TOÁN LUYỆN THI ĐẠI HỌC

BÙI TRẦN DUY TUẤN

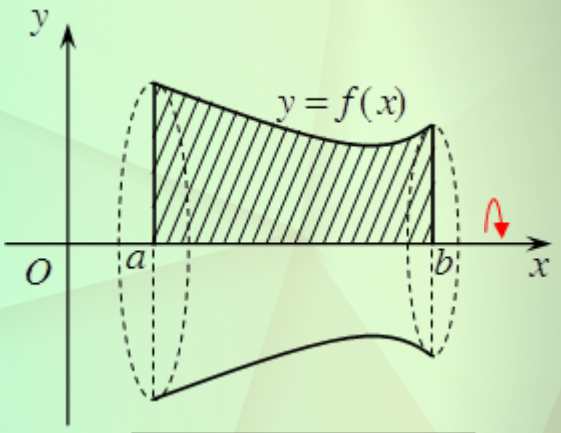
Chuyên đề

NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

$$\int_a^b f\left[u(x)\right]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$



$$V_x = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

- HỆ THỐNG ĐẦY ĐỦ KIẾN THỨC
- CÁC BÀI TẬP MINH HỌA
- THỦ THUẬT CASIO GIẢI NHANH
- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT



toanhocplus.blogspot.com

HOT

"Nơi nào có ý chí, nơi đó có con đường."

Tài liệu gồm 321 trang bao gồm các chủ đề sau:

Chủ đề 1. Nguyên hàm

Chủ đề 2. Tích Phân

Chủ đề 3. Ứng dụng của Tích Phân

Bố cục của các chủ đề gồm các phần sau:

1. Kiến thức cơ bản cần nắm
2. Các dạng toán và phương pháp giải (kèm theo các bài toán minh họa)
3. Thủ thuật Casio giải nhanh
3. Bài tập trắc nghiệm rèn luyện (có lời giải chi tiết)

Tài liệu được tôi sưu tầm và biên soạn để làm tư liệu cho các em lớp 12 ôn thi kỳ thi THPT Quốc gia tham khảo, giúp các em ôn lại kiến thức nhanh chóng và hiệu quả hơn. Trong quá tình tổng hợp và biên soạn không tránh khỏi những sai sót đáng tiếc do số lượng kiến thức và bài tập khá nhiều. Mong các đọc giả thông cảm và đóng góp ý kiến để những tài liệu sau của tôi được chỉnh chu hơn!

Mọi đóng góp và liên hệ về tài liệu xin gửi về:

Facebook: https://web.facebook.com/duytuan.qna.

Gmail: btdt94@gmail.com.

Truy cập Website: https://toanhocplus.blogspot.com/ để xem thêm các chuyên đề luyện thi đại học khác của tôi biên soạn.

Xin chân thành cảm ơn!!!

Quảng Nam – 18.05.2018

Tác giả: **Bùi Trần Duy Tuấn**

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: NGUYÊN HÀM 6
A. KIẾN THỨC CẦN NẮM 6
I. NGUYÊN HÀM 6
II. TÍNH CHẤT 6
III. SỰ TỒN TẠI CỦA NGUYÊN HÀM 6
IV. BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ THƯỜNG GẶP 6
B. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM VÀ NHỮNG DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 8
I. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH 8
1. Phương pháp chung 8
2. Một số dạng toán và bài toán minh họa 8
a. Tìm nguyên hàm các đa thức, lũy thừa, mũ, các hàm chứa căn 8
b. Tìm nguyên hàm của hàm hữu tỉ 10
c. Tìm nguyên hàm của hàm lượng giác 13
3. Bài tập tự luyện 15
II. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ 17
1. Phương pháp đổi biến số dạng 1 17
2. Phương pháp đổi biến số dạng 2 22
3. Bài tập tự luyện 24
III. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN 28
1. Phương pháp 28
2. Một số bài toán minh họa và các kĩ thuật tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần 28
Kỹ thuật chọn hệ số 30
Kỹ thuật tích phân từng phần bằng phương pháp đường chéo 31
3. Bài tập tự luyện 37
IV. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG TỔNG HỢP CÁC PHƯƠNG PHÁP 39
1. Một số bài toán minh họa 39
2. Bài tập tự luyện 42
C. THỦ THUẬT CASIO TÌM NHANH NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ 43
I. KIẾN THỨC CẦN NẮM 43
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA ĐIỂN HÌNH 43
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 50
I. ĐỀ BÀI 50
II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT 71

CHỦ ĐỀ 2: TÍCH PHÂN 104
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM 104
I. ĐỊNH NGHĨA 104
II. TÍCH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN 104
B. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN 105
I. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH, DÙNG VI PHÂN VÀ SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN 105
1. Kiến thức và kỹ năng 105
2. Một số bài toán minh họa 105
3. Bài tập tự luyện 109
II. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN 110
1. Phương pháp đổi biến số dạng 1 110
Bài tập tự luyện 114
2. Phương pháp đổi biến số dạng 2 117
Bài tập tự luyện 119
3. Phương pháp đổi biến cho một số hàm đặc biệt 122
Bài tập tự luyện 125
III. PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN 128
1. Phương pháp 128
2. Một số bài toán minh họa và các kĩ thuật tính tích phân từng phần 128
3. Bài tập tự luyện 135
C. TÍNH TÍCH PHÂN CÁC DẠNG HÀM SỐ THƯỜNG GẶP 138
I. HÀM HỮU TỈ 138
1. Phương pháp 138
2. Một số bài toán minh họa 139
3. Bài tập tự luyện 146
II. HÀM LƯỢNG GIÁC 148
1. Biến đổi và đổi biến cơ bản đưa về tích phân cơ bản 148
2. Hữu tỉ hóa tích phân hàm lượng giác 154
3. Bài tập tự luyện 157
III. HÀM VÔ TỶ 160
1. Phương pháp 160
2. Một số bài toán minh họa 161
3. Bài tập tự luyện 166
IV. HÀM CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI 168
1. Phương pháp 168
2. Một số bài toán minh họa 168
3. Bài tập tự luyện 171

D. THỦ THUẬT CASIO TÍNH NHANH BÀI TOÁN TÍCH PHÂN 172
I. TÍNH NHANH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH 172
1. Lệnh tính tích phân 172
2. Một số bài toán minh họa 172
II. GIẢI NHANH BÀI TOÁN TÍCH PHÂN CHỐNG CASIO 176
1. Kiến thức nền tảng 176
2. Một số bài toán minh họa 176
E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 188
I. ĐỀ BÀI 188
II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT 210

CHỦ ĐỀ 3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN 243
A. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG 243
I. LÝ THUYẾT CẦN NẮM 243
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA 245
1. Một số bài toán về tính diện tích giới hạn bởi các đường cho trước 245
2. Một số bài toán về ứng dụng tích phân tính diện tích trong thực tế 250
B. TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY 255
I. LÝ THUYẾT CẦN NẮM 255
1. Tính thể tích vật thể 255
2. Tính thể tích khối tròn xoay 255
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA 256
1. Một số bài toán tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường cho trước 256
2. Một số bài toán tính thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay trong thực tế 259
C. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG CÁC LĨNH VỰC KHÁC 264
I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN LƯU Ý 264
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA 264
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 268
I. ĐỀ BÀI 268
1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH 268
2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍCH THỂ TÍCH 276
3. ỨNG DỤNG KHÁC CỦA TÍCH PHÂN 284
II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI 289
1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH 289
2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍCH THỂ TÍCH 305
3. ỨNG DỤNG KHÁC CỦA TÍCH PHÂN 315

Chủ đề 1

NGUYÊN HÀM

☆☆☆

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

2. Định lí:

Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

1) Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

2) Ngược lại, với mỗi nguyên hàm $G(x)$ của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$.

Do đó $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Ký hiệu $\int f(x)dx=F(x)+C$

Nhận xét: Nếu $F(x)$ và $G(x)$ cùng là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì:

(i) $F'(x)=G'(x), \forall x\in K$ (ii) $F(x)-G(x)=C$, với C là hằng số nào đó

II. TÍNH CHẤT

- $\int f'(x)dx=f(x)+C$
- $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$
- $\int k.f(x)dx=k\int f(x)dx \quad (k\neq 0)$
- $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
- Cho $\int f(x)dx=F(x)+C$. Khi đó: $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0)$

III. SỰ TỒN TẠI CỦA NGUYÊN HÀM

Định lí: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

IV. BẢNG NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ THƯỜNG GẶP

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	*Nguyên hàm của hàm số hợp* $(u=u(x))$	*Nguyên hàm của hàm số hợp* $(u=ax+b;\quad a\neq 0)$
$\int dx=x+C$	$\int du=u+C$	$\int d(ax+b)=ax+b+C$
$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \ (\alpha\neq -1)$	$\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \ (\alpha\neq -1)$	$\int(ax+b)^{\alpha}dx=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \ (\alpha\neq -1)$
$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{1}{u}du=\ln\lvert u\rvert+C$	$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert+C$

$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2}du = -\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b} + C$
$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$	$\int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u\sqrt{u} + C$	$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}.\frac{2}{3}(ax+b)\sqrt{ax+b} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,(a>0, a\neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C\,(a>0, a\neq 1)$	$\int a^{mx+n}dx = \frac{1}{m}\cdot\frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\cdot\sin(ax+b) + C$
$\int \tan x.dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \tan u.du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + C$
$\int \cot x.dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int \cot u.du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot u + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sin u}du = \ln\left\lvert\tan\frac{u}{2}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert tg\frac{ax+b}{2}\right\rvert + C$
$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$	$\int \frac{1}{\cos u}du = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\cos(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax+b}{2}+\frac{\pi}{4}\right\rvert + C$

*** Một số công thức tìm nhanh nguyên hàm của các hàm phức tạp:**

$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{1}{a}\cdot 2\sqrt{ax+b} + C$	$\int \sqrt[n]{x^m}dx = \frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m} + C$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$	$\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	$\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$	$\int \arctan\frac{x}{a}dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert} + C$	$\int arc\cot\frac{x}{a}dx = xarc\cot\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left\lvert\frac{x}{a}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\rvert + C$
$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert + C$	$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM VÀ NHỮNG DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

I. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH

1. Phương pháp chung

+ Biến đổi các hàm số dưới dấu nguyên hàm về dạng tổng, hiệu của các biểu thức chứa x. Lúc này, mỗi biểu thức chứa x là những dạng cơ bản có trong bảng nguyên hàm.
+ Áp dụng các công thức nguyên hàm trong bảng nguyên hàm cơ bản để tìm nguyên hàm.

2. Một số dạng toán và bài toán minh họa

a. Tìm nguyên hàm các đa thức, lũy thừa, mũ, các hàm chứa căn

Tổng quát cách tìm nguyên hàm:

- Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.
- Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.
- Chứa căn $\xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.

Bài toán 1: Tìm các nguyên hàm sau đây:

a) $\int\left(4x^5+2x^{-3}-x^{\frac{1}{3}}\right)dx$ b) $\int x\left(3\sqrt{x}-2\right)dx$ c) $\int\frac{4x^2+\sqrt{x}-6}{2x}dx$

Lời giải:

a) $\int\left(4x^5+2x^{-3}-x^{\frac{1}{3}}\right)dx=4\frac{x^6}{6}+2\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{x^{1+\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}}+C=\frac{2}{3}x^6-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C.$

b) $\int x\left(3\sqrt{x}-2\right)dx=\int\left(3x\sqrt{x}-2x\right)dx=\int\left(3x^{\frac{3}{2}}-2x\right)dx=3\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-2\frac{x^2}{2}+C=\frac{6}{5}x^2\sqrt{x}-x^2+C.$

c) $\int\frac{4x^2+\sqrt{x}-6}{2x}dx=\int\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{x}\right)dx=x^2+\sqrt{x}-3\ln x+C.$

Bài toán 2: Tìm các nguyên hàm sau:

a) $\int(x-1)(x-2)dx.$ b) $\int x\left(x+2\right)^9dx.$ c) $\int\frac{1}{e^{2x}+1}dx..$

Lời giải:

a) Ta có thể lựa chọn hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta biến đổi: $\int(x-1)(x-2)dx=\int(x^2-3x+2)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C.$

Cách 2: Ta biến đổi: $\int(x-1)(x-2)dx=\int(x-1)[(x-1)-1]dx=\int[(x-1)^2-(x-1)]dx$

$=\int[(x-1)^2-(x-1)]d(x-1)=\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{2}(x-1)^2+C.$

b) Sử dụng đồng nhất thức $x=(x+2)-2$, ta được:

$x(x+2)^9=[(x+2)-2](x+2)^9=(x+2)^{10}-2(x+2)^9$.

Khi đó: $\int f(x)dx=\int x(x+2)^9dx=\int\left[(x+2)^{10}-2(x+2)^9\right]dx=\frac{(x+2)^{11}}{11}-\frac{2(x+2)^{10}}{10}+C$.

c) Sử dụng đồng nhất thức $1=(e^{2x}+1)-e^{2x}$, ta được: $\frac{1}{e^{2x}+1}=\frac{(e^{2x}+1)-e^{2x}}{e^{2x}+1}=1-\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

Suy ra: $\int f(x)dx=\int\left(1-\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1}=x-\ln\left|e^{2x}+1\right|+C.$

Chúng ta có thể tổng quát với nguyên hàm: $I=\int x(ax+b)^a\,dx$, với $a\neq 0$ bằng việc sử dụng đồng nhất thức: $x=\frac{1}{a}.ax=\frac{1}{a}\left[(ax+b)-b\right]$.

Bài toán 3: Tìm các nguyên hàm sau:

a) $\int 10^{2x}dx$. b) $\int\frac{2^x-1}{e^x}dx$. c) $\int\frac{e^x}{x}\left(\frac{3e^{-x}}{x}-5x\right)dx$ d) $\int\frac{e^{-x}\left(e^x-1\right)^2}{2e^x}dx$

Lời giải:

a) Ta có $\int 10^{2x}dx=\int 100^xdx=\frac{100^x}{\ln 100}+C$.

b) Ta có $\int\frac{2^x-1}{e^x}dx=\int\frac{2^x}{e^x}dx-\int\frac{1}{e^x}dx=\int\left(\frac{2}{e}\right)^xdx-\int e^{-x}dx=\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\ln\frac{2}{e}}+e^{-x}+C=\frac{2^x}{e^x(\ln 2-1)}+e^{-x}+C$.

c) $\int\frac{e^x}{x}\left(\frac{3e^{-x}}{x}-5xe^x\right)dx=\int\left(\frac{3}{x^2}-5e^{2x}\right)dx=-\frac{3}{x}-\frac{5}{2}e^{2x}+C$

d) $\int\frac{e^{-x}(e^x-1)^2}{2e^x}.dx=\int\frac{e^{2x}-2e^x+1}{2e^{2x}}dx=\int\left(\frac{1}{2}-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx=\frac{x}{2}+e^{-x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$.

Bài toán 4: Tìm các nguyên hàm sau: *a)* $\int\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}dx$ *b)* $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}dx$

Lời giải:

a) Ta có: $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}=\int\frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)dx}{2x+1-2x+1}$

$=\frac{1}{2}\int\left[(2x+1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{2}}\right]dx=\frac{1}{6}\left[(2x+1)^{\frac{3}{2}}-(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]+C$

b) Ta có: $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}-x}=\int\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)dx}{x^2+1-x^2}$

$$= \int x\sqrt{x^2+1}dx + \int x^2 dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} d(x^2+1) + \int x^2 dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Nhận xét: Để tìm nguyên hàm của các hàm số ở ví dụ trên chúng ta đều sử dụng phép nhân liên hợp bậc hai, cụ thể: $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ có liên hợp là $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ và ngược lại.

b. Tìm nguyên hàm của hàm hữu tỉ

Bài toán: Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không căn.

Phương pháp giải: *Tách* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *thành các phân số có thể lấy nguyên hàm theo bảng nguyên hàm.*

- Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.
- Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Xem xét mẫu số và khi đó:
  - Nếu mẫu số phân tích được thành tích số, ta sẽ sử dụng đồng nhất thức để đưa về dạng tổng của các phân số.

    Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:
    - $\frac{1}{(ax+b)\cdot(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc}\cdot\left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right)$.
    - $\frac{mx+n}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} = \frac{(Ac+Ba)x + Ad + Bb}{(ax+b)(cx+d)}$

      Ta được đồng nhất thức $mx+n = (Ac+Ba)x + Ad + Bb$ (1)

      Cách 1: (*P/p đồng nhất hệ số*): Đồng nhất đẳng thức,ta được: $\begin{cases} Ac+Ba = m \\ Ad+Bb = n \end{cases}$. Suy ra A, B.

      Cách 2: (*P/p trị số riêng*): Lần lượt thay $x = -\frac{b}{a}; x = -\frac{d}{c}$ vào 2 vế của (1), tìm được A, B.
    - $\frac{mx+n}{(ax+b)^2} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2}$
    - $\frac{mx+n}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)^2} + \frac{B}{cx+d} + \frac{C}{ax+b}$.

      $\Rightarrow mx+n = A(cx+d) + B(ax+b)^2 + C(ax+b)(cx+d)$ $(*)$

      Tìm A, B, C: Lần lượt thay $x = -\frac{b}{a}; x = -\frac{d}{c}; x = 0$ vào 2 vế của $(*)$.
    - $\frac{1}{(x-m)\cdot(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$, với $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
    - $\frac{1}{(x-a)^2\cdot(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$.
  - Nếu mẫu số không phân tích được thành tích số (biến đổi và đưa về dạng lượng giác bằng phương pháp đổi biến dạng 2 sẽ trình bày ở phần sau).

Bài toán 5: Tìm các nguyên hàm sau đây

a) $\int \frac{x^2-2x+2}{x+1}dx$ b) $\int \frac{11-x}{(2x-1)(3x+2)}dx$ c) $\int \frac{2x^3-6}{x^2-2x-3}dx$

Lời giải:

a) $\int \frac{x^2-2x+2}{x+1}dx = \int\left(x-3+\frac{5}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2-3x+5\ln|x+1|+C$

Nhận xét: Phép biến đổi quyết định trong bài giải trên đây là $\frac{x^2-2x+2}{x+1} = x-3+\frac{5}{x+1}$ thông qua thực hiện phép chia đa thức (x^2-2x+2) cho đa thức $(x+1)$.

b) $\int \frac{11-x}{(2x-1)(3x+2)}dx = \int\left(\frac{3}{2x-1}-\frac{5}{3x+2}\right)dx = \frac{3}{2}\ln|2x-1|-\frac{5}{3}\ln|3x+2|+C$.

Nhận xét: Phép biến đổi quyết định trong bài giải trên đây là $\frac{11-x}{(2x-1)(3x+2)} = \frac{3}{2x-1}-\frac{5}{3x+2}$

Ở bài này trước tiên ta viết $\frac{11-x}{(2x-1)(3x+2)} = \frac{A}{2x-1}+\frac{B}{3x+2}$.

Rồi quy đồng vế phải $\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{3x+2} = \frac{3Ax+2A+2Bx-B}{(2x-1)(3x+2)} = \frac{(3A+2B)x+2A-B}{(2x-1)(3x+2)}$

Đồng nhất tử thức, tức là cho $\begin{cases}3A+2B=-1\\2A-B=11\end{cases}$ ta được $\begin{cases}A=3\\B=-5\end{cases}$

Viết A, B tìm được vào phép biến đổi đầu tiên, tức là: $\frac{11-x}{(2x-1)(3x+2)} = \frac{3}{2x-1}+\frac{-5}{3x+2}$.

c) $\int \frac{2x^3-6}{x^2-2x-3}dx = \int\left(2x+4+\frac{14x+6}{x^2-2x-3}\right)dx = \int\left(2x+4+\frac{14x+6}{(x+1)(x-3)}\right)dx$

$= \int\left(2x+4+\frac{2}{x+1}+\frac{12}{x-3}\right)dx = x^2+4x+2\ln|x+1|+12\ln|x-3|+C$

Nhận xét: Câu c bài này là sự tổng hợp cả hai kỹ thuật giải của câu a và câu b.

Bài toán 6: Tìm các nguyên hàm sau đây:

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+6x+9}dx$ b) $\int \frac{6x+3}{x^3-3x+2}dx$

Lời giải:

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+6x+9}dx = \int \frac{2x+1}{(x+3)^2}dx = \int\left[\frac{2}{x+3}-\frac{5}{(x+3)^2}\right]dx = 2\ln|x+3|+\frac{5}{x+3}+C$

Chú ý: Ta phân tích phân số như sau:

$$\frac{2x+1}{(x+3)^2} = \frac{2(x+3)-5}{(x+3)^2} = \frac{2(x+3)}{(x+3)^2}-\frac{5}{(x+3)^2} = \frac{2}{x+3}-\frac{5}{(x+3)^2}$$

b) $\int \frac{6x+3}{x^3-3x+2}dx = \int \frac{6x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx = \int \left[\frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1}\right]dx = \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{3}{x-1} + C.$

Bài toán 7: Tìm các nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{3x+1}{4x^3+28x^2+65x+50}dx$ b) $\int \frac{3x^2+3x+5}{3x^3-3x+2}dx.$

Lời giải:

a) Ta phân tích:

$$\frac{3x+1}{4x^3+28x^2+65x+50} = \frac{3x+1}{(2x+5)^2(x+2)} = \frac{A}{(2x+5)^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x+5}$$

$$\Rightarrow 3x+1 = A(x+2) + B(2x+5)^2 + C(x+2)(2x+5) \quad (*)$$

Lần lượt thay $x=-2; x=-\frac{5}{2}; x=0$ vào $(*)$, ta được $\begin{cases} A=13 \\ B=-5 \\ C=10 \end{cases}$

Nên: $\frac{3x+1}{4x^3+28x^2+65x+50} = \frac{13}{(2x+5)^2} - \frac{5}{x+2} + \frac{10}{2x+5}$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{3x+1}{4x^3+28x^2+65x+50}\right)dx = \int\left(\frac{13}{(2x+5)^2} - \frac{5}{x+2} + \frac{10}{2x+5}\right)dx$$

$$= -\frac{13}{2(2x+5)} - 5\ln|x+2| + 5\ln|2x+5|.$$

b) Ta phân tích:

$$\frac{3x^2+3x+5}{3x^3-3x+2} = \frac{3x^2+3x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2 = 3x^2+3x+5 \quad (*)$$

Với $x=1 \Rightarrow A=\frac{11}{3}$; Với $x=-2 \Rightarrow C=\frac{11}{9}$

Với $x=0 \Rightarrow 2A-2B+C=5 \Rightarrow B=\frac{16}{9}$. Suy ra: $\frac{3x^2+3x+5}{3x^3-3x+2} = \frac{11}{3(x-1)^2} + \frac{16}{9(x+1)} + \frac{11}{9(x+2)}$

$$\Rightarrow \int \frac{3x^2+3x+5}{3x^3-3x+2}dx = \int\left[\frac{11}{3(x-1)^2} + \frac{16}{9(x+1)} + \frac{11}{9(x+2)}\right]dx$$

$$= -\frac{11}{3(x-1)} + \frac{16}{9}\ln|x+1| + \frac{11}{9}\ln|x+2| + C$$

Phần tìm nguyên hàm, tính tích phân của hàm hửu tỷ sẽ được trình bày chi tiết và cụ thể hơn ở chủ đề 2 (Tích Phân) khi ta đã học hết các phương pháp thì ta sẽ có thêm nhiều công cụ để tìm nguyên hàm, tích phân của hàm hữu tỉ.

c. Tìm nguyên hàm của hàm lượng giác

Đối với những bài toán tìm nguyên hàm của các hàm số có chứa các công thức lượng giác, các em phải nắm vững các kiến thức công thức cộng, công thức nhân đôi, công thức nhân ba, công thức biến đổi tổng thành tích, công thức biến đổi tích thành tổng, công thức hạ bậc,...để đưa hàm số dưới dấu tích phân thành tổng hiệu các biểu thức có thể lấy nguyên hàm dựa vào bảng nguyên hàm cơ bản.

* Tích lượng giác bậc một của sin và cosin $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức tích thành tổng.

- $\sin ax.\cos bx=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\right]$
- $\sin ax.\sin bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right]$
- $\cos ax.\cos bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right]$

* Bậc chẵn của sin và cosin $\xrightarrow{PP}$ Hạ bậc:

- $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$
- $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{3}{4}$
- $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{3}{8}\cos 4x+\frac{5}{8}$

Bài toán 8: Tìm các nguyên hàm sau đây

a) $\int\left(2\cos x-3\cos 5x\right)dx$ b) $\int\sin 5x\sin 2x\,dx$ c) $\int\sin 3x\cos 5x\,dx$

Lời giải:

a) $\int\left(2\cos x-3\cos 5x\right)dx=2\sin x-\frac{3}{5}\sin 5x+C$

b) $\int\sin 5x\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos 3x-\cos 7x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{7}\sin 7x\right)+C$

c) $\int\sin 3x\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 8x-\sin 2x\right)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}\right)+C.$

Bài toán 9: Tìm các nguyên hàm sau đây

a) $\int 4\cos^2 x\,dx$ b) $\int\left(1+2\sin x\right)^2 dx$ c) $\int\left(\sin x-\cos x\right)\sin x\,dx$

Lời giải:

a) Ta có $\int 4\cos^2 x\,dx=\int 4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=2\int\left(1+\cos 2x\right)dx=2\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C=2x+\sin 2x+C.$

b) Ta có $\int\left(1+2\sin x\right)^2 dx=\int\left(1+4\sin x+4\sin^2 x\right)dx$

$$=\int\left(1+4\sin x+4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\int\left(3+4\sin x-2\cos 2x\right)dx$$

$$=3x-4\cos x-\sin 2x+C.$$

c) $\int\left(\sin x-\cos x\right)\sin x\,dx=\int\left(\sin^2 x-\sin x\cos x\right)dx$

$$=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C.$$

Bài toán 10: Tìm các nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ b) $\int \frac{1}{4\cos^4 x-4\cos^2 x+1}dx$ c) $\int \cos^3 x dx$ d) $\int \left(\tan^3 x\right)dx$

Lời giải:

a) *Cách 1*: Ta có : $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int \frac{4}{\sin^2 2x}dx=4\int \frac{1}{\sin^2 2x}dx=4\left(-\frac{1}{2}\cot 2x\right)+C=-2\cot 2x+C.$

Cách 2: Ta có: $\int \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\tan x-\cot x+C.$

b) Ta có $\int \frac{1}{4\cos^4 x-4\cos^2 x+1}dx=\int \frac{1}{\left(2\cos^2 x-1\right)^2}dx=\int \frac{1}{\cos^2 2x}dx=\frac{\tan 2x}{2}+C.$

c) Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi: $\int \cos^3 x dx=\frac{1}{4}\int \left(3\cos x+\cos 3x\right)dx=\frac{1}{4}\left(3\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)+C.$

Cách 2: Ta biến đổi: $\int \cos^3 x dx=\int \cos^2 x.\cos x.dx=\int (1-\sin^2 x)\cos x.dx$

$$=\int \cos x.dx-\int \sin^2 x.d\left(\sin x\right)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$$

d) Sử dụng đồng nhất thức: $\tan^3 x=\tan^2 x.\tan x=\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan x=\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}-\tan x.$

Ta được: $\int \left(\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}-\tan x\right)dx=\int \tan x.\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$=\int \tan x.d(\tan x)+\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln\left|\cos x\right|+C.$$

Ở câu d) chúng ta có thể tổng quát với $I_n=\int \cot^n dx$ (hoặc $I_n=\int \tan^n dx$), với $n\geq 2.$

Bài toán 11: Tìm các nguyên hàm sau đây

a) $\int \frac{\tan^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$ b) $\int \frac{\cos x-2}{1+\cos x}dx$ c) $\int \frac{1}{\sin^4 2x}dx$ d) $\int \left(\tan^2 2x+\cot^2 2x\right)dx$

Lời giải:

a) $\int \frac{\tan^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int \left[\frac{1}{\cos^2 x}-\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\right]dx=\tan x+\cot x+x+C$

b) $\int \frac{\cos x-2}{1+\cos x}dx=\int \left(1-\frac{3}{1+\cos x}\right)dx=\int dx-\int \frac{3}{2\cos^2 \frac{x}{2}}dx=x-3\tan \frac{x}{2}+C.$

c) Sử dụng kết quả $\frac{dx}{\sin^2 2x}=-\frac{1}{2}d(\cot 2x)$, ta được:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 2x}=\int \frac{1}{\sin^2 2x}.\frac{dx}{\sin^2 2x}=-\frac{1}{2}\int (1+\cot^2 2x)d(\cot 2x)\ =-\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{1}{6}\cot^3 2x+C.$$

d) Ta có: $\int \left(\tan^2 2x+\cot^2 2x\right)dx=\int \left(1-\frac{1}{\cos^2 2x}+1-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)dx=2x-\tan 2x+\frac{1}{2}\cot 2x+C.$

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau (giả sử điều kiện được xác định):

a) $f(x)=6x^5-12x^3+x^2-8.$ ĐS: $F(x)=x^6-3x^4+\frac{x^3}{3}-8x+C.$

b) $f(x)=(x^2-3x)\cdot(x+1)\cdot$ ĐS: $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+C.$

c) $f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2-\frac{1}{3}\cdot$ ĐS: $F(x)=-\frac{1}{x}-\frac{x^3}{3}-\frac{x}{3}+C.$

d) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}\cdot$ ĐS: $F(x)=\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$

e) $f(x)=2\sin^2\frac{x}{2}\cdot$ ĐS: $F(x)=x+\sin x+C.$

f) $f(x)=\tan^2 x.$ ĐS: $F(x)=\tan x-x+C.$

g) $f(x)=2\sin 3x\cos 2x.$ ĐS: $F(x)=-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x+C.$

h) $f(x)=e^x\cdot\left(2+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)\cdot$ ĐS: $F(x)=2e^x+\tan x+C.$

i) $I=\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\cdot dx.$ ĐS: $I=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}}+C.$

j) $I=\int\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{5}{\sqrt[5]{x}}\cdot dx\cdot$ ĐS: $F(x)=\sqrt{x}+\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{25}{4}\sqrt[5]{x^4}+C.$

k) $I=\int(3\cos x-3^{x-1})\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=3\sin x-\frac{3^{x-1}}{\ln 3}+C.$

l) $I=\int(\tan x-2\cot x)^2.dx.$ ĐS: $I=\tan x-4\cot x-9x+C.$

m) $I=\int\sqrt[3]{u}.(u-4).du.$ ĐS: $I=\frac{3}{7}\sqrt[3]{u^7}-3\sqrt[3]{u^4}+C.$

Bài tập 2: Tìm $F(x)=\int f(x)dx$. Biết:

a) $f(x)=x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, $F(1)=-2.$ ĐS: $F(x)=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+2\sqrt{x}-\frac{22}{5}\cdot$

b) $I=\int\sin 2x.\cos x.dx$, biết $F'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0.$ ĐS: $F(x)=-\frac{1}{6}\cos x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{7}{12}\cdot$

c) $I=\int\frac{3x^4-2x^3+5}{x^2}\cdot dx$, biết $F(1)=2.$ ĐS: $F(x)=x^3-x^2-\frac{5}{x}+7.$

d) $I=\int\frac{x^3+3x^2+3x-7}{(x+1)^2}\cdot dx$, biết $F(0)=8.$ ĐS: $F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{8}{x+1}\cdot$

e) $I=\int\sin^2\frac{x}{2}\cdot dx$, biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\cdot$ ĐS: $F(x)=\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}-\frac{1}{2}\cdot$

f) $I=\int x\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot dx$, biết $F(1)=\frac{7}{2}\cdot$ ĐS: $F(x)-\frac{1}{x}+3x+\frac{x^2}{2}+3\ln|x|+1.$

Bài tập 3: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int\frac{x^4-3x^2+2x-1}{x^2}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{x^3}{3}-3x+2\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$

b) $I=\int\frac{x^2+x+1}{x+2}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x+2|+C.$

c) $I=\int\frac{4x^2+6x+1}{2x+1}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=x^2+2x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C.$

d) $I=\int\frac{4x^3+4x^2-1}{2x+1}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C.$

e) $I=\int\frac{dx}{x^2-4}\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$

f) $I=\int\frac{dx}{x^2-6x+9}\cdot$ ĐS: $I=-\frac{1}{x-3}+C.$

g) $I=\int\frac{4x-5}{x^2-x-2}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\ln|x-2|+3\ln|x+1|+C.$

h) $I=\int\frac{1-2x}{x^2-2x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{2}\ln|x-2|+C.$

i) $I=\int\frac{x^2dx}{x^2-7x+12}\cdot$ ĐS: $I=x+16\ln|x-4|-9\ln|x-3|+C.$

j) $I=\int\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

k) $I=\int\frac{3x+2}{4x^2-4x+1}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{3}{4}\ln|2x-1|-\frac{7}{4(2x-1)}+C.$

l) $I=\int\frac{x^2+x}{(x+2)^2}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=x-3\ln|x+2|-\frac{2}{x+2}+C.$

m) $I=\int\frac{x^2.dx}{(1-x^2)^2}\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)+C.$

Bài tập 4: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int\frac{2x^2-5x-3}{x^3+x^2-2x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{3}{2}\ln|x|-2\ln|x-1|+\frac{5}{2}\ln|x-2|+C.$

b) $I=\int\frac{2x^2-8x+10}{x^3+x^2-4x-4}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{6}\ln|x-2|-\frac{20}{3}\ln|x+1|+\frac{17}{2}\ln|x+2|+C.$

c) $I=\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.$

d) $I=\int\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=2\ln|x-1|+\ln|x+2|-\frac{3}{x-1}+C.$

e) $I=\int\frac{dx}{x\cdot(x^3+1)}\cdot$ ĐS: $I=\ln|x|-\frac{1}{3}\ln(x^3+1)+C.$

II. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

1. Phương pháp đổi biến số dạng 1

Có 2 loại phương pháp đổi biến (dạng 1 và dạng 2). Nhưng thông thường ta hay gặp những dạng toán đổi biến dạng 1 để tìm nguyên hàm của hàm số.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I=\int f(x)\mathrm{d}x$, trong đó ta có thể phân tích $f(x)=g\left(u(x)\right)u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t=u(x)$, suy ra $dt=u'(x)dx$.

