên diện tích cần tìm bằng 4 lần diện tích phần tô đậm của hình vẽ bên. Ta chỉ xét đồ thị trong góc phần tư thứ nhất do đó



$$4x^2=y^4\Leftrightarrow y=\sqrt{2x}$$
$$4y^2=x^4\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x^2.$$

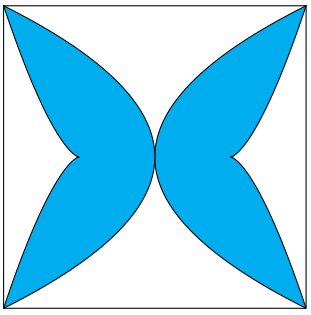
Một đơn vị trong hệ tọa độ Oxy bằng 10 cm, do đó diện tích của phần tô đậm ban đầu là

$$S=4\cdot10^2\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=400\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{1600}{3}\ (\mathrm{cm}^2).$$

Chọn đáp án A □

Câu 42.

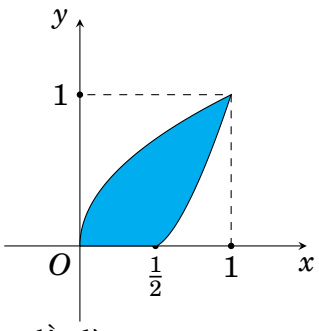
Sàn của một viện bảo tàng mỹ thuật được lát bằng những viên gạch hình vuông cạnh 20 cm như hình bên. Biết rằng người thiết kế đã sử dụng các đường cong có phương trình $x^2 = y^4$ và $(2|x|-1)^3 = y^2$ để tạo hoa văn cho viên gạch. Diện tích phần được tô đậm gần nhất với giá trị nào dưới đây?



A. $373\ \text{cm}^2$. **B.** $186\ \text{cm}^2$. **C.** $374\ \text{cm}^2$. **D.** $187\ \text{cm}^2$.

✍ Lời giải.

Do tính đối xứng nên diện tích cần tìm bằng 4 lần diện tích phần tô đậm của hình vẽ bên. Ta chỉ xét đồ thị trong góc phần tư thứ nhất do đó



$$x^2 = y^4 \Leftrightarrow x = y^2$$
$$(2|x|-1)^3 = y^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{y^2}+1\right).$$

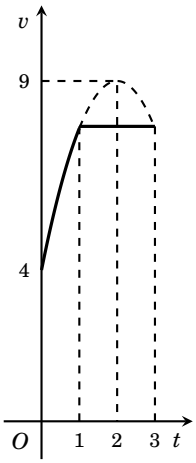
Một đơn vị trong hệ tọa độ Oxy bằng 10 cm, do đó diện tích của phần tô đậm ban đầu là

$$S = 4\cdot 10^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{y^2}+1\right) - y^2\right) \mathrm{d}y = 400\cdot\frac{7}{15} = \frac{560}{3}\ (\text{cm}^2).$$

Chọn đáp án D □

Câu 43.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s = 23{,}25$ km. **B.** $s = 21{,}58$ km.

C. $s = 15{,}50$ km. **D.** $s = 13{,}83$ km.

✍ Lời giải.

Dễ dàng tìm được phương trình của vận tốc trong 1 giờ đầu tiên là $v = -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4$ còn 2 giờ tiếp theo là $v = \frac{31}{4}$.

Vậy quãng đường mà vật đi được trong 3 giờ đó là

$$s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4\right) \mathrm{d}t + \int_1^3 \frac{31}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{259}{12} \approx 21{,}58.$$

Chọn đáp án B □

Câu 44. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox.

A. $V=4-2e$. **B.** $V=(4-2e)\pi$. **C.** $V=e^2-5$. **D.** $V=(e^2-5)\pi$.

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=2(x-1)e^x$ và trục hoành là

$$2(x-1)e^x=0\Leftrightarrow x=1$$

Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là

$$V=\int_0^1\left[2(x-1)e^x\right]^2\,\mathrm{d}x=4\int_0^1(x-1)^2e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

Xét tích phân $I=\displaystyle\int_0^1(x-1)^2e^{2x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=(x-1)^2\\ \mathrm{d}v=e^{2x}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2(x-1)\,\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$,

Ta có: $I=\dfrac{1}{2}(x-1)^2e^{2x}\Big|_0^1-\displaystyle\int_0^1(x-1)e^{2x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}-\int_0^1(x-1)e^{2x}\,\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u_1=(x-1)\\ \mathrm{d}v_1=e^{2x}\,\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u_1=\mathrm{d}x\\ v_1=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$,

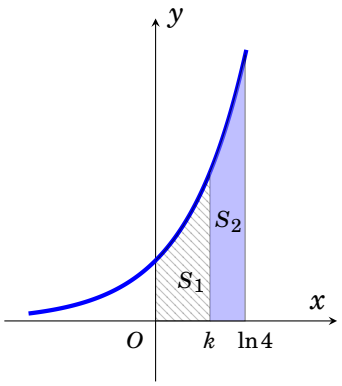
Do đó $I=-\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}(x-1)e^{2x}\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1e^{2x}\,\mathrm{d}x\right)=-\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1\right)=-\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{e^2-5}{4}$

Vậy $V=4I=4\cdot\dfrac{e^2-5}{4}=e^2-5$.

Chọn đáp án D □

Câu 45.

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k\,(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



A. $k=\dfrac{2}{3}\ln 4$. **B.** $k=\ln 2$.

C. $k=\ln\dfrac{8}{3}$. **D.** $k=\ln 3$.

✍ Lời giải.

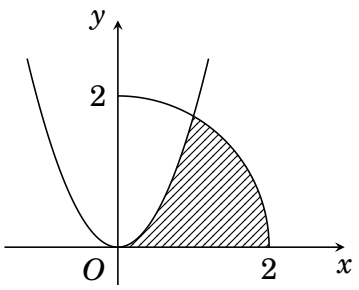
Ta có $S_1=\displaystyle\int_0^k\left|\mathrm{e}^x\right|\mathrm{d}x=\mathrm{e}^k-1$ và $S_2=\int_k^{\ln 4}\left|\mathrm{e}^x\right|\mathrm{d}x=4-\mathrm{e}^k$.

Theo đề bài $S_1=2S_2\Rightarrow \mathrm{e}^k-1=2(4-\mathrm{e}^k)\Leftrightarrow \mathrm{e}^k=3\Leftrightarrow k=\ln 3$.

Chọn đáp án D □

Câu 46.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\leqslant x\leqslant 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

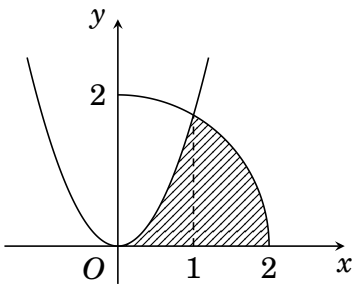


A. $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.

C. $\dfrac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=\sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\leqslant x\leqslant 2$) là



$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}x^2\Leftrightarrow 4-x^2=3x^4\Leftrightarrow x=1 \text{ (vì } 0\leqslant x\leqslant 2\text{)}$$

Cách 1: Diện tích của (H) là:

$$S=\int\limits_0^1\sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_0^1+I=\frac{\sqrt{3}}{3}+I$$

Với $I=\displaystyle\int\limits_1^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x=2\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$, $x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t.\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t.\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2(1+\cos 2t).\mathrm{d}t=(2x+\sin 2t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $S=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+I=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.

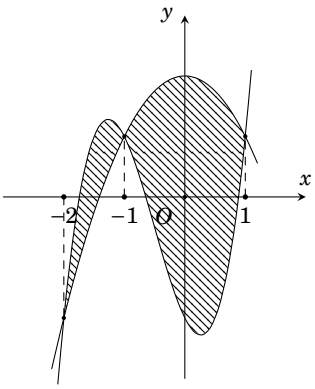
Cách 2: Diện tích của (H) bằng diện tích một phần tư hình tròn bán kính 2 trừ diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung tròn, parabol và trục Oy, tức là

$$S=\frac{1}{4}\cdot(\pi.2^2)-\int\limits_0^1\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right)\mathrm{d}x$$

Chọn đáp án B □

Câu 47.

Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2;-1;1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{37}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{37}{12}$.

✍ Lời giải.

Ta có $f(x)-g(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4$ (1).

Mặt khác phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ nên

$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow(x+2)(x+1)(x-1)=0\Leftrightarrow x^3+2x^2-x-2=0\ (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra $f(x)-g(x)=2x^3+4x^2-2x-4$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int\limits_{-2}^{-1}(2x^3+4x^2-2x-4)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}(2x^3+4x^2-2x-4)\,\mathrm{d}x=\frac{37}{6}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 48. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có giá tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 25 (m/s). **B.** 36 (m/s). **C.** 30 (m/s). **D.** 21 (m/s).

✍ **Lời giải.**

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.
Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int a\,\mathrm{d}t=at+C$ mà $v_B(0)=0\Rightarrow v_B(t)=at$.
Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm bằng nhau do đó

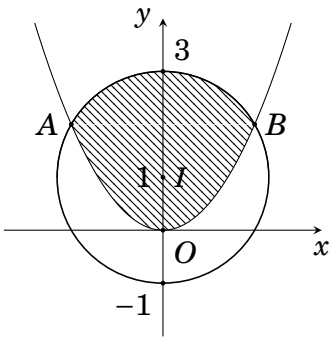
$$\int\limits_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^{15}at\,\mathrm{d}t\Leftrightarrow 225=a\cdot\frac{225}{2}\Leftrightarrow a=2.$$

Vậy vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t)=2\cdot 15=30$ (m/s).
Chọn đáp án C □

Câu 49.

Cho đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$ và bán kính bằng $R=2$, parabol $(P)\colon y=m\cdot x^2$ cắt (C) tại hai điểm A, B có tung độ bằng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) (phần gạch sọc ở hình vẽ) có kết quả gần đúng bằng số nào sau đây?

A. 7,0755. **B.** 7,0756. **C.** 5,4908. **D.** 11,6943.



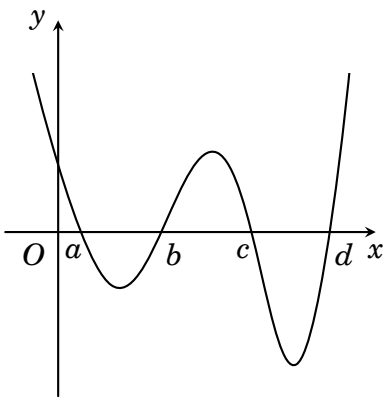
✍ **Lời giải.**

Ta có $(C)\colon x^2+(y-1)^2=4$.
Xét $A(x;2)\in(C)$, ta có $x^2+1=4\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$. Suy ra $A\left(-\sqrt{3};2\right)$, $B\left(\sqrt{3};2\right)$.
Vì $A\in(P)$ nên ta có $2=m\cdot 3\Leftrightarrow m=\frac{2}{3}$. Suy ra $(P)\colon y=\frac{2}{3}x^2$.
Từ phương trình của (C), ta có $y=\pm\sqrt{4-x^2}+1$ nên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ thuộc đồ thị hàm số $y=\sqrt{4-x^2}+1$.
Vậy diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S=\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|\sqrt{4-x^2}+1-\frac{2}{3}x^2\right|\mathrm{d}x\approx 7{,}075541545$.

Chọn đáp án A □

Câu 50.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm a,b,c,d (hình sau). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

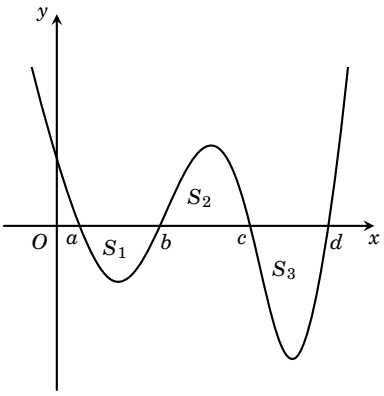


A. $f(c)>f(a)>f(b)>f(d)$. **B.** $f(c)>f(a)>f(d)>f(b)$.

C. $f(a)>f(b)>f(c)>f(d)$. **D.** $f(a)>f(c)>f(d)>f(b)$.

✍ Lời giải.

Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=a,x=b$; $x=b,x=c$; $x=c,x=d$ (như hình vẽ).



Ta có:

$$S_1<S_2\Rightarrow\int_a^b[-f'(x)]\,\mathrm{d}x<\int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow[-f(x)]\Big|_a^b<f(x)\Big|_b^c$$

$$\Leftrightarrow -f(b)+f(a)<f(c)-f(b)\Leftrightarrow f(a)<f(c)\ (1).$$

$$S_2<S_3\Rightarrow\int_b^c f'(x)\,\mathrm{d}x<\int_c^d[-f'(x)]\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow f(x)\Big|_b^c<[-f(x)]\Big|_c^d$$

$$\Leftrightarrow f(c)-f(b)<-f(d)+f(c)\Leftrightarrow f(b)>f(d)\ (2).$$

Từ (1) suy ra khẳng định $f(a)>f(b)>f(c)>f(d)$ và $f(a)>f(c)>f(d)>f(b)$ là sai.

Từ (2) suy ra khẳng định $f(c)>f(a)>f(d)>f(b)$ sai. Vậy khẳng định $f(c)>f(a)>f(b)>f(d)$ đúng.

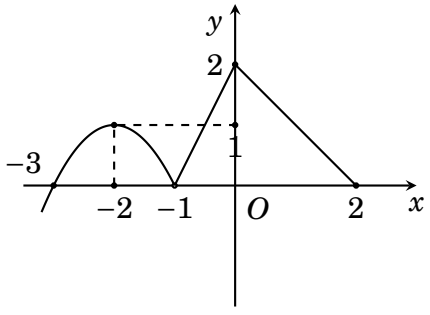
Nhận xét:

- Có thể lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ hoặc sử dụng $S_1>0$ để suy ra $f(a)>f(b)$.
- Đề xuất bổ sung phương án nhiễu $f(b)>f(d)>f(c)>f(a)$.

Chọn đáp án A □

Câu 51.

Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$). Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng



A. $\dfrac{23}{6}$. **B.** $\dfrac{31}{6}$. **C.** $\dfrac{35}{3}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

✍ Lời giải.

Parabol $y=ax^2+bx+c$ có đỉnh $I(-2;1)$ và đi qua điểm $(-3;0)$ nên ta có

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=-2\\4a-2b+c=1\\9a-3b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-4\\c=-3\end{cases}\Rightarrow y=-x^2-4x-3.$$

Do $f(-3)=0$ nên $f(-1)+f(1)=[f(1)-f(0)]+[f(0)-f(-1)]+2[f(-1)-f(-3)]$

$$= \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 f'(x)\,\mathrm{d}x + 2\int_{-3}^{-1}(-x^2-4x-3)\,\mathrm{d}x = S_1 + S_2 + 2\int_{-3}^{-1}(-x^2-4x-3)\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}.$$

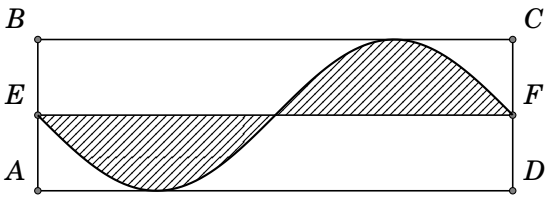
Với S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 0$ và $x = 0, x = 1$. Dễ thấy $S_1 = 1; S_2 = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án B □

Câu 52. Ba bác bảo vệ nhà trường (bác Giao, bác Hương, bác Giảng) có trồng cây đinh lăng vào phần đất được tô chấm giới hạn bởi cạnh AD, BC, đường trung bình EF của mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (hình vẽ).

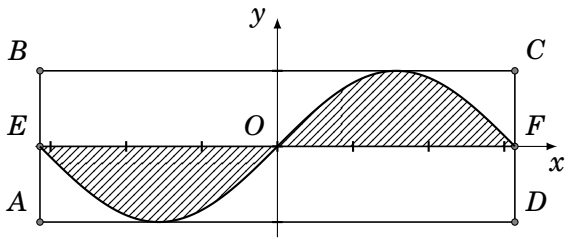
Biết $AB = 2$ (m), $AD = 2\pi$ (m). Tính diện tích đất còn lại của mảnh vườn (đơn vị tính m^2) bằng

A. $4\pi - 1$. **B.** $4(\pi - 1)$. **C.** $4\pi - 3$. **D.** $4\pi - 2$.



✍ Lời giải.