Khi đó ta được nguyên hàm: $\int g(t)\mathrm{d}t=G(t)+C=G\left[u(x)\right]+C.$

Chú ý: Sau khi tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t=u(x)$.

Các cách đặt cho các dạng toán thường gặp:

- $\left[\begin{array}{l} I=\int f(ax+b)^n\cdot xdx \xrightarrow{PP} t=ax+b\Rightarrow dt=a.dx \\ I=\int\left(\dfrac{x^n}{ax^{n+1}+1}\right)^m\cdot dx \xrightarrow{PP} t=ax^{n+1}+1\Rightarrow dt=(n+1).a.x^n.dx, \text{ với } m,\ n\in\mathbb{Z}. \\ I=\int f(ax^2+b)^n\cdot xdx \xrightarrow{PP} t=ax^2+b\Rightarrow dt=2ax.dx \end{array}\right.$
- $I=\int\sqrt[n]{f(x)}\cdot f'(x)\cdot dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\sqrt[n]{f(x)}$, trừ một số trường hợp đổi biến dạng 2.
- $\left[\begin{array}{l} I=\int f(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}\cdot dx \\ I=\int f(a+b\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}\cdot dx \end{array}\right. \xrightarrow{PP}$ Đặt $\left[\begin{array}{l} t=\ln x \\ t=a+b\ln x \end{array}\right.$.
- $I=\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=f(x)$.
- $I=\int f(e^x)\cdot e^x\cdot dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x$.
- $I=\int f(\cos x)\cdot\sin xdx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$.
- $I=\int f(\sin x)\cdot\cos xdx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$.
- $I=\int f(\tan x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=(1+\tan^2 x)dx$.
- $I=\int f(\cot x)\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\cot x\Rightarrow dt=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot dx=-(1+\cot^2 x)dx$.
- $I=\int f(\sin^2 x;\cos^2 x)\cdot\sin 2xdx \xrightarrow{PP}$ Đặt $\left[\begin{array}{l} t=\sin^2 x\Rightarrow dt=\sin 2xdx \\ t=\cos^2 x\Rightarrow dt=-\sin 2xdx \end{array}\right.$.
- $I=\int f(\sin x\pm\cos x)\cdot(\sin x\mp\cos x)\cdot dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\sin x\pm\cos x$.
- $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} \xrightarrow{PP}$ Đặt $\left\{\begin{array}{l} t=\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b} \text{ khi } \left\{\begin{array}{l} x+a>0 \\ x+b>0 \end{array}\right. \\ t=\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b} \text{ khi } \left\{\begin{array}{l} x+a<0 \\ x+b<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$.
- $I=\int R\left[\sqrt[n_1]{ax+b},...,\sqrt[n_k]{ax+b}\right]\cdot dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t^n=ax+b$ với $n=B.C.N.N\left\{n_1;n_2;...;n_k\right\}$.

Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Tìm các họ nguyên hàm sau đây:

a) $\int \frac{2\sin x}{1+3\cos x}dx$ b) $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx$ c) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2+2x-3}dx$

Lời giải:

a) Đặt $t=1+3\cos x$, suy ra $dt=-3\sin x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{3}dt=\sin x\,dx$

Khi đó $\int \frac{2\sin x}{1+3\cos x}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{2}{t}dt=-\frac{2}{3}\ln|t|+C=-\frac{2}{3}\ln|1+3\cos x|+C$

Cách dùng vi phân: $\int \frac{2\sin x}{1+3\cos x}dx=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{1+3\cos x}d(1+3\cos x)=-\frac{2}{3}\ln|1+3\cos x|+C$.

b) Xét $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2}{1+x^2}\cdot xdx$

Đặt $t=1+x^2$, suy ra $dt=2xdx\Rightarrow\frac{1}{2}dt=xdx$ và $x^2=t-1$

Khi đó $\int\frac{x^2}{1+x^2}\cdot xdx=\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{t}dt=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{2}\left(t-\ln|t|\right)+C$

Như vậy $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(1+x^2-\ln|1+x^2|\right)+C=\frac{1}{2}\left(1+x^2-\ln(1+x^2)\right)+C$

Cách dùng vi phân: $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2}{1+x^2}\cdot xdx=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)d(1+x^2)=\frac{1}{2}\left(1+x^2-\ln(1+x^2)\right)+C$.

c) Xét $\int \frac{(x+1)^3}{x^2+2x-3}dx=\int\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}\cdot(x+1)dx$

Đặt $t=x^2+2x+2$, suy ra $dt=(2x+2)dx\Rightarrow\frac{1}{2}dt=(x+1)dx$

Khi đó $\int\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}\cdot(x+1)dx=\frac{1}{2}\int\frac{t+4}{t}dt=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{4}{t}\right)dt=\frac{1}{2}\left(t+4\ln|t|\right)+C$

Như vậy $\int \frac{(x+1)^3}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{2}\left(x^2+2x-3+4\ln|x^2+2x-3|\right)+C$

Cách dùng vi phân: $\int \frac{(x+1)^3}{x^2+2x-3}dx=\int\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}\cdot(x+1)dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{4}{x^2+2x-3}\right)\cdot d(x^2+2x-3)$

$=\frac{1}{2}\left(x^2+2x-3+4\ln|x^2+2x-3|\right)+C$.

Phương pháp vi phân: *(Sử dụng nhanh cho một số bài toán thay cho đổi biến)*

Giả sử ta cần tìm nguyên hàm $I=\int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x)=g(u(x))u'(x)$, ta có thể trình bày gọn bài toán bằng công thức vi phân $u'(x)dx=d[u(x)]$. Khi đó, nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ và $u=u(x)$ là một hàm số theo biến x thì:

$$\boxed{I=\int f(x)dx=\int g[u(x)]d[u(x)]=G[u(x)]+C}$$

Bài toán 2: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$ b) $\int xe^{x^2}dx$ c) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$

Lời giải:

a) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x$, suy ra $dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx$

Khi đó $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx=\int e^t dt=e^t+C=e^{\tan x}+C$

Cách dùng vi phân: $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx=\int e^{\tan x}d\left(\tan x\right)=e^{\tan x}+C$

b) $\int xe^{x^2}dx$. Đặt $t=x^2$, suy ra $dt=2xdx\Rightarrow \frac{1}{2}dt=xdx$

Khi đó $\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

Cách dùng vi phân: $\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

c) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$. Đặt $t=\sin^2 x$, suy ra $dt=2\sin x\cos dx\Rightarrow dt=\sin 2x\,dx$

Khi đó $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx=\int e^t dt=e^t+C=e^{\sin^2 x}+C$

Cách dùng vi phân: $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx=\int e^{\sin^2 x}d\left(\sin^2 x\right)=e^{\sin^2 x}+C$.

Bài toán 3: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int \frac{x}{\left(2x+1\right)^3}dx$ b) $\int x^5\left(1-x^3\right)^6 dx$ c) $\int \frac{x^3-1}{x^4+x}dx$

Lời giải:

a) Xét $\int \frac{x}{\left(2x+1\right)^3}dx=\frac{1}{4}\int \frac{2x}{\left(2x+1\right)^3}2dx$.

Đặt $t=2x+1$, suy ra $dt=2dx$

Khi đó $\frac{1}{4}\int \frac{2x}{\left(2x+1\right)^3}\cdot 2dx=\frac{1}{4}\int \frac{t-1}{t^3}dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^2}-t^{-3}\right)dt=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+C$

Vậy $\int \frac{x}{\left(2x+1\right)^3}dx=\frac{1}{8\left(2x+1\right)^2}-\frac{1}{4\left(2x+1\right)}+C$.

Cách dùng vi phân: $\int \frac{x}{\left(2x+1\right)^3}dx=\frac{1}{4}\int \frac{2x}{\left(2x+1\right)^3}\cdot d\left(2x+1\right)=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{\left(2x+1\right)^2}-\frac{1}{\left(2x+1\right)^3}\right]\cdot d\left(2x+1\right)$

$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2\left(2x+1\right)^2}\right]+C=\frac{1}{8\left(2x+1\right)^2}-\frac{1}{4\left(2x+1\right)}+C$

b) Xét $\int x^5\left(1-x^3\right)^6 dx=\int x^3\left(1-x^3\right)^6 x^2dx$.

Đặt $t=1-x^3$, suy ra $dt=-3x^2dx \Rightarrow -\frac{1}{3}dt=x^2dx$

Khi đó $\int x^3\left(1-x^3\right)^6 x^2dx=-\frac{1}{3}\int(1-t)t^6dt=-\frac{1}{3}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^8}{8}\right)+C$

Vậy $\int x^5\left(1-x^3\right)^6 dx=-\frac{\left(1-x^3\right)^7}{21}+\frac{\left(1-x^3\right)^8}{24}+C$.

c) Xét $\int\frac{x^3-1}{x^4+x}dx=\int\frac{x^3-1}{x\left(x^3+1\right)}dx=\int\frac{x^3-1}{x^3\left(x^3+1\right)}\cdot x^2dx$

Đặt $t=x^3+1$, suy ra $dt=3x^2dx \Rightarrow \frac{1}{3}dt=x^2dx$

Khi đó $\int\frac{x^3-1}{x^3\left(x^3+1\right)}\cdot x^2dx=\frac{1}{3}\int\frac{t-2}{(t-1)t}dt=\frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{1}{3}\ln\frac{t^2}{|t-1|}+C$.

Vậy $\int\frac{x^3-1}{x^4+x}dx=\frac{1}{3}\ln\frac{\left(x^3+1\right)^2}{|x|^3}+C$.

Bài toán 4: Tìm các họ nguyên hàm sau đây:

a) $\int x\sqrt[4]{1-x^2}dx$ b) $\int\frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$ c) $\int x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$

Lời giải:

a) Xét $\int x\sqrt[4]{1-x^2}dx$.

Đặt $t=\sqrt[4]{1-x^2} \Rightarrow t^4=1-x^2$, suy ra $4t^3dt=-2xdx \Rightarrow -2t^3dt=xdx$

Khi đó $\int x\sqrt[4]{1-x^2}dx=-2\int t.t^3dt=-\frac{2t^5}{5}+C=-\frac{2\left(1-x^2\right)\sqrt[4]{1-x^2}}{5}+C$

b) Xét $\int\frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow t^2=x+1$. Suy ra $\begin{cases}2tdt=dx\\x=t^2-1\end{cases}$

Khi đó $\int\frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{2t}{\left(t^2-1\right)t}dt=\int\frac{2}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$

c) Xét $\int x^3\sqrt{x^2+9}\,dx=\int x^2\sqrt{x^2+9}.xdx$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+9} \Rightarrow t^2=x^2+9$. Suy ra $\begin{cases}tdt=xdx\\x^2=t^2-9\end{cases}$

Khi đó $\int x^2\sqrt{x^2+9}.xdx=\int\left(t^2-9\right)t.tdt=\int\left(t^4-9t^2\right)dt=\frac{t^5}{5}-3t^3+C.$

Như vậy $\int x^3\sqrt{x^2+9}\,dx=\frac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^5}{5}-3\left(\sqrt{x^2+9}\right)^3+C$.

Bài toán 5: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int \frac{\ln^2 x-1}{x\ln x}dx$ b) $\int \frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx$ c) $\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}dx$

Lời giải:

a) Xét $\int \frac{\ln^2 x-1}{x\ln x}dx$. Đặt $t=\ln x,$ suy ra $dt=\frac{1}{x}dx$

Khi đó $\int \frac{\ln^2 x-1}{x\ln x}dx=\int \frac{t^2-1}{t}dt=\int\left(t-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\ln|t|+C=\frac{\ln^2 x}{2}-\ln|\ln x|+C$.

b) Xét $\int \frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx$. Đặt $t=\ln\left(x^2+1\right)\Rightarrow dt=\frac{2x}{x^2+1}dx\Rightarrow \frac{1}{2}dt=\frac{x}{x^2+1}dx$.

Khi đó $\int \frac{x\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int tdt=\frac{1}{4}t^2+C=\frac{1}{4}\ln^2\left(x^2+1\right)+C$.

c) Xét $\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}dx$.

Đặt $t=1+\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow\left(t-1\right)^2=1+\ln x\Leftrightarrow \ln x=t^2-2t\Rightarrow \frac{dx}{x}=\left(2t-2\right)dt$.

Khi đó $\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}dx=\int \frac{\left(t^2-2t\right)^2}{t}\cdot\left(2t-2\right)dt$

$$=2\int\left(t^4-5t^3+8t^2-4t\right)dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{5}{2}t^4+\frac{16}{3}t^3-4t^2+C.$$

Như vậy $\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}dx=\frac{2}{5}t^5-\frac{5}{2}t^4+\frac{16}{3}t^3-4t^2+C$ với $t=1+\sqrt{\ln x+1}$.

Bài toán 6: a) Biết $\int f\left(x\right)dx=2x\ln\left(3x-1\right)+C.$ Tìm $\int f\left(3x\right)dx$?

b) Cho hàm số $f\left(x\right)=3\sqrt{2+\sin x}.$ Tìm họ nguyên hàm $\int f'\left(2x+1\right)dx$

Lời giải:

a) Xét $\int f\left(3x\right)dx$. Đặt $t=3x,$ suy ra $dt=3dx\Rightarrow \frac{1}{3}dt=dx$.

Khi đó $\int f\left(3x\right)dx=\frac{1}{3}\int f\left(t\right)dt=\frac{1}{3}\left[2t\ln\left(3t-1\right)\right]+C=\frac{1}{3}\left[2.3x\ln\left(3.3x-1\right)\right]+C$

Như vậy $\int f\left(3x\right)dx=2x\ln\left(9x-1\right)+C.$

Cách dùng vi phân: $\int f\left(3x\right)dx=\frac{1}{3}\int f\left(3x\right)d\left(3x\right)=\frac{1}{3}.2\left(3x\right)\ln\left[3\left(3x\right)-1\right]+C=2x\ln\left(9x-1\right)+C$

b) Xét $\int f'\left(2x+1\right)dx$. Đặt $t=2x+1,$ suy ra $dt=2dx\Rightarrow \frac{1}{2}dt=dx$.

Khi đó $\int f'\left(2x+1\right)dx=\frac{1}{2}\int f'\left(t\right)dt=\frac{1}{2}f\left(t\right)+C=\frac{3}{2}\sqrt{2+\sin t}+C=\frac{3}{2}\sqrt{2+\sin\left(2x+1\right)}+C$.

Nhận xét: Với đề bài này nếu không nắm tốt để sử dụng được tính chất nguyên hàm $\int f'(t)dt = f(t)+C,$ mà lại tính $f'(2x+1)$ để thay vào tính $\int f'(2x+1)\mathrm{d}x$, việc thực hiện bài giải sẽ gặp nhiều khó khăn và rất dễ dẫn đến nhiều sai sót.

2. Phương pháp đổi biến số dạng 2

Dấu hiệu	*Cách đặt*
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert\sin t \quad \text{với} \quad t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x=\lvert a\rvert\cos t \quad \text{với} \quad t\in[0;\pi] \end{array}\right.$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\lvert a\rvert}{\sin t} \quad \text{với} \quad t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\} \\ x=\frac{\lvert a\rvert}{\cos t} \quad \text{với} \quad t\in[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{array}\right.$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert\tan t \quad \text{với} \quad t\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ x=\lvert a\rvert\cot t \quad \text{với} \quad t\in(0;\pi) \end{array}\right.$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ *hoặc* $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x=a.\cos 2t$ với $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x=a+(b-a)sin^2t$ với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Một số bài toán minh họa

Bài toán 7: Tìm các nguyên hàm sau (với $a>0$):

a) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ *b)* $I=\int\frac{dx}{a^2+x^2}$ *c)* $I=\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ *d)* $I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Lời giải:

a) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Đặt $x=a\sin t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos t>0,\ \Rightarrow dx=a\cos tdt\ ,\ t=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

Do đó: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos tdt}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}=\int dt=t+C.$

Vậy $I=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$.

b) $I=\int\frac{dx}{a^2+x^2}$. Đặt $x=\tan t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\ \Rightarrow\ dx=\frac{dt}{\cos^2 t}=\left(\tan^2 t+1\right)dt,\ t=\arctan x$

Do đó: $I=\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{a(\tan^2 t+1)dt}{a^2+a^2\tan^2 t}=\int\frac{dt}{a}=\frac{t}{a}+C.$

Vậy $I=\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\arctan x}{a}+C$

c) $I=\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$. Đặt $x=2\cos t$ với $t\in[0;\pi]$, $dx=-2\sin tdt$

$$\Rightarrow I=\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\int\frac{4\cos^2 t.2\sin tdt}{\sqrt{4\left(1-\cos^2 t\right)}}=-\int\frac{4\cos^2 t.2\sin tdt}{2\sin t}=-\int 2\cos^2 tdt$$

$$=-2\int(1+\cos 2t)dt=-2t-\sin 2t+C.$$

Ta có: $x=2\cos t$ với $t\in[0;\pi]\Rightarrow\sin t>0$. Nên $\sin 2t=2\sin t.\cos t=2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.\frac{x}{2}=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$

Vậy $I=\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=-2\arccos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C$.

d) $I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos dt$ với $\frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos t\ge 0\Rightarrow\cos t=\sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\sin^3 t.\cos t}{\cos t}dt=\int\sin^3 tdt=\int\left(\sin^2 t.\sin t\right)dt=-\int(1-\cos^2 t)d(\cos t)$$

$$=-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}+C.$$

Vậy $I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+\frac{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}{3}+C$. *(có thể giải bằng cách đặt* $t=\sqrt{1-x^2}$ *)*

Bài toán 8: Tìm họ nguyên hàm của $\int f(x)$. Biết:

a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$ *b)* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$ *c)* $I=\int\frac{dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$

Lời giải:

a) $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$. Đặt $x=\cos t, 0<t<\pi\Rightarrow dx=-\sin t.dt;$

Khi đó: $\int f(x).dx=-\int\frac{\sin t.dt}{\sin^3 t}=-\int\frac{dt}{\sin^2 t}=\int d\left(\cot t\right)=\cot t+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

Vậy $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

b) $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$. Đặt $x=\tan t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos t>0$, $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3}}=\int\cos tdt=\sin t+C$$

Ta có: $\begin{cases} \sin^2 t+\cos^2 t=1 \\ \dfrac{\sin t}{\cos t}=x \end{cases}$ với $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \cos t>0\Rightarrow \begin{cases} \sin t=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \cos t=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

Vậy $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

c) $I=\int\dfrac{dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$. Đặt $x=2\sin t,\ \dfrac{-\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2};\ dx=2\cos t dt$

Vậy $I=\int\dfrac{2\cos t dt}{\left(4-4\sin^2 t\right)\sqrt{4-4\sin^2 t}}=\int\dfrac{2\cos t dt}{4\cos^2 t\sqrt{4\cos^2 t}}=\int\dfrac{dt}{4\cos^2 t}=\dfrac{1}{4}\tan t=\dfrac{1}{4}\tan\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)+C.$

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int x\cdot(1-x)^{2015}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-\dfrac{(1-x)^{2016}}{2016}+\dfrac{(1-x)^{2017}}{2017}+C.$

b) $I=\int x^2\cdot(x-1)^9\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{(x-1)^{12}}{12}+\dfrac{2(x-1)^{11}}{11}+\dfrac{(x-1)^{10}}{10}+C.$

c) $I=\int x^3\cdot(2-3x^2)^8\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{(2-3x^2)^{10}}{180}-\dfrac{(2-3x^2)^9}{81}+C.$

d) $I=\int\dfrac{xdx}{x^2+2}\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+C.$

e) $I=\int\dfrac{2x}{(x+1)^2}dx\cdot$ ĐS: $I=2\ln\left|x+1\right|+\dfrac{2}{x+1}+C.$

f) $I=\int\dfrac{x}{(x+1)^5}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{1}{(x+1)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{3}\right)+C.$

g) $I=\int\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^3 dx\cdot$ ĐS: $I=-\dfrac{1}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{4(1+x^2)^2}+C.$

h) $I=\int\dfrac{xdx}{(2x+1)^3}\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{1}{4(2x+1)^2}-\dfrac{1}{2(2x+1)}\right]+C.$

Bài tập 2: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int\dfrac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}}\cdot$ ĐS: $I=\sqrt{x^2+2x-4}+C.$

b) $I=\int x.\sqrt{2-x^2}.dx.$ ĐS: $I=-\dfrac{\sqrt{(2-x^2)^3}}{3}+C.$

c) $I=\int\dfrac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2+4}}\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+C.$

d) $I=\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}\cdot$ ĐS: $I=-\dfrac{2(3x^2+4x+8)\sqrt{1-x}}{15}+C.$

e) $I=\int 5x.\sqrt[3]{1-x^2}.dx.$ ĐS: $I=-\frac{15}{8}(1-x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$

f) $I=\int\frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx.$ ĐS: $I=2x+1-4\sqrt{2x+1}+5\ln\left|\sqrt{2x+1}+2\right|+C.$

g) $I=\int\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx.$ ĐS: $I=\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{3}-4\sqrt{4-x^2}+C.$

h) $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}.$ ĐS: $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right|+C.$

i) $I=\int\frac{2x^3-3x^2+x}{\sqrt{x^2-x+1}}dx.$ ĐS: $I=\frac{2\sqrt{(x^2-x+1)^3}}{3}-2\sqrt{x^2-x+1}+C.$

j) $I=\int\sin^3 x.\sqrt{\cos x}.dx.$ ĐS: $I=\frac{2}{21}(\cos^3 x-7\cos x)\sqrt{\cos x}+C.$

k) $I=\int\frac{dx}{x\ln x.\sqrt{1+3\ln^2 x}}.$ ĐS: $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+3\ln^2 x}-1}{\sqrt{1+3\ln^2 x}+1}\right|+C.$

l) $I=\int\frac{xdx}{x+\sqrt{x^2-1}}.$ ĐS: $I=\frac{x^3}{3}+\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3}+C.$

Bài tập 3: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}dx.$ ĐS: $I=\frac{\ln^3 x}{3}+C.$

b) $I=\int\frac{3\ln x+1}{x\ln x}dx.$ ĐS: $I=3\ln x+\ln\left|\ln x\right|+C.$

c) $I=\int(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx.$ ĐS: $I=\frac{(1+\ln x)^2}{2}+C.$

d) $I=\int\frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}\cdot\frac{1}{x}dx.$ ĐS: $I=\frac{2\sqrt{(1+\ln x)^3}}{3}-2\sqrt{1+\ln x}+C.$

e) $I=\int\frac{\ln x.\sqrt[3]{2+\ln^2 x}dx}{x}.$ ĐS: $I=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2+\ln^2 x)^4}+C.$

f) $I=\int\frac{\log_2^3 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}\cdot dx.$ ĐS: $I=\frac{1}{9\ln^3 2}\left(\frac{\sqrt{(1+3\ln^2 x)^3}}{3}-\sqrt{1+3\ln^2 x}\right)+C.$

Bài tập 4: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int\frac{dx}{e^x-1}.$ ĐS: $I=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+C.$

b) $I=\int\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}.$ ĐS: $I=\ln\left|\frac{e^x-2}{e^x-1}\right|+C.$

c) $I=\int\frac{dx}{e^x-4.e^{-x}}.$ ĐS: $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x-2}{e^x+2}\right|+C.$

d) $I=\int\frac{(1+e^x)^3}{e^x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{(1+e^x)^2}{2}+2(1+e^x)+3x-\frac{1}{e^x}+C.$

e) $I=\int\frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3e^x+2)+\frac{3}{2}\ln\frac{e^x+1}{e^x+2}+C.$

f) $I=\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{2\sqrt{(e^x-1)^3}}{3}+e^x-1+C.$

g) $I=\int\frac{dx}{e^x-\sqrt{e^x}}\cdot$ ĐS: $I=2\left(e^{-\frac{x}{2}}+\ln\left|e^{-\frac{x}{2}}+1\right|\right)+C.$

Bài tập 5: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int\frac{\cos xdx}{1+\sin x}\cdot$ ĐS: $I=\ln|1+\sin x|+C.$

b) $I=\int\frac{(2\sin x-3)\cos x}{2\sin x+1}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{2}(2\sin x+1)-4\ln|2\sin x+1|+C.$

c) $I=\int\frac{3\cos xdx}{(1-\sin x)^2}\cdot$ ĐS: $I=\frac{3}{1-\sin x}+C.$

d) $I=\int\frac{2\cos xdx}{3+2\sin x}\cdot$ ĐS: $I=\ln\left(\sin x+\frac{3}{2}\right)+C.$

e) $I=\int\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{2}\ln|1+\sin 2x|+C.$

f) $I=\int\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=2\ln(2+\sin x)+\frac{4}{2+\sin x}+C.$

g) $I=\int(\cos^3 x-1).\cos^2 x.dx.$ ĐS: $I=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2\sin^3 x}{3}+\sin x+\frac{2}{x}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$

h) $I=\int\frac{\cos xdx}{11-7\sin x-\cos^2 x}\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{5-\sin x}{2-\sin x}\right|+C.$

Bài tập 6: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-2(1+\cos x)^2+C.$

b) $I=\int\cos^2 x\sin^3 xdx$ ĐS: $I=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C.$

c) $I=\int\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{\cos x}{2}-\cos^2 x-\ln|\cos x+1|+C.$

d) $I=\int\frac{\sin 4x}{1+\cos^2 x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=6\ln(3+\cos 2x)-2\cos 2x-6+C.$

e) $I=\int\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos 2x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|-2\cos x+C.$

f) $I=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C.$

Bài tập 7: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{\tan^5 x}{5}+C.$

b) $I=\int \frac{\tan^4 x}{\cos 2x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\right|+C.$

c) $I=\int \frac{dx}{5\cos^2 x-8\sin x\cos x+3\sin^2 x}\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\tan x-5}{\tan x-1}\right|+C.$

d) $I=\int \frac{(1+\sin 2x)\cdot dx}{2\sin x\cos^3 x+\cos^4 x}\cdot$ ĐS: $I=\frac{\tan^2 x}{4}+\frac{3\tan x}{4}+\frac{1}{8}\ln\left|2\tan x+1\right|+C.$

e) $I=\int \frac{dx}{\cos^4 x\sin^2 x}\cdot$ ĐS: $I=\frac{\tan^3 x}{3}+2\tan x-\frac{1}{\tan x}+C.$

f) $I=\int \frac{dx}{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot$ ĐS: $I=-\sqrt{2}\ln\left|1-\tan x\right|+C.$

g) $I=\int \frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{1+\tan x}+C.$

Bài tập 8: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-\frac{1}{3}\cot^3 x+C.$

b) $I=\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{15\cot^7 x+42\cot^5 x+35\cot^3 x}{105}+C.$

c) $I=\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\sqrt[4]{\cot x}}\cdot$ ĐS: $I=-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cot^3 x}+C.$

d) $I=\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}\cdot$ ĐS: $I=-\ln\left|\cot x\right|-\frac{1}{2}\cot^2 x+C.$

e) $I=\int \frac{\sin x.dx}{(\sin x+\cos x)^3}\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{2(1+\cot x)^2}+C.$

f) $I=\int \frac{\cos 2xdx}{\sin x+\cos x+2}\cdot$ ĐS: $I=\sin x+\cos x+2-2\ln\left|\sin x+\cos x+2\right|$

g) $I=\int \frac{\cos 2x\cdot dx}{(\sin x+\cos x+2)^3}\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{(\sin x+\cos x+2)^2}-\frac{1}{\sin x+\cos x+2}+C.$

Bài tập 9: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}\cdot$ ĐS: $I=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x}+C.$

b) $I=\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2}+C.$

c) $I=\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx\cdot$ ĐS: $I=-\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C.$

d) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}\cdot$ ĐS: $I=\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C.$

III. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

1. Phương pháp

Thuật toán:

- ***Bước 1:*** Ta biến đổi bài toán về dạng : $I=\int f(x)dx=\int f_1(x).f_2(x)dx$
- ***Bước 2:*** Đặt : $\begin{cases}u=f_1(x)\\dv=f_2(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'_1(x)dx\\v=\int f_2(x)dx\end{cases}$
- ***Bước 3:*** Khi đó : $\int u.dv=u.v-\int v.du$

Chú ý: Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và nguyên hàm $\int vdu$ dễ tính hơn $\int udv$.

THỨ TỰ ƯU TIÊN ĐẶT u : NHẤT - LOG; NHÌ - ĐA, TAM - LƯỢNG; TỨ - MŨ

Nghĩa là nếu có ln hay $\log_a x$ thì chọn $u=\ln$ hay $u=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ và $dv=$ còn lại. Nếu không có ln; log thì chọn $u=$ đa thức và $dv=$ còn lại. Nếu không có log, đa thức, ta chọn $u=$ lượng giác,….cuối cùng là mũ.

Ta thường gặp các dạng sau: *(Với $P(x)$ là đa thức)*

Đặt \ Dạng	$I=\int P(x)\begin{bmatrix}\sin x\\\cos x\end{bmatrix}dx$	$I=\int P(x)e^{ax+b}dx$	$I=\int P(x)\ln(mx+n)dx$	$I=\int\begin{bmatrix}\sin x\\\cos x\end{bmatrix}e^x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$\ln(mx+n)$	$\begin{bmatrix}\sin x\\\cos x\end{bmatrix}$
dv	$\begin{bmatrix}\sin x\\\cos x\end{bmatrix}dx$	$dv=e^{ax+b}dx$	$P(x)dx$	$e^x dx$

- Lưu ý rằng bậc của đa thức và bậc của ln tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.

- Dạng mũ nhân lượng giác là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.

2. Một số bài toán minh họa và các kĩ thuật tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần

Bài toán 1: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int(x+2)e^{2x}dx$ b) $\int(2x-1)\cos x\,dx$ c) $\int(3x^2-1)\ln x\,dx$ d) $\int(4x-1)\ln(x+1)dx$

Lời giải:

a) Xét $\int(x+2)e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x+2\\dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$

Khi đó $\int(x+2)e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}(x+2)e^{2x}-\int\dfrac{1}{2}e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}(x+2)e^{2x}-\dfrac{1}{4}e^{2x}+C$

Vậy $\int(x+2)e^{2x}dx=\dfrac{1}{4}(2x+3)e^{2x}+C$.

b) Xét $\int(2x-1)\cos x\,dx$. Đặt $\begin{cases}u=2x-1\\dv=\cos x\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=\sin x\end{cases}$

Khi đó $\int(2x-1)\cos x\,dx=(2x-1)\sin x-\int 2\sin x\,dx=(2x-1)\sin x+2\cos x+C$

Vậy $\int(x+2)e^{2x}dx=\frac{1}{4}(2x+3)e^{2x}+C$

c) Xét $\int(3x^2-1)\ln x\,dx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=(3x^2-1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\v=x^3-x\end{cases}$

Khi đó $\int(3x^2-1)\ln x\,dx=(x^3-x)\ln x-\int(x^2-1)dx=(x^3-x)\ln x-\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$.

d) Xét $\int(4x-1)\ln(x+1)dx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\dv=(4x-1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x+1}dx\\v=2x^2-x\end{cases}$

Khi đó $\int(4x-1)\ln(x+1)dx=(2x^2-x)\ln(x+1)-\int\frac{2x^2-x}{x+1}dx$

$=(2x^2-x)\ln(x+1)-\int\left(2x-3+\frac{3}{x+1}\right)dx$

$=(2x^2-x)\ln(x+1)-\left(x^2-3x+3\ln(x+1)\right)+C$

$=(2x^2-x-3)\ln(x+1)-x^2+3x+C$.