Chọn trục như hình vẽ

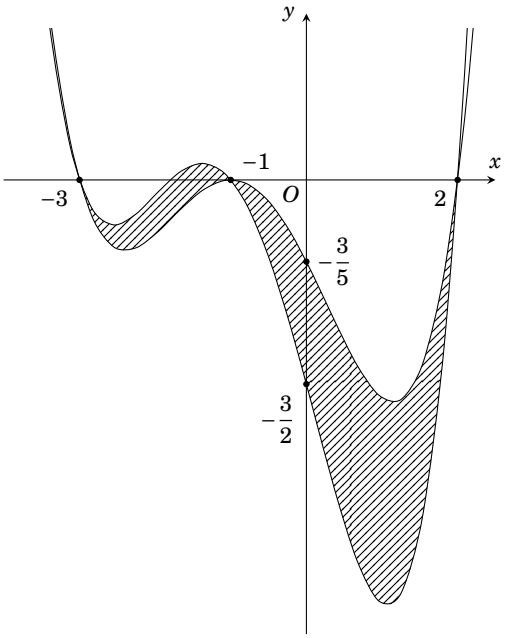


Diện tích trồng cây đinh lăng là $S_1 = 2\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 4$.

Vậy diện tích mảnh đất còn lại là $S_2 = S - S_1 = 4\pi - 4 = 4(\pi - 1)$.

Chọn đáp án B □

Câu 53. Hình phẳng $(\mathscr{H})$ được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -3; -1; 2. Diện tích hình phẳng $(\mathscr{H})$ (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần nhất với kết quả nào dưới đây?



A. $3,11$. **B.** $2,45$. **C.** $3,21$. **D.** $2,95$.

✍ Lời giải.

Ta có hoành độ $x=-3$ hai đồ thị hàm số này tiếp xúc với nhau.
Có $f(x)-g(x)=-\dfrac{1}{18}\left[-\dfrac{3}{2}-\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right](x+3)^2(x+1)(x-2)$
Vì vậy nên ta có

$$S_{(\mathscr{H})}=\int\limits_{-3}^{2}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{2}\left|-\frac{1}{18}\left(-\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)\right)(x+3)^2(x+1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{3733}{1200}\approx 3,11.$$

Chọn đáp án A □

Câu 54. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H)\colon y=\dfrac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ là

A. $\ln 2-1$. **B.** $\ln 2+1$. **C.** $2\ln 2-1$. **D.** $2\ln 2+1$.

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là $\dfrac{x-1}{x+1}=0\Leftrightarrow x=1$.
Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int\limits_{0}^{1}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{0}^{1}\frac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_{0}^{1}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x\right|=\Big|(x-2\ln|x+1|)\Big|_0^1\Big|=|1-2\ln 2|=2\ln 2-1.$$

Chọn đáp án C □

Câu 55. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 (m/s) thì hãm phanh. Sau khi hãm phanh ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=20-4t$ (m/s) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc hãm phanh. Quãng đường xe ô tô di chuyển trong giây cuối trước khi dừng lại là

A. 0,5 (m). **B.** 1 (m). **C.** 2 (m). **D.** 2,5 (m).

✍ Lời giải.

Ô tô dừng lại khi $v(t)=0\Leftrightarrow 20-4t=0\Leftrightarrow t=5$ (s).
Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn quãng đường ô tô di chuyển trong 5 giây là
$S=\displaystyle\int\limits_{0}^{5}(20-4t)\,\mathrm{d}t=50$ (m).

Từ lúc đạp phanh quãng đường ô tô di chuyển trong 4 giây là $S=\displaystyle\int\limits_{0}^{4}(20-4t)\,\mathrm{d}t=48$ (m).

Vậy quãng đường xe ô tô di chuyển trong giây cuối trước khi dừng lại là $50-48=2$ (m).

Chọn đáp án C □

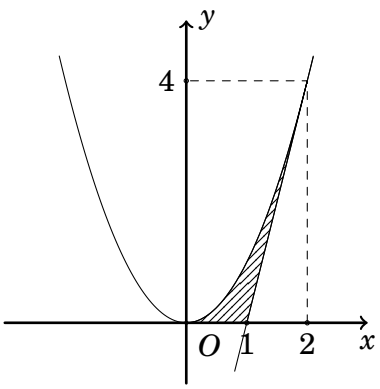
Câu 56. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P)\colon y=x^2$, tiếp tuyến với (P) tại điểm $M(2;4)$ và trục hoành. Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

✍ Lời giải.

Tiếp tuyến với $(P): y = x^2$ tại điểm $M(2;4)$ có phương trình

$$y = y'(2)(x-2)+4 = 4(x-2)+4 = 4x-4.$$



Diện tích của hình phẳng (H)

$$S = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2-4x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án A □

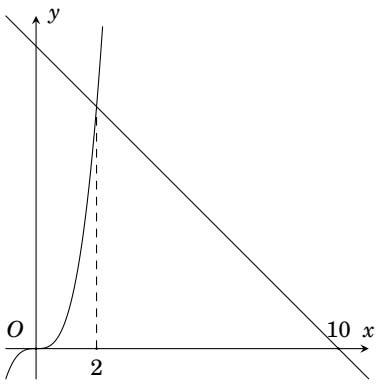
Câu 57. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3$, $y = 10-x$ và trục Ox là:

A. 32. **B**. 26. **C**. 36. **D**. 40.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^3$ và $y = 10-x$ là

$$x^3 = 10-x \Leftrightarrow x^3+x-10 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$



Phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^3$ và Ox

$$x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 10-x$ và Ox

$$10-x = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^2 \left(x^3-0\right)\mathrm{d}x + \int_2^{10} (10-x-0)\,\mathrm{d}x = 4+32 = 36.$$

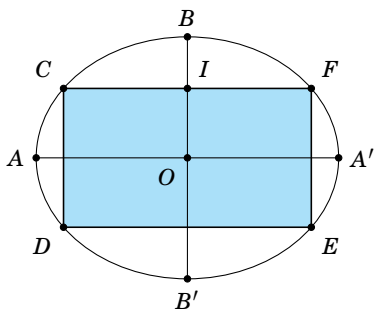
Chọn đáp án C □

Câu 58. Ông An có một khu đất hình elip với độ dài trục lớn 10m và độ dài trục bé 8m. Ông An muốn chia khu đất thành hai phần, phần thứ nhất là hình chữ nhật nội tiếp elip dùng để xây bể cá cảnh và phần còn lại dùng để trồng hoa. Biết chi phí xây bể cá là 1000000 đồng trên 1m^2 và chi phí trồng hoa là 1200000 đồng trên 1m^2. Hỏi ông An có thể thiết kế xây dựng như trên với tổng chi phí thấp nhất gần nhất với số nào sau đây?

A. 67398224. **B**. 67593346. **C**. 63389223. **D**. 67398228.

Lời giải.

Ta có phương trình chính tắc (E): $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16} = 1$.



Khi đó diện tích của elip $S = 4\displaystyle\int_0^5 4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\,\mathrm{d}x = 20\pi$.

Ta có $F\left(t;4\sqrt{1-\dfrac{t^2}{25}}\right)$ nên $CF = 2t$, $CD = 8\sqrt{1-\dfrac{t^2}{25}}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_1 = 16t\sqrt{1-\dfrac{t^2}{25}}$ và diện tích phần còn lại $S_2 = 20\pi - 16t\sqrt{1-\dfrac{t^2}{25}}$

Tổng chi phí xây dựng là $T = 16t\sqrt{1-\dfrac{t^2}{25}}\cdot 1000000 + \left(20\pi - 16t\sqrt{1-\dfrac{t^2}{25}}\right)1200000$ với $t \in [0;5]$.

$$T = -640000t\sqrt{25-t^2} + 24000000\pi.$$

Ta có $T' = 640000\dfrac{2t^2-25}{\sqrt{25-t^2}}$.

$$T' = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 25 = 0 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}(N) \\ t = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}(L). \end{array}\right.$$

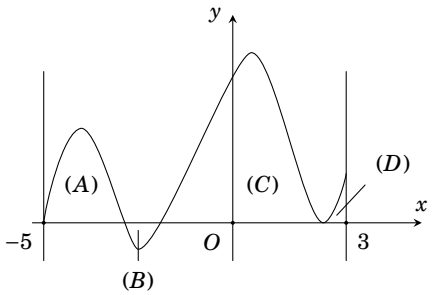
t	0		$\frac{5\sqrt{2}}{2}$		5
T'		$-$	0	$+$	
T	$T(0)$	↘	$T\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$	↗	$T(5)$

Suy ra bảng biến thiên

$\Rightarrow \min T \approx 67398224$, khi $t = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án A □

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích các hình phẳng (A), (B), (C), (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành lần lượt bằng 6; 3; 12; 2. Tích phân $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2f(2x+1)+1)\,\mathrm{d}x$ bằng



A. 27. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 21.

✍ Lời giải.

Tính $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2f(2x+1)+1)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-3}^{1}f(2x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{-3}^{1}\mathrm{d}x = 2\int_{-3}^{1}f(2x+1)\frac{\mathrm{d}(2x+1)}{2} + 4 = \int_{-5}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x + 4.$

Mà $\displaystyle\int_{-5}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành

Suy ra $\displaystyle\int_{-5}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x = 6-3+12+2 = 17.$

Vậy $\displaystyle\int_{-3}^{1}(2f(2x+1)+1)\,\mathrm{d}x = 17+4 = 21.$

Chọn đáp án D □

3.1 ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. B	4. B	5. B	6. C	7. A	8. D	9. A	10. D
11. C	12. B	13. D	14. B	15. B	16. A	17. B	18. C	19. C	20. D
21. D	22. D	23. A	24. B	25. A	26. D	27. A	28. C	29. D	30. D
31. D	32. D	33. B	34. A	35. C	36. D	37. D	38. B	39. D	40. C
41. A	42. D	43. B	44. D	45. D	46. B	47. A	48. C	49. A	50. A
51. B	52. B	53. A	54. C	55. C	56. A	57. C	58. A	59. D	

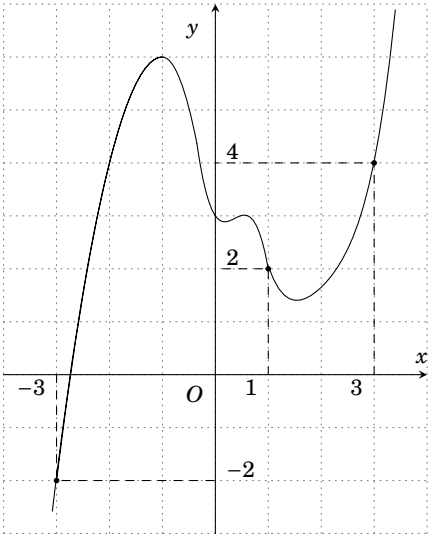
4 VẬN DỤNG CAO

Câu 1.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình sau. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $g(-1)>g(-3)>g(3)$. **B.** $g(-3)>g(3)>g(1)$.

C. $g(3)>g(-3)>g(1)$. **D.** $g(1)>g(3)>g(-3)$.



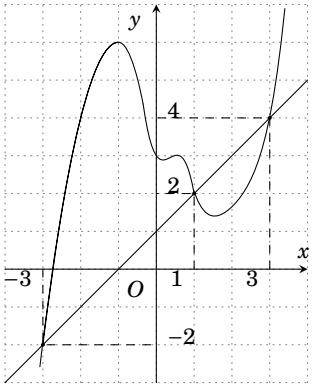
✍ Lời giải.

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$

$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1$.

Từ đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y=x+1$ cắt đồ thị $y=f'(x)$ tại 3 điểm $A(-3;-2)$, $B(1;2)$, $C(3;4)$.

Suy ra $g'(-3)=g'(1)=g'(3)=0$ và $g(x)$ có bảng biến thiên như sau:



x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra $g(1)$ là số lớn nhất trong ba số $g(-3),g(1),g(3)$ (1).

Từ đồ thị hàm số ta thấy diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x),y=x+1$ và $x=-3,x=1$ lớn hơn diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=f'(x),y=x+1$ và $x=1,x=3$. Do đó

$$\int_{-3}^{1}[f'(x)-(x+1)]\,\mathrm{d}x>\int_{1}^{3}[(x+1)-f'(x)]\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{-3}^{1}g'(x)\,\mathrm{d}x>-\int_{1}^{3}g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra $g(1)-g(-3)>g(1)-g(3) \Leftrightarrow g(3)>g(-3)$ (2).

Từ (1) và (2), ta có $g(1)>g(3)>g(-3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{100}t^2+\dfrac{13}{30}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng a (m/s^2) (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. 15 (m/s). **B.** 9 (m/s). **C.** 42 (m/s). **D.** 25 (m/s).

✍ Lời giải.

Ta có $v_B(t)=\int a\,\mathrm{d}t=at+C$. Do $v_B(0)=0$ nên $C=0\Rightarrow v_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A=\int_0^{25}\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2\right)\Big|_0^{25}=\frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B=\int_0^{15}at\,\mathrm{d}t=\frac{at^2}{2}\Big|_0^{15}=\frac{225a}{2}.$$

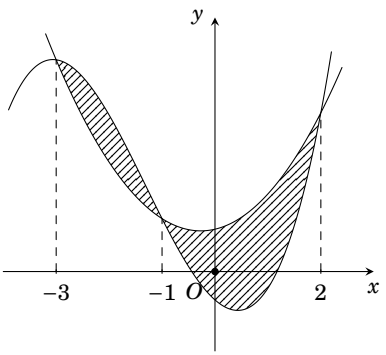
Ta có $\dfrac{375}{2}=\dfrac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15)=\dfrac{5}{3}\cdot 15=25$ (m/s).

Chọn đáp án (D) □

Câu 3.

Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\dfrac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{253}{12}$. **B.** $\dfrac{125}{12}$. **C.** $\dfrac{253}{48}$. **D.** $\dfrac{125}{48}$.

✍ Lời giải.

Do (C): $y=f(x)$ và (C'): $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-3;-1;2$ nên

$$f(x)-g(x)=A(x+3)(x+1)(x-2).$$

Do $f(0)-g(0)=-\dfrac{3}{2}$ nên $-6A=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow A=-\dfrac{1}{4}$.

Từ đó $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)=\dfrac{1}{4}(x^3+2x^2-5x-6)$.

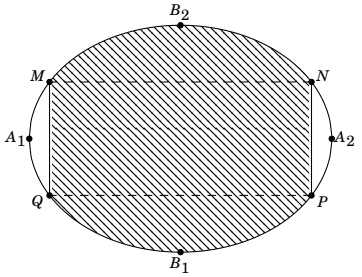
Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\left|\int_{-3}^{-1}\frac{1}{4}(x^3+2x^2-5x-6)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-1}^{2}\frac{1}{4}(x^3+2x^2-5x-6)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{253}{48}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên.

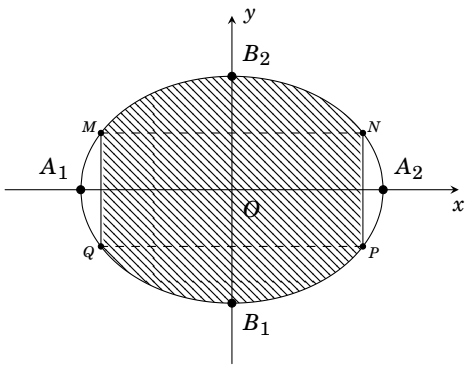
Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8$m, $B_1B_2=6$m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ=3$ m?



A. 7.322.000 đồng. **B.** 7.213.000 đồng. **C.** 5.526.000 đồng. **D.** 5.782.000 đồng.

✍ Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục hoành trùng với trục lớn, trục tung trùng với trục bé của biển quảng cáo.



Khi đó, đường viền của biển quảng cáo có phương trình của dạng elip sau $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2=8 \\ B_1B_2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=8 \\ 2b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow (E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y=\pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Ta có: $MQ=3 \Rightarrow \begin{cases} M=d\cap(E) \\ N=d\cap(E) \end{cases}$ với $d: y=\dfrac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2\sqrt{3};\dfrac{3}{2}\right)$ và $N\left(2\sqrt{3};\dfrac{3}{2}\right)$.

Do Elip nhận trục Ox và Oy làm trục đối xứng nên diện tích phần tô màu gấp 4 diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ và các đường thẳng $x=2\sqrt{3}$, trục tung, trục hoành, chính là $S=4\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)\mathrm{d}x=3\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{16-x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $x=4\sin t$, khi đó $\mathrm{d}x=4\cos t\,\mathrm{d}t$. Và với $x=0\Rightarrow t=0$; với $x=2\sqrt{3}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$.