Bài toán 2: Hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\int f(x)\sin dx=-f(x)\cos x+\int\pi^x\cos x dx$. Tìm $y=f(x)$?

Lời giải:

Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có:

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\v=-\cos x\end{cases}$

$\int f(x)\sin x dx=-f(x)\cos x+\int f'(x)\cos x dx$

Mà theo giả thiết $\int f(x)\sin x dx=-f(x)\cos x+\int\pi^x\cos x dx$.

Suy ra $f'(x)=\pi^x\Rightarrow f(x)=\int\pi^x dx=\frac{\pi^x}{\ln\pi}+C$.

Bài toán 3: Tìm nguyên hàm $I=\int x\ln(2+x^2)dx$

Lời giải:

Cách giải thông thường:

Đặt $\begin{cases}u=\ln(2+x^2)\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2x}{2+x^2}\\v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$

Khi đó: $I=\frac{x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)-\int\frac{x^3}{2+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)-I_1.$

+ Tìm $I_1=\int\frac{x^3}{2+x^2}dx$. Đặt $t=2+x^2\Rightarrow dt=2xdx\Leftrightarrow xdx=\frac{dt}{2}$

$$\Rightarrow I_1=\int\frac{t-2}{t}.\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2}{t}\right)dt=\frac{1}{2}\left(t-2\ln|t|\right)+C=\frac{1}{2}\left[\left(2+x^2\right)-2\ln\left(2+x^2\right)\right]+C.$$

$$\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)-I_1=\frac{x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)-\frac{1}{2}\left[\left(2+x^2\right)-2\ln\left(2+x^2\right)\right]+C_1$$

$$=\frac{2+x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)-\frac{2+x^2}{2}+C_1=\frac{2+x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)-\frac{x^2}{2}+C.$$

Cách giải theo "kĩ thuật chọn hệ số":

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(2+x^2\right)\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2x}{2+x^2}\\v=\frac{x^2}{2}+1=\frac{2+x^2}{2}\end{cases}$ ($v=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$ và ta chọn $C=1$ nên $v=\frac{x^2}{2}+1$)

Khi đó: $I=\frac{2+x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)-\int xdx=\frac{2+x^2}{2}\ln\left(2+x^2\right)-\frac{x^2}{2}+C.$

Nhận xét: Qua bài toán trên các em được làm quen thêm một kĩ thuật chọn hệ số cho phương pháp tích phân từng phần. Kĩ thuật này được trình bày sau đây.

Kĩ thuật chọn hệ số

Khi đi tính tích phân từng phần, ở khâu đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=g(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\v=G(x)+C\end{cases}$ với C là hằng số bất kỳ (chọn số nào cũng được). Và theo một "thói quen" thì chúng ta thường chọn $C=0$. Nhưng việc chọn $C=0$ lại làm cho việc tìm nguyên hàm (tích phân) $\int vdu$ không được "đẹp" cho lắm. Vì ta có quyền chọn C là số thực bất kì nên ta sẽ chọn hệ số C thích hợp mà ở đó biểu thức vdu là đơn giản nhất. Cách làm như thế được gọi là **"kĩ thuật chọn hệ số"**.

Bài toán 4: Tìm nguyên hàm của $\int\frac{\ln\left(\sin x+2\cos x\right)}{\cos^2 x}dx$.

Lời giải:

Cách giải thông thường:

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(\sin x+2\cos x\right)\\dv=\frac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx\\v=\tan x\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\tan x\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-\int\frac{\tan x\left(\cos x-2\sin x\right)}{\sin x+2\cos x}dx.$$

Khi đó việc đi tìm $\int\frac{\tan x\left(\cos x-2\sin x\right)}{\sin x+2\cos x}dx$ sẽ trở nên rất khó khăn. Lúc này cần sự "lên tiếng" của "kĩ thuật chọn hệ số".

Cách giải theo "kĩ thuật chọn hệ số":

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(\sin x+2\cos x\right) \\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx \\ v=\tan x+C=\dfrac{\sin x+C\cos x}{\cos x} \end{cases}$

Khi đó: $\int vdu=\int \dfrac{\sin x+C\cos x}{\cos x}.\dfrac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx$. Để nguyên hàm này đơn giản ta "Chọn $C=2$"

lúc này ta được $\int vdu=\int \dfrac{\cos x-2\sin x}{\cos x}dx$.

$\Rightarrow I=\tan x\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-\int \dfrac{\cos x-2\sin x}{\cos x}dx=\tan x\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-x+2\ln\left|\cot x\right|+C.$

Bài toán 5: Tìm họ nguyên hàm $\int x^2\sin\left(1-3x\right)dx$

Lời giải:

+ Xét $I=\int x^2\sin\left(1-3x\right)dx$

Đặt $\begin{cases} u=x^2 \\ dv=\sin\left(1-3x\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2xdx \\ v=\dfrac{1}{3}\cos\left(1-3x\right) \end{cases}$.

Khi đó thì $I=\int x^2\sin\left(1-3x\right)dx=\dfrac{1}{3}x^2\cos\left(1-3x\right)-\int\dfrac{2}{3}x\cos\left(1-3x\right)dx$

+ Xét $J=\int\dfrac{2}{3}x\cos\left(1-3x\right)dx$

Đặt lại $\begin{cases} u=\dfrac{2}{3}x \\ dv=\cos\left(1-3x\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{2}{3}dx \\ v=-\dfrac{1}{3}\sin\left(1-3x\right) \end{cases}$.

$J=\int\dfrac{2}{3}x\cos\left(1-3x\right)dx=-\dfrac{2}{9}x\sin\left(1-3x\right)+\int\dfrac{2}{9}\sin\left(1-3x\right)dx=-\dfrac{2}{9}x\sin\left(1-3x\right)+\dfrac{2}{27}\cos\left(1-3x\right)+C$

Vậy, $I=\int x^2\sin\left(1-3x\right)dx=\dfrac{1}{3}x^2\cos\left(1-3x\right)+\dfrac{2}{9}x\sin\left(1-3x\right)-\dfrac{2}{27}\cos\left(1-3x\right)+C$.

Lưu ý: Trên đây là bài giải chuẩn, tuy nhiên, nếu chỉ cần tìm đáp số cuối cùng ta có thể thực hiện theo phương pháp từng phần theo sơ đồ đường chéo.

Phương pháp từng phần bằng sơ đồ đường chéo:

Bước 1: Chia thành 2 cột:

+ Cột 1: Cột u luôn lấy đạo hàm đến 0.

+ Cột 2: Cột dv luôn lấy nguyên hàm cho đến khi tương ứng với cột 1.

Bước 2: Nhân chéo kết quả của 2 cột với nhau. Dấu của phép nhân đầu tiên sẽ có dấu $(+)$, sau đó đan dấu $(-),(+),(-),...$

Bước 3: Kết quả bài toán là tổng các phép nhân vừa tìm được.

Áp dụng cho bài toán ở trên:

(Lấy đạo hàm)	Dấu	(Lấy nguyên hàm)
$u=x^2$	+	$dv=\sin(1-3x)$
$2x$	−	$\frac{1}{3}\cos(1-3x)$
2	+	$-\frac{1}{9}\sin(1-3x)$
0		$-\frac{1}{27}\cos(1-3x)$

Kết quả: $I=\int x^2\sin(1-3x)dx=\frac{1}{3}x^2\cos(1-3x)+\frac{2}{9}x\sin(1-3x)-\frac{2}{27}\cos(1-3x)+C$.

Tiếp theo là một bài toán sử dụng phương pháp từng phần bằng sơ đồ đường chéo:

Bài toán 6: Tìm họ nguyên hàm: $\int x^5e^xdx$

Lời giải:

Nhận xét: Về mặt lý thuyết bài này ta hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp tích phân từng phần. Song ta phải sử dụng tới 5 lần tích phân từng phần (vì bậc của đa thức x^5 là 5 ---khá dài). Lúc này ta sẽ làm theo sơ đồ tích phân đường chéo:

Đạo hàm	Dấu	Nguyên hàm
$u=x^5$		$dv=e^x$
$5x^4$	+	e^x
$20x^3$	−	e^x
$60x^2$	+	e^x
$120x$	−	e^x
120	+	e^x
0	−	e^x

Kết quả tìm được: $\int x^5e^xdx=x^5e^x-5x^4e^x+20x^3e^x-60x^2e^x+120xe^x-120e^x+C$

$=(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120)e^x+C.$

Cách 2: Ta sử dụng công thức: $\int[f(x)+f'(x)]e^xdx=f(x)e^x+C \quad (*)$

Thật vậy: $[f(x)e^x+C]'=f'(x)e^x+f(x)e^x=[f(x)+f'(x)]e^x$ (đpcm)

Áp dụng công thức $(*)$ ta được:

$$I=\int_0^1 x^5e^x dx=\int_0^1\left[\left(x^5+5x^4\right)-\left(5x^4+20x^3\right)+\left(20x^3+60x^2\right)-\left(60x^2+120x\right)+\left(120x+120\right)-120\right]e^x dx$$

$$=\int_0^1\left(x^5+5x^4\right)e^x dx-5\int_0^1\left(x^4+4x^3\right)e^x dx+20\int_0^1\left(x^3+3x^2\right)e^x dx-60\int_0^1\left(x^2+2x\right)e^x dx+120\int_0^1\left(x+1\right)e^x dx-120\int_0^1 {}^x dx$$

$$=\left(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120\right)e^x\Big|_0^1=120-44e.$$

Tích phân đường chéo Nguyên hàm lặp:

Nếu ta tính tích phân theo sơ đồ đường chéo mà lặp lại nguyên hàm ban đầu cần tính (không kể dấu và hệ số) thì dừng lại luôn tại dòng đó, không chia dòng nữa.

Cách tính: các dòng vẫn nhân chéo như các trường hợp trên, nhưng thêm $\int$(tích của 2 phần tử dòng cuối cùng) vẫn sử dụng quy tắc đan dấu.

Sau đây là ví dụ minh họa:

Bài toán 7: Tìm nguyên hàm: $I=\int e^{2x}cos3xdx$

Lời giải:

Đạo hàm	Dấu	Nguyên hàm
$u=\cos 3x$	+	$dv=e^{2x}$
$-3\sin 3x$	−	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$-9\cos 3x$	+	$\frac{1}{4}e^{2x}$

Ta có $I=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x-\left(-3\sin 3x\right)\frac{1}{4}e^{2x}+\int\left(-9\cos 3x\right)\frac{1}{4}e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}cos3x+\frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x-\frac{9}{4}I$

$\Rightarrow\frac{13}{4}I=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x+C\Rightarrow I=\frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x+C$.

Bài toán 8: Tìm họ nguyên hàm $\int e^x\sin x\,dx$

Lời giải:

Cách 1: Cách giải từng phần thông thường

+ Xét $F\left(x\right)=\int e^x\sin x\,dx$. Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\cos x\,dx\\v=e^x\end{cases}$.

Khi đó: $F\left(x\right)=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-G\left(x\right)$ (1)

+ Với $G(x)=\int e^x\cos x\,dx$. Đặt $\begin{cases}u=\cos x\\ dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\sin x\,dx\\ v=e^x\end{cases}$.

Khi đó: $G(x)=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx+C'=e^x\cos x+F(x)+C'$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $F(x)=e^x\sin x-e^x\cos x-F(x)-C'\Rightarrow F(x)=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}-\dfrac{C'}{2}$

Vậy $F(x)=\int e^x\sin x\,dx=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$.

Ghi nhớ: Gặp $\int e^{mx+n}.\sin(ax+b)dx$ hoặc $\int e^{mx+n}.\cos(ax+b)dx$ ta luôn thực hiện phương pháp nguyên hàm từng phần 2 lần liên tiếp.

Cách 2: (Phương pháp tích phân đường chéo)

Đạo hàm (u)	**Dấu**	**Nguyên hàm** (dv)
$\sin x$	+	e^x
$\cos x$	−	e^x
$-\sin x$	+	e^x

Kết quả: $I=\mathrm{e}^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x dx\Leftrightarrow I=e^x(\sin x-\cos x)-I\Leftrightarrow I=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C.$

Bài toán 9: Tìm nguyên hàm $I=\int e^{x+1}.\cos(2x+1).dx$

Lời giải:

Cách 1: Cách giải từng phần thông thường

Đặt: $\begin{cases}u=\cos(2x+1)\\ dv=e^{x+1}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-2\sin(2x+1)dx\\ v=e^{x+1}\end{cases}$

Khi đó: $I=e^{x+1}\cos(2x+1)+2\int e^{x+1}\sin(2x+1)dx=e^{x+1}\cos(2x+1)+2J$

Xét tích phân J = $\int e^{x+1}.\sin(2x+1).dx$

Đặt: $\begin{cases}u=\sin(2x+1)\\ dv=e^{x+1}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2\cos(2x+1)dx\\ v=e^{x+1}\end{cases}$

Khi đó: $J=e^{x+1}\sin(2x+1)-2\int e^{x+1}\cos(2x+1)dx=\ e^{x+1}\sin(2x+1)-2I+C$

Suy ra : $I=e^{x+1}\cos(2x+1)+2J=e^{x+1}\cos(2x+1)+2\left[e^{x+1}\sin(2x+1)-2I\right]+C$

$\Rightarrow 5I=e^{x+1}\cos(2x+1)+2e^{x+1}\sin(2x+1)\Leftrightarrow I=\dfrac{1}{5}e^{x+1}\left(\cos(2x+1)+2\sin(2x+1)\right)+C.$

Cách 2: (Phương pháp đường chéo)

Đạo hàm (u)	Dấu	Nguyên hàm (dv)
$\cos(2x+1)$	+	e^{x+1}
$-2\sin(2x+1)$	−	e^{x+1}
$-4\cos(2x+1)$	+	e^{x+1}

Kết quả:

$$I = e^{x+1}\cos(2x+1) + 2e^{x+1}\sin(2x+1) - 4\int e^{x+1}\cos(2x+1) = e^{x+1}\left[\cos(2x+1) + 2\sin(2x+1)\right] - 4I$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{x+1}\left[\cos(2x+1) + 2\sin(2x+1)\right]}{5} + C.$$

Phương pháp đường chéo dạng: $\int f(x)\ln^n(ax+b)dx$

Đối với dạng bài tìm nguyên hàm $\int f(x)\ln^n(ax+b)dx$ vì vậy ưu tiên đặt $u = \ln^n(ax+b)$ vì vậy khi đạo hàm "u" sẽ không bằng 0 được, vì vậy phải chuyển một lượng $t(x)$ từ cột đạo hàm sang cột nguyên hàm để giảm mũ của $\ln$ đi 1 bậc ở cột đạo hàm. Tiếp tục làm tương tự cho đến khi cột đạo hàm bằng 0 thì dừng lại. Nhân chéo từ hàng đạo hàm đã thực hiện chuyển $t(x)$ sang hàng kề dưới của cột nguyên hàm, vẫn sử dụng quy tắc đan dấu bình thường.

Bài toán 10: Tìm nguyên hàm: $I = \int x\ln^2 x dx$

Lời giải:

Cách 1: Phương pháp từng phần thông thường

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2\ln x}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Khi đó: $I = \dfrac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x dx = \dfrac{x^2}{2}\ln^2 x - I_1$.

+ Tìm $I_1 = \int x\ln x dx$:

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Khi đó: $I_1 = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x}{2}dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C.$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C\right) = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C.$$

Cách 2: Phương pháp đường chéo

Chuyển (Chia)	Đạo hàm	Dấu	Nguyên hàm	Nhận (nhân)
	$\ln^2 x$	+	x	
$\frac{2}{x}$	$\frac{2\ln x}{x}$		$\frac{x^2}{2}$	$\frac{2}{x}$
	$\ln x$	−	x	
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$		$\frac{x^2}{2}$	$\frac{1}{x}$
	1	+	$\frac{x}{2}$	
	0		$\frac{x^2}{4}$	

Kết quả: $I=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C=\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C.$

Bài toán 11: Tìm nguyên hàm: $I=\int\left(x^2+4x+3\right)\ln^2\left(x+1\right)dx$

Lời giải:

Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx;\ \ x^2+4x+3=\left(x+1\right)\left(x+3\right)=t\left(t+2\right)=t^2+2t$

$\Rightarrow I=\int\left(x^2+4x+3\right)\ln^2\left(x+1\right)dx=\int\left(t^2+2t\right)\ln^2 tdt$

Cách 1: Phương pháp từng phần thông thường

Đặt $\begin{cases}u=\ln^2 t\\ dv=t^2+2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2\ln t}{t}dx\\ v=\frac{t^3}{3}+t^2\end{cases}.$

Khi đó: $I=\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\ln^2 t-2\int\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\frac{\ln t}{t}dt=\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\ln^2 t-2\int\left(\frac{t^2}{3}+t\right)\ln tdt=\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\ln^2 t-2I_1\quad(*)$

+ Tính $I_1=\int\left(\frac{t^2}{3}+t\right)\ln tdt.$ Đặt $\begin{cases}u=\ln t\\ dv=\left(\frac{t^2}{3}+t\right)dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dt}{t}\\ v=\frac{t^3}{9}+\frac{t^2}{2}\end{cases}.$

Khi đó: $I_1=\left(\frac{t^3}{9}+\frac{t^2}{2}\right)\ln t-\int\left(\frac{t^2}{9}+\frac{t}{2}\right)dt=\left(\frac{t^3}{9}+\frac{t^2}{2}\right)\ln t-\frac{t^3}{27}-\frac{t^2}{4}+C.$

Thay I_1 vào $(*)$, ta được: $I=\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\ln^2 t-\left(\frac{2t^3}{9}+t^2\right)\ln t+\frac{2t^3}{27}+\frac{t^2}{2}+C\quad(**)$

Thay $t=x+1$ vào $(**)$ ta được nguyên hàm $\int\left(x^2+4x+3\right)\ln^2\left(x+1\right)dx$.

Cách 2: Phương pháp đường chéo:

Chuyển (Chia)	Đạo hàm (u)	Dấu	Nguyên hàm (dv)	Nhận (Nhân)
	$\ln^2 t$	+	t^2+2t	
$\frac{2}{t}$	$\frac{2\ln t}{t}$		$\frac{t^3}{3}+t^2$	$\frac{2}{t}$
	$\ln t$	−	$\frac{2t^2}{3}+2t$	
$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t}$		$\frac{2t^3}{9}+t^2$	$\frac{1}{t}$
	1	+	$\frac{2t^2}{9}+t$	
	0		$\frac{2t^3}{27}+\frac{t^2}{2}$	

Kết quả: $I=\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\ln^2 t-\left(\frac{2t^3}{9}+t^2\right)\ln t+\frac{2t^3}{27}+\frac{t^2}{2}+C \quad (**)$.

Thay $t=x+1$ vào $(**)$ ta được nguyên hàm $\int\left(x^2+4x+3\right)\ln^2\left(x+1\right)dx$.

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int x\cdot\sin x\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\sin x-\cos x+C.$

b) $I=\int(1-2x)\cdot e^x\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=(3-2x)\cdot e^x+C.$

c) $I=\int(2x-1)\cdot\ln x\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=(x^2-x)\ln x-\frac{x^2}{2}+x+C.$

d) $I=\int x\cdot e^{3x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{xe^{3x}}{3}-\frac{e^{3x}}{9}+C.$

e) $I=\int x^2\cdot\ln 2x\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{x^3\ln 2x}{3}-\frac{x^3}{9}+C.$

f) $I=\int(x+1)\cdot\sin 2x\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-\frac{x+1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

g) $I=\int x\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-2x\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}+C.$

h) $I=\int x\cdot\ln(1-x)\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{x^2}{2}\ln(1-x)-\frac{\ln(1-x)}{2}-\frac{(1+x)^2}{4}+C.$

i) $I=\int x\cdot\sin^2 x\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}+C.$

j) $I=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$

k) $I=\int x\cdot\ln\dfrac{1+x}{1-x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=x+\dfrac{x^2-1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+C.$

l) $I=\int\dfrac{\ln x}{x^3}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-\dfrac{\ln x}{2x^2}-\dfrac{1}{4x^2}+C.$

m) $I=\int x\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-\dfrac{1}{4}x\cos 2x+\dfrac{1}{8}\sin 2x+C.$

n) $I=\int e^{-2x}\cdot\cos 3x\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{1}{13}e^{-2x}(3\sin 3x-2\cos 3x)+C.$

o) $I=\int\dfrac{x\cdot dx}{1+\cos 2x}\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{1}{2}x\tan x+\dfrac{1}{2}\ln\left|\cos x\right|+C.$

p) $I=\int x\cdot(2\cos^2 x-1)\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{x}{2}\cdot\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C.$

q) $I=\int\dfrac{x}{\sin^2 x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-x\cot x+\ln\left|\sin x\right|+C.$

r) $I=\int(x-2)\cdot e^{2x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{1}{2}(x-2)e^{2x}-\dfrac{1}{4}e^{2x}+C.$

Bài tập 2: Tính các nguyên hàm sau:

a) $I=\int\dfrac{x^2-1}{x^2}\cdot\ln x\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\ln\left|x\right|-x+\dfrac{1}{x}+C.$

b) $I=\int\cos\sqrt{x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}-2\cos\sqrt{x}+C.$

c) $I=\int\sin\sqrt{x}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C.$

d) $I=\int(8x^3-2x)\cdot e^{x^2}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=(4x^2-1)\cdot e^{x^2}-4e^{x^2}+C.$

e) $I=\int x^3.e^{x^2}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{1}{2}x^2e^{x^2}-\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C.$

f) $I=\int x^5\cdot e^{x^3}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{1}{3}x^3e^{x^3}-\dfrac{1}{3}e^{x^3}+C.$

g) $I=\int e^{\sin x}\cdot\sin 2x\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=2\sin x.e^{\sin x}-2e^{\sin x}+C.$

h) $I=\int\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=2xe^{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}+4e^{\sqrt{x}}+C.$

i) $I=\int x\cdot\ln(x^2+1)\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=\dfrac{1}{2}(x^2+1)\ln(x^2+1)-x^2-x+C.$

j) $I=\int\dfrac{1+\ln(x+1)}{x^2}\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\ln\left|x+1\right|+\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+C.$

k) $I=\int e^x\cdot\ln(e^x+1)\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=(e^x+1)\ln(e^x+1)-e^x+C.$

l) $I=\int\dfrac{\ln(4x^2+8x+3)}{(x+1)^3}\cdot dx\cdot$ ĐS: $\dfrac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2}\ln\left|4x^2+8x+3\right|-4\ln\left|x+1\right|+C.$

m) $I=\int\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\ln(x+\sqrt{x}-1)\cdot dx\cdot$ ĐS: $I=(x+\sqrt{x}-1)\ln\left|x+\sqrt{x}-1\right|-x-\sqrt{x}+C.$

IV. TÌM NGUYÊN HÀM BẰNG TỔNG HỢP CÁC PHƯƠNG PHÁP

+ Một số dạng nguyên hàm cần tách ra giải hai bài toán nguyên hàm riêng.
+ Một số dạng toán nguyên hàm mà khi giải cần vận dụng phối hợp hai phương pháp nguyên hàm đổi biến và nguyên hàm từng phần, thậm chí các phép biến đổi lượng giác, phân thức.

1. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int \frac{x+e^x+xe^x}{1+e^x}dx$ b) $\int \frac{1+x\ln x}{x^2}dx$ c) $\int \left(x^4+x^3\right)e^{4x}dx$

Lời giải:

a) Ta có $\int \frac{x+e^x+xe^x}{1+e^x}dx=\int\left(x+\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=\int x\,dx+\int \frac{e^x}{1+e^x}dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{e^x}{1+e^x}dx.$

Xét $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$. Đặt $t=1+e^x$, suy ra $dt=e^xdx$

Khi đó $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left(1+e^x\right)+C$

Như vậy $\int \frac{x+e^x+xe^x}{1+e^x}dx=\frac{x^2}{2}+\ln\left(1+e^x\right)+C$

b) Ta có $\int \frac{1+x\ln x}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=-\frac{1}{x}+\int \frac{\ln x}{x}dx.$

Xét $\int \frac{\ln x}{x}dx$. Đặt $t=\ln x$, suy ra $dt=\frac{1}{x}dx$

Khi đó $\int \frac{\ln x}{x}dx=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{\ln^2 x}{2}+C$

Như vậy $\int \frac{1+x\ln x}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+\frac{\ln^2 x}{2}+C$

c) Ta có $\int \left(x^4+x^3\right)e^{4x}dx=\int x^4e^{4x}dx+\int x^3e^{4x}dx.$

Xét $\int x^4e^{4x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x^4\\dv=e^{4x}dx\end{cases}$ ta có $\begin{cases}du=4x^3dx\\v=\frac{1}{4}e^{4x}\end{cases}$.

Khi đó : $\int x^4e^{4x}dx=\frac{1}{4}x^4e^{4x}-\int x^3e^{4x}dx$

Như vậy $\int \left(x^4+x^3\right)e^{4x}dx=\int x^4e^{4x}dx+\int x^3e^{4x}dx=\frac{1}{4}x^4e^{4x}+C.$

Bài toán 2: Tìm các họ nguyên hàm sau đây

a) $\int e^{\sqrt{x}}dx$ b) $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$ c) $\int \frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}dx$

Lời giải:

a) Xét $\int e^{\sqrt{x}}dx$. Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x,$ suy ra $2tdt=dx$.

Khi đó: $\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2te^t dt$ với $t=\sqrt{x}$

Lại đặt $\begin{cases}u=2t\\dv=e^t dt\end{cases}$, ta có $\begin{cases}du=2dt\\v=e^t\end{cases}$.

Từ đó : $\int 2te^t dt=2te^t-\int 2e^t dt=2te^t-2e^t+C=\left(2t-2\right)e^t+C$

Tóm lại $\int e^{\sqrt{x}}dx=\left(2\sqrt{x}-2\right)e^{\sqrt{x}}+C$

b) Xét $\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\dfrac{1}{2\cos^2 x}\end{cases}$.

Khi đó : $\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx=-\frac{x}{2\cos^2 x}+\int\frac{1}{2\cos^2 x}dx=-\frac{x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\tan x+C$

<u>Lưu ý</u>: $v=v\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ được tìm như sau

Xét $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$. Đặt $t=\cos x,$ suy ra $dt=-\sin x\,dx\Rightarrow -dt=\sin x\,dx$

Từ đó $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx=-\int\frac{dt}{t^3}=-\int t^{-3}dt=\frac{t^{-2}}{2}+C=\frac{1}{2\cos^2 x}+C$

c) Xét $\int\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\dfrac{1}{\cos x}\end{cases}$.

Khi đó : $\int\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=-\frac{x}{\cos x}+\int\frac{1}{\cos x}dx$

Xét $\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$. Đặt $t=\sin t\Rightarrow dt=\cos x\,dx$.

Khi đó: $\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

Như vậy $\int\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=-\frac{x}{\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$.

Bài toán 3: Tính $F(x)=\int\frac{1+x\sin x}{\cos^2 x}dx$. Chọn kết quả đúng.

A. $F(x)=\tan x+\frac{x}{\cos x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$.

B. $F(x)=\tan x-\frac{x}{\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$.

C. $F(x)=\tan x+\frac{x}{\cos x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$.

D. $F(x)=\tan x-\frac{x}{\cos x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$.

Lời giải:

Biến đổi $F(x)=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=\tan x+I(x)$.

Tính $I(x)=\int\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$:

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{-d(\cos x)}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$

Suy ra: $I(x) = \dfrac{x}{\cos x} - \int \dfrac{dx}{\cos x} = \dfrac{x}{\cos x} + J(x)$.

$$J(x) = -\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 1} = \int \frac{d(\sin x)}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{\sin x + 1}\right) d(\sin x)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C$$

Kết quả $F(x) = \tan x + \dfrac{x}{\cos x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C$. **Chọn C.**

Bài toán 4: Biết $\int \dfrac{x-3}{x^2+2x+4} dx = a\ln\left(x^2+2x+4\right) - \dfrac{4\sqrt{3}}{b}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{3}} + C$ .Tính giá trị biểu thức $a-b$

A. $a-b=5$. **B.** $a-b=-\dfrac{13}{4}$. **C.** $a-b=-\dfrac{5}{2}$. **D.** $a-b=1$.

Lời giải:

Ta có $\int \dfrac{x-3}{x^2+2x+4} dx = \int \dfrac{m(2x+2)+n}{x^2+2x+4} dx = \int \dfrac{\frac{1}{2}(2x+2)-4}{x^2+2x+4} dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} dx - 4\int \frac{dx}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x+4\right)}{x^2+2x+4} - 4\int \frac{dx}{x^2+2x+4}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right) - 4\int \frac{dx}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right) - 4J.$$

Tính $J = \int \dfrac{dx}{x^2+2x+4} = \int \dfrac{dx}{(x+1)^2+3}$

Đặt $x+1 = \sqrt{3}\tan t, \ \dfrac{-\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \dfrac{\sqrt{3}dt}{\cos^2 t} = \sqrt{3}\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

$$J = \int \frac{\sqrt{3}\left(1+\tan^2 t\right)dt}{3\left(1+\tan^2 t\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int dt = \frac{\sqrt{3}}{3} + C = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Vậy $I = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right) - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{3}} + C$, suy ra $a = \dfrac{1}{2}$ và $b = 3$.

Hay ta có $a - b = \dfrac{1}{2} - 3 = -\dfrac{5}{2}$. **Chọn C.**

2. Bài tập tự luyện

Tìm các nguyên hàm sau đây:

a) $I=\int x.(4x^2+e^{2x})dx$

b) $I=\int (x-\sin x)^2 dx.$

c) $I=\int (x^2+x.e^x)dx$

d) $I=\int (2+x^3+x.e^x)dx$

e) $I=\int (1+\ln x).xdx$

f) $I=\int x.(x^2+\sin x)dx$

g) $I=\int x.\sin x\cos 2xdx$

h) $I=\int (x+2\cos^2 x)xdx$

i) $I=\int 2x(2x^2+\ln x)dx$

j) $I=\int (e^x+\sqrt{3x^2+1})xdx$

k) $I=\int (x+\cos^2 x)\sin xdx$

l) $I=\int \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln xdx$

m) $I=\int \frac{x+2\tan^2 x}{\cos^2 x}dx$

n) $I=\int (\sin 2x-e^{x^2})xdx$

o) $I=\int (e^{x^2}+\cos 3x)xdx$

p) $I=\int \cos\sqrt{x}dx$

q) $I=\int \sin\sqrt{x}dx$

r) $I=\int \sin 2x.\ln(1+\cos x)dx$

s) $I=\int x^3.e^{x^2}dx$

t) $I=\int x^5e^{x^3}dx$

u) $I=\int (8x^3-2x)e^{x^2}dx$

v) $I=\int x\ln(x^2+1)dx$

w) $I=\int x\ln(x^2+5)dx$

x) $I=\int \frac{\ln(1+\ln^2 x)}{x}dx$

C. THỦ THUẬT CASIO TÌM NHANH NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ

Việc sử dụng Casio để tính nguyên hàm đặc biệt hữu ích đối với với những bài phức tạp, áp dụng nhiều công thức tính đạo hàm cùng một lúc , và tránh nhầm lẫn trong việc tính toán !!

I. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Nhắc lại :

- $\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$
- Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x)+C$ cũng là 1 nguyên hàm của hàm $f(x)$ vì $\left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = F'(x)+0 = F'(x) = f(x)$

Cách bước tìm nguyên hàm bằng CASIO:

Bài toán: Tìm nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$?

Bước 1: Tính giá trị $f(x)$ tại điểm x_0 thuộc TXĐ, ta được $f(x_0)$.

Bước 2: Nhập lệnh tìm đạo hàm của hàm số tại 1 điểm: SHIFT

Bước 3: Nhập lần lượt các hàm số nguyên hàm $F(x)$ mà đề bài cho, và cho giá trị đạo hàm tại x_0 ta thu được $\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)\Big|_{x=x_0}$.

So sánh các kết quả:

+ Nếu $\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)\Big|_{x=x_0} = f(x_0)$ thì hàm số $F(x)$ trên là 1 nguyên hàm của $f(x)$.