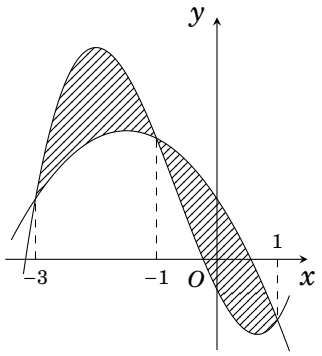
$S=3\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sqrt{16-16\sin^2 t}\cdot 4\cdot\cos t\right)\mathrm{d}t=48\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2 t\right)\mathrm{d}t=24\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=(24t+12\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=8\pi+6\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$.

Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là $T=100.000\times\left(4\pi-6\sqrt{3}\right)+200.000\times\left(8\pi+6\sqrt{3}\right)\approx 7.322.000$ đồng.

Chọn đáp án A □

Câu 5.

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1 (a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

✍ **Lời giải.**

Do (C): $y=f(x)$ và (C'): $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-3;-1$ và 1 nên

$$f(x)-g(x)=A(x+3)(x+1)(x-1).$$

Từ giả thiết ta có $f(0)-g(0)=-\dfrac{3}{2}$ nên $-3A=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow A=\dfrac{1}{2}$.

$$\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}.$$

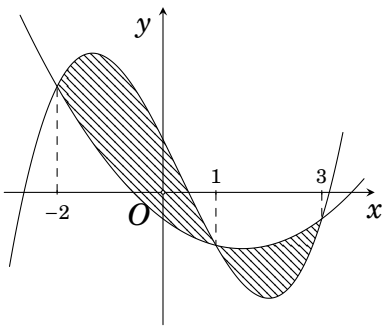
Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int\limits_{-3}^{-1}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}[g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x$$
$$=\int\limits_{-3}^{-1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x=2-(-2)=4.$$

Chọn đáp án C □

Câu 6.

Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$. **B.** $\frac{125}{24}$.
C. $\frac{125}{48}$. **D.** $\frac{253}{24}$.

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}=dx^2+ex-\frac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}=0.$

Đặt $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta có $h(x)=0$ có ba nghiệm là $x=-2$; $x=1$; $x=3$.

Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b-d=-\frac{1}{2}\\ c-e=-\frac{5}{4}.\end{cases}$$

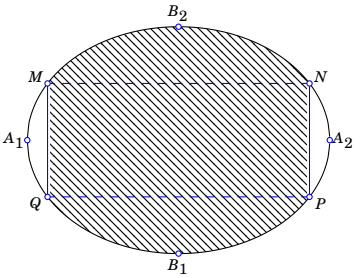
Khi đó diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\int\limits_{-2}^{3}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x$$
$$=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 7.

Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8$m, $B_1B_2=6$m và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ=3$m ?



A. 7.322.000 đồng. **B.** 7.213.000 đồng.
C. 5.526.000 đồng. **D.** 5.782.000 đồng.

✍ **Lời giải.**

Giả sử phương trình elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}A_1A_2=8\\ B_1B_2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=8\\ 2b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ a=3\end{cases}$

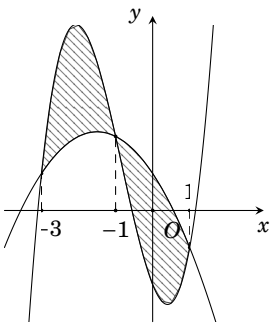
Suy ra (E): $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y=\pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.
Diện tích của elip (E) là $S_{(E)}=\pi ab=12\pi\ (m^2)$.
Ta có: $MQ=3 \Rightarrow \begin{cases} M=d\cap(E) \\ N=d\cap(E) \end{cases}$ với $d\colon y=\dfrac{3}{2} \Rightarrow M(-2\sqrt{3};\dfrac{3}{2})$ và $N(2\sqrt{3};\dfrac{3}{2})$.
Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S=4\displaystyle\int_{2\sqrt{3}}^{4}(\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2})\mathrm{d}x=4\pi-6\sqrt{3}(m^2)$.
Diện tích phần tô màu là $S'=S_{(E)}-S=8\pi+6\sqrt{3}$.
Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là

$$T=100.000\times(4\pi-6\sqrt{3})+200.000\times(8\pi+6\sqrt{3})\approx 7.322.000 \text{ đồng}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 8. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3,-1,1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho (miền gạch chéo) có diện tích bằng

A. $\dfrac{9}{2}$.
B. 4.
C. 5.
D. 8.



✍ Lời giải.

Từ giả thiết ta có $f(x)-g(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}-dx^2-ex-1$. (1)

Do $-3,-1,1$ là các nghiệm của (1) $\Rightarrow f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1) \Rightarrow -3a=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.
Ta có diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi hai đồ thị là

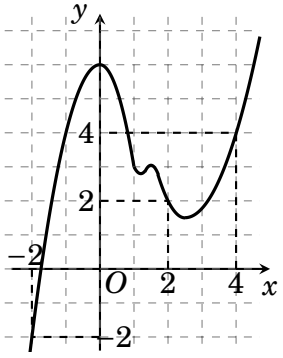
$$S(H)=\int_{-3}^{1}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-3}^{1}|(x+3)(x-1)(x+1)|\,\mathrm{d}x=4.$$

Vậy diện tích cần tích bằng 4.
Chọn đáp án B □

Câu 9.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.Đặt $h(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $h(4)=h(-2)>h(2)$.
B. $h(4)=h(-2)<h(2)$.
C. $h(2)>h(4)>h(-2)$.
D. $h(2)>h(-2)>h(4)$.

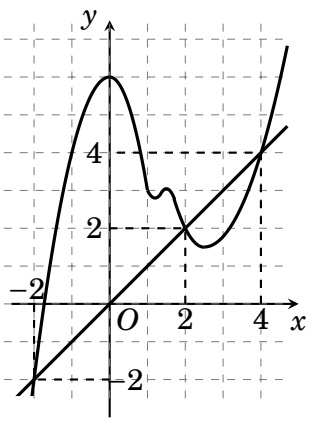


✍ Lời giải.

Ta có $h(x)=2f(x)-x^2$ nên $h'(x)=2\left(f'(x)-x\right)$.

Dựa vào hình vẽ bên và tính chất của tích phân ta thấy $h(2)-h(-2)=\int\limits_{-2}^{2}h'(x)\,\mathrm{d}x=2\int\limits_{-2}^{2}\left(f'(x)-x\right)\,\mathrm{d}x>0$ nên $h(2)>h(-2)$.

Tương tự ta có $h(4)>h(-2), h(2)>h(4)$, từ đó chọn phương án C.

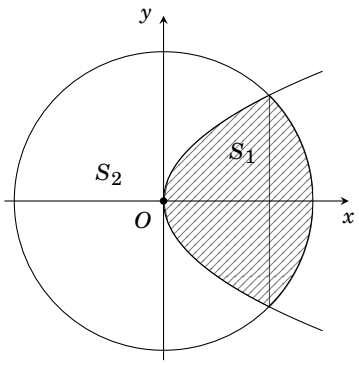


Chọn đáp án C □

Câu 10.

Biết rằng đường parabol $(P)\colon y^2=2x$ chia đường tròn $(C)\colon x^2+y^2=8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2 (hình vẽ bên). Khi đó $S_2-S_1=a\pi-\dfrac{b}{c}$ với a, b, c nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=13$. **B.** $S=14$. **C.** $S=15$. **D.** $S=16$.



✍ **Lời giải.**

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$ diện tích $S=8\pi$.

Xét giao điểm của (P) và (C) là $\begin{cases}y^2=2x\\x^2+y^2=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\x^2+2x=8\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Suy ra $S_1=2\int\limits_{0}^{2}\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x+2\int\limits_{2}^{2\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}+2\pi\Rightarrow S_2=S-S_1=6\pi-\dfrac{4}{3}$.