+ Nếu $\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)\Big|_{x=x_0} \neq f(x_0)$ thì hàm số $F(x)$ trên không là nguyên hàm của $f(x)$.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA ĐIỂN HÌNH

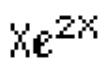
Bài toán 1: Nguyên hàm của hàm số $y = x.e^{2x}$ là :

A. $2e^{2x}(x-2)+C$ **B.** $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$ **C.** $2e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$ **D.** $\frac{1}{2}e^{2x}(x-2)+C$

Lời giải:

- Ta biết $F'(x) = f(x)$ việc này đúng với mọi x thuộc tập xác định.
- Vậy sẽ đúng với $x = 1$ chẳng hạn . Khi đó $F'(1) = f(1)$
- Tính giá trị $f(1) = 7,3890...$

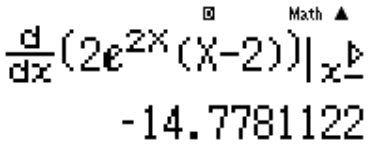
ALPHA) ALPHA ×10^x x^■ 2 ALPHA) CALC 1 =



7.389056099

- Tính đạo hàm $F'(1)$ với từng đáp án , bắt đầu từ đáp án A là $F(x) = 2e^{2x}(x-2)$

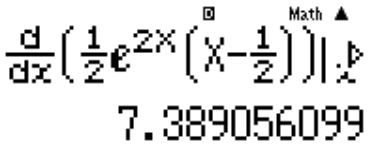
SHIFT ∫ 2 ALPHA x10^x x^□ 2 ALPHA) ▶ (ALPHA) − 2) ▶ 1 =



Vậy ta được kết quả $F'(1) = -14.7781...$ đây là 1 kết quả khác với $f(1) \Rightarrow$ Đáp án **A** sai

- Tính đạo hàm $F'(1)$ của đáp án B với $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

SHIFT ∫ ▬ 1 ▼ 2 ▶ ALPHA x10^x x^□ 2 ALPHA) ▶ (ALPHA) − ▬ 1 ▼ 2 ▶) ▶ 1 =



Ta thu được kết quả giống hệt $f(x)$ vậy $F'(x) = f(x)$ hay $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow$ Đáp án **B** là đáp án chính xác.

Bài toán 2: *[ĐỀ MINH HỌA 2017]* Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$:

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$ **B.** $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$ **D.** $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$

Lời giải:

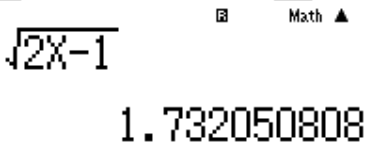
- Nhắc lại 1 lần nữa công thức quan trọng của chúng ta. Nếu $F(x)$ là 1 nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(x) = f(x)$.

  Khi đó ta chọn 1 giá trị $x = a$ bất kì thuộc tập xác định thì $F(a) = f(a)$

- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn (thỏa điều kiện $2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$)

  Khi đó $f(2) = 1,732...$

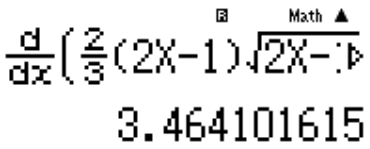
√ 2 ALPHA) − 1 CALC 2 = S⇔D



- Theo đúng quy trình ta sẽ chọn đáp án $F(x)$ ở 4 đáp án **A**, **B**, **C**, **D** nếu đáp án nào thảo mãn $F'(2) = f(2) = 1,732...$

  Thử với đáp án **A** khi đó $F(x) = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$

SHIFT ∫ ▬ 2 ▼ 3 ▶ (2 ALPHA) − 1) √ 2 ALPHA) − 1 ▶ ▶ 2 =



Vậy $F'(2)=3,4641...$ là một giá trị khác $f(2)=1,732...$ điều đó có nghĩa là điều kiện $F'(x)=f(x)$ không được đáp ứng. Vậy đáp án **A** là sai .

- Ta tiếp tục thử nghiệm với đáp án **B**. Khi này $F(x)=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$



Ta được $F'(2)=1,732...$ giống hệt $f(2)=1,732...$ có nghĩa là điều kiện $F'(x)=f(x)$ được thỏa mãn. Vậy đáp án chính xác là **B.**

Bài toán 3: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^2+3x-2}{x}$ là :

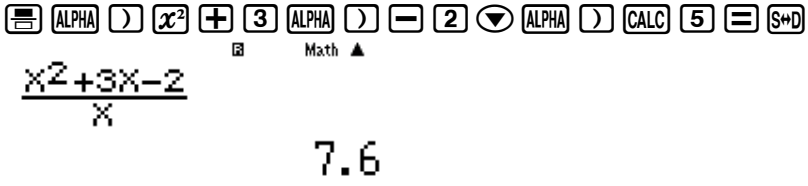
A. $2x^2+3x-2\ln x$ **B.** $\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}+\ln x$

C. $\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+1$ **D.** $\frac{x^2+x}{x^2}$

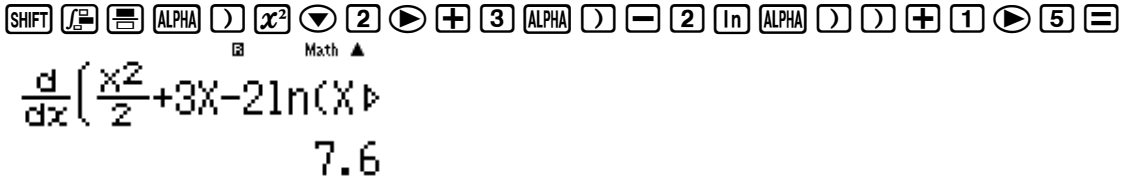
Lời giải:

- Ta chọn 1 giá trị x thuộc tập xác định $(x\neq 0)$ là $x=5$

Khi đó $f(5)=7.6$



- Với đáp án C ta có $F(x)=\frac{x^2}{2}+3x-2\ln x+1$ có



Ta được $F'(5)=7.6=f(5)$. Vậy đáp án **C** là đáp án chính xác.

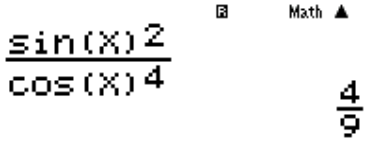
Bài toán 4: Nguyên hàm $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$ bằng :

A. $\tan^2 x+C$ **B.** $\frac{1}{3}\tan x+C$ **C.** $3\tan^3 x+C$ **D.** $\frac{1}{3}\tan^3 x+C$

Lời giải:

- Chọn chế độ Radian cho máy tính Casio rồi chọn giá trị $x=\frac{\pi}{6}$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{9}$

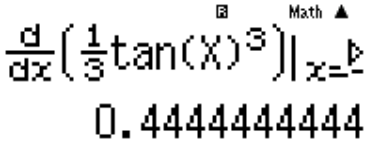
SHIFT MODE 4 ▭ sin ALPHA)) x^2 ▼ cos ALPHA)) $x^{\blacksquare}$ 4 CALC SHIFT $\times 10^x$ ÷ 6 =



$\frac{4}{9}$

- Tính đạo hàm của $F(x)=\frac{1}{3}\tan^3 x$ tại $x=\frac{\pi}{6}$ ta được $F(x)=0,44(4)=\frac{4}{9}$

SHIFT ▭ ▭ 1 ▼ 3 ▶ tan ALPHA)) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ ▶ ▭ SHIFT $\times 10^x$ ▼ 6 =



- Vậy $F'(x)=f(x)=\frac{4}{9}\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác.

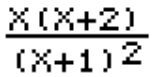
Bài toán 5: Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$:

A. $\frac{x^2+x-1}{x+1}$ **B.** $\frac{x^2-x-1}{x+1}$ **C.** $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ **D.** $\frac{x^2}{x+1}$

Lời giải:

- Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ và $f(2)=\frac{8}{9}$

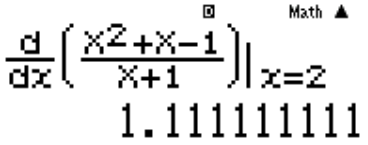
▭ ALPHA) (ALPHA) + 2) ▼ (ALPHA) + 1) x^2 CALC 2 =



$\frac{8}{9}$

- Tính đạo hàm của $F(x)=\frac{x^2+x-1}{x+1}$ tại 2 ta được $F'(2)=1.11(1)=\frac{10}{9}$

SHIFT ▭ ▭ ALPHA) x^2 + ALPHA) − 1 ▼ ALPHA) + 1 ▶ ▶ 2 =



- Vậy $F'(x)\neq f(x)$

$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2+x-1}{x+1}$ không phải là nguyên hàm của $f(x)$

$\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác.

Bài toán 6: Tìm nguyên hàm của hàm số $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)dc$

A. $\frac{x^3}{3}-3\ln|x|+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$ **B.** $\frac{x^3}{3}+3\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$

C. $\frac{x^3}{3}+3\ln|x|+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$ **D.** $\frac{x^3}{3}-3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$

Lời giải:

- Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}$ và $f(2)=\frac{11-4\sqrt{2}}{2}$

ALPHA) x^2 + (3 ▼ ALPHA) ▶ − 2 √ ALPHA) CALC 2 =

Math ▲

$X^2+\frac{3}{X}-2\sqrt{X}$

$\frac{11-4\sqrt{2}}{2}$

- Tính đạo hàm của $F(x)=\frac{x^3}{3}+3\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ tại 2 ta được $F'(2)=2.6715...=\frac{11-4\sqrt{2}}{2}$

SHIFT ∫ (ALPHA) x^n 3 ▼ 3 ▶ + 3 ln ALPHA)) − (4 ▼ 3 ▶ √ ALPHA) x^n 3 ▶ ▶ ▶ 2 =

Math ▲

$\frac{d}{dx}\left(\frac{X^3}{3}+3\ln(X)-\frac{4}{3}\sqrt{X^3}\right)|_{X=2}$

2.671572875

- Vậy $F'(x)=f(x)=\frac{11-4\sqrt{2}}{2}\Rightarrow F(x)=\frac{x^3}{3}+3\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ là nguyên hàm của $f(x)$

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác.

Bài toán 7: $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ bằng :

A. $2(\ln x)^{\frac{1}{2}}+C$ **B.** $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C$ **C.** $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}+C$ **D.** $\frac{3}{2}\sqrt{(\ln x)^3}+C$

Lời giải:

- Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ và $f(2)=0.4162...$

(√ ln ALPHA)) ▼ ALPHA) CALC 2 =

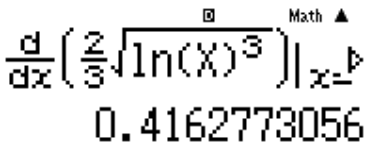
Math ▲

$\frac{\sqrt{\ln(X)}}{X}$

0.4162773056

- Tính đạo hàm của $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}$ tại 2 ta được $F'(2)=0.4612...$

SHIFT ∫ (2 ▼ 3 ▶ √ ln ALPHA)) x^n 3 ▶ ▶ ▶ 2 =



- Vậy $F'(x)=f(x)=0.4162...\Rightarrow F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}$ là nguyên hàm của $f(x)$

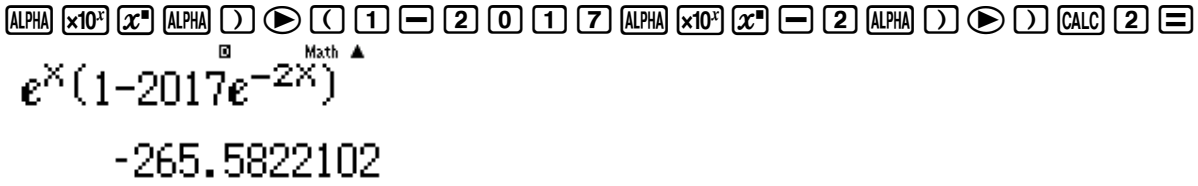
  $\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác.

Bài toán 8: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(1-2017e^{-2x}\right)$ là :

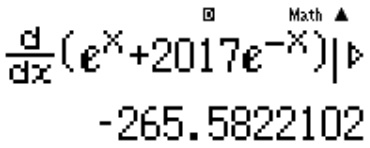
A. $e^x+2017e^{-x}+C$ **B.** $e^x-2017e^{-x}+C$ **C.** $e^x+\frac{2017}{2}e^{-x}+C$ **D.** $e^x-\frac{2017}{2}e^x+C$

Lời giải:

- Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=e^x\left(1-2017e^{-2x}\right)$ và $f(2)=-265.5822...$



- Tính đạo hàm của $F(x)=e^x+2017e^{-x}$ tại 2 ta được $F'(2)=-265.5822...$



- Vậy $F'(x)=f(x)=-265.5822...\Rightarrow F(x)=e^x+2017e^{-x}$ là nguyên hàm của $f(x)$

  $\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác.

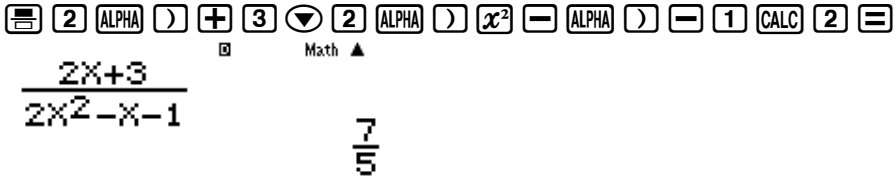
Bài toán 9: Họ nguyên hàm của $\int\frac{2x+3}{2x^2-x-1}dx$:

A. $\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$ **B.** $-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$

C. $\frac{2}{3}\ln|2x+1|-\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$ **D.** $-\frac{1}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|+C$

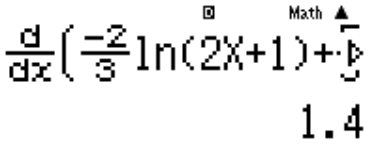
Lời giải:

- Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x)=\frac{2x+3}{2x^2-x-1}$ và $f(2)=\frac{7}{5}$



- Tính đạo hàm của $F(x)=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|$ tại 2 ta được $F'(2)=1.4=\frac{7}{5}$

SHIFT ∫ ▬ − 2 ▼ 3 ▶ ln 2 ALPHA) + 1) + ▬ 5 ▼ 3 ▶ ln ALPHA) − 1) ▶ 2 =



- Vậy $F'(x)=f(x)=\frac{7}{5}\Rightarrow F(x)=-\frac{2}{3}\ln|2x+1|+\frac{5}{3}\ln|x-1|$ là nguyên hàm của $f(x)$

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. ĐỀ BÀI

Câu 1. Giả sử hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khẳng định nào sau đây **đúng**.

A. Chỉ có duy nhất một hằng số C sao cho hàm số $y=F(x)+C$ là một nguyên hàm của hàm f trên K.

B. Với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với x thuộc K.

C. Chỉ có duy nhất hàm số $y=F(x)$ là nguyên hàm của f trên K.

D. Với mỗi nguyên hàm G của f trên K thì $G(x)=F(x)+C$ với mọi x thuộc K và C bất kỳ.

Câu 2. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai.**

A. $\int f(x)dx=F(x)+C$. **B.** $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$. **C.** $\left(\int f(x)dx\right)'=f'(x)$. **D.** $\left(\int f(x)dx\right)'=F'(x)$.

Câu 3. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai.**

A. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,(k\in\mathbb{R})$.

B. $\int f(x).g(x)dx=\int f(x)dx.\int g(x)dx$.

C. $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

D. $\int\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$.

Câu 4. Cho hai hàm số $f(x),g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x),G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x),g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). $F(x)+G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+g(x)$.

(II). $k.F(x)$ là một nguyên hàm của $kf(x)$ với $k\in\mathbb{R}$.

(III). $F(x).G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x).g(x)$.

Các mệnh **đúng** là

A. (I). **B.** (I) và (II). **C.** Cả 3 mệnh đề. **D.** (II).

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**.

A. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

B. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)-G(x)=C$ là hằng số.

C. $F(x)=\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của $f(x)=2\sqrt{x}$.

D. $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của $f(x)=2x$.

Câu 6. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **đúng.**

A. $\int\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)^2dx=\left(\int\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)dx\right)^2$.

B. $\int\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)^2dx=2\int\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)dx$.

C. $\int\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)^2 dx=\int\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)dx.\int\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)dx$.

D. $\int\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)^2 dx=4\int x^2dx+\int dx+\int\frac{1}{x^2}dx-4\int xdx-\int\frac{2}{x}dx+4\int dx$

Câu 7. Cho $\int f(x)dx=F(x)+C$. Khi đó với $a\neq 0$, ta có $\int f(ax+b)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2a}F(ax+b)+C$. **B.** $F(ax+b)+C$. **C.** $\frac{1}{a}F(ax+b)+C$. **D.** $a.F(ax+b)+C$.

Câu 8. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**.

A. $F(x)=2017+\cos^2 x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=-\sin 2x$.

B. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $\int\left[F(x)-g(x)\right]dx$ có dạng $h(x)=Cx+D$ với C,D là các hằng số, $C\neq 0$.

C. $\int\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}dx=\sqrt{u(x)}+C$.

D. Nếu $\int f(t)dt=F(t)+C$ thì $\int f[u(x)]dx=F[u(x)]+C$.

Câu 9. *(Đại Học Vinh lần 3)* Khẳng định nào sau đây là **đúng**.

A. $\int\tan xdx=-\ln\left|\cos x\right|+C$. **B.** $\int\sin\frac{x}{2}dx=2\cos\frac{x}{2}+C$.

C. $\int\cot xdx=-\ln\left|\sin x\right|+C$. **D.** $\int\cos\frac{x}{2}dx=-2\sin\frac{x}{2}+C$.

Câu 10. *(Chuyên Hưng Yên lần 3)* Nếu $\int f\left(x\right)dx=\frac{1}{x}+\ln\left|2x\right|+C$ thì hàm số $f\left(x\right)$ là

A. $f\left(x\right)=\sqrt{x}+\frac{1}{2x}$. **B.** $f\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$.

C. $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}+\ln\left(2x\right)$. **D.** $f\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x}$.

Câu 11. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**.

A. $\int x^e dx=\frac{x^{e+1}}{e+1}+C$. **B.** $\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

C. $\int e^x dx=\frac{e^{x+1}}{x+1}+C$. **D.** $\int\frac{1}{x}dx=\ln\left|x\right|+C$.

Câu 12. *(TPHCM cụm 1)* Biết một nguyên hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $F\left(x\right)=x^2+4x+1$. Khi đó, giá trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ tại $x=3$ là

A. $f\left(3\right)=6$. **B.** $f\left(3\right)=10$. **C.** $f\left(3\right)=22$. **D.** $f\left(3\right)=30$.

Câu 13. *(Quảng Xương- Thanh Hóa lần 1)*Tìm một nguyên hàm $F\left(x\right)$của hàm số $f\left(x\right)=ax+\frac{b}{x^2}\left(x\neq 0\right)$, biết rằng $F\left(-1\right)=1$, $F\left(1\right)=4$, $f\left(1\right)=0$

A. $F\left(x\right)=\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{2x}+\frac{7}{4}$. **B.** $F\left(x\right)=\frac{3x^2}{4}-\frac{3}{2x}-\frac{7}{4}$.

C. $F(x)=\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{4x}-\frac{7}{4}$. **D.** $F(x)=\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{2x}-\frac{1}{2}$.

Câu 14. Xét các mệnh đề sau, với C là hằng số:

(I) $\int \tan x\,dx=-\ln(\cos x)+C$.

(II) $\int e^{3\cos x}\sin x\,dx=-\frac{1}{3}e^{3\cos x}+C$.

(III) $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}dx=2\sqrt{\sin x-\cos x}+C$.

Số mệnh đề đúng là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 15. Cặp hàm số nào sau đây có tính chất: Có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại?

A. $f(x)=\sin 2x$ và $g(x)=\cos^2 x$. **B.** $f(x)=\tan^2 x$ và $g(x)=\frac{1}{\cos^2 x^2}$.

C. $f(x)=e^x$ và $g(x)=e^{-x}$. **D.** $f(x)=\sin 2x$ và $g(x)=\sin^2 x$.

Câu 16. Hàm số nào sau đây **không phải** là nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-3)^4$?

A. $F(x)=\frac{(x-3)^5}{5}+x$. **B.** $F(x)=\frac{(x-3)^5}{5}$.

C. $F(x)=\frac{(x-3)^5}{5}+2017$. **D.** $F(x)=\frac{(x-3)^5}{5}-1$

Câu 17. *(THPT Nguyễn Thị Minh Khai Hà Nội lần 1)* Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-1)^2$

A. $F(x)=x^3+3x^2+3x+C$. **B.** $F(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+x+C$.

C. $F(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+x+C$. **D.** $F(x)=x^3+x^2+x+C$.

Câu 18. *(Sở GDĐT Hải Phòng)* Tìm nguyên hàm của hàm số $y=2^x$?

A. $\int 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$. **B.** $\int 2^x dx=2^x+C$. **C.** $\int 2^x dx=\ln 2.2^x+C$. **D.** $\int 2^x dx=\frac{2^x}{x+1}+C$.

Câu 19. *(Sở GDĐT Hải Phòng)* Tìm hàm số $F(x)$, biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ và $F(1)=1$.

A. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{3}$. **B.** $F(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}$. **C.** $F(x)=x\sqrt{x}$. **D.** $F(x)=\frac{3}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}$.

Câu 20. *(Chuyên Hưng yên lần 3)* Nếu $\int f(x)dx=\frac{1}{x}+\ln|2x|+C$ thì hàm số f(x) là:

A. $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2x}$. **B.** $f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$.

C. $f(x)=\frac{1}{x^2}+\ln(2x)$. **D.** $f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x}$.

Câu 21. *(THPT Nguyễn Thị Minh Khai Hà Nội lần 1)* Cho hàm số $f(x)=\frac{4m}{\pi}+\sin^2 x$. Giá trị của tham số để nguyên hàm F(x) của hàm số f(x) thỏa mãn điều kiện $F(0)=1$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$ là

A. $m=-\frac{4}{3}$. **B.** $m=\frac{3}{4}$. **C.** $m=-\frac{3}{4}$. **D.** $m=\frac{4}{3}$.

Câu 22. *(Sở Bình Thuận)* Cho hàm số $f(x)=\cos x$. Tìm nguyên hàm của hàm số $y=\left(f'(x)\right)^2$.

A. $\int y\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **B.** $\int y\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

C. $\int y\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **D.** $\int y\mathrm{d}x=x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Câu 23. *(KHTN lần 5)* Nguyên hàm $\int\frac{\sin 4x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{2}}{3}\cos\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$.

C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$.

Câu 24. Nguyên hàm $\int\frac{dx}{2\tan x+1}$ bằng?

A. $\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\ln\left|2\sin+\cos x\right|+C$. **B.** $\frac{2x}{5}-\frac{1}{5}\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+C$.

C. $\frac{x}{5}-\frac{1}{5}\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+C$. **D.** $\frac{x}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|2\sin x+\cos x\right|+C$.

Câu 25. *(Thi thử chuyên KHTN –HN lần 4 năm 2017)* Tìm nguyên hàm $\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x$.

A. $\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{1-2x}\right|+C$. **B.** $\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|1-2x\right|+C$.

C. $\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x=\ln\left|1-2x\right|+C$. **D.** $\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{1}{1-2x}\right|+C$.

Câu 26. *(Thi thử chuyên LÊ KHIẾT –QUẢNG NGÃI năm 2017)* Tính $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)dx$ ta được kết quả là

A. $\frac{x^3}{3}-3\ln\left|x\right|+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$. **B.** $\frac{x^3}{3}+3\ln\left|x\right|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

C. $\frac{x^3}{3}-3\ln\left|x\right|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$. **D.** $\frac{x^3}{3}+3\ln\left|x\right|+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Câu 27. *(Đề thử nghiệm BGD và ĐT cho 50 trường)* Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 2-1$. **B.** $F(3)=\ln 2+1$. **C.** $F(3)=\frac{1}{2}$. **D.** $F(3)=\frac{7}{4}$.

Câu 28. *(THI HỌC KỲ I LỚP 12 CHUYÊN HẠ LONG)* Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x^4+1}$.

A. $\int f(x)dx=\dfrac{3x^4}{2x^4+6}+C.$ **B.** $\int f(x)dx=\ln(x^4+1)+C.$

C. $\int f(x)dx=x^3\ln(x^4+1)+C.$ **D.** $\int f(x)dx=\dfrac{1}{4}\ln(x^4+1)+C.$

Câu 29. *(PT DÂN TỘC NỘI TRÚ TỈNH BÌNH ĐỊNH)* Kết quả của $\int\dfrac{dx}{2-3x}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{(2-3x)^2}+C.$ **B.** $-\dfrac{3}{(2-3x)^2}+C.$ **C.** $\dfrac{1}{3}\ln|2-3x|+C.$ **D.** $-\dfrac{1}{3}\ln|3x-2|+C.$

Câu 30. Nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{x^3+x+1}{x}$ là:

A. $\dfrac{x^3}{3}+x+\ln x+C.$ **B.** $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+\ln x+C.$ **C.** $x^3+x+\ln x+C.$ **D.** $\dfrac{x^3}{3}+x+\ln|x|+C.$

Câu 31. Một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$ là :

A. $\dfrac{x^2}{2}+3x-6\ln|x+1|.$ **B.** $\dfrac{x^2}{2}+3x+6\ln|x+1|.$ **C.** $\dfrac{x^2}{2}-3x-6\ln|x+1|.$ **D.** $\dfrac{x^2}{2}-3x+6\ln|x+1|.$

Câu 32. Một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1}$ là:

A. $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-e^x+x.$ **B.** $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+e^x.$

C. $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-e^x.$ **D.** $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-e^x+1.$

Câu 33. *(Sở GD và ĐT Quảng Ninh năm 2017)* Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2}$, biết $F(1)=0$.

A. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}.$ **B.** $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{2}.$ **C.** $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}.$ **D.** $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2}.$

Câu 34. *(Chuyên Vĩnh Phúc – lần 3)* Nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{1}{(3x+1)^2}$ là:

A. $\dfrac{-3}{1+3x}+C.$ **B.** $\dfrac{-1}{3x+1}+C.$ **C.** $\dfrac{1}{9x+3}+C.$ **D.** $\dfrac{-1}{9x+3}+C.$

Câu 35. *(Thi thử chuyên KHTN –HN lần 4 năm 2017)* Tìm nguyên hàm $\int\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}dx$.

A. $\int\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}dx=2\ln|x+2|-\ln|x+1|+C.$ **B.** $\int\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}dx=2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C.$

C. $\int\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}dx=2\ln|x+1|+\ln|x+2|+C.$ **D.** $\int\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}dx=\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C.$

Câu 36. *(Chuyên Biên Hòa- Hà Nam lần 2)* Hàm số nào dưới đây **không** là 1 nguyên hàm của hàm

số $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

A. $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. **B.** $\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$. **C.** $\dfrac{x^2}{x+1}$. **D.** $\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

Câu 37. *(Sở GD và ĐT Bình Thuận – HK2)* Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4x+5}$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. $\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|+C$. **B.** $\int f(x)dx=\ln\left(\dfrac{1}{2}\left|x^2+4x+5\right|\right)+C$.

C. $\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-C$. **D.** $\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+5\right)+C$.

Câu 38. *(THPT Thanh Oai B- lần 1)* Tìm $\mathrm{F}(x)=\int\dfrac{dx}{x^2-x-2}$?

A. $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+C$. **B.** $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C$.

C. $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|+C$. **D.** $\mathrm{F}(x)=\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+C$.

Câu 39. *(THPT Phả Lại – Hải Dương –lần 2)* Kết quả $\int\dfrac{5x+7}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$ bằng:

A. $2\ln|x+2|+3\ln|x+1|+C$. **B.** $3\ln|x+2|+2\ln|x+1|+C$.

C. $2\ln|x+1|-3\ln|x+2|+C$. **D.** $3\ln|x+2|-2\ln|x+1|+C$.

Câu 40. *(Chuyên Lê Thánh Tông – Quảng Nam)* Biết $\int\dfrac{x+1}{(x-1)(2-x)}dx=a\ln|x-1|+b\ln|x-2|+C$.

Tính giá trị biểu thức $a-b$

A. $a-b=5$. **B.** $a-b=1$. **C.** $a-b=-5$. **D.** $a-b=1$.

Câu 41. Khi tìm nguyên hàm $\int x\sqrt{x^2+1}dx$ bằng cách đổi biến $u=\sqrt{x^2+1}$, bạn An đưa ra các khẳng định sau:

+ Khẳng định 1: $du=dx$

+ Khẳng định 2: $\int x\sqrt{x^2+1}dx=\int u^2du$

+ Khẳng định 3: $\int x\sqrt{x^2+1}dx=\dfrac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{6}+C$

Hỏi có tất cả bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

Câu 42. Thầy giáo cho bài toán " Tìm $\int\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ ". Bạn An giải bằng phương pháp đổi biến như sau:

+ Bước 1: Đặt $u=\sin x$, ta có $du=\cos xdx$

+ Bước 2: $\int\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\int\dfrac{du}{u^2}=-\dfrac{1}{u}+C$

+ Bước 3: Kết luận $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{x} + C$

Hỏi bạn An sai ở bước nào?

A. Bước 1 **B.** Bước 2 **C.** Bước 3 **D.** Không sai.

Câu 43. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

A. $\int f(x)dx = \ln(x^2+1) + C$ **B.** $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

C. $\int f(x)dx = \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C$ **D.** $\int f(x)dx = \ln x + \frac{x^2}{2} + C$

Câu 44. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x + 3}}{x}$

A. $\int f(x)dx = \sqrt{\ln x + 3} + C$. **B.** $\int f(x)dx = \sqrt{(\ln x + 3)^3} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sqrt{(\ln x + 3)^3} + C$. **D.** $\int f(x)dx = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x + 3)^3} + C$.

Câu 45. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\cos x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Tính $F(0)$

A. $F(0) = 2\ln 2 - 2$. **B.** $F(0) = 2\ln 2$ **C.** $F(0) = \ln 2$. **D.** $F(0) = 2\ln 2 + 2$.

Câu 46. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1+\tan x}$ thỏa mãn $F(0) = \frac{\pi}{4}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Câu 47. Cho $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4} = a\sqrt{2x-1} + b\ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right) + C$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $M = a + b$.

A. $M = 3$ **B.** $M = -3$ **C.** $M = 0$ **D.** $M = 2$.

Câu 48. Cho $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x + 2)^3}dx = -\frac{(\sin x + \cos x + 1)^m}{(\sin x + \cos x + 2)^n} + C$ với $m, n \in \mathbb{N}$. Tính $A = m + n$.

A. $A = 5$. **B.** $A = 2$ **C.** $A = 3$. **D.** $A = 4$.

Câu 49. Để tính $\int \sin^4 x.\cos x dx$ thì nên:

A. Dùng phương pháp đổi biến số đặt $t = \cos x$.

B. Dùng phương pháp nguyên hàm từng phần đặt $\begin{cases} u = \sin^4 x \\ dv = \cos x dx \end{cases}$.

C. Dùng phương pháp đổi biến số đặt $t = \sin x$.

D. Dùng phương pháp nguyên hàm từng phần đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = \sin^4 x dx \end{cases}$.

Câu 50. Tính $I = \int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ bằng cách đặt $u = x^2 + 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=2\int\sqrt{u}du$. **B.** $I=\int udu$. **C.** $I=\int\sqrt{u}du$. **D.** $I=\frac{1}{2}\int udu$.

Câu 51. Kết quả của $I=\int x\left(x^2+7\right)^{15}dx$ là

A. $\frac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16}+C$. **B.** $\frac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16}$. **C.** $\frac{1}{16}\left(x^2+7\right)^{16}$. **D.** $\frac{1}{2}\left(x^2+7\right)^{16}+C$.

Câu 52. Tìm các hàm số $f\left(x\right)$ biết rằng $f'\left(x\right)=\frac{\cos x}{\left(2+\sin x\right)^2}$

A. $f\left(x\right)=\frac{\sin x}{\left(2+\cos x\right)^2}+C$. **B.** $f\left(x\right)=\frac{\sin x}{2+\sin x}+C$.

C. $f\left(x\right)=-\frac{1}{2+\sin x}+C$. **D.** $f\left(x\right)=\frac{1}{2+\cos x}+C$.

Câu 53. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$?

A. $F\left(x\right)=e^x+\ln\left(e^x+1\right)+C$. **B.** $F\left(x\right)=e^x+1-\ln\left(e^x+1\right)+C$.

C. $F\left(x\right)=e^x-\ln\left|x\right|+C$. **D.** $F\left(x\right)=e^x+\ln\left|x\right|+C$.

Câu 54. Cho $\int f\left(x\right)dx=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}+C$. Khi đó: $\int f\left(2x\right)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}+C$. **C.** $\frac{8}{\sqrt{4x^2+1}}+C$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

Câu 55. $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ và $F\left(e^2\right)=4$. Tính $F\left(e\right)$?

A. $F\left(e\right)=\frac{1}{2}$. **B.** $F\left(e\right)=\frac{5}{2}$ **C.** $F\left(e\right)=-\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}+e$

Câu 56. *(Quốc Học Huế)* Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{e^x+1}$ thỏa mãn $F\left(0\right)=-\ln 2$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $F\left(x\right)+\ln\left(e^x+1\right)=3$

A. $S=\left\{\pm 3\right\}$. **B.** $S=\left\{3\right\}$. **C.** $S=\varnothing$ **D.** $S=\left\{-3\right\}$

Câu 57. Nếu một nguyên hàm của hàm số y = f(x) là F(x) thì $\int f\left(\text{ax}+\text{b}\right)\text{dx}$ bằng

A. $\frac{1}{a}F\left(\text{ax}+\text{b}\right)+C$ **B.** $\frac{1}{a}F\left(\text{ax}+\text{b}\right)$ **C.** $F\left(\text{ax}+\text{b}\right)+C$ **D.** $-\frac{1}{a}F\left(\text{ax}+\text{b}\right)+C$.