Vậy $\Rightarrow S_2-S_1=4\pi-\dfrac{8}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=8\\c=3.\end{cases}$

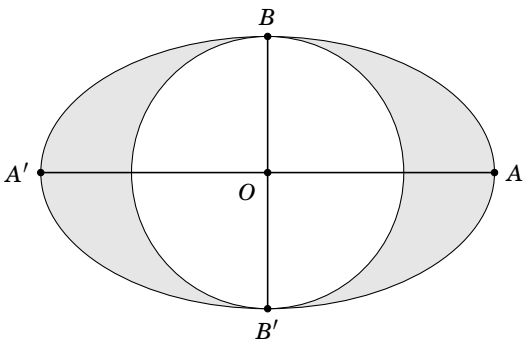
Chọn đáp án C □

Câu 11.

Trong mặt phẳng, cho đường elip (E) có độ dài trục lớn là $AA'=10$, độ dài trục nhỏ là $BB'=6$, đường tròn tâm 0 có đường kính là BB' (như hình vẽ bên dưới). Tính thể tích V của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền hình hình phẳng giới hạn bởi đường elip và được tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA'.

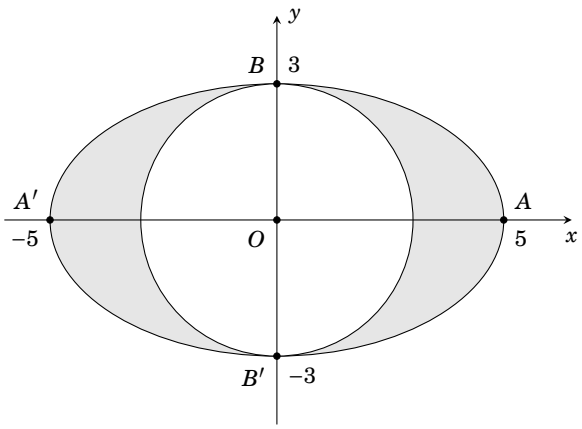
A. $V=36\pi$. **B.** $V=60\pi$.

C. $V=24\pi$. **D.** $V=\dfrac{20\pi}{3}$.



✍ **Lời giải.**

Xét hình phẳng trong hệ tọa độ Oxy, nhận 0 làm gốc tọa độ và tọa độ các điểm lần lượt là $A(5;0)$, $A'(-5;0)$, $B(0;3)$, $B'(0;-3)$.



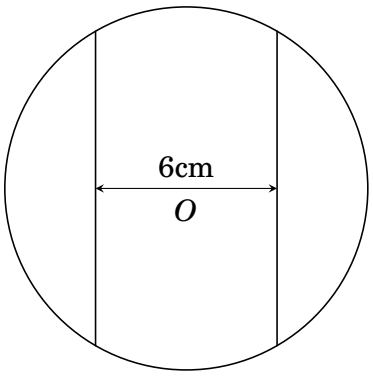
Ta có phương trình của elip và đường tròn lần lượt là $(E)\colon \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ và $(C)\colon x^2+y^2=9$.

Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra là $V=\pi\displaystyle\int_{-5}^{5}9\left(1-\frac{x^2}{25}\right)\mathrm{d}x-\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=24\pi$.

Chọn đáp án C □

Câu 12.

Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng 6m nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị).



A. 8142232 đồng. **B**. 4821232 đồng.

C. 4821322 đồng. **D**. 8412322 đồng.

✍ Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2+y^2=36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình $y=\sqrt{36-x^2}=f(x)$.

Diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y=f(x)$ và hai đường thẳng $x=-3;x=3\Rightarrow S=2\displaystyle\int_{-3}^{3}\sqrt{36-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=6\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=6\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=-3\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{6}$; $x=3\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$.

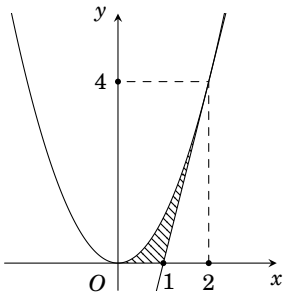
$$\Rightarrow S=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}36\cos^2 t\,\mathrm{d}t=36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2t+1)\mathrm{d}t=18(\sin 2t+2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=18\sqrt{3}+12\pi.$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000\cdot S\approx 4821322$ đồng.

Chọn đáp án C □

Câu 13.

Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc với Parabol đó tại điểm $A(2;4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



A. $\dfrac{16\pi}{15}$. **B**. $\dfrac{32\pi}{5}$. **C**. $\dfrac{2\pi}{3}$. **D**. $\dfrac{22\pi}{5}$.

✍ Lời giải.

Parabol có đỉnh là gốc tọa độ như hình vẽ và đi qua $A(2;4)$ nên có phương trình $y=x^2$.

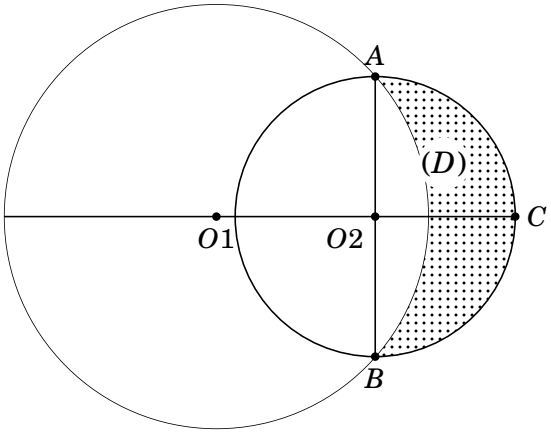
Tiếp tuyến của Parabol đó tại $A(2;4)$ có phương trình là $y=4(x-2)+4=4x-4$.

Suy ra thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int\limits_0^2(x^2)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_1^2(4x-4)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^2-16\int\limits_1^2(x^2-2x+1)\,\mathrm{d}x\right)=\pi\left(\frac{32}{5}-\frac{16}{3}\right)=\frac{16\pi}{15}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 14. Cho hai đường tròn $(O_1;5)$ và $(O_2;3)$ cắt nhau tại hai điểm A,B sao cho AB là một đường kính của đường tròn $(O_2;3)$. Gọi (D) là hình phẳng được giới hạn bởi hai đường tròn (ở ngoài đường tròn lớn, phần được gạch chéo như hình vẽ). Quay (D) quanh trục O_1O_2 ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo thành.

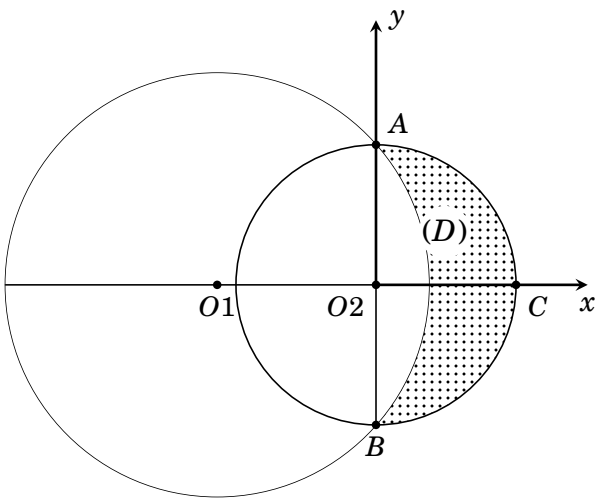


A. $V=36\pi$. **B.** $V=\dfrac{68\pi}{3}$.

C. $V=\dfrac{14\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{40\pi}{3}$.

✍ Lời giải.

Chọn hệ tọa độ Oxy với $O_2\equiv O$, $O_2C\equiv Ox$, $O_2A\equiv Oy$.
Cạnh $O_1O_2=\sqrt{O_1A^2-O_2A^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4\Rightarrow$ $(O_1)\colon (x+4)^2+y^2=25$.
Phương trình đường tròn $(O_2)\colon x^2+y^2=9$.

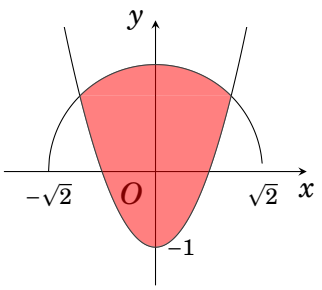


Kí hiệu (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{25-(x+4)^2}$, trục Ox, $x=0$, $x=1$.
Kí hiệu (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{9-x^2}$, trục Ox, $x=0$, $x=3$.
Khi đó thể tích V cần tính chính bằng thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) xung quanh trục Ox trừ đi thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) xung quanh trục Ox.
Ta có $V_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{2}{3}\pi\cdot 3^3=18\pi$.
Lại có $V_1=\pi\displaystyle\int\limits_0^1 y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1[25-(x+4)^2]\mathrm{d}x=\pi\left[25x-\dfrac{(x+4)^3}{3}\right]\Big|_0^1=\dfrac{14\pi}{3}$.
Do đó $V=V_2-V_1=18\pi-\dfrac{14\pi}{3}=\dfrac{40\pi}{3}$.