Câu 58. *(Sở Phú Yên- Lần 2- 16-17):* Biết $\int f\left(u\right)du=F\left(u\right)+C$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. $\int f\left(2x-3\right)dx=F\left(2x-3\right)+C.$ **B.** $\int f\left(2x-3\right)dx=\frac{1}{2}F\left(2x-3\right)+C.$

C. $\int f\left(2x-3\right)dx=2F\left(x\right)-3+C.$ **D.** $\int f\left(2x-3\right)dx=2F\left(2x-3\right)-3+C.$

Câu 59. Tính tích phân $I=\int 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=2\int\sqrt{u}du$ **B.** $I=\int\sqrt{u}du$ **C.** $I=\int\sqrt{u}du$ **D.** $I=\frac{1}{2}\int\sqrt{u}du$

Câu 60. Nguyên hàm của hàm số $y=-e^{\cos x}\sin x$ là:

A. $y=e^{\cos x}$. **B.** $y=-e^{\sin x}$. **C.** $y=e^{\sin x}$. **D.** $y=-e^{\cos x}$.

Câu 61. Nguyên hàm $\int\frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}}dx$ bằng

A. $\frac{1}{11}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}+C$. **B.** $-\frac{1}{11}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}+C$. **C.** $\frac{1}{33}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}+C$. **D.** $\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}+C$.

Câu 62. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$?

A. $F(x)=e^x+\ln(e^x+1)+C$. **B.** $F(x)=e^x+1-\ln(e^x+1)+C$.

C. $F(x)=e^x-\ln|x|+C$. **D.** $F(x)=e^x+\ln|x|+C$.

Câu 63. Nguyên hàm $\int\frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}}dx$ bằng

A. $\frac{1}{11}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}+C$. **B.** $-\frac{1}{11}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}+C$. **C.** $\frac{1}{33}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}+C$. **D.** $\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}+C$.

Câu 64. Cho Nguyên hàm $I=\int\frac{\sin 2xdx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$. Nếu đặt $t=\cos 2x$ thì mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $I=\int\frac{-dt}{2t^2+1}$. **B.** $I=\int\frac{dt}{2t^2+1}$. **C.** $I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}$. **D.** $I=\int\frac{2dt}{t^2+1}$.

Câu 65. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ là

A. $e^{2x}+C$. **B.** $2e^{2x}+C$. **C.** $\frac{e^{2x}}{2}+C$. **D.** $\frac{1}{e^{2x}}+C$.

Câu 66. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 2x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sin 2x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-2\sin 2x+C$.

Câu 67. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3-2x)^5$

A. $\frac{1}{12}(3-2\mathrm{x})^6+C$ **B.** $-\frac{1}{12}(3-2\mathrm{x})^6+C$ **C.** $-\frac{1}{12}(3-2\mathrm{x})^4+C$ **D.** $\frac{1}{12}(3-2\mathrm{x})^4+C$

Câu 68. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)dx=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$ **B.** $\int f(x)dx=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C$ **D.** $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$

Câu 69. Biết nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $\int x.e^{x^2+1}dx$ và $F(0)=\frac{3}{2}\mathrm{e}$. Tính $F(1)$

A. $\mathrm{F}(1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2+\mathrm{e}$. **B.** $F(1)=-\frac{1}{2}e^2+e$. **C.** $F(1)=e^2+e$. **D.** $F(1)=e^2+3e$.

Câu 70. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{\mathrm{dx}}{x\sqrt{1-\ln x}}$ và $F(1)=0$. Tính $F(e)$.

A. $F(e)=2$. **B.** $F(e)=-2$. **C.** $F(e)=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $F(e)=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 71. Một ô tô đang chạy với tốc độ $10m/s$ thì người lái đạp phanh ; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với $v(t)=-5t+10\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét ?

A. $0,2m$ **B.** $2m$ **C.** $10m$ **D.** $20m$

Câu 72. Một chiếc ô tô đang đi trên đường với vận tốc $v(t)=2\sqrt{t}\,(0\le t\le 30)(m/s)$. Giả sử tại thời điểm t=0 thì s=0. Phương trình thể hiện quãng đường theo thời gian ô tô đi được là

A. $s=\dfrac{4}{3}\sqrt{t^3}\,(m)$ **B.** $s=2\sqrt{t}\,(m)$ **C.** $s=\dfrac{4}{3}t^3\,(m)$ **D.** $2t\,(m)$

Câu 73. *(TIÊN LÃNG LẦN 2)* Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $\int f(x)dx=\dfrac{1}{6}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+C$. **B.** $\int f(x).dx=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+C$.

C. $\int f(x)dx=-\dfrac{1}{3}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+C$. **D.** $\int f(x)dx=\dfrac{1}{3}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+C$.

Câu 74. *(HƯNG YÊN LẦN 1)* Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{dx}=\dfrac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}$. **B.** $\int f(x)\mathrm{dx}=-\dfrac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{dx}=\dfrac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{dx}=\dfrac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}+C$.

Câu 75. *(HẢI HẬU LẦN 2)* Kết quả tính $\int 2x\sqrt{5-4x^2}dx$ bằng

A. $-\dfrac{1}{12}\sqrt{\left(5-4x^2\right)^3}+C$. **B.** $-\dfrac{3}{8}\sqrt{\left(5-4x^2\right)}+C$

C. $\dfrac{1}{6}\sqrt{\left(5-4x^2\right)^3}+C$. **D.** $-\dfrac{1}{6}\sqrt{\left(5-4x^2\right)^3}+C$

Câu 76. *(LỤC NGẠN LẦN 2)* Hàm số $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^5 x}$ có một nguyên hàm $F(x)$ bằng

A. $\dfrac{1}{4\sin^4 x}$. **B.** $-\dfrac{1}{4\sin^4 x}$. **C.** $\dfrac{4}{\sin^4 x}$. **D.** $\dfrac{-4}{\sin^4 x}$.

Câu 77. *(SỞ BÌNH PHƯỚC)* Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$ thì $F(3)$ bằng

A. $\ln 2$. **B.** $\ln\dfrac{3}{2}$. **C.** $\ln 2+1$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 78. *(SỞ NINH BÌNH)* Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\ln^2 x+1}.\dfrac{\ln x}{x}$ thoả

mãn $F(1)=\frac{1}{3}$. Giá trị của $F^2(e)$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{8}{9}$.

Câu 79. *(QUỐC HỌC HUẾ LẦN 2)* Hàm số $f(x)=x\sqrt{x+1}$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Nếu $F(0)=2$ thì $F(3)$bằng

A. $\frac{146}{15}$. **B.** $\frac{116}{15}$. **C.** $\frac{886}{105}$. **D.** $\frac{105}{886}$.

Câu 80. *(CHUYÊN HÀ NAM LẦN 3)* Biết hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+3}}$ có đồ thị đi qua điểm $(e;2016)$. Khi đó $F(1)$ là

A. $\sqrt{3}+2014$. **B.** $\sqrt{3}+2016$. **C.** $2\sqrt{3}+2014$. **D.** $2\sqrt{3}+2016$.

Câu 81. Cho $I=\int(2x+3)e^x dx$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $I=(2x+3)e^x+C$. **B.** $I=(2x+1)e^x+C$. **C.** $I=(2x-1)e^x+C$. **D.** $I=(2x+1)e^x$.

Câu 82. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $y=\frac{\ln 2x}{x^2}$?

A. $F(x)=-\frac{1}{x}(\ln 2x-1)$ **B.** $F(x)=\frac{1}{x}(\ln 2x+1)$

C. $F(x)=-\frac{1}{x}(\ln 2x+1)$. **D.** $F(x)=-\frac{1}{x}(1-\ln 2x)$

Câu 83. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $y=x\sin 2x$?

A. $F(x)=\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x$ **B.** $F(x)=-\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$

C. $F(x)=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x$ **D.** $F(x)=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$

Câu 84. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=x\sin 2x$ và thỏa $F(0)+F(\pi)=\frac{-\pi}{2}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$

A. $\frac{\pi}{4}$ **B.** $-\frac{\pi}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $-\frac{1}{4}$

Câu 85. *(Chu Văn AN – HN)* Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn hệ thức $\int f(x)\sin x\,dx=-f(x)\cos x+\int \pi^x cosx\,dx$. Hỏi $y=f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(x)=-\frac{\pi^x}{\ln\pi}$. **B.** $f(x)=\frac{\pi^x}{\ln\pi}$

C. $f(x)=\pi^x.\ln\pi$ **D.** $f(x)=-\pi^x.\ln\pi$

Câu 86. Biết rằng $I=\int e^{2x}cos3x\text{dx}=e^{2x}(a\cos 3x+b\sin 2x)+c$, trong đó a, b , c là các hằng số. Khi đó, tổng $a+b$ có giá trị là:

A. $-\frac{1}{13}$. **B.** $-\frac{5}{13}$. **C.** $\frac{5}{13}$ **D.** $\frac{1}{13}$

Câu 87. Cho $F(x)=\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$, biết $F(0)=2$. Tìm $F(x)$.

A. $\frac{x}{(1+x)^2}+xe^x+2$ **B.** $\frac{xe^x}{1+x}+(x+1)e^x+1$ **C.** $\frac{e^x}{1+x}+1$ **D.** $\frac{2e^x}{1+x}$

Câu 88. Một nguyên hàm của hàm số: $f(x)=x\sin\sqrt{1+x^2}$ là:

A. $F(x)=-\sqrt{1+x^2}\cos\sqrt{1+x^2}+\sin\sqrt{1+x^2}$. **B.** $F(x)=-\sqrt{1+x^2}\cos\sqrt{1+x^2}-\sin\sqrt{1+x^2}$.

C. $F(x)=\sqrt{1+x^2}\cos\sqrt{1+x^2}+\sin\sqrt{1+x^2}$. **D.** $F(x)=\sqrt{1+x^2}\cos\sqrt{1+x^2}-\sin\sqrt{1+x^2}$.

Câu 89. Cho là hai hàm số u,v có đạo hàm liên tục trên K. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\int u(x)v'(x)dx=u(x).v(x)-\int v(x)dx$ **B.** $\int u(x)v'(x)dx=u(x).v(x)-\int v(x)u'(x)dx$

C. $\int u(x)v'(x)dx=u(x).v(x)-\int v(x)u(x)dx$ **D.** $\int u(x)v'(x)dx=u(x).v(x)-\int u(x)dx$

Câu 90. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos x$.

A. $\int f(x)dx=x\sin x-\cos x+C$ **B.** $\int f(x)dx=-x\sin x-\cos x+C$

C. $\int f(x)dx=-x\sin x+\cos x+C$ **D.** $\int f(x)dx=x\sin x+\cos x+C$

Câu 91. Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=xe^x$ là:

A. $F(x)=\frac{x^2}{2}e^x+1$ **B.** $F(x)=(x+1)e^x$ **C.** $F(x)=xe^x-e^x+2$ **D.** $F(x)=x+e^x-1$

Câu 92. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int x^2\ln xdx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$ **B.** $\int x^2\ln xdx=\frac{x^3}{3}\ln x+\frac{x^3}{9}+C$

C. $\int x^2\ln xdx=\frac{x^2}{3}+C$ **D.** $\int x^2\ln xdx=\frac{x^3}{3}\ln x+\frac{x^4}{12}\ln x+C$

Câu 93. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=(4x+1)e^x$ thỏa mãn điều kiện $F(1)=e$.

A. $F(x)=(4x-3)e^x$ **B.** $F(x)=(4x+5)e^x-9e$

C. $F(x)=(4x-3)e^x-e$ **D.** $F(x)=(4x+5)e^x$

Câu 94. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos 3x$ thỏa mãn điều kiện $F(0)=1$. Tính $F(\frac{\pi}{3})$.

A. $F(\frac{\pi}{3})=1$. **B.** $F(\frac{\pi}{3})=-1$. **C.** $F(\frac{\pi}{3})=\frac{7}{9}$. **D.** $F(\frac{\pi}{3})=-\frac{7}{9}$.

Câu 95. Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-3)^2e^x$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=12$. **B.** $S=0$. **C.** $S=10$. **D.** $S=14$.

Câu 96. Cho $F(x)=\frac{a}{x}(\ln x+b)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}$ Tính $S=a+b$.

A. $S=0$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=1$.

Câu 97. Nếu $u(x),v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì:

A. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$ **B.** $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$

C. $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v'(x) - \int u(x)v(x)dx$ **D.** $\int u(x)v'(x)dx = u'(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

Câu 98. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = xe^x$

A. $f(x) = xe^x + C$ **B.** $f(x) = \frac{x^2}{2}e^x + C$

C. $f(x) = e^x(x-1) + C$ **D.** $f(x) = e^x(x+1) + C$

Câu 99. Cho hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = x\sin x$ và $f(\pi) = 0$. Tính $f(\frac{\pi}{6})$

A. $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{6}$ **B.** $f(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{6}$

C. $f(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{6}$ **D.** $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{6}$

Câu 100. Biết $\int \ln^2 x dx = x(a\ln^2 x + b\ln x + c) + d$. Tính $P = abc$

A. $P = 2$ **B.** $P = -2$ **C.** $P = 4$ **D.** $P = -4$

Câu 101. Tìm tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x.\ln(\cos x)$

A. $\int \sin x.\ln(\cos x)dx = \cos x.\ln(\cos x) + \cos x + C$

B. $\int \sin x.\ln(\cos x)dx = \cos x.\ln(\cos x) - \cos x + C$

C. $\int \sin x.\ln(\cos x)dx = \cos x.\ln(\cos x) + \sin x + C$

D. $\int \sin x.\ln(\cos x)dx = -\cos x.\ln(\cos x) - \cos x + C$

Câu 102. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. $\int x(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx = \frac{x^2}{2} - x\cos x - \sin x + C$

B. $\int x(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx = \frac{x^2}{2} + x\cos x - \sin x + C$

C. $\int x(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx = \frac{x^2}{2} - x\cos x + \sin x + C$

D. $\int x(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx = \frac{x^2}{2} + x\cos x + \sin x + C$

Câu 103. Tìm họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\ln\frac{1+x}{1-x}$

A. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = x - \frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$ **B.** $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = x + \frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$

C. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = -x - \frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$ **D.** $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = -x + \frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$

Câu 104. Tìm họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x.e^{3x}$

A. $\int \cos 2x.e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{13}(3\cos 2x + 2\sin 2x) + C$ **B.** $\int \cos 2x.e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{13}(-3\cos 2x + 2\sin 2x) + C$

C. $\int \cos 2x.e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{13}(3\cos 2x - 2\sin 2x) + C$ **D.** $\int \cos 2x.e^{3x}dx = -\frac{e^{3x}}{13}(3\cos 2x + 2\sin 2x) + C$

Câu 105. Để tính $\int x\ln(2+x)\mathrm{d}x$ theo phương pháp tính nguyên hàm từng phần, ta đặt:

A. $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \ln(2+x)\mathrm{d}x \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} u = \ln(2+x) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} u = x\ln(2+x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} u = \ln(2+x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases}$

Câu 106. Để tính $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ theo phương pháp tính nguyên hàm từng phần, ta đặt:

A. $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = x\cos x\mathrm{d}x \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} u = x^2 \\ \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} u = \cos x \\ \mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} u = x^2\cos x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases}$

Câu 107. Kết quả của $I = \int xe^x\mathrm{d}x$ là

A. $I = e^x + xe^x + C$. **B.** $I = \frac{x^2}{2}e^x + C$. **C.** $I = xe^x - e^x + C$. **D.** $I = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C$.

Câu 108. Kết quả của $F(x) = \int x\sin x\mathrm{d}x$ là

A. $F(x) = \sin x - x\cos x + C$. **B.** $F(x) = x\sin x - \cos x + C$.

C. $F(x) = \sin x + x\cos x + C$. **D.** $F(x) = x\sin x + \cos x + C$.

Câu 109. Tính $F(x) = \int (2x-1)e^{1-x}dx = e^{1-x}(Ax+B) + C$. Giá trị của biểu thức $A+B$ bằng:

A. –3. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 5.

Câu 110. Một nguyên hàm của $f(x) = x\ln x$ là kết quả nào sau đây, biết nguyên hàm này triệt tiêu khi $x = 1$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}(x^2-1)$. **B.** $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x + 1$.

C. $F(x) = \frac{1}{2}x\ln x + \frac{1}{2}(x^2+1)$. **D.** $F(x) = \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{2}(x^2+1)$.

Câu 111. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$ và $f(0) = -1$. Tính $F(4)$.

A. $F(4) = 3$. **B.** $F(4) = \frac{7}{4}e^2 - \frac{3}{4}$. **C.** $F(4) = 4e^2 + 3$. **D.** $F(4) = 4e^2 - 3$.

Câu 112. Tính $F(x) = \int x\sin x\cos xdx$. Chọn kết quả đúng:

A. $F(x) = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x + C$. **B.** $F(x) = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{x}{2}\sin 2x + C$.

C. $F(x) = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8}\cos 2x + C$. **D.** $F(x) = \frac{-1}{4}\sin 2x - \frac{x}{8}\cos 2x + C$.

Câu 113. Tính $\int x\ln^2 xdx$. Chọn kết quả đúng:

A. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$. **B.** $\frac{1}{2}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$.

C. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x + 2\ln x + 1) + C$. **D.** $\frac{1}{2}x^2(2\ln^2 x + 2\ln x + 1) + C$.

Câu 114. Tính $F(x) = \int x^2\cos xdx$

A. $F(x) = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C$. **B.** $F(x) = 2x^2\sin x - x\cos x + \sin x + C$.

C. $F(x)=x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x+C$. **D.** $F(x)=(2x+x^2)\cos x-x\sin x+C$.

Câu 115. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\ln x$ là:

A. $F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$ **B.** $F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C.$

C. $F(x)=x(\ln x-1)+C.$ **D.** $F(x)=\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$

Câu 116. Gọi $F(x)$ là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos 2x.$ Biết rằng $F(0)=\frac{1}{4}$, giá trị $F(\pi)$ là:

A. $F(\pi)=1.$ **B.** $F(\pi)=\frac{1}{4}.$ **C.** $F(\pi)=\frac{1}{2}.$ **D.** $F(\pi)=0.$

Câu 117. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=xe^{2x}$ thỏa $F\left(\frac{1}{2}\right)=0.$ Khi đó $F(x)$ là

A. $F(x)=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}.$ **B.** $F(x)=\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}.$

C. $F(x)=\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}-1.$ **D.** $F(x)=\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x}.$

Câu 118. Biết $\int f(x)dx=(x+1)\left[\ln(x+1)-1\right]+C.$ Giá trị $f(0)$ là

A. $f(0)=1.$ **B.** $f(0)=0.$ **C.** $f(0)=e.$ **D.** $f(0)=\ln 2.$

Câu 119. Biết rằng $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+C.$ Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ là

A. $F(x)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+3}+\frac{3}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+C.$ **B.** $F(x)=x\sqrt{x^2+3}+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+C.$

C. $F(x)=\frac{x}{2}+\sqrt{x^2+3}+\frac{3}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+C.$ **D.** $F(x)=\frac{x}{2}+\sqrt{x^2+3}-\frac{3}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)+C.$

Câu 120. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos\sqrt{x}$?

A. $F(x)=x\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+3x\cos\sqrt{x}-6\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)+1.$

B. $F(x)=x\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+3x\sin\sqrt{x}-6\left(\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}\right)+1.$

C. $F(x)=x\sqrt{x}\sin\sqrt{x}-3x\cos\sqrt{x}+6\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right).$

D. $F(x)=x\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+3x\sin\sqrt{x}+6\left(\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}\right).$

Câu 121. Hàm số nào dưới đây không tồn tại nguyên hàm?

A. $f(x)=x(\sin 2x+1).$ **B.** $f(x)=\begin{cases}x\cos x & \text{khi } x\ge 0\\ 2x\sin x & \text{khi } x<0\end{cases}.$

C. $f(x)=\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}+\sin 5x.$ **D.** $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{khi } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{khi } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}.$

Câu 122. Biết rằng $\int x^2(\ln x)^2dx=x^3\left(a\ln^2x+b\ln x+c\right).$ Giá trị biểu thức $P=ab+c$ là:

A. $P=0.$ **B.** $P=\frac{2}{27}.$ **C.** $P=\frac{4}{27}.$ **D.** $P=1.$

Câu 123. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng

A. $\int udv=uv-\int vdu$ **B.** $\int udv=uv-\int udv$ **C.** $\int udv=uv+\int vdu$ **D.** $\int udv=uv-\int vdv$

Câu 124. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1).\sin 2x$

A. $\int f(x)dx=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x-x)+C$ **B.** $\int f(x)dx=\sin 2x-\cos 2x+x+C$

C. $\int f(x)dx=\frac{1}{2}(\sin 2x-\cos 2x-x)+C$ **D.** $\int f(x)dx=-\frac{1}{2}(x^2+x)\cos 2x+C$

Câu 125. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.e^x$.

A. $\int f(x)dx=x^2.e^x+C$ **B.** $\int f(x)dx=e^x(x-1)+C$

C. $e^x(x+1)+C$ **D.** $\int f(x)dx=e^x+C$

Câu 126. Cho $F(x)$ là một hàm số $f(x)=x.\ln x$, biết $F(1)=\frac{2}{3}$. Tìm $F(x)$

A. $F(x)=x^2.\ln x+\frac{x^3}{3}+1$ **B.** $F(x)=x^2.\ln x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}$

C. $F(x)=x^2.\ln x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}$ **D.** $F(x)=x^2.\ln x-\frac{x^3}{3}+1$

Câu 127. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos^2\frac{x}{2}$ thỏa $F(0)=\frac{1}{2}\cdot$ Tính $F(\pi)$.

A. $F(\pi)=\frac{1}{2}\cdot$ **B.** $F(\pi)=-\frac{1}{2}\cdot$ **C.** $F(\pi)=-\frac{1}{2}\cdot$ **D.** $F(\pi)=1.$

Câu 128. Cho hàm số $f(x)=(ax+b).\cos x$ thỏa mãn $\int f(x)dx=x.\sin x+2\sin x+\cos x+C$. Tính $S=a^2+b^2$?

A. $S=3$ **B.** $S=4$ **C.** $S=5$ **D.** $S=6$

Câu 129. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.e^{-x}$ thỏa mãn điều kiện $F(0)=-1$. Tính tổng S các nghiệm của phương trình $F(x)+x+1=0$.

A. $S=-3.$ **B.** $S=0.$ **C.** $S=2.$ **D.** $S=-1.$

Câu 130. Gọi $f(x)=(ax^2+bx+c).e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=x(1-x).e^{-x}$. Tính $A=a+2b+3c.$

A. $A=6.$ **B.** $A=3.$ **C.** $A=9.$ **D.** $A=4.$

Câu 131. Để tính $\int x\ln(2+x)dx$ theo phương pháp nguyên hàm từng phần, ta đặt:

A. $\begin{cases}u=\ln(x+2)\\dv=xdx\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}u=x\ln(x+2)\\dv=\ln(x+2)dx\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}u=x\ln(x+2)\\dv=dx\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}u=\ln(x+2)\\dv=dx\end{cases}$

Câu 132. Tính $\int(1-x)\cos xdx$.

A. $(1-x)\sin x-\cos x+C.$ **B.** $(1-x)\sin x+\cos x+C.$

C. $(1+x)\sin x-\cos x+C.$ **D.** $(1-x)\sin x-\sin x+C.$

Câu 133. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=xe^x$ là:

A. $xe^x+e^x+C.$ **B.** $xe^x-e^x+C.$ **C.** $\frac{x^2}{2}e^x+C.$ **D.** $e^x+C.$

Câu 134. Tính $\int x\sin(2x+1)dx$.

A. $-\frac{x}{2}\cos(2x+1)-\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C.$ **B.** $-\frac{x}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{2}\sin(2x+1)+C.$

C. $-\frac{x}{2}\cos(2x+1)+\sin(2x+1)+C.$ **D.** $-\frac{x}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C.$

Câu 135. Cho $\int x.e^{2x}dx=a.x.e^{2x}+b.e^{2x}+C$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng

A. $2b+a=0.$ **B.** $b+2a=0.$ **C.** $b=a.$ **D.** $b>a.$

Câu 136. Tính nguyên hàm $I=\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$ được kết quả nào sau đây:

A. $I=\ln x.\ln(\ln x)+C.$ **B.** $I=\ln x.\ln(\ln x)+\ln x+C.$

C. $I=\ln x.\ln(\ln x)-\ln x+C.$ **D.** $I=\ln(\ln x)+\ln x+C.$

Câu 137. Tính $I=\int\sin 2x.e^{\sin x}dx$:

A. $e^{\sin x}(\cos 2x-1)+C$ **B.** $e^{\sin x}(\sin 2x-1)+C$ **C.** $e^{\sin x}(\sin x+1)+C$ **D.** $e^{\sin x}(\sin x-1)+C$

Câu 138. Cho $\int\frac{1-2x}{1+\cos x}dx=m\left(\frac{1}{2}-x\right)\tan\frac{x}{2}+n.\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C\ (m,n\in\mathbb{Z})$. Tính 2m+ 3n?

A. – 4. **B.** 0. **C.** – 8. **D.** 16.

Câu 139. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\sin^3 x\cos x$ và $F(0)=\pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\pi.$ **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi-\frac{1}{4}.$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+\frac{1}{4}.$ **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$

Câu 140. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm $f(x)=3x^2+2x+1$ biết đồ thị hàm số $F(x)$cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng e.

A. $F(x)=x^2+x+e.$ **B.** $F(x)=\cos 2x+e-1.$

C. $F(x)=x^3+x^2+x+1.$ **D.** $F(x)=x^3+x^2+x+e.$

Câu 141. Biết *a, b* là các số thực thỏa mãn $\int\sqrt[3]{2x+1}dx=a(2x+1)^b+C.$ Tính $P=a.b$.

A. $P=-\frac{16}{9}.$ **B.** $P=\frac{1}{2}.$ **C.** $P=\frac{16}{9}.$ **D.** $P=\frac{9}{16}.$

Câu 142. Tính $\int x\sqrt{(1+x^2)^3}dx$.

A. $\int x\sqrt{(1+x^2)^3}dx=\frac{2}{5}\sqrt{(1+x^2)^5}+C.$ **B.** $\int x\sqrt{(1+x^2)^3}dx=\frac{5}{2}\sqrt{(1+x^2)^5}+C.$

C. $\int x\sqrt{(1+x^2)^3}dx=\frac{3}{5}\sqrt{(1+x^2)^5}+C.$ **D.** $\int x\sqrt{(1+x^2)^3}dx=\frac{1}{5}\sqrt{(1+x^2)^5}+C.$

Câu 143. Tính $\int\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}dx$.

A. $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + C$.

B. $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right| + C$.

C. $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + C$.

D. $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right| + C$.

Câu 144. Tính $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

A. $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\left(\sqrt{x} + \ln\left|1-\sqrt{x}\right|\right) + C$.

B. $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -2\left(\sqrt{x} + \ln\left|1-\sqrt{x}\right|\right) + C$.

C. $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 3\left(\sqrt{x} + \ln\left|1-\sqrt{x}\right|\right) + C$.

D. $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -3\left(\sqrt{x} + \ln\left|1-\sqrt{x}\right|\right) + C$.

Câu 145. Tính $\int x\sqrt{2-5x}\mathrm{d}x$.

A. $\int x\sqrt{2-5x}\mathrm{d}x = \frac{30x+8}{375}\sqrt{(2-5x)^3} + C$.

B. $\int x\sqrt{2-5x}\mathrm{d}x = \frac{8-30x}{375}\sqrt{(2-5x)^3} + C$.

C. $\int x\sqrt{2-5x}\mathrm{d}x = \frac{30x-8}{375}\sqrt{(2-5x)^3} + C$.

D. $\int x\sqrt{2-5x}\mathrm{d}x = \frac{-30x-8}{375}\sqrt{(2-5x)^3} + C$.

Câu 146. Tính $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x$.

A. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\sqrt[3]{(1+x^3)^4} + C$.

B. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4} + C$.

C. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4} + C$.

D. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(1+x^3)^4} + C$.

Câu 147. Tính $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$.

A. $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{\sin x-\cos x} + C$.

B. $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x = -2\sqrt{\sin x-\cos x} + C$.

C. $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x = 3\sqrt{\sin x-\cos x} + C$.

D. $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x = -3\sqrt{\sin x-\cos x} + C$.

Câu 148. Tính $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$

A. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx = 3\sqrt[3]{\cos x} + C$.

B. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx = 3\sqrt[3]{\cos^2 x} + C$.

C. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx = -3\sqrt[3]{\cos x} + C$.

D. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx = -3\sqrt[3]{\cos^2 x} + C$.

Câu 149. Tính $\int x(3-x)^5\,dx$

A. $\int x(3-x)^5\,dx = (3-x)^6\left(\frac{3-x}{7} + \frac{1}{2}\right) + C$.

B. $\int x(3-x)^5\,dx = (3-x)^6\left(\frac{3-x}{7} - \frac{1}{2}\right) + C$.

C. $\int x(3-x)^5\,dx = (3-x)^6\left(\frac{3-x}{7} - \frac{1}{3}\right) + C$.

D. $\int x(3-x)^5\,dx = (3-x)^6\left(\frac{3-x}{7} + \frac{1}{3}\right) + C$.

Câu 150. Tính $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}+2}$

A. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}+2}=\frac{1}{e^x+1}+C$.

B. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}+2}=\frac{2}{e^x+1}+C$.

C. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}+2}=-\frac{2}{e^x+1}+C$.

D. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}+2}=-\frac{1}{e^x+1}+C$.

Câu 151. Tính $\int \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

A. $\int \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}+C$.

B. $\int \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}+C$.

C. $\int \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{1}{1+x^2}+C$.

D. $\int \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=-\frac{1}{1+x^2}+C$.

Câu 152. Tính $\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx$

A. $\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$.

B. $\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x+1}{e^x-1}\right|+C$.

C. $\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx=\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$.

D. $\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}dx=\ln\left|\frac{e^x+1}{e^x-1}\right|+C$.

Câu 153. Tính $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$

A. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\sin x+\frac{1}{\cos x}+C$.

B. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\sin x-\frac{1}{\cos x}+C$.

C. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\cos x+\frac{1}{\cos x}+C$.

D. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\cos x-\frac{1}{\cos x}+C$.

Câu 154. Tính $\int xe^{-x^2}dx$

A. $\int xe^{-x^2}dx=-2e^{-x^2}+C$.

B. $\int xe^{-x^2}dx=2e^{-x^2}+C$.

C. $\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

D. $\int xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

Câu 155. Tính $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

A. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx=-\frac{1}{3}\ln^3 x+C$.

B. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx=\frac{1}{3}\ln^3 x+C$.

C. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx=-3\ln^3 x+C$.

D. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx=3\ln^3 x+C$.

Câu 156. Tính $\int \cos x\sin^3 xdx$

A. $\int \cos x\sin^3 xdx=\frac{1}{4}\cos^4 x+C$.

B. $\int \cos x\sin^3 xdx=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$.

C. $\int \cos x\sin^3 xdx=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$.

D. $\int \cos x\sin^3 xdx=-\frac{1}{4}\sin^4 x+C$.

Câu 157. Tính $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$.

A. $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \sin\frac{1}{x}+C$.

B. $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = -\sin\frac{1}{x}+C$.

C. $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = -\cos\frac{1}{x}+C$.

D. $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \cos\frac{1}{x}+C$.

Câu 158. Tính.

A. $\int \sin^3 x\cos^4 x dx = \cos^5 x\left(\frac{\cos^2 x}{7}-\frac{1}{5}\right)+C$.

B. $\int \sin^3 x\cos^4 x dx = \cos^5 x\left(\frac{\cos^2 x}{7}+\frac{1}{5}\right)+C$.

C. $\int \sin^3 x\cos^4 x dx = \sin^5 x\left(\frac{\sin^2 x}{7}-\frac{1}{5}\right)+C$.

D. $\int \sin^3 x\cos^4 x dx = \sin^5 x\left(\frac{\sin^2 x}{7}+\frac{1}{5}\right)+C$.

Câu 159. Tính $\int x.\sin(2x+1)dx$.

A. $\int x\sin(2x+1)dx = \frac{x}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C$.

B. $\int x\sin(2x+1)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C$.

C. $\int x\sin(2x+1)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x+1)-\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C$.