Chọn đáp án D □

Câu 15.

Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi Parabol $y=2x^2-1$ và nửa đường tròn có phương trình $y=\sqrt{2-x^2}$ (với $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\dfrac{3\pi-2}{6}$. **B.** $\dfrac{3\pi+10}{3}$. **C.** $\dfrac{3\pi+2}{6}$. **D.** $\dfrac{3\pi+10}{6}$.

✍ Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2-1=\sqrt{2-x^2}\Leftrightarrow x=\pm1$.

Diện tích hình phẳng cần tính bằng $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}(2x^2-1)\,\mathrm{d}x$.

Ta có $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x^2-1)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{2x^3}{3}-x\right)\Big|_{-1}^{1}=-\frac{2}{3}$.

Đặt $x=\sqrt{2}\sin t\left(t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ suy ra $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\cos t;\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\sqrt{2}\sin t\right)=\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$.

Khi $x=-1\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{4};x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2t)\,\mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{2}\sin2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}+1$.

Vậy $S=\dfrac{\pi}{2}+1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3\pi+10}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^3-x;\ y=2x$ và các đường $x=1;\ x=-1$ được xác định bởi công thức

A. $S=\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^3-3x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(3x-x^3)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=\displaystyle\int_{-1}^{0}(3x-x^3)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(x^3-3x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\left|\displaystyle\int_{-1}^{1}(3x-x^3)\,\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=\displaystyle\int_{-1}^{1}(3x-x^3)\,\mathrm{d}x$.

✍ Lời giải.

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^3-x;\ y=2x$ và các đường $x=1;\ x=-1$ là

$S=\displaystyle\int_{-1}^{1}|(x^3-x)-(2x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x^3-3x|\,\mathrm{d}x$.

Bảng xét dấu x^3-3x

x	-1		0		1
x^3-3x		$+$	0	$-$	

Do đó dựa vào bảng ta có: $S=\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^3-3x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(3x-x^3)\,\mathrm{d}x$.

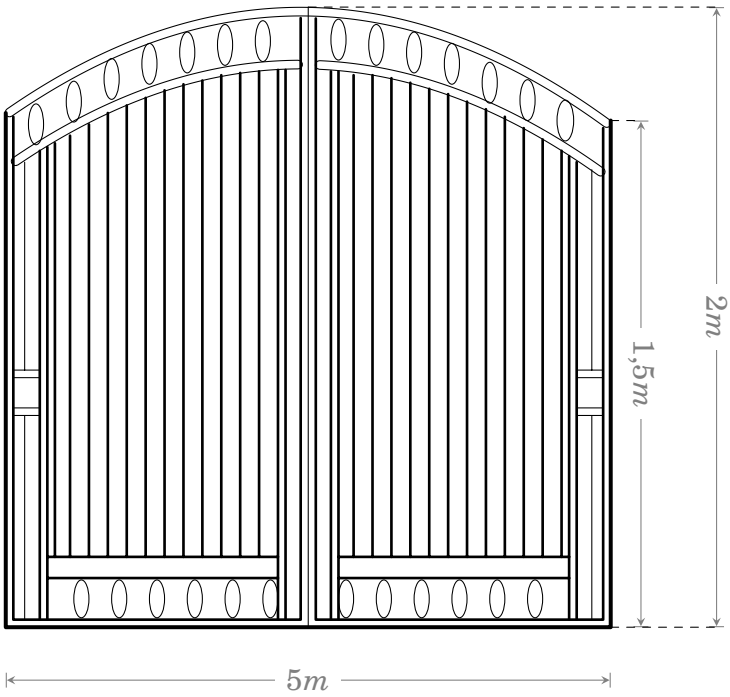
Chọn đáp án (A) □

Câu 17.

Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1m^2$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).

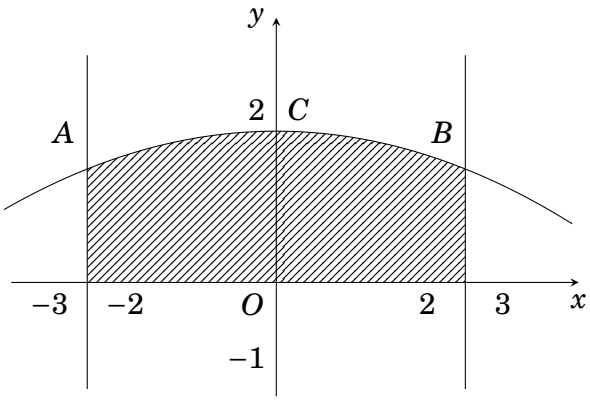
A. 6.620.000 đồng. **B**. 6.320.000 đồng.

C. 6.520.000 đồng. **D**. 6.417.000 đồng.



✍ Lời giải.

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y = ax^2+bx+c$, với $a;b;c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2+b(-2,5)+c=1,5 \\ a(2,5)^2+b(2,5)+c=1,5 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{25} \\ b=0 \\ c=2. \end{cases}$$

Khi đó phương trình Parabol là $y=-\dfrac{2}{25}x^2+2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-\dfrac{2}{25}x^2+2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-2,5$; $x=2,5$.

Ta có $S=\displaystyle\int_{-2,5}^{2,5}\left(-\frac{2}{25}x^2+2\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{25}\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-2,5}^{2,5}=\frac{55}{6}$.

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

$S\times 700000=\dfrac{55}{6}\times 700000\approx 6.417.000$ (đồng).

Chọn đáp án (D) □

Câu 18.

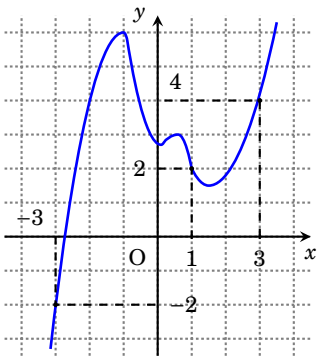
Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(-3)>g(3)>g(1)$.

B. $g(1)>g(-3)>g(3)$.

C. $g(3)>g(-3)>g(1)$.

D. $g(1)>g(3)>g(-3)$.



✍ Lời giải.

- Ta có $g'(x)=2\left(f'(x)-(x+1)\right)$.

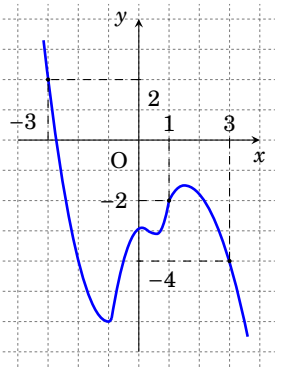
- Từ $g(3)-g(1)=\displaystyle\int_1^3 g'(x)\,\mathrm{d}x=2\int_1^3\left(f'(x)-(x+1)\right)\mathrm{d}x<0$ suy ra $g(3)<g(1)$.

- Tương tự $g(3)-g(-3)=\displaystyle\int_{-3}^3 g'(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{-3}^3\left(f'(x)-(x+1)\right)\mathrm{d}x>0$ suy ra $g(-3)<g(3)$.

Chọn đáp án D □

Câu 19.

Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1)<g(3)<g(-3)$.

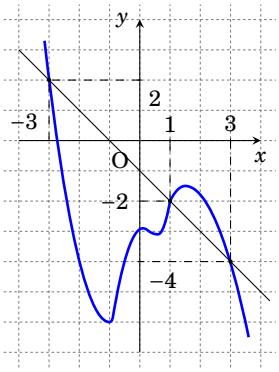
B. $g(1)<g(-3)<g(3)$.

C. $g(3)=g(-3)<g(1)$.

D. $g(3)=g(-3)>g(1)$.

✍ Lời giải.

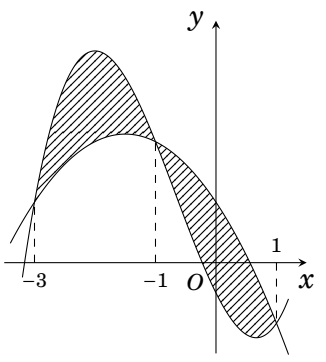
$g'(x)=2f(x)'+2(x+1)$. Từ đồ thị ta có $g'(x)=0$ có 3 nghiệm là $-3;1;3$ và có $g(1)<g(3),g(-3)$. Mặt khác cũng từ đồ thị ta có $\displaystyle\int_{-3}^1\left(-g'(x)\right)\mathrm{d}x>\int_1^3\left(-g'(x)\right)\mathrm{d}x$. Suy ra $g(3)<g(-3)$. Vậy ta có $g(1)<g(3)<g(-3)$.



Chọn đáp án A □

Câu 20.

Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

✍ Lời giải.

Do (C): $y=f(x)$ và (C'): $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $-3;-1$ và 1 nên

$$f(x)-g(x)=A(x+3)(x+1)(x-1).$$

Từ giả thiết ta có $f(0)-g(0)=-\dfrac{3}{2}$ nên $-3A=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow A=\dfrac{1}{2}$.

$$\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

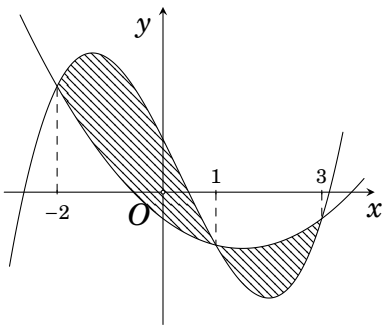
$$S=\int\limits_{-3}^{-1}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}[g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{-3}^{-1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x-\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x=2-(-2)=4.$$

Chọn đáp án C □

Câu 21.

Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$. **B.** $\frac{125}{24}$.

C. $\frac{125}{48}$. **D.** $\frac{253}{24}$.

✍ **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}=dx^2+ex-\frac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}=0.$

Đặt $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta có $h(x)=0$ có ba nghiệm là $x=-2$; $x=1$; $x=3$.

Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b-d=-\frac{1}{2}\\ c-e=-\frac{5}{4}.\end{cases}$$

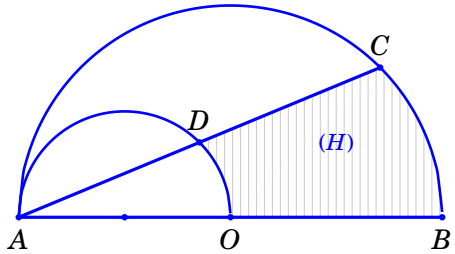
Khi đó diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\int\limits_{-2}^{3}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 22. Cho hai nửa đường tròn như hình vẽ bên dưới, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và góc $\widehat{BAC}=30^\circ$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần gạch sọc trong hình vẽ) xung quanh đường thẳng AB.



A. 279π. **B.** $\dfrac{620\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{784\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{325\pi}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Đặt $AB=2R$. Ta được $\dfrac{\pi R^2}{2}=32\pi \Rightarrow R^2=64 \Rightarrow R=8$.

Xét hệ trục tọa độ Oxy với gốc tọa độ O trùng với tâm đường tròn lớn, $A(-8;0)$, $B(8;0)$.

Phương trình đường tròn lớn là $(C_1)\colon x^2+y^2=64$.

Phương trình đường tròn nhỏ là $(C_2)\colon (x+4)^2+y^2=16$.

Đường thẳng AC đi qua điểm $A(-8;0)$, hệ số góc $k=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ có phương trình là $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+8)$.

Tọa độ các điểm $C\left(4;4\sqrt{3}\right)$, $D\left(-2;2\sqrt{3}\right)$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay xung quanh trục AB phần tam giác cong ABC là

$$V_1=\pi\left(\int\limits_{-8}^{4}\frac{1}{3}(x+8)^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_{4}^{8}(64-x^2)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{896\pi}{3}.$$

Thể tích khối tròn xoay khi quay xung quanh trục AB phần tam giác cong AOD là

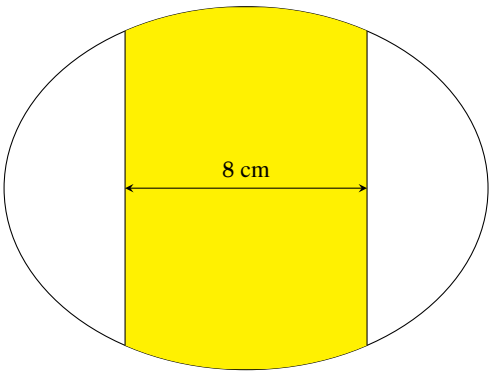
$$V_2=\pi\left(\int\limits_{-8}^{-2}\frac{1}{3}(x+8)^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{0}(16-(x+4)^2)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{112\pi}{3}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=V_1-V_2=\dfrac{896\pi}{3}-\dfrac{112\pi}{3}=\dfrac{784\pi}{3}$.

Chọn đáp án C □

Câu 23.

Ông Nam có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8 m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ 1 m^2. Hỏi ông Nam cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7.862.000 đồng. **B.** 7.653.000 đồng.

C. 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

✍ **Lời giải.**

Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có $2a=16 \Rightarrow a=8$ và $2b=10 \Rightarrow b=5$.

Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2} \quad (E_1) \\ y=\dfrac{5}{8}\sqrt{64-y^2} \quad (E_2). \end{array}\right.$

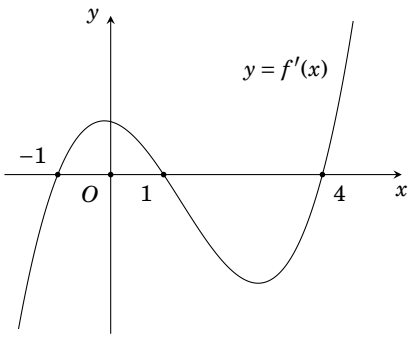
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1), (E_2), $x=-4$, $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\displaystyle\int\limits_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot 100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

Chọn đáp án B □

Câu 24.

Cho hàm số $y=f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, trong đó m, n, p, q, $r\in\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ có tất cả bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B**. 3. **C**. 5. **D**. 6.

✍ Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt là $x=-1$, $x=1$ và $x=4$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1	2	4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(1)$	↗	$f(4)$	↘	$-\infty$

Phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r\Leftrightarrow f(x)=f(2)$. (1)

Mặt khác, gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=1$ ta có $S_1=\displaystyle\int_{-1}^{1}f'(x)\mathrm{d}x=f(1)-f(-1)$;

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=4$ ta có $S_2=-\displaystyle\int_{1}^{4}f'(x)\mathrm{d}x=f(1)-f(4)$.

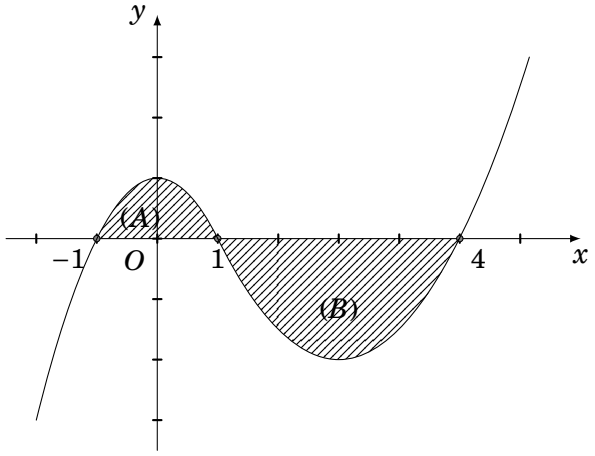
Mà $S_1<S_2$ nên $f(1)-f(-1)<f(1)-f(4)$ hay $f(-1)>f(4)$. (2)

Từ (1), (2) và dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=16m+8n+4p+2q+r$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25.

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các hình (A), (B) lần lượt bằng 3 và 7. Tích tích phân $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot f(5\sin x-1)\mathrm{d}x$ bằng



A. $I=-\dfrac{4}{5}$. **B**. $I=2$. **C**. $I=\dfrac{4}{5}$. **D**. $I=-2$.

✍ Lời giải.

Theo đề $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=3$, $\displaystyle\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x=-7$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5\sin x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(5\sin x-1)\mathrm{d}(5\sin x-1) = \frac{1}{5}\int\limits_{-1}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\left[\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án A □

4.1 ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. C	4. A	5. C	6. A	7. A	8. B	9. C	10. C
11. C	12. C	13. A	14. D	15. D	16. A	17. D	18. D	19. A	20. C
21. A	22. C	23. B	24. A	25. A					