D. $\int x\sin(2x+1)dx = \frac{x}{2}\cos(2x+1)-\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C$.

Câu 160. Tính $\int (1-x)\cos x dx$.

A. $\int (1-x)\cos x dx = (1-x)\sin x+\cos x+C$.

B. $\int (1-x)\cos x dx = (1-x)\cos x-\sin x+C$.

C. $\int (1-x)\cos x dx = (1-x)\sin x-\cos x+C$.

D. $\int (1-x)\cos x dx = (1-x)\cos x+\sin x+C$.

Câu 161. Tính $\int (2-x)\sin x dx$.

A. $\int (2-x)\sin x dx = (x-2)\cos x-\sin x+C$.

B. $\int (2-x)\sin x dx = (x-2)\cos x+\sin x+C$

C. $\int (2-x)\sin x dx = (x-2)\sin x-\cos x+C$.

D. $\int (2-x)\sin x dx = (x-2)\sin x+\cos x+C$.

Câu 162. Tính $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

A. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = x\cot x+\ln|\sin x|+C$.

B. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = -x\cot x+\ln|\sin x|+C$.

C. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = -x\cot x-\ln|\sin x|+C$.

D. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = x\cot x-\ln|\sin x|+C$.

Câu 163. Tính $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

A. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x-\ln|\cos x|+C$.

B. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x+\ln|\sin x|+C$.

C. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x+\ln|\cos x|+C$.

D. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x-\ln|\sin x|+C$.

Câu 164. Tính $\int x\sin^2 x dx$.

A. $\int x\sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$. **B.** $\int x\sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$.

C. $\int x\sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$. **D.** $\int x\sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$.

Câu 165. Tính $\int \cos\sqrt{x} dx$.

A. $\int \cos\sqrt{x} dx = -2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$. **B.** $\int \cos\sqrt{x} dx = -2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - 2\cos\sqrt{x} + C$.

C. $\int \cos\sqrt{x} dx = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - 2\cos\sqrt{x} + C$. **D.** $\int \cos\sqrt{x} dx = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$.

Câu 166. Tính $\int x^2.\cos 2x dx$.

A. $\int x^2.\cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2.\sin 2x + \frac{1}{2}x.\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

B. $\int x^2.\cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2.\sin 2x + \frac{1}{2}x.\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

C. $\int x^2.\cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2.\sin 2x - \frac{1}{2}x.\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

D. $\int x^2.\cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2.\sin 2x - \frac{1}{2}x.\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

Câu 167. Tính $\int (1-2x).e^x dx$.

A. $\int (1-2x).e^x dx = (3-2x)e^x + C$. **B.** $\int (1-2x).e^x dx = (3+2x)e^x + C$.

C. $\int (1-2x).e^x dx = (3-x)e^x + C$. **D.** $\int (1-2x).e^x dx = (3+x)e^x + C$.

Câu 168. Tính $\int x.\mathrm{e}^{-x} dx$.

A. $\int x.\mathrm{e}^{-x} dx = (1+x)e^{-x} + C$. **B.** $\int x.\mathrm{e}^{-x} dx = (1-x)e^{-x} + C$.

C. $\int x.\mathrm{e}^{-x} dx = -(1+x)e^{-x} + C$. **D.** $\int x.\mathrm{e}^{-x} dx = -(1-x)e^{-x} + C$.

Câu 169. Tính $\int \frac{x}{3}e^{2x} dx$.

A. $\int \frac{x}{3}e^{2x} dx = \frac{1}{6}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$. **B.** $\int \frac{x}{3}e^{2x} dx = \frac{1}{3}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

C. $\int \frac{x}{3}e^{2x} dx = \frac{1}{4}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$. **D.** $\int \frac{x}{3}e^{2x} dx = \frac{1}{5}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

Câu 170. Tính $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$.

A. $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = e^x(x^2 + 1) + C$. **B.** $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = e^x(x^2 - 1) + C$.

C. $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = e^x(x^2 + 2) + C$. **D.** $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = e^x(x^2 - 1) + C$.

2. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1B	2C	3B	4B	5C	6D	7C	8D	9A	10B
11C	12B	13A	14D	15D	16A	17B	18A	19A	20B
21C	22A	23B	24A	25A	26B	27B	28D	29D	30D
31D	32A	33D	34D	35B	36B	37B	38A	39B	40A
41B	42C	43B	44D	45A	46A	47B	48C	49C	50C
51A	52C	53B	54A	55B	56B	57A	58B	59C	60A
61C	62B	63C	64A	65C	66A	67B	68B	69A	70D
71C	72A	73D	74C	75D	76B	77C	78D	79A	80A
81B	82C	83D	84C	85B	86C	87C	88B	89B	90D
91C	92A	93A	94C	95C	96D	97A	98C	99A	100B
101D	102C	103A	104A	105B	106B	107C	108A	109A	110A
111B	112D	113A	114A	115A	116B	117A	118B	119A	120A
121D	122A	123A	124C	125B	126D	127B	128C	129D	130A
131A	132A	133B	134D	135A	136C	137D	138C	139C	140D
141B	142D	143A	144B	145D	146C	147A	148C	149C	150C
151B	152A	153D	154C	155D	156C	157D	158A	159C	160C
161A	162B	163C	164A	165D	166B	167A	168C	169A	170B

Câu 1. **Chọn B.**

♦ Trắc nghiệm:

Phương án A. Sai. Vì C là bất kỳ.

Đáp án B. Vì theo định lý.

Phương án C. Sai. Vì $y=F(x)+C$ cũng là nguyên hàm với C là hằng số bất kỳ.

Phương án D. Sai. Vì hai hàm $G(x)$ và $F(x)$ chỉ sai khác một hằng số tức C là duy nhất.

Câu 2. **Chọn C.**

Ta có $\int f(x)dx=F(x)+C \Leftrightarrow F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ nên phương án A, B,D đúng

Câu 3. **Chọn B.**

♦ Trắc nghiệm: Các khẳng định ở A, C, D đúng theo tính chất nguyên hàm.

Không có tính chất: *Nguyên hàm của một tích bằng tích các nguyên hàm.*

Câu 4. **Chọn B.**

♦ Trắc nghiệm:

Mệnh đề (III) sai vì không có tính chất: *Nguyên hàm của một tích bằng tích các nguyên hàm.*

Câu 5. **Chọn C.**

♦ Trắc nghiệm: Khẳng định C sai vì: nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $\left(F(x)\right)' = f(x)$. Mà : $\left(F(x)\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \neq 2\sqrt{x} = f(x).$

Câu 6. **Chọn D.**

♦ Trắc nghiệm:

Phương án A: Sai. Vì không có tính chất $\int \left(f(x)\right)^n dx = \left(\int f(x)dx\right)^n$.

Phương án B: Sai. Vì không có tính chất: $\int \left(f(x)\right)^n dx = n\int f(x)dx$

Phương án C: Sai. Sai lầm như phương án A. $\int \left(f(x)\right)^n dx = \left(\int f(x)dx\right)^n$.

Phương án D.Đúng. Vì $\left(2x-1+\dfrac{1}{x}\right)^2 = 4x^2+1+\dfrac{1}{x^2}-4x-\dfrac{2}{x}+4$ và sử dụng tính chất

$$\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx; \int \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

Câu 7. **Chọn C.**

♦ Tự luận: vì $\int f(x)dx = F(x)+C$ nên ta có $F'(x) = f(x)$.

Phương án A: sai. Vì: $\left(\dfrac{1}{2a}F(ax+b)+C\right)' = \dfrac{1}{2a}.F'(ax+b) = \dfrac{1}{2a}.f(ax+b).(ax+b)' = \dfrac{1}{2}f(ax+b).$

Phương án B: sai. Vì: $\left(F(ax+b)+C\right)' = F'(ax+b) = .f(ax+b).(ax+b)' = f(ax+b).a$.

Phương án C: đúng. Vì: $\left(\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' = \dfrac{1}{a}.F'(ax+b) = \dfrac{1}{a}.f(ax+b).(ax+b)' = f(ax+b).$

Phương án D: sai. Vì: $\left(aF(ax+b)+C\right)' = aF'(ax+b) = af(ax+b).(ax+b)' = a^2.f(ax+b).$

Câu 8. **Chọn D.**

♦ Trắc nghiệm:

Phương án A: đúng. Vì: $\left(F(x)\right)' = \left(2017+\cos^2 x\right)' = 2.\cos x.(-\sin x) = -\sin 2x = f(x)$.

Phương án B: đúng.Vì: nếu $F(x), G(x)$ cùng là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)-G(x)=C$, và $\int Cdx = Cx+D$.

Phương án C: đúng. Vì: $\left(\sqrt{u(x)}+C\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Phương án D: sai. Vì $\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)]+C$.

Câu 9. **Chọn A.**

+/ Xét $\left(-\ln|\cos x|+C\right)' = -\dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$ Suy ra khẳng định A đúng.

Câu 10. **Chọn B.**

Có $\int f(x)dx = \dfrac{1}{x}+\ln|2x|+C \Rightarrow f(x) = \left(\dfrac{1}{x}+\ln|2x|+C\right)' = -\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}.$ Vậy đáp án B.

Câu 11. **Chọn C.**

Dễ thấy khẳng định C sai vì $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 12. **Chọn B.**

+ Ta có: $y = f(x) = F'(x) = 2x + 4$.

+ $f(3) = 2.3 + 4 = 10$.

Câu 13. **Chọn A.**

$+/ F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int ax + \frac{b}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{a}{2}x^2 - \frac{b}{x} + C$.

Ta có: $\begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b + C = 1 \\ \frac{a}{2} - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{7}{4} \end{cases}$. Vậy $F(x) = \frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$

Câu 14. **Chọn D.**

+/Xét (I): Ta có $\left(-\ln|\cos x| + C\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$. Do đó (I) đúng.

+/Xét (II): $\left(-\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C\right)' = -\frac{1}{3}.(3\cos x)' e^{3\cos x} = e^{3\cos x}\sin x$. Do đó (II) đúng.

+Xét (III): Đặt $\left(2\sqrt{\sin x - \cos x} + C\right)' = \frac{2(\sin x - \cos x)'}{2\sqrt{\sin x - \cos x}} = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}}$. Do đó (III) đúng.

Câu 15. **Chọn D.**

Vì $\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$.

Câu 16. **Chọn A.**

Vì $F'(x) = (x-3)^4 + 1 \neq f(x)$.

Câu 17. **Chọn B.**

- **<u>Cách 1</u> :** Tìm trực tiếp: $\int (x-1)^2 dx = \int (x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C$
- **<u>Cách 2</u> :** Ta đi tính đạo hàm 4 đáp án A, B, C, D để tìm xem đâu là kết quả của đề bài
- Bước 1: Khai triển $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
- Bước 2: Lần lượt đạo hàm các đáp án A, B, C, D

A. $\mathbf{F'(x)} = 3x^2 + 6x + 3 \Rightarrow$ loại A

B. $\mathbf{F'(x)} = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$ Vậy B là đáp án

C. $\mathbf{F'(x)} = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$ Loại C

D. $\mathbf{F'(x)} = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$ Loại D

(Ta chỉ cần kiểm tra đến phương án B là biết kết quả nên các phương án còn lại sẽ không phải kiểm tra)

- <u>Cách 3 :</u> Sử dụng Casio

Câu 18. **Chọn A.**

- Cách 1: Nhớ công thức $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \Rightarrow$ Chọn A.
- Cách 2: Ta đi tính đạo hàm 4 đáp án A, B, C, D để tìm xem đâu là kết quả của đề bài

Câu 19. **Chọn A.**

- Cách 1: Tìm nguyên hàm
- $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$
- $F(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- Thay trở lại ta được $F(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{1}{3}$

Câu 20. **Chọn B.**

- Cách 1: $F(x) = \frac{1}{x} + \ln|2x| + C$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên F'(x) = f(x)

$F'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + C$

- Cách 2: Tìm nguyên hàm của $f(x)$ trong các phương án A, B, C, D.

Câu 21. **Chọn C.**

- $\int (\frac{4m}{\pi} + \sin^2 x) dx = \int \frac{4m}{\pi} dx + \int \sin^2 x dx = \frac{4m}{\pi} x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$
- Giải hệ $\begin{cases} F(0) = 1 \\ F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ \frac{4m}{\pi} . \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} . \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ m = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Câu 22. **Chọn A.**

- $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x$; $y = (f'(x))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
- $\int y dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Câu 23. **Chọn B.**

- Cách 1:

$\frac{\sin 4x}{\sin x + \cos x} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sin x + \cos x} = 4 \sin x \cos x (\cos x - \sin x) = 4 \sin x \cos^2 x - 4 \cos x \sin^2 x$

$\int \frac{\sin 4x}{\sin x + \cos x} dx = 4 \int \sin x \cos^2 x dx - 4 \int \cos x \sin^2 x dx = -\frac{4}{3} (\cos^3 x + \sin^3 x) + C$

$= -\frac{1}{3} (\cos 3x - \sin 3x) - (\cos x + \sin x) + C = -\frac{\sqrt{2}}{3} \sin(3x + \frac{3\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) + C$

- Cách 2: Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

Suy ra $t.dt = \cos 2x dx$

Ta có $I=\int\frac{2(t^2-1).t\mathrm{d}t}{t}=2\int(t^2-1)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3-2t+C=$

$\frac{2}{3}(\sqrt{2})^3\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$

Áp dụng công thức nhân ba $\sin 3a=-4\sin^3 a+3\sin a\Leftrightarrow\sin^3 a=\frac{1}{4}(3\sin a-\sin 3a)$

* Vậy $I=\frac{4\sqrt{2}}{3}.\frac{1}{4}\left[3\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)\right]-2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$

$=-\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$

◎ Cách 3: Lấy đạo hàm các phương án A, B, C, D xem đâu là kết quả đúng

Câu 24. **Chọn A.**

◎ Cách 1 :Biến đổi $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\tan x+1}=\int\frac{\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2\cos x-\sin x+\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x}_{J}=\frac{1}{2}\ln|2\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}J$

* Ta tính $2J+I=\int 1.\mathrm{d}x=x+C$, suy ra $J=\frac{1}{2}(x-I+C)$

* Thế kết quả trên trở lại đề: $I=\frac{1}{2}\ln|2\sin x+\cos x|+\frac{1}{4}(x-I+C)$

$\Leftrightarrow I=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\ln|2\sin x+\cos x|+\frac{1}{4}x\right]+C'\Leftrightarrow I=\frac{2}{5}\ln|2\sin x+\cos x|+\frac{1}{5}x+C'$

◎ Cách 2:Lấy đạo hàm các phương án A, B, C, D xem đâu là kết quả đúng

Câu 25. **Chọn A.**

◎ **Cách 1 : Tự luận**

$\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-2x)}{1-2x}=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C=\frac{1}{2}\ln|1-2x|^{-1}+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{1-2x}\right|+C.$

◎ **Cách 2 : CASIO**

Câu 26. **Chọn B.**

◎ **Cách 1 : Tự luận**

$\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)dx=\int x^2dx+3\int\frac{1}{x}dx-2\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{x^3}{3}+3\ln|x|-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{x^3}{3}+3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C.$

Câu 27. **Chọn B.**

◎ **Cách 1 : Tự luận**

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$. $F(2)=1\Leftrightarrow\ln 1+C=1\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\ln|x-1|+1$. Suy ra $F(3)=\ln 2+1$.

- **Cách 2 : CASIO**

Câu 28. **Chọn D.**

- **Cách 1 : Tự luận**

Đặt $u=x^4+1\Rightarrow du=d(x^4+1)=4x^3dx\Leftrightarrow dx=\dfrac{du}{4x^3}$

$$\int\frac{x^3}{x^4+1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^3du}{u.x^3}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{4}\ln|u|+C=\frac{1}{4}\ln|x^4+1|+C=\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C.$$

- **Cách 2 : CASIO**

Câu 29. **Chọn D.**

- **Cách 1 : Tự luận**

$$\int\frac{dx}{2-3x}=-\frac{1}{3}\int\frac{d(2-3x)}{2-3x}=-\frac{1}{3}\ln|2-3x|+C=-\frac{1}{3}\ln|3x-2|+C.$$

- **Cách 2 : CASIO**

Câu 30. **Chọn D.**

- **Cách 1 : Tự luận**

$$\int\frac{x^3+x+1}{x}dx=\int x^2dx+\int dx+\int\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}+x+\ln|x|+C.$$

- **Cách 2 : CASIO**

Câu 31. **Chọn D.**

- **Cách 1 : Tự luận**

$$\int\frac{x^2-2x+3}{x+1}dx=\int(x-3+\frac{6}{x+1})dx=\int(x-3)dx+6\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{x^2}{2}-3x+6\ln|x+1|+C.$$

- **Cách 2 : CASIO**

Câu 32. **Chọn A.**

- **Cách 1 : Tự luận**

Đặt $u=e^x\Rightarrow du=udx\Leftrightarrow dx=\dfrac{du}{u}$.

$$\Rightarrow\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int\frac{u^3+1}{(u+1)u}du=\int\frac{(u+1)(u^2-u+1)}{u(u+1)}du=\int(u-1+\frac{1}{u})du=\frac{u^2}{2}-u+\ln|u|+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+\ln e^x+C=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C.$$

- **Cách 2 : CASIO**

Câu 33. **Chọn D.**

$$f(x)=x-\frac{1}{x^2}\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C\ ;\ F(1)=0\Leftrightarrow C=-\frac{3}{2}$$

Ta có $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2}$.

Câu 34. **Chọn A.**

♦Sử dụng máy tính Casio

Ta có: $f(-1)=\dfrac{1}{(-3+1)^2}=\dfrac{1}{4}$.

Dùng lệnh SHIFT $\int$ thử với các đáp án:

$\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-3}{1+3x}\right)\right|_{x=-1}=2,25$ loại đáp án A.

$\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-1}{1+3x}\right)\right|_{x=-1}=\dfrac{3}{4}$ loại đáp án B.

$\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3+9x}\right)\right|_{x=-1}=\dfrac{-1}{4}$ loái đáp án C

$\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-1}{3+9x}\right)\right|_{x=-1}=\dfrac{1}{4}$ Đáp án D thỏa mãn

♦Tự luận: $\int\dfrac{1}{(3x+1)^2}dx=\dfrac{1}{3}\int(3x+1)^{-2}\,d(3x+1)=\dfrac{-1}{3(3x+1)}+C=-\dfrac{1}{9x+3}+C$

Câu 35. **Chọn B.**

♦Sử dụng máy tính Casio

Ta có: $f(0)=\dfrac{3}{2}$

Dùng lệnh SHIFT $\int$ thử với các đáp án:

$\left.\dfrac{d}{dx}\left(2\ln|x+2|-\ln|x+1|\right)\right|_{x=0}=0$ loại đáp án A.

$\left.\dfrac{d}{dx}\left(2\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\right|_{x=0}=\dfrac{3}{2}$ đáp án B.

♦Tự luận:

$\int\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)dx=2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$

Câu 36. **Chọn B.**

♦Sử dụng máy tính Casio

Ta có: $f(0)=0$

Dùng lệnh SHIFT $\int$ thử với các đáp án:

$\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\right)\right|_{x=0}=0$ loại đáp án A.

$\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x+1}\right)\right|_{x=0}=2$ đáp án B.

♦Tự luận: $\int \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}dx = \int\left(1-\frac{1}{(x+2)^2}\right)dx = x+\frac{1}{x+1}+C$

Đáp án A loại

Đáp án B: $\frac{x^2+x-1}{x+1} = x-\frac{1}{x+1}$ không phải là nguyên hàm của $f(x)$

Câu 37. **Chọn B.**

♦Sử dụng máy tính Casio

Ta có: $f(0)=\frac{2}{5}$

Dùng lệnh SHIFT $\int$ thử với các đáp án:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|\right)\Big|_{x=0} = \frac{2}{5}$ loại đáp án A.

$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\left|x^2+4x+5\right|\right)\right)\Big|_{x=0} = 0,8 \neq 0,4$ đáp án B.

♦Tự luận:

$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|+C$

Đáp án A loại

Đáp án B: $\ln\left(\frac{1}{2}\left|x^2+4x+5\right|\right) = \ln\frac{1}{2}-\ln\left|x^2+4x+5\right|$. không phải là nguyên hàm của $f(x)$

Câu 38. **Chọn A.**

♦Sử dụng máy tính Casio

Ta có: $f(0)=-\frac{1}{2}$

Dùng lệnh SHIFT $\int$ thử với các đáp án:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\right)\Big|_{x=0} = -0,5$ đáp án A.

♦Tự luận: $\mathrm{F}(x) = \int \frac{dx}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$

Câu 39. **Chọn B.**

♦Sử dụng máy tính Casio

Ta có: $f(0)=3,5$

Dùng lệnh SHIFT $\int$ thử với các đáp án:

$\frac{d}{dx}\left(2\ln\left|x+2\right|+3\ln\left|x+1\right|\right)\Big|_{x=0} = 4$ loại đáp án A.

$\left.\frac{d}{dx}\left(3\ln|x+2|+2\ln|x+1|\right)\right|_{x=0}=\frac{7}{2}$ đáp án B.

♦Tự luận: $\int\frac{5x+7}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}\right)dx=2\ln|x+1|+3\ln|x+2|+C$. Đáp án B.

Câu 40. **Chọn A.**

♦Tự luận:

$$\int\frac{x+1}{(x-1)(2-x)}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{2-x}\right)dx=2\ln|x-1|-3\ln|x-2|+C$$

Vậy $a=2;b=-2\Rightarrow a-b=5$.

Câu 41. **Chọn B.**

♦Tự luận: $u=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow u^2=x^2+1\Rightarrow 2udu=2xdx\Rightarrow udu=xdx$

Khi đó: $\int x\sqrt{x^2+1}dx=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3}+C$

Vậy KĐ1 sai, KĐ2 đúng, KĐ3 sai.

♦Trắc nghiệm:

+ KĐ1: $du=dx$ khi và chỉ khi $u=x+C$ → sai

+KĐ2: Thêm cận vào 2 vế để tính tích phân bằng MTCT →2 vế bằng nhau→ Đúng

+KĐ3: $x\sqrt{x^2+1}$ CACL 3 →9,48

$d/dx\left(\frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{6}\right)$ tại x=3 →4,7 →Sai

Câu 42. **Chọn C.**

♦Tự luận: Dễ thấy bước 1,2 đúng.

Bước 3 sai vì đưa về biến cũ sai, đúng phải là $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{u}+C=-\frac{1}{\sin x}+C$

Câu 43. **Chọn B.**

♦Tự luận: Đặt $u=x^2+1\Rightarrow du=2xdx\Rightarrow\frac{du}{2}=dx$

$$\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{\ln u}{2}+C=\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}+C$$

♦Trắc nghiệm: + $f\left(x\right)=\frac{x}{x^2+1}$ CACL 3 →0,3

+ Kiểm tra các đáp án: $d/dx\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)$ tại x=3→ 0,6→A sai

$d/dx\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)$ tại x=3 →0,3 →B đúng.

Câu 44. **Chọn D.**

♦Tự luận: Đặt $u=\sqrt{\ln x+3}\Rightarrow u^2=\ln x+3\Rightarrow 2udu=\frac{dx}{x}$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x+3}}{x}dx=\int 2u^2du=\frac{2u^3}{3}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x+3)^3}+C$$

♦Trắc nghiệm: + $f(x)=\frac{\sqrt{\ln x+3}}{x}$ CACL 3 →0,6748

+ Kiểm tra các đáp án: $d/dx\left(\sqrt{\ln x+3}\right)$ tại x=3 →0,08 →A sai

$d/dx\left(\sqrt{(\ln x+3)^3}\right)$ tại x=3 →1,01 →B sai.

$d/dx\left(\frac{1}{3}\sqrt{(\ln x+3)^3}\right)$ tại x=3 →0,337 →C sai.

$d/dx\left(\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x+3)^3}\right)$ tại x=3 →0,6748 →D đúng.

Câu 45. **Chọn A.**

♦Tự luận: $f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\cos x}=\frac{2\sin x.\cos x}{1+\cos x}$

Đặt $u=1+\cos x\Rightarrow du=-\sin xdx$

$$\int \frac{2\sin x.\cos x}{1+\cos x}dx=\int \frac{-2(u-1)}{u}du=\int\left(\frac{2}{u}-2\right)du=2\ln u-2u+C=2\ln(1+\cos x)-2(1+\cos x)+C$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2\ln\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)-2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)+C=0\Leftrightarrow C=2\Rightarrow F(x)=2\ln(1+\cos x)-2\cos x$$

Vậy $F(0)=2\ln 2-2$

♦Trắc nghiệm:

+ Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx\approx 0,613=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)\Rightarrow F(0)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-0,613\approx -0,613$

+ Đổi các đáp án ra số gần đúng → Chọn A.

Câu 46. **Chọn A.**

♦Tự luận:

$$f(x)=\frac{1}{1+\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\right)$$

Suy ra $\int\frac{1}{1+\tan x}dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\right)dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

Đặt $u=\sin x+\cos x\Rightarrow du=(\cos x-\sin x)dx$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$$

Vậy $\int\frac{1}{1+\tan x}dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$

$F(0)=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow C=\frac{\pi}{4}\Rightarrow F(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{\pi}{4}$. Vậy $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

♦Trắc nghiệm:

+ Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan x}dx$ MTCT báo lỗi do tại $x=\frac{\pi}{2}$ thì $\tan x$ không xác định.

Ta thay cận trên $x=\frac{\pi}{2}$ thành một số gần đúng là $x=\frac{10\pi}{21}$

$$\int_0^{\frac{10\pi}{21}} \frac{1}{1+\tan x}dx \approx 0,7827 = F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0) \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 0,7827+F(0) \approx 0,7827+\frac{\pi}{4} \approx 1,568$$

+ Đổi các đáp án ra số gần đúng ,chỉ có đáp án A là gần với 1,568 nhất.

Câu 47. **Chọn B.**

♦Tự luận: Đặt $u=\sqrt{2x-1} \Rightarrow u^2=2x-1 \Rightarrow udu=dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4} = \int \frac{u}{u+4}du = \int\left(1-\frac{4}{u+4}\right)du = u-4\ln(u+4)+C = \sqrt{2x-1}-4\ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right)+C$$

Vậy $a=1; b=-4 \Rightarrow M=-3$

Câu 48. **Chọn C.**

♦Tự luận: $\frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2)^3} = \frac{(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x+2)^3}$

Đặt $u=\sin x+\cos x+2 \Rightarrow du=(\cos x-\sin x)dx$

$$\int \frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2)^3}dx = \int \frac{(u-2)}{u^3}du = -\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+C = -\frac{u-1}{u^2}+C = -\frac{\sin x+\cos x+1}{(\sin x+\cos x+2)^2}+C$$

$\Rightarrow m=1; n=2 \Rightarrow A=3$

Câu 49. **Chọn C.**

Câu 50. **Chọn C.**

$I=\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$. Đặt $u=x^2+1 \Rightarrow du=2xdx$

Vậy $I=\int \sqrt{u}du$

Câu 51. **Chọn A.**

$I=\int x(x^2+7)^{15}dx$

Đặt $u=x^2+7 \Rightarrow du=2xdx1 \Rightarrow xdx=\frac{1}{2}du$

Vậy $I=\frac{1}{2}\int u^{15}du = \frac{1}{32}u^{16}+C = \frac{1}{32}(x^2+7)^{16}+C$

Câu 52. **Chọn C.**

Ta tính: $\int \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}dx$. Đặt $t=2+\sin x \Rightarrow dt=\cos xdx$

Vậy: $\int \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}+C = -\frac{1}{(2+\sin x)}$

Câu 53. **Chọn B.**

Tính: $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \int \frac{e^x.e^x}{e^x+1}dx$

Đặt $t=e^x+1\Rightarrow\begin{cases}dt=e^x dx\\ e^x=t-1\end{cases}$

Ta được: $\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x.e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{t-1}{t}dt=\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=t-\ln|t|+C=e^x+1-\ln\left(e^x+1\right)+C$

Câu 54. **Chọn A.**

$\int f(2x)dx$. Đặt $t=2dx\Rightarrow dt=2dx\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

Ta được: $\int f(2x)dx=\frac{1}{2}\int f(t)dt=\frac{1}{2}\int f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+C$

Câu 55. **Chọn B.**

$\int\frac{\ln x}{x}dx$. Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$

Ta được: $\int\frac{\ln x}{x}dx=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{\ln^2 x}{2}+C$

Mà: $F\left(e^2\right)=4\Rightarrow\frac{\ln^2 e^2}{2}+C=4\Rightarrow C=2$

Vậy: $F(x)=\frac{\ln^2 x}{2}+2\Rightarrow F(e)=\frac{5}{2}$

Câu 56. **Chọn B.**

♦Tựluận: $\int\frac{1}{e^x+1}dx$. Đặt $t=e^x+1\Rightarrow\begin{cases}dt=e^x dx\\ e^x=t-1\end{cases}$

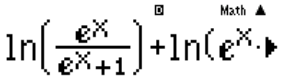
$$\Rightarrow\int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x}{e^x\left(e^x+1\right)}dx=\int\frac{dt}{t(t-1)}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln|t-1|-\ln|t|+C$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C=\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|+C$$

Mà: $F(0)=-\ln 2\Rightarrow\ln\left|\frac{e^0}{e^0+1}\right|+C=-\ln 2\Rightarrow C=0$. Vậy: $F(x)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$

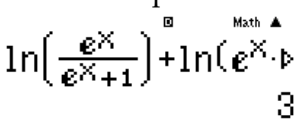
Giải pt: $F(x)+\ln\left(e^x+1\right)=3\Leftrightarrow\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln\left(e^x+1\right)=3\Leftrightarrow\ln e^x=3\Leftrightarrow x=3$

♦Trắc nghiệm: Sau khi tìm được nguyên hàm $F(x)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$. Ta có thể giải nhanh phương trình: $F(x)+\ln\left(e^x+1\right)=3$ bằng cách dùng máy tính Casio để thử nghiệm



Nhập vào máy tính

Sau đó bấm phím Calc để thử đáp án. Ta thử đáp án B. Nhấn Calc nhập $X=3$ ta được



Vậy $x=3$ là nghiệm của phương trình. Tương tự thử với các đáp án còn lại ta thấy chỉ có đáp án B thỏa.

Câu 57. **Chọn A.**

♦Tự luận: Đặt $t=ax+b$ ta có $dt=\frac{1}{a}dx$ nên $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

Câu 58. **Chọn B.**

♦Tự luận: áp dụng $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

Câu 59. **Chọn C.**

$I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$

Đặt $u=x^2-1\Rightarrow du=2xdx$. Đổi cận $x=1\Rightarrow u=1; x=2\Rightarrow u=3$. Nên $I=\int_0^3 \sqrt{u}du$

Câu 60. **Chọn A.**

Xét $-\int e^{\cos x}\sin x dx$ bằng cách đặt $t=\cos x$ ta có $dt=-\sin x dx$

Nên $-\int e^{\cos x}\sin x dx=\int e^t dt=-e^t+C=e^{\cos x}+C$

Câu 61. **Chọn C.**

Ta có: $\int\frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}}dx=\int\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{10}\frac{1}{(x+1)^2}dx$

Đặt $t=\frac{x-2}{x+1}$ thì $dt=\frac{3}{(x+1)^2}dx$ nên $\int\frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}}dx=\frac{1}{3}\int t^{10}dt=\frac{1}{3}\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{1}{33}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}+C$

Câu 62. **Chọn B.**

Đặt $t=e^x+1\Rightarrow dt=e^x dx$

Ta có $\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx=\int\frac{t-1}{t}dt=t-\ln|t|+C=e^x+1-\ln|e^x+1|+C$

Câu 63. **Chọn C.**

$\int\frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}}dx=\int\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{10}\frac{1}{(x+1)^2}dx$

Đặt $t=\frac{x-2}{x+1}$ thì $dt=\frac{3}{(x+1)^2}dx$ nên $\int\frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}}dx=\frac{1}{3}\int t^{10}dt=\frac{1}{3}\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{1}{33}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11}+C$

Câu 64. **Chọn A.**

Đặt $t=\cos 2x\Rightarrow dt=-2\sin 2xdx\Rightarrow\sin 2xdx=-\frac{1}{2}dt$

$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 2x\right)=1-\frac{1}{2}\left(1-t^2\right)=\frac{1}{2}+t^2$

Vậy $I=\int\frac{\sin 2xdx}{\cos^4 x+\sin^4 x}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\frac{1}{2}+t^2}=-\int\frac{dt}{1+2t^2}$.

Câu 65. **Chọn C.**

♦Tự luận:

Áp dụng công thức $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$ với $a\neq 0$; thay $a=2$ và $b=0$ để có kết quả

♦Trắc nghiệm: Sử dụng máy tính casio: cú pháp $f(A)-\frac{d}{dx}(F_1(x))\Big|_{x=A}$

Biến A được nhập từ bàn phím để kiểm tra, A là hằng số thỏa mãn tập xác định và có giá trị nhỏ.

Nếu kết quả cho ít nhất một giá trị khác 0 thì loại phương án đó.

Nếu kết quả luôn cho giá trị bằng 0 với một dãy giá trị của A thì chọn phương án đó.

Chú ý: để dễ đọc kết quả ta nên chọn máy tính ở chế độ fix - 9 (shift-mod-6-9).

Nhập vào biểu thức vào máy tính

1 shift Sto A. $e^{2A}-\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right)\Big|_{x=A}=-7,389$ loại

$e^{2A}-\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\Big|_{x=A}=0$ chọn

Câu 66. **Chọn A.**

♦Tự luận: Áp dụng công thức $\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$ với $a\neq 0$; thay $a=2$ và $b=0$ để có kết quả.

♦Trắc nghiệm: Nhập vào biểu thức vào máy tính

$\frac{\pi}{3}$ shift Sto A. $\cos 2A-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{x=A}=0$ chọn

Câu 67. **Chọn B.**

♦Tự luận: $\int(3-2x)^5dx=\frac{1}{-2}\frac{(3-2x)^{5+1}}{5+1}+C=-\frac{1}{12}(3-2x)^6+C$

♦Trắc nghiệm: TXĐ của hàm số là R

Nhập vào biểu thức vào máy tính (cho A tùy ý)

2 shift sto A. $(3-2A)^5-\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{12}(3-2x)^6\right)\Big|_{x=A}=0$ chọn

Câu 68. **Chọn B.**

♦Tự luận: Ta có: $\int f(x)dx=\int\sqrt{2x-1}dx=\int(2x-1)^{\frac{1}{2}}dx$

$=\frac{1}{2}.\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\sqrt{(2x-1)^3}+C=\frac{1}{3}.(2x-1).\sqrt{2x-1}+C.$

♦Trắc nghiệm: TXĐ $D=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

Cho $A=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ shift sto A. $\sqrt{2\text{A}-1}-\frac{d}{d\text{x}}\left(\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}\right)\Big|_{x=A}=0$

Câu 69. **Chọn A.**

♦Tự luận : Đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2\text{x}dx\Rightarrow x\text{d}x=\frac{1}{2}dt$

$F(x)=\int x.e^{x^2+1}dx=\int\frac{1}{2}e^t dt=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+c=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+c$

$F(0)=2\text{e}.\Leftrightarrow\frac{1}{2}e^1+C=\frac{3}{2}\text{e}\Leftrightarrow \text{C=e vậy}\, F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+e$

$F(1)=\frac{1}{2}e^{1^2+1}+e=\frac{1}{2}e^2+e$

♦Trắc nghiệm: $F(x)=\int x.e^{x^2+1}dx=\int\frac{1}{2}e^{x^2+1}d(x^2+1)=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+c$

$F(0)=2\text{e}.\Leftrightarrow\frac{1}{2}e^1+C=\frac{3}{2}\text{e}\Leftrightarrow \text{C=e vậy}\, F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+e$

$F(1)=\frac{1}{2}e^{1^2+1}+e=\frac{1}{2}e^2+e$

Câu 70. **Chọn D.**

♦Tự luận Đặt $t=\sqrt{1-\ln\text{x}}\Rightarrow t^2=1-\ln\text{x}\Rightarrow 2t\text{dt}=\frac{-1}{x}d\text{x}\Rightarrow\frac{1}{x}d\text{x}=-2t\text{dt}$

$F(x)=\int\frac{d\text{x}}{x\sqrt{1-\ln\text{x}}}=\int\frac{-2t\text{d}t}{t}=\int-2\text{d}t=-2t+C=-2\sqrt{1-\ln\text{x}}+C$

$F(1)=0\Leftrightarrow-2.\sqrt{1-\ln 1}+C=0\Leftrightarrow C=2\,\text{Vậy}\, F(x)=-2\sqrt{1-\ln\text{x}}+2$

$F(e)=-2\sqrt{1-\ln e}+2=2$

♦Trắc nghiệm: $F(x)=\int\frac{d\text{x}}{x\sqrt{1-\ln\text{x}}}=\int-2\text{d}(1-\ln\text{x})=-2\sqrt{1-\ln\text{x}}+C$

$F(1)=0\Leftrightarrow-2.\sqrt{1-\ln 1}+C=0\Leftrightarrow C=2\,\text{Vậy}\, F(x)=-2\sqrt{1-\ln\text{x}}+2$

$F(e)=-2\sqrt{1-\ln e}+2=2$

Câu 71. **Chọn C.**

♦Tự luận: Quãng đường vật di chuyển $s(t)=\int v(t)dt=\int(-5t+10)dt=\frac{-5t^2}{2}+10t+C$

Tại thời điểm $t=0$ thì $s(t)=0$, do đó $C=0$ và $s(t)=\frac{-5t^2}{2}+10t=\frac{-5}{2}(t-2)^2+10\le 10$

Xe dừng hẳn khi được quãng đường $10(m)$ kể từ lúc đạp phanh

♦Trắc nghiệm: Khi vật dừng lại thì $v=0\Rightarrow-5t+10=0\Leftrightarrow t=2(s)$

Quãng đường vật đi được trong thời gian này là :

$s(t)=\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(-5t+10)dt=\left(\frac{-5t^2}{2}+10t\right)\Big|_0^2=10(m)$

Câu 72. **Chọn A.**

♦Tự luận: $s(t)=\int v(t)dt=\int 2\sqrt{t}\,dt=\int 2t^{\frac{1}{2}}dt=2.\dfrac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{4}{3}\sqrt{t^3}+C$

Câu 73. **Chọn D.**

Cách 1: $\int f(x)dx=\dfrac{1}{3}\int\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)d\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{3}\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)+C$.

Cách 2: sử dụng casio bấm shift $\int$ nhập $f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ tại $x=\dfrac{\pi}{3}$

Thay $x=\dfrac{\pi}{3}$ vào 4 đáp án rồi so sánh kết quả, suy ra đáp án D.

Câu 74. **Chọn C.**

Cách 1: Đặt $t=\sqrt[3]{x-2}\Rightarrow dx=3t^2dt$. Khi đó $\int\sqrt[3]{x-2}dx=\dfrac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2}+C$

Cách 2: sử dụng casio bấm shift $\int$ nhập $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ tại x = 10

Thay x = 10 vào 4 đáp án rồi so sánh kết quả, suy ra đáp án C.

Câu 75. **Chọn D.**

Cách 1 :Đặt $t=\sqrt{5-4x^2}\Rightarrow tdt=-4xdx$

Ta có $\int 2x\sqrt{5-4x^2}dx=-\dfrac{1}{2}\int t^2dt=-\dfrac{1}{6}t^3+C=-\dfrac{1}{6}\sqrt{\left(5-4x^2\right)^3}+C$

Cách 2: sử dụng casio bấm shift $\int$ nhập $\int 2x\sqrt{5-4x^2}dx$ tại x = 10

Thay x = 10 vào 4 đáp án so sánh rồi suy ra đáp án là D.

Câu 76. **Chọn B.**

Cách 1: $\int f(x)dx=\int\dfrac{\cos x}{\sin^5 x}dx=\int\dfrac{1}{\sin^5 x}d(\sin x)=-\dfrac{1}{4\sin^4 x}+C$

Cách 2: sử dụng máy tính.

Câu 77. **Chọn C.**

$\int\dfrac{1}{x-1}dx=\ln|x-1|+C$, vì $F(2)=1$ nên $C=1$.

$F(x)=\ln|x-1|+1$, thay $x=3$ ta có đáp án.

Câu 78. **Chọn D.**

Đặt $t=\sqrt{\ln^2 x+1}\Rightarrow tdt=\dfrac{\ln x}{x}dx$ $\int\sqrt{\ln^2 x+1}.\dfrac{\ln x}{x}dx=\int t^2dt=\dfrac{t^3}{3}+C=\dfrac{\left(\sqrt{\ln^2 x+1}\right)^3}{3}+C$.

Vì $F(1)=\dfrac{1}{3}$ nên $C=0$. Vậy $F^2(e)=\dfrac{8}{9}$.

Câu 79. **Chọn A.**

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow 2tdt=dx$

$\int x\sqrt{x+1}dx=\int\left(2t^4-2t^2\right)dt=\dfrac{2}{5}t^5-\dfrac{2}{3}t^3+C=\dfrac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5-\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+C$

Vì $F(0)=2$ nên $C=\frac{34}{15}$. Thay $x=3$ ta được đáp án.

Câu 80. **Chọn A.**

Đặt $t=\sqrt{\ln^2 x+3}$ và tính được $F(x)=\sqrt{\ln^2 x+3}+C$.

$F(e)=2016\Rightarrow C=2014\Rightarrow F(x)=\sqrt{\ln^2 x+3}+2014\Rightarrow F(1)=\sqrt{3}+2014$

Câu 81. **Chọn B.**

Đặt $\begin{cases}u=2x+3\\dv=e^x dx\end{cases}$ ta có $\begin{cases}du=2dx\\v=e^x\end{cases}$. Khi đó $I=(2x+3)e^x-\int 2e^x dx=(2x+1)e^x+C$

Câu 82. **Chọn C.**

♦Tự luận:Ta có : $\int\frac{\ln 2x}{x^2}dx$

Đặt : $\begin{cases}u=\ln 2x\\dv=\frac{1}{x^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\v=-\frac{1}{x}\end{cases}$

Khi đó : $\int\frac{\ln 2x}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln 2x+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln 2x-\frac{1}{x}+c=-\frac{1}{x}(\ln 2x+1)+C$.

♦Trắc nghiệm:

Cách 1: Thử phương án A SHIFT $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}(\ln 2x-1)\right)\Big|_{x=X}-\frac{\ln 2x}{x^2}$ CALC $x=\frac{e}{2}$ nếu kết quả bằng 0 thì chọn. Tương tự với các phương án khác.

Cách 2: "Đổ cận vào nguyên hàm"

Bằng máy tính Casio tính $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}\frac{\ln 2x}{x^2}$ kết quả gán vào biến A (Shift Sto A)

Kiểm tra phương án A : Tính $A-\left[F\left(\frac{e}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ nếu kết quả bằng 0 thì chọn. Tương tự với các phương án khác.

Câu 83. **Chọn D.**

♦Tự luận:Ta có : $\int x\sin 2xdx$

Đặt : $\begin{cases}u=x\\dv=\sin 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$

Khi đó : $\int x\sin 2x=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

♦Trắc nghiệm: Thử phương án A SHIFT $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_{x=X}-x\sin 2x$ CALC x = 0 nếu kết quả bằng 0 thì chọn. Tương tự với các phương án khác.

Câu 84. **Chọn C.**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases}$ ta có $\begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$.

Khi đó $\int x\sin 2x dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Vậy $F(x) = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

Ta có $F(0) + F(\pi) = C + \left(-\frac{\pi}{2} + C\right) = -\frac{\pi}{2} + 2C$. Mà $F(0) + F(\pi) = \frac{-\pi}{2}$ nên $C = 0$

Do đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$

Câu 85. **Chọn B.**

Ta có $\int f(x)\sin x dx = -\int f(x)\, d(\cos x)$

Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$\int f(x)\sin x dx = -\int f(x)\, d(\cos x) = -f(x)\cos x + \int \cos x d(f(x))$

$= -f(x)\cos x + \int f'(x)\cos x dx$

Mà theo giả thiết $\int f(x)\sin x\, dx = -f(x)\cos x + \int \pi^x \cos x\, dx$

Suy ra $f'(x) = \pi^x \Rightarrow f(x) = \int \pi^x dx = \frac{\pi^x}{\ln \pi} + C$

Câu 86. **Chọn C.**

♦ Tự luận: Ta có: $I = \int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \cos 3x d(e^{2x}) = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x} d(\cos 3x)$ (t/phần)

$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\int \sin 3x d(e^{2x})$ (từng phần lần 2)

$= \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}I$

Suy ra $I = e^{2x}\left(\frac{2}{13}\cos 3x + \frac{3}{13}\sin 3x\right) \Rightarrow a = \frac{2}{13}, b = \frac{3}{13} \Rightarrow a + b = \frac{5}{13}$

Câu 87. **Chọn C.**

$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{(1+x-1)e^x}{(1+x)^2} dx = \int \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right) e^x dx = \int \frac{e^x}{1+x} dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{1+x} \Rightarrow du = -\frac{1}{(1+x)^2} dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$.

Ta có $\int \frac{e^x}{1+x} dx = \frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$, suy ra $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = \frac{e^x}{1+x} + C = F(x), F(0) = 2 \Rightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = \frac{e^x}{1+x} + 1$.

Câu 88. **Chọn B.**

Đặt $I=\int(x\sin\sqrt{1+x^2})dx$

Dùng phương pháp đổi biến, đặt $t=\sqrt{1+x^2}$ ta được $I=\int t\sin t dt$

Dùng phương pháp nguyên hàm từng phần, đặt $u=t,\ dv=\sin t dt$

Ta được $I=-t\cos t-\int\cos t dt=-\sqrt{1+x^2}\cos\sqrt{1+x^2}-\sin\sqrt{1+x^2}+C$.

Câu 89. **Chọn B.**

Theo định lý về nguyên hàm từng phần ta chọn B.

Câu 90. **Chọn D.**

♦Tự luận: Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\sin x\end{cases}$

$\Rightarrow\int x\cos xdx=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C.$

♦Trắc nghiệm:

Kiểm tra phương án A đúng hay sai ta bấm SHIFT $\frac{d}{dx}\left(x\sin x-\cos x\right)\Big|_{x=X}-x.\cos x$ CALC

x = 0 nếu kết quả bằng 0 thì chọn. Tương tự với các phương án khác.

Câu 91. **Chọn C.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$

$\Rightarrow\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C.$ Chon $C=2$ ta được $F(x)=xe^x-e^x+2$

Câu 92. **Chọn A.**

$\begin{cases}u=\ln x\\dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\v=\frac{x^3}{3}\end{cases}\Rightarrow I=\int x^2\ln dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C.$

Câu 93. **Chọn A.**

Đặt $\begin{cases}u=4x+1\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=4dx\\v=e^x\end{cases}$

$\Rightarrow\int\left(4x+1\right)e^xdx=\left(4x+1\right)e^x-\int4e^xdx=\left(4x+1\right)e^x-4e^x+C=\left(4x-3\right)e^x+C$

Mà $F(1)=e\Rightarrow C=0$ nên $F(x)=\left(4x-3\right)e^x$

Câu 94. **Chọn C.**

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\cos3xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{3}\sin3x\end{cases}$

$\Rightarrow\int x\cos3xdx=\frac{x}{3}\sin3x-\frac{1}{3}\int\sin3xdx=\frac{x}{3}\sin3x+\frac{1}{9}\cos3x+C.$

Mà $F(0)=1\Rightarrow C=\frac{8}{9}$ nên $F(\frac{\pi}{3})=\frac{7}{9}$

Câu 95. **Chọn C.**

Đặt $\begin{cases} u=(x-3)^2 \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=3(x-3)dx \\ v=e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int (x-3)^2 e^x dx = (x-3)^2 e^x - 2\int (x-3)e^x dx$

Đặt $\begin{cases} u=x-3 \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int (x-3)^2 e^x dx = (x-3)^2 e^x - 2\int (x-3)e^x dx = (x-3)^2 e^x - 2\left[(x-3)e^x - \int e^x dx\right]$

$= (x^2-8x+17)e^x + C$

Mà $a=1; b=-8; c=17 \Rightarrow S=10$.

Câu 96. **Chọn D.**

$\int \frac{1+\ln x}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \int \frac{\ln x}{x^2} dx$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x} dx \\ v=-\frac{1}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{1+\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C = \frac{-1}{x}(\ln x + 2) + C$

$\Rightarrow a=-1; b=2 \Rightarrow S=1$

Câu 97. **Chọn A.**

Áp dụng công thức nguyên hàm từng phần ta có đáp án đúng là A.

Câu 98. **Chọn C.**

Ta có $f(x) = \int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$. Chọn đáp án C.

Câu 99. **Chọn A.**

$f(x) = \int x \sin x dx = \int x d(-\cos x) = -x\cos x + \sin x + C$,

$f(\pi) = 0 \to C = -\pi \to f(x) = -x\cos x + \sin x - \pi$

Nên $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{6}$.

Câu 100. **Chọn B.**

$\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int x.(\ln^2 x)' dx = x\ln^2 x - \int 2\ln x dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + x + d$

$= x(\ln^2 x - 2\ln x + 1) + d$

Suy ra $a=1, b=-2, c=1$ Vậy $P=-2$

Câu 101. **Chọn D.**

$F(x) = \int \sin x.\ln(\cos x) dx = -\int \ln(\cos x) d(\cos x) = -\cos x.\ln(\cos x) + \int \sin x dx$

$= -\cos x.\ln(\cos x) - \cos x + C$

Câu 102. **Chọn C.**

$\int x(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx = \int x(1+\sin x) dx = \int x dx + \int x\sin x dx = \frac{x^2}{2} - x\cos x + \sin x + C$

Câu 103. **Chọn A.**

$u=\ln\frac{1+x}{1-x}, dv=xdx$ suy ra $du=\frac{2}{1-x^2}, v=\frac{x^2}{2}$

$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int(1-\frac{1}{1-x^2})dx$

$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int(1+\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}))dx$

$=x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$

Câu 104. **Chọn A.**

$I=\int\cos 2x.e^{3x}dx=\int\cos 2xd(\frac{e^{3x}}{3})=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\int\sin 2xe^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\int\sin 2xd(\frac{e^{3x}}{3})$

$=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x-\frac{4}{9}\int\cos 2x.e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x-\frac{4}{9}I$

$\rightarrow I=\frac{e^{3x}}{13}(3\cos 2x+2\sin 2x)+C$

Câu 105. **Chọn B.**

Câu 106. **Chọn B.**

Câu 107. **Chọn C.**

♦ Tự luận: Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có :

$I=\int xe^xdx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-\int d\left(e^x\right)=xe^x-e^x+C$.

♦ Trắc nghiệm:

Cách 1:Dùng định nghĩa, sử dụng máy tính nhập $\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)-f(x)$, CALC ngẫu nhiên tại một số điểm x_0 thuộc tập xác định, kết quả bằng 0 chọn.

Cách 2: Dùng phương pháp đường chéo.

Câu 108. **Chọn A.**

♦Tự luận: Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\cos x\end{cases}$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có

$F(x)=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$

♦Trắc nghiệm:

Cách 1: Dùng định nghĩa, sử dụng máy tính nhập $\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)-f(x)$, CALC ngẫu nhiên tại một số điểm x_0 thuộc tập xác định, kết quả bằng 0 chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp đường chéo.

Vậy $F(x)=\sin x-x\cos x+C$.

Câu 109. **Chọn A.**

♦Tự luận: $F\left(x\right)=\int(2x-1)e^{1-x}dx=e^{1-x}(Ax+B)+C$

Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^{1-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -e^{1-x} \end{cases}$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có

$F(x) = -(2x-1)e^{1-x} + \int 2e^{1-x}dx = -(2x-1)e^{1-x} - 2e^{1-x} + C = (-2x-1)e^{1-x} + C$

Vậy $A + B = -3$.

♦Trắc nghiệm:Sử dụng phương pháp đường chéo

Câu 110. Chọn A.

♦Tự luận: Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int x \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

Theo bài ra, có: $F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.1.\ln 1 - \frac{1}{4}.1^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{4}$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$.

♦Trắc nghiệm:

Cách 1:Dùng định nghĩa, sử dụng máy tính nhập $\frac{d}{dx}(F(x)) - f(x)$, CALC ngẫu nhiên tại một số điểm x_0 thuộc tập xác định, kết quả bằng 0 chọn.

Cách 2: Dùng phương pháp bảng

Câu 111. Chọn B.

Cách 1: $F(x) = \int xe^{\frac{x}{2}}dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{\frac{x}{2}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$

Khi đó: $F(x) = 2xe^{\frac{x}{2}} - 2\int e^{\frac{x}{2}}dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + C$.

Theo giả thiết: $F(0) = -1 \Leftrightarrow -4 + C = -1 \Leftrightarrow C = 3$.

$F(x) = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + 3 \Rightarrow F(4) = 8e^2 - 4e^2 + 3 = 4e^2 + 3$.

Cách 2: $\int_0^4 xe^{\frac{x}{2}}dx = F(4) - F(1) \Rightarrow F(4) = \int_0^4 xe^{\frac{x}{2}}dx + F(1) = 32,556224 \approx 4e^2 + 3$

Câu 112. Chọn D.

♦ Tự luận: $F(x) = \int x \sin x \cos x dx = \int \frac{1}{2}x \sin 2x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{2}x \\ dv = \sin 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{2}dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$$F(x)=\frac{-1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{4}\int\cos 2xdx=\frac{-1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$$

♦ Trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow F'(x)-f(x)=0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)-f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng.

Câu 113. Chọn A.

♦Tự luận: Dùng nguyên hàm từng phần 2 lần.

♦Trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow F'(x)-f(x)=0$.

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)-f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả bằng 0 thì chọn.

Do đó $\int x\ln^2 xdx=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C=\frac{1}{4}x^2\left(2\ln^2 x-2\ln x+1\right)+C$.

Câu 114. Chọn A.

♦Tự luận: $F(x)=\int x^2\cos xdx$. Đặt $\begin{cases}u=x^2\\dv=\cos xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\v=\sin x\end{cases}$

$$F(x)=x^2\sin x-\int 2x\sin xdx$$

Đặt $\begin{cases}u=2x\\dv=\sin xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=-\cos x\end{cases}$

$$F(x)=x^2\sin x-\left(-2x\cos x+\int 2\cos xdx\right)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

♦Trắc nghiệm:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow F'(x)-f(x)=0$

Nhập máy tính $\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)-f(x)$. CALC x tại một số giá trị ngẫu nhiên x_0 trong tập xác định, nếu kết quả bằng 0 thì chọn.

Cách 2: Sử dụng phương pháp bảng.

Câu 115. Chọn A.

♦Tự luận: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=xdx\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

Khi đó $F\left(x\right)=\int x\ln xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$

♦Trắc nghiệm: Sử dụng chức năng CALC kết hợp với shift+ Tích phân để tính đạo hàm để kiểm tra tại một số điểm $x_0,x_1,...$ nếu thấy kết quả trùng hợp thì lựa chọn.

Câu 116. Chọn B.

♦Tự luận: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{\sin 2x}{2} \end{cases}$.

Khi đó $F(x) = \int x\cos 2x dx = \dfrac{x\sin 2x}{2} - \int \dfrac{\sin 2x}{2} dx. = \dfrac{x\sin 2x}{2} + \dfrac{\cos 2x}{4} + C.$

Do $F(0) = \dfrac{1}{4}.$ nên $C = 0.$

Từ đó suy ra $F(\pi) = \dfrac{1}{4}.$

♦Trắc nghiệm: Dùng máy tính, tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$. Mặt khác, ta có

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - F(0)$. Từ đó suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = F\left(\dfrac{\pi}{4}\right).$

Câu 117. Chọn A.

♦ Tự luận: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$.

Khi đó $F(x) = \int xe^{2x} dx = \dfrac{xe^{2x}}{2} - \int \dfrac{e^{2x}}{2} dx. = \dfrac{xe^{2x}}{2} - \dfrac{e^{2x}}{4} + C.$

Do $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ nên $C = 0.$

Suy ra $F(x) = \dfrac{xe^{2x}}{2} - \dfrac{e^{2x}}{4} = \dfrac{1}{4}(2x-1)e^{2x}.$

♦ Trắc nghiệm: Sử dụng chức năng CALC kết hợp với shift+ Tích phân để tính đạo hàm để kiểm tra tại một số điểm $x_0, x_1, \ldots$ nếu thấy kết quả trùng hợp thì lựa chọn.

Câu 118. Chọn B.

♦Tự luận: Ta có $\int f(x) dx = (x+1)\left[\ln(x+1) - 1\right] + C.$

$\Rightarrow f(x) = \left[(x+1)\left[\ln(x+1) - 1\right] + C\right]' = \ln(x+1)$. Từ đó ta có $f(0) = 0.$

♦Trắc nghiệm: Sử dụng chức năng shift+ Tích phân để tính đạo hàm tính đạo hàm hàm số $y = (x+1)\left[\ln(x+1) - 1\right]$ tại điểm $0.$

Câu 119. Chọn A.

♦Tự luận: Ta có $I = \int \sqrt{x^2+3} dx = \int \dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}} dx = \int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} dx + \int \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}} dx.$

Lại có $J = \int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} dx = \int \dfrac{x.x}{\sqrt{x^2+3}} dx.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} dx \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} du = dx \\ v = \sqrt{x^2+3} \end{cases}$.

Suy ra $J = x\sqrt{x^2+3} - I$. Vậy nên $2I = x\sqrt{x^2+3} + 3\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) + C$.

Vậy $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+3} + \frac{3}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) + C$.

♦Trắc nghiệm: Sử dụng chức năng CALC kết hợp với shift+ Tích phân để tính đạo hàm để kiểm tra tại một số điểm $x_0, x_1, \ldots$ nếu thấy kết quả trùng hợp thì lựa chọn.

Câu 120. Chọn A.

♦ Tự luận:

Đặt $t = \sqrt{x}$ suy ra $I = \int t^3 \cos t dt$.

Đặt $\begin{cases} u = t^3 \\ dv = \cos t dt \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} du = 3t^2 dt \\ v = \sin t \end{cases}$.

Suy ra $I = t^3 \sin t - 3\int t^2 \cos t dt$.

Tiếp tục tích phân từng phần 2 lần nữa ta được

$F(t) = t^3 \sin t + 3x^2 \cos t - 6\left(t\sin t + \cos t\right) + C$.

Vậy $F(x) = x\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 3x\cos\sqrt{x} - 6\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right) + 1$.

♦ Trắc nghiệm: Sử dụng chức năng CALC kết hợp với shift+ Tích phân để tính đạo hàm để kiểm tra tại một số điểm $x_0, x_1, \ldots$ nếu thấy kết quả trùng hợp thì lựa chọn.

Câu 121. Chọn D.

Chú ý sử dụng mệnh đề hàm số không liên tục trên R thì không tồn tại nguyên hàm.

Câu 122. Chọn A.

Đặt $\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = x^2 dx \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} du = 2\frac{\ln x}{x} dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$.

Khi đó $F(x) = \int x^2 (\ln x)^2 dx = \frac{x^3(\ln x)^2}{3} - \frac{2}{3}\int x^2 \ln x dx$.

Xét $\int x^2 \ln x dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$.

Suy ra $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$

Do vậy $F(x) = \frac{x^3(\ln x)^2}{3} - \frac{2}{9}x^3 \ln x + \frac{2}{27}x^3 = x^3\left(\frac{(\ln x)^2}{3} - \frac{2}{9}\ln x + \frac{2}{27}\right)$.

Hay $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{2}{9}, c\frac{2}{27}$.. Từ đó suy ra $P = 0$.

Câu 123. Chọn A.

Câu 124. Chọn C.

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \sin 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

Khi đó $\int (x+1).\sin 3xdx = -\frac{1}{2}.(x+1)\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx = -\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

$= \frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 2x - x) + C$

Câu 125. Chọn B.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$. Khi đó $\int x.e^x dx = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + c = e^x(x-1) + C$

Câu 126. Chọn D.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x^2 \end{cases}$. Khi đó $\int x.\ln xdx = x^2.\ln x - \int x^2 dx = x^2.\ln x - \frac{x^3}{3} + C$

Vì $F(1) = \frac{2}{3}$ ta có $F(1) = -\frac{1}{3} + C = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 1$. Vậy $F(x) = x^2.\ln x - \frac{x^3}{3} + 1$

Câu 127. Chọn B.

$f(x) = x\cos^2\frac{x}{2} = x.\frac{1+\cos x}{2} = \frac{1}{2}(x+1).\cos x \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2}\int (x+1)\cos xdx$

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \cos xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$\Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2}\int (x+1)\cos xdx = \frac{1}{2}(x+1)\sin x - \frac{1}{2}\int \sin xdx = \frac{1}{2}(x+1)\sin x + \frac{1}{2}\cos x + C$

Vì $F(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0$. Vậy $F(x) = \frac{1}{2}(x+1)\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

Do đó $F(\pi) = -\frac{1}{2}$.

Câu 128. Chọn C.

Đặt $\begin{cases} u = ax+b \\ dv = \cos xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = adx \\ v = \sin x \end{cases}$

Khi đó $\int f(x)dx = (ax+b).\sin x - \int a\sin xdx$

$= (ax+b)\sin x + a\cos x + C = ax.\sin x + b\sin x + a\cos x + C \Rightarrow a = 1, b = 2$

Vậy $S = a^2 + b^2 = 5$

Câu 129. Chọn D.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$. Khi đó $F(x) = -x.e^{-x} + \int e^{-x}dx = -x.e^{-x} - e^{-x} + C$

Vì $F(0) = -1 \Rightarrow -1 + C = -1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = -x.e^{-x} - e^{-x}$

Phương trình $F(x) + x + 1 = 0 \Leftrightarrow -x.e^{-x} - e^{-x} + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -e^{-x}(x+1)+(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(e^{-x}-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ e^{-x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$. Vậy $S=-1+0=-1$

Câu 130. **Chọn A.**

Ta có $f(x)=\int g(x)dx=\int x(1-x).e^{-x}dx=\int (x-x^2).e^{-x}dx.$

Đặt $\begin{cases} u=(x-x^2) \\ dv=e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(1-2x)dx \\ v=-e^{-x} \end{cases}$

Khi đó $f(x)=-(x-x^2)e^{-x}+\int (1-2x).e^{-x}dx$

Đặt $\begin{cases} u'=(1-2x) \\ dv'=e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-2dx \\ v=-e^{-x} \end{cases}$

Khi đó $f(x)=-(x-x^2)e^{-x}-(1-2x).e^{-x}-2\int e^{-x}dx$

$f(x)=-(x-x^2)e^{-x}-(1-2x).e^{-x}+2.e^{-x}+C=e^{-x}\left(x^2+x+1\right)+C$

Suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$. Vậy $A=a+2b+3c=6$

Câu 131. **Chọn A.**

Câu 132. **Chọn A.**

♦ Tự luận: Đặt $\begin{cases} u=1-x \\ dv=\cos xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-dx \\ v=\sin x \end{cases}$

$\Rightarrow \int (1-x)\cos xdx=(1-x)\sin x+\int \sin xdx=(1-x)\sin x-\cos x+C.$

♦ Trắc nghiệm: Thử phương án A SHIFT $\frac{d}{dx}\left((1-x)\sin x-\cos x\right)\Big|_{x=X}-(1-x)\cos x$ CALC x = 0 nếu kết quả bằng 0 thì chọn. Tương tự với các phương án khác.

Câu 133. **Chọn B.**

♦Tự luận: Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int x.e^x dx=x.e^x-\int e^x dx=x.e^x-e^x+C.$

♦Trắc nghiệm: Thử phương án A SHIFT $\frac{d}{dx}\left(x.e^x+e^x\right)\Big|_{x=X}-x.e^x$ CALC x = 0 nếu kết quả bằng 0 thì chọn. Tương tự với các phương án khác.

Câu 134. **Chọn D.**

♦Tự luận: Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\sin(2x+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\frac{-1}{2}\cos(2x+1) \end{cases}$

$\Rightarrow \int x\sin(2x+1)dx=-\frac{1}{2}x.\cos(2x+1)+\frac{1}{2}\int \cos(2x+1)dx$

$=-\frac{1}{2}x.\cos(2x+1)+\frac{1}{4}\sin(2x+1)+C.$

♦Trắc nghiệm: Thử phương án A SHIFT

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{2}\cos(2x+1)-\frac{1}{4}\sin(2x+1)\right)\Big|_{x=X} - x.\sin(2x+1)$ CALC x = 0 nếu kết quả bằng 0 thì chọn. Tương tự với các phương án khác.

Câu 135. Chọn A.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2b + a = 0.$

Câu 136. Chọn C.

♦Tự luận:

Đặt $t = \ln x \Rightarrow I = \int \ln t dt.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t}dt \\ v = t \end{cases} \Rightarrow I = t\ln t - \int dt = t\ln t - t + C = \ln x.\ln(\ln x) - \ln x + C.$

♦Trắc nghiệm:Thử phương án A SHIFT CALC x = 2 nếu kết quả bằng 0 thì chọn. Tương tự với các phương án khác.

Câu 137. Chọn D.

♦Trắc nghiệm: Thử phương án A SHIFT CALC x = 2 nếu kết quả bằng 0 thì chọn. Tương tự với các phương án khác.

Câu 138. Chọn C.

Câu 139. Chọn C.

Có $F(x) = \int f(x)dx = \int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C$.

$F(0) = \pi \Leftrightarrow \frac{\sin^4 \pi}{4} + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi$.

$F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + \pi \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2}}{4} + \pi = \frac{1}{4} + \pi.$

Câu 140. Chọn D.

$F(x) = \int f(x)dx = \int (3x^2 + 2x + 1)dx = x^3 + x^2 + x + C$

Đồ thị hàm số $F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $e \Leftrightarrow F(0) = e \Leftrightarrow C = e$.

$\Rightarrow F(x) = x^3 + x^2 + x + e$

Câu 141. Chọn B.

$\int \sqrt[3]{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int (2x+1)^{\frac{1}{3}}d(2x+1) = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8}(2x+1)^{\frac{4}{3}} + C. \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{8} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow P = a.b = \frac{1}{2}$

Câu 142. Chọn D.

$$\int x\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}d\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{5}\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}+C$$

Câu 143. Chọn A.

Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2,dx=2tdt$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{\left(1-x\right)\sqrt{x}}dx=\int\frac{1}{\left(1-t^2\right)t}2tdt=\int\frac{2}{\left(1-t\right)\left(1+t\right)}dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|+C$$

Câu 144. Chọn B.

Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2,dx=2tdt$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{1-\sqrt{x}}dx=\int\frac{2tdt}{1-t}=-2\int\left(1-\frac{1}{1-t}\right)dt=-2\left(t+\ln\left|1-t\right|\right)+C=-2\left(\sqrt{x}+\ln\left|1-\sqrt{x}\right|\right)+C$$

Câu 145. Chọn D.

Đặt $\sqrt{2-5x}=t\Rightarrow 2-5x=t^2,-5dx=2tdt$

$$\Rightarrow\int x\sqrt{2-5x}dx=-\int\frac{2-t^2}{5}t.\frac{2}{5}tdt=\frac{2}{25}\int\left(t^4-2t^2\right)dt=\frac{2}{25}\left(\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}\right)+C$$

$$=\frac{2t^3}{375}\left(3t^2-10\right)+C=\frac{2\sqrt{\left(2-5x\right)^3}}{375}\left(3\left(2-5x\right)-10\right)+C=\frac{-30x-8}{375}\sqrt{\left(2-5x\right)^3}+C$$

Câu 146. Chọn C.

Đặt $\sqrt[3]{1+x^3}=t\Rightarrow 1+x^3=t^3,3x^2dx=3t^2dt$

$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx=\int t.t^2dt=\int t^3dt+C=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^4}+C$$

Câu 147. Chọn A.

Đặt $\sqrt{\sin x-\cos x}=t\Rightarrow\sin x-\cos x=t^2,\left(\cos x+\sin x\right)dx=2tdt$

$$\int\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}dx=\int\frac{2t}{t}dt=2\int dt=2t+C=2\sqrt{\sin x-\cos x}+C$$

Câu 148. Chọn C.

Đặt $\cos x=t\Rightarrow-\sin xdx=dt$

$$\Rightarrow\int\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx=\int\frac{-dt}{\sqrt[3]{t^2}}=-\int t^{-\frac{2}{3}}dt=-\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=-3\sqrt[3]{t}+C=-3\sqrt[3]{\cos x}+C\ .$$

Câu 149. Chọn C.

Đặt $3-x=t\Rightarrow-dx=dt$

$$\Rightarrow\int x\left(3-x\right)^5dx=-\int\left(3-x\right)t^5dt=\int\left(t^6-3t^5\right)dt=\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{2}+C$$

$$=\frac{(3-x)^7}{7}-\frac{(3-x)^6}{2}=(3-x)^6\left(\frac{3-x}{7}-\frac{1}{2}\right)+C$$

Câu 150. **Chọn C.**

$$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}+2}=\int\frac{dx}{e^x+\frac{1}{e^x}+2}=\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+1+2e^x}=\int\frac{e^xdx}{(e^x+1)^2}$$

Đặt $e^x+1=t\Rightarrow e^xdx=dt$

$$\Rightarrow\int\frac{e^xdx}{(e^x+1)^2}=\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{e^x+1}+C.$$

Câu 151. **Chọn B.**

Đặt $1+x^2=t\Rightarrow 2xdx=dt$

$$\Rightarrow\int\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{2t}+C=-\frac{1}{2(1+x^2)}+C.$$

Câu 152. **Chọn A.**

$$\int\frac{1}{e^x-e^{-x}}dx=\int\frac{1}{e^x-\frac{1}{e^x}}dx=\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$$

Đặt $e^x=t\Rightarrow e^xdx=dt$

$$\Rightarrow\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx=\int\frac{1}{t^2-1}dt=\int\frac{1}{(t-1)(t+1)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C.$$

Câu 153. **Chọn D.**

$$\int\frac{\sin^3x}{\cos^3x}dx=\int\frac{\sin^2x\sin x}{\cos^2x}dx=\int\frac{(1-\cos^2x)\sin x}{\cos^2x}dx$$

Đặt $\cos x=t\Rightarrow-\sin xdx=dt$

$$\Rightarrow\int\frac{(1-\cos^2x)\sin x}{\cos^2x}dx=-\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=\int\frac{t^2-1}{t^2}dt=\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=t+\frac{1}{t}+C=\cos x+\frac{1}{\cos x}+C.$$

Câu 154. **Chọn C.**

Đặt $-x^2=t\Rightarrow-2xdx=dt$

$$\Rightarrow\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^tdt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$$

Cách khác $\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$

Câu 155. **Chọn D.**

Đặt $\ln x=t\Rightarrow\frac{1}{x}dx=dt.$

$$\Rightarrow\int\frac{\ln^2x}{x}dx=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{3}\ln^3+C$$

Cách khác: $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^3 + C$

Câu 156. **Chọn C.**

Đặt $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$\Rightarrow \int \cos x \sin^3 x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$

Cách khác: $\int \cos x \sin^3 x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$.

Câu 157. **Chọn D.**

Đặt: $\frac{1}{x} = t \Rightarrow -\frac{1}{x^2}dx = dt \Rightarrow \int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = -\int \sin t dt = \cos t + C = \cos\frac{1}{x} + C$.

Cách khác: $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = -\int \sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x} + C$.

Câu 158. **Chọn A.**

Đặt: $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$.

$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^4 x dx = -\int (1-t^2)t^4 dt = -\int (t^4 - t^6)dt$

$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = t^5\left(\frac{t^2}{7} - \frac{1}{5}\right) + C$

$\Rightarrow \int \sin^3 x \cos^4 x dx = \cos^5 x\left(\frac{\cos^2 x}{7} - \frac{1}{5}\right) + C$

Câu 159. **Chọn C.**

Đặt: $\begin{cases} x = u \\ \sin(2x+1)dx = dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = du \\ v = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) \end{cases}$

$\Rightarrow \int x.\sin(2x+1)dx = -\frac{x}{2}cos(2x+1) + \frac{1}{2}\int \cos(2x+1)dx = -\frac{x}{2}cos(2x+1) + \frac{1}{4}\sin(2x+1) + C$

Câu 160. **Chọn C.**

Đặt: $\begin{cases} 1-x = u \\ \cos x dx = dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -dx = du \\ v = \sin x \end{cases}$

$\Rightarrow \int (1-x)\cos x dx = (1-x)\sin x - \int \sin x dx = (1-x)\sin x - \cos x + C$

Câu 161. **Chọn A.**

Đặt: $\begin{cases} 2-x = u \\ \sin x dx = dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -dx = du \\ v = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow \int (2-x)\sin x dx = -(2-x)\cos x - \int \cos x dx = (x-2)\cos x - \sin x + C$

Câu 162. **Chọn B.**

Đặt: $\begin{cases} x = u \\ \frac{1}{\sin^2 x}dx = dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = du \\ v = -\cot x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\sin^2 x}dx = -x\cot x + \int \cot x dx = -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = -x\cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$
$$= -x\cot x + \ln|\sin x| + C$$

Câu 163. **Chọn C.**

Đặt: $\begin{cases} x = u \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = du \\ v = \tan x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\cos^2 x}dx = -x\tan x + \int \tan x dx = -x\tan x + \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -x\tan x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$
$$= -x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

Câu 164. **Chọn A.**

$$\int x\sin^2 x dx = \int x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int (x - x\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int x dx - \frac{1}{2}\int x\cos 2x dx$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos 2x dx$$

Đặt: $\begin{cases} x = u \\ \cos 2x dx = dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = du \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right] + C$$
$$= \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

$$\Rightarrow \int x\sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

Câu 165. **Chọn D.**

Đặt: $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2dt \Rightarrow \int \cos\sqrt{x}dx = 2\int t\cos t dt$

Đặt: $\begin{cases} t = u \\ \cos t dt = dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dt = du \\ v = \sin t \end{cases}$

$$2\int t\cos t dt = 2\left[t\sin t - \int \sin t dt\right] = 2\left[t\sin t + \cos t\right] + C$$
$$= 2\left[\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right] + C = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$$

Câu 166. **Chọn B.**

Đặt $\begin{cases} x^2 = u \\ \cos 2x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x dx = du \\ v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{cases} \Rightarrow \int x^2\cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \int x\sin 2x dx$

Đặt $\begin{cases} x = u \\ \sin 2x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int x\sin 2x dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\Rightarrow \int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \left(-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \right) + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C .$$

Câu 167. **Chọn A.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} 1-2x = u \\ e^x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2dx = du \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int (1-2x)e^x dx = (1-2x)e^x + 2\int e^x dx = (1-2x)e^x + 2e^x + C = (3-2x)e^x + C .$$

Câu 168. **Chọn C.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = u \\ e^{-x} dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(1+x)e^{-x} + C .$$

Câu 169. **Chọn A.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = u \\ e^{2x} dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{3} e^{2x} dx = \frac{1}{3}\int xe^{2x} dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} \right] + C = \frac{1}{6}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2} \right) + C .$$

Câu 170. **Chọn B.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = u \\ e^x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x+2)dx = du \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = (x^2 + 2x - 1)e^x - \int (2x+2)e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} 2x + 2 = u \\ e^x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2dx = du \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int (2x+2)e^x dx = (2x+2)e^x - 2\int e^x dx = (2x+2)e^x - 2e^x + C = 2xe^x + C$$

$$\Rightarrow \int (x^2 + 2x - 1)e^x dx = (x^2 + 2x - 1)e^x - 2xe^x + C = e^x(x^2 - 1) + C .$$

Chủ đề 2

TÍCH PHÂN

☆☆☆

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a;b]$. Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$ của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta dùng kí hiệu $F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b)-F(a)$. Vậy $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b$. Vậy $S=\int_a^b f(x)dx$.

II. TÍCH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

Giả sử cho hai hàm số f và g liên tục trên K; a,b,c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó ta có:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. $\int_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
5. $\int_a^b kf(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$.
6. Nếu $f(x)\ge 0 \ \forall x\in[a;b]$ thì: $\int_a^b f(x)dx \ge 0 \ \forall x\in[a;b]$
7. Nếu: $\forall x\in[a;b]: f(x)\ge g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$. (Bất đẳng thức trong tích phân)
8. Nếu: $\forall x\in[a;b]$ và với hai số M,N ta luôn có: $M\le f(x)\le N$. Thì:

$M(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le N(b-a)$. (Tính chất giá trị trung bình của tích phân)

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Thực ra việc đi tính tích phân chính là việc đi tìm nguyên hàm rồi thay cận vào. Các em có thể xem lại bảng nguyên hàm của các hàm số thường gặp thầy đã đưa ra ở lý thuyết phần nguyên hàm.

I. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH, DÙNG VI PHÂN VÀ SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

1. Kiến thức và kỹ năng:

Kỹ năng: Cần biết phân tích $f(x)$ thành tổng, hiệu, tích, thương của nhiều hàm số khác, mà ta có thể sử dụng được trực tiếp bảng nguyên hàm cơ bản tìm nguyên hàm của chúng, kết hợp với các tính chất của tích phân để tính.

Phương pháp vi phân:

Một bài toán có thể làm ngắn gọn không cần đưa ra biến mới (phương pháp đổi biến); tức là không cần đặt $t=t(x)$, biến lấy tích phân vẫn là biến x, như vậy cận lấy tích phân không đổi.

Giả sử ta cần tìm tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x)=g\left(u(x)\right)u'(x)$,ta có thể trình bày gọn bài toán bằng công thức vi phân $u'(x)dx=d\left[u(x)\right]$. Khi đó, nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$ và $u=u(x)$ là một hàm số theo biến x thì:

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g\left[u(x)\right]d\left[u(x)\right]=G\left[u(x)\right]\Big|_a^b$$

2. Một số bài toán minh họa

a. Sử dụng tích chất của tích phân

Bài toán 1: Tính các tích phân sau:

$a)\ I=\int_0^1\left(4x^3-e^x\right)dx$

$b)\ I=\int_1^2\left(3^x-\frac{1}{x}\right)dx$

$c)\ I=\int_1^2 e^x\ln x dx+\int_1^2 e^t\left(1-\ln t\right)dt$

$d)\ I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\frac{t}{2}\ln t dt+\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{u}{2}\left(\ln u-\sin\frac{u}{2}\right)du$

Lời giải:

$a)\ I=\int_0^1\left(4x^3-e^x\right)dx=\int_0^1 4x^3dx-\int_0^1 e^x dx=x^4\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1=1-\left(e-1\right)=2-e.$

$b)\ I=\int_1^2\left(3^x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2 3^x dx-\int_1^2\frac{1}{x}dx=\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_1^2-\ln|x|\Big|_1^2=\frac{1}{\ln 3}(9-3)-\ln 2=\frac{6}{\ln 3}-\ln 2.$

$c)\ I=\int_1^2 e^x\ln x dx+\int_1^2 e^t\left(1-\ln t\right)dt=\int_1^2 e^x\ln x dx+\int_1^2 e^x\left(1-\ln x\right)dx=\int_1^2 e^x dx=e^2-e.$

$d)\ I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\frac{t}{2}\ln t dt+\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{u}{2}\left(\ln u-\sin\frac{u}{2}\right)du=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\frac{x}{2}\ln x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\frac{x}{2}\left(\ln x-\sin\frac{x}{2}\right)dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{2}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

Bài toán 2: Cho biết $\int_1^2 f(x)dx=-4$, $\int_1^5 f(x)dx=6$, $\int_1^5 g(x)dx=8$. Tính: $\int_2^5 f(x)dx$, $\int_1^5\left[4f(x)-g(x)\right]dx$?

Lời giải:

a) Ta có: $\int_1^5 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^5 f(x)dx\Leftrightarrow\int_2^5 f(x)dx=\int_1^5 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx=10.$

b) Ta có: $\int_1^5\left[4f(x)-g(x)\right]dx=4\int_1^5 f(x)dx-\int_1^5 g(x)dx=4.6-8=16.$

Bài toán 3: Cho f,g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]dx=10$; $\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]dx=6$. Tính $\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]dx$.

Lời giải:

Ta có $\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]dx=10\Leftrightarrow\int_1^3 f(x)dx+3\int_1^3 g(x)dx=10$.

Tương tự $\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]dx=6\Leftrightarrow2\int_1^3 f(x)dx-\int_1^3 g(x)dx=6$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}u+3v=10\\2u-v=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=4\\v=2\end{cases}$, trong đó $u=\int_1^3 f(x)dx$, $v=\int_1^3 g(x)dx$.

Khi đó $\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=4+2=6$.

b. Sử dụng phương pháp phân tích và phương pháp vi phân

Bài toán 4: Tính các tính phân sau:

a) $I=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^3}$. *b)* $I=\int_0^1\frac{2x+9}{x+3}dx$. *c)* $I=\int_1^2\frac{x\left(2\sqrt{x^4-1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx$. *d)* $I=\int_0^1\frac{x^2}{(x+1)^3}dx$

Lời giải:

a) $I=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^3}=\int_0^1\frac{d(1+x)}{(1+x)^3}=-\frac{1}{2(1+x)^2}\Big|_0^1=\frac{3}{8}$.

b) $I=\int_0^1\frac{2x+9}{x+3}dx=\int_0^1\left(2+\frac{3}{x+3}\right)dx=\left(2x+3\ln(x+3)\right)\Big|_0^1=3+6\ln2-3\ln3$.

c) $I=\int_1^2\frac{x\left(2\sqrt{x^4-1}+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_1^2\left(\frac{2x\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\int_1^2\left(2x\sqrt{x^2-1}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$

$$= \int_1^2 2\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 d\left(\sqrt{x^2-1}\right) + \int_1^2 d\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3\Big|_1^2 + \sqrt{x^2+1}\Big|_1^2$$
$$= 2\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

d) $I = \int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^3}dx = \int_0^1 \frac{(x+1-1)^2}{(x+1)^3}dx = \int_0^1 \left[\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3} - 2\frac{x+1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3}\right]dx$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} - 2\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}\right]dx = \int_0^1 \frac{d(x+1)}{x+1} - 2\int_0^1 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} + \int_0^1 \frac{d(x+1)}{(x+1)^3}$$
$$= \ln|x+1|\Big|_0^1 + 2\frac{1}{x+1}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\Big|_0^1 = \ln 2 + \frac{3}{8}$$

Bài toán 5: Tính các tích phân sau: *a)* $I = \int_0^1 \frac{(4x+11)dx}{x^2+5x+6}$. *b)* $I = \int_0^1 \frac{(x^2+3x+10)dx}{x^2+2x+9}$.

Lời giải:

a) Biến đổi: $\frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{(x+2)(x+3)}$.

Đồng nhất đẳng thức, ta được: $\begin{cases} A+B=4 \\ 3A+2B=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}$.

Do đó: $I = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)dx = \left(3\ln|x+2| + \ln|x+3|\right)\Big|_0^1 = \ln\frac{9}{2}$.

b) Biến đổi: $\frac{x^2+3x+10}{x^2+2x+9} = 1 + \frac{x+1}{x^2+2x+9} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{2x+2}{x^2+2x+9}$.

Khi đó: $I = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}.\frac{2x+2}{x^2+2x+9}\right)dx = \int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(x^2+2x+9\right)}{x^2+2x+9} = \left(x + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+9|\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.

Nhận xét: Như vậy, để tính được các tích phân trên chúng ta phân tích hàm phân thức hữu tỉ thành những hàm nhỏ (phương pháp này đã được trình bày trong chủ đề về nguyên hàm).

Bài toán 6: Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 7x \sin 2x dx$ *b)* $I = \int_0^{\pi/4} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)dx$ *c)* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + \sin^2 x - \sin x}{x + \cos x}dx$

Lời giải:

a) Ta có: $I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 5x - \cos 9x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{9}\sin 9x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{90}\left(9\sin 5x - 5\sin 9x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \frac{1}{90}\left[(9-5) - (-9+5)\right] = \frac{4}{45}.$$

b) Ta có: $I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi-2}{8}$.

c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+\sin^2 x-\sin x}{x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2-\cos^2 x+1-\sin x}{x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x-\cos x)(x+\cos x)+1\sin x}{x+\cos x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(x+\cos x)}{x+\cos x}$

$=\left(\frac{x^2}{2}-\sin x+\ln|x+\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}-1+\ln\frac{\pi}{2}$

Bài toán 7: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$ *b)* $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx$ *c)* $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x dx$

Lời giải:

a) $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}\right)dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\right)dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x+\cos x-\sin x)dx=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=1$.

b) $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{2\cos x(2+\sin x)-4\cos x}{(2+\sin x)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx-4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}dx$

$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d(2+\sin x)}{2+\sin x}dx-4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=\left(2\ln|2+\sin x|+\frac{4}{2+\sin x}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=2\ln 2-2.$

c) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\tan^3 x-\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x(1+\tan^2 x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x d(\tan x)+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos x)}{\cos}$

$=\frac{\tan^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2.$

Bài toán 8: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ *b)* $\int\limits_1^e \frac{x+1+\left(x^2+1\right)\ln x}{1+x\ln x}dx$

c) $I=\int\limits_1^e \frac{2x^3+1+\left(x^4+1\right)\ln x}{2+x\ln x}dx$ *d)* $I=\int\limits_1^e \frac{1+x^2\ln x}{x+x^2\ln x}dx$

Lời giải:

a) $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\int\limits_0^1 (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx=\frac{2}{3}\left[\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$

b) $\int\limits_1^e \frac{x+1+\left(x^2+1\right)\ln x}{1+x\ln x}dx=\int\limits_1^e \frac{x\left(1+x\ln x\right)+1+\ln x}{1+x\ln x}dx=\int\limits_1^e xdx+\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^e+\int\limits_1^e \frac{d\left(1+x\ln x\right)}{1+x\ln x}$

$=\frac{e^2-1}{2}+\ln\left|1+x\ln x\right|\Big|_1^e=\frac{e^2-1}{2}+\ln\left(e+1\right)$

c) $I=\int\limits_1^e \frac{2x^3+1+\left(x^4+1\right)\ln x}{2+x\ln x}dx=\int\limits_1^e \frac{x^3\left(2+x\ln x\right)+1+\ln x}{2+x\ln x}dx=\int\limits_1^e \left(x^3+\frac{1+\ln x}{2+x\ln x}\right)dx$

$=\int\limits_1^e x^3dx+\int\limits_1^e \frac{d\left(2+x\ln x\right)}{2+x\ln x}dx=\left(\frac{x^4}{4}+\ln\left|2+x\ln x\right|\right)\Big|_1^e=\frac{e^2-1}{4}+\ln\frac{e+2}{2}.$

d) $I=\int\limits_1^e \frac{1+x^2\ln x}{x+x^2\ln x}dx=\int\limits_1^e \frac{\left(x+x^2\ln x\right)+1-x}{x+x^2\ln x}dx=\int\limits_1^e \left(1+\frac{1-x}{x+x^2\ln x}\right)dx$

$=\int\limits_1^e \left(1+\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)dx=\int\limits_1^e dx-\int\limits_1^e \left(\frac{d\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)}{\frac{1}{x}+\ln x}\right)dx=\left(x-\ln\left|\frac{1}{x}+\ln x\right|\right)\Big|_1^e=e-\ln\left(e+1\right).$

3. Bài tập tự luyện

Tính các tích phân sau:

$I=\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{2x^2+x-3}$ ĐS: $-\frac{\ln 6}{5}$ $I=\int\limits_1^2 \frac{3x+2}{4x^2-4x+1}dx$ ĐS: $\frac{3}{2}\ln 3+\frac{7}{6}$

$I=\int\limits_0^1 \frac{\left(x+1\right)^2}{x^2+1}dx$ ĐS: $1+\ln 2$ $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx$ ĐS: $\frac{1}{2}\ln 3$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 xdx$ ĐS: $\frac{4-\pi}{4}$ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx$ ĐS: $\frac{\pi}{4}$

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^3 xdx$ ĐS: $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$ $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ ĐS: 1

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$ ĐS: $\frac{1}{2}\ln 2$ $I=\int\limits_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$ ĐS: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3}$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

1. Phương pháp đổi biến số dạng 1

Phương pháp:

Giả sử ta cần tính tích phân $I=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$, trong đó ta có thể phân tích $f\left(x\right)=g\left(u\left(x\right)\right)u'\left(x\right)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t=u\left(x\right)$, suy ra $dt=u'\left(x\right)dx$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=a\Rightarrow t=u\left(a\right)\\x=b\Rightarrow t=u\left(b\right)\end{cases}$.

Khi đó : $\boxed{I=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_{u\left(a\right)}^{u\left(b\right)} g\left(t\right)dt=G\left(t\right)\Big|_{u\left(a\right)}^{u\left(b\right)}}$ (với $G\left(x\right)$ là nguyên hàm của $g\left(x\right)$).

Các cách đặt cho các dạng toán tích phân thường gặp:

- $\begin{cases}I=\int\limits_\alpha^\beta f(ax+b)^n xdx \xrightarrow{PP} t=ax+b\Rightarrow dt=adx\\I=\int\limits_\alpha^\beta\left(\dfrac{x^n}{ax^{n+1}+1}\right)^m dx \xrightarrow{PP} t=ax^{n+1}+1\Rightarrow dt=(n+1)ax^n dx,\text{ với } m,\ n\in\mathbb{Z}.\\I=\int\limits_\alpha^\beta f(ax^2+b)^n xdx \xrightarrow{PP} t=ax^2+b\Rightarrow dt=2ax.dx\end{cases}$
- $I=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt[n]{f(x)}.f'(x)dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\sqrt[n]{f(x)}$, trừ một số trường hợp đổi biến dạng 2.
- $\begin{cases}I=\int\limits_\alpha^\beta f(\ln x)\dfrac{dx}{x}\\I=\int\limits_\alpha^\beta f(a+b\ln x)\dfrac{dx}{x}\end{cases}\xrightarrow{PP}$ Đặt $\begin{bmatrix}t=\ln x\\t=a+b\ln x\end{bmatrix}$.
- $I=\int\limits_\alpha^\beta \dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}dx\xrightarrow{PP}$ Đặt $t=f\left(x\right)$.
- $I=\int\limits_\alpha^\beta f(e^x)e^x dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x$.
- $I=\int\limits_\alpha^\beta f(\cos x)\sin xdx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$.
- $I=\int\limits_\alpha^\beta f(\sin x)\cos xdx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$.
- $I=\int\limits_\alpha^\beta f(\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x}dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=(1+\tan^2 x)dx$.
- $I=\int\limits_\alpha^\beta f(\cot x)\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\cot x\Rightarrow dt=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\cdot dx=-(1+\cot^2 x)dx$.

- $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\sin^2 x;\cos^2 x)\sin 2x dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $\left[\begin{array}{l} t=\sin^2 x \Rightarrow dt=\sin 2x dx \\ t=\cos^2 x \Rightarrow dt=-\sin 2x dx \end{array}\right.$.
- $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\sin x\pm\cos x)(\sin x\mp\cos x)dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t=\sin x\pm\cos x$.
- $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\dfrac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} \xrightarrow{PP}$ Đặt $\left\{\begin{array}{l} t=\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b} \text{ khi } \left\{\begin{array}{l} x+a>0 \\ x+b>0 \end{array}\right. \\ t=\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b} \text{ khi } \left\{\begin{array}{l} x+a<0 \\ x+b<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$.
- $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} R\left[\sqrt[n_1]{ax+b},...,\sqrt[n_k]{ax+b}\right]dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t^n=ax+b$ với $n=B.C.N.N\left\{n_1;n_2;...;n_k\right\}$.

Bài toán 1: Hãy tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^1 (2x+1)^5 dx$ b) $\int\limits_e^{e^2}\dfrac{dx}{x\ln x}$ c) $\int\limits_0^1\dfrac{4x+2}{x^2+x+1}dx$ d) $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{(2x-1)^2}$ e) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\cos(3x-\dfrac{2\pi}{3})dx$

Lời giải:

a) Đặt $u=2x+1\Rightarrow du=2dx$. Đổi cận: $\left\{\begin{array}{l} x=0\Rightarrow u=1 \\ x=1\Rightarrow u=3 \end{array}\right.$.

Do đó: $\int\limits_0^1 (2x+1)^5 dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 u^5 du=\dfrac{u^6}{12}\Big|_1^3=\dfrac{1}{12}(3^6-1)=60\dfrac{2}{3}$.

b) Đặt $u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}$. Đổi cận $\left\{\begin{array}{l} x=e\Rightarrow u=1 \\ x=e^2\Rightarrow u=2 \end{array}\right.$.

Do đó: $\int\limits_e^{e^2}\dfrac{dx}{x\ln x}=\int\limits_1^2\dfrac{du}{u}=\ln u\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$.

c) Đặt $u=x^2+x+1\Rightarrow du=(2x+1)dx$. Đổi cận: $\left\{\begin{array}{l} x=0\Rightarrow u=1 \\ x=1\Rightarrow u=3 \end{array}\right.$.

Do đó: $\int\limits_0^1\dfrac{4x+2}{x^2+x+1}dx=\int\limits_1^3\dfrac{2du}{u}=2\ln u\Big|_1^3=2(\ln 3-\ln 1)=2\ln 3$.

d) Đặt $u=2x-1\Rightarrow du=2dx$. Đổi cận: $\left\{\begin{array}{l} x=1\Rightarrow u=1 \\ x=2\Rightarrow u=3 \end{array}\right.$.

Do đó: $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{(2x-1)^2}=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3\dfrac{du}{u^2}=-\dfrac{1}{2u}\Big|_1^3=-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}-1)=\dfrac{1}{3}$.

e) Đặt $u=3x-\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow du=3dx$. Đổi cận: $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow u=\dfrac{\pi}{3} \\ x=\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow u=\dfrac{4\pi}{3} \end{array}\right.$.

Do đó: $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos(3x-\frac{2\pi}{3})dx = \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos u du = \frac{1}{3}\sin u\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài toán 2: Tính các tích phân sau: a) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx$ b) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$ c) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+3}$

Lời giải:

a) Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $u=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow u^2 = x^2+1 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Leftrightarrow udu = xdx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow u=2 \end{cases}$

Từ đó: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx = \int\limits_1^2 u^2du = \frac{1}{3}u^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3}$.

Cách 2: Đặt $u=x^2+1 \Rightarrow du = 2dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow u=4 \end{cases}$

Từ đó: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \sqrt{u}du = \frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{7}{3}$.

Cách 3: Thực hiện phép biến đổi:

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} (1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}.$$

Cách 3 được trình bày dựa trên ý tưởng đổi biến của cách 2.

b) Đặt $u=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow u^2 = 1+x^2 \Rightarrow 2udu = 2xdx \Leftrightarrow udu = xdx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow u=2 \end{cases}$

Khi đó: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx = \int\limits_1^2 (u^2-1)^2u^2du = \int\limits_1^2 (u^6-2u^4+u^2)du = \left(\frac{1}{7}u^7-\frac{2}{5}u^5+\frac{1}{3}u^3\right)\Big|_1^2 = \frac{848}{105}$.

c) Đặt $u=e^{2x}+3 \Rightarrow du = 2e^{2x}dx = 2(u-3)dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2(u-3)}$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=4 \\ x=1 \Rightarrow u=e^2+3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+3} = \frac{1}{2}\int\limits_4^{e^2+3} \frac{du}{u(u-3)} = \frac{1}{6}\int\limits_4^{e^2+3}\left(\frac{1}{u-3}-\frac{1}{u}\right)du = \frac{1}{6}\left(\ln|u-3|-\ln|u|\right)\Big|_4^{e^2+3} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u}\right|\Big|_4^{e^2+3}$$

$$= \frac{1}{3}-\frac{1}{6}\ln\frac{4}{e^2+3}.$$

Bài toán 3: Cho biết $\int\limits_{-1}^5 f(x)dx = 15$. Tính giá trị của $P = \int\limits_0^2 [f(5-3x)+7]dx$

Lời giải:

Để tính P ta đặt $t = 5-3x \Rightarrow dx = -\frac{dt}{3}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=5 \\ x=2 \Rightarrow t=-1 \end{cases}$

$$P=\int_{5}^{-1}[f(t)+7](-\frac{dt}{3})=\frac{1}{3}\int_{-1}^{5}[f(t)+7]dt=\frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{5}f(t)dt+7\int_{-1}^{5}dt\right)=\frac{1}{3}.15+\frac{1}{3}.7.(6)=19.$$

Bài toán 4: Biết rằng: $\int_{0}^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln^a 2+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}$. Trong đó a,b,c là những số nguyên. Khi đó $S=a+b-c$ bằng?

Lời giải:

$$\int_{0}^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)dx=\int_{0}^{\ln 2}xdx+\int_{0}^{\ln 2}\frac{1}{2e^x+1}dx.$$

- Tính $\int_{0}^{\ln 2}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\ln 2}=\frac{\ln^2 2}{2}$
- Tính $\int_{0}^{\ln 2}\frac{1}{2e^x+1}dx$

  Đặt $t=2e^x+1\Rightarrow dt=2e^xdx\Rightarrow dx=\frac{dt}{t-1}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\ln 2\Rightarrow t=5\\ x=0\Rightarrow t=3\end{cases}$.

  $$\int_{0}^{\ln 2}\frac{1}{2e^x+1}dx=\int_{3}^{5}\frac{dt}{t(t-1)}=\int_{3}^{5}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\left(\ln|t-1|-\ln|t|\right)\Big|_3^5=\ln 4-\ln 5-\ln 2+\ln 3=\ln 2-\ln\frac{5}{3}.$$

$$\int_{0}^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln^2 2+\ln 2-\ln\frac{5}{3}\Rightarrow a=2,b=1,c=-1.$$

Vậy $a+b-c=4$.

Bài toán 5: Cho $I=\int_{\sqrt{5}}^{a}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$, $\left(a>\sqrt{5}\right)$. Khi đó giá trị của số thực a là?

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow tdt=xdx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\sqrt{5}\Rightarrow t=3\\ x=a\Rightarrow t=\sqrt{a^2+4}\end{cases}$.

$$I=\int_{\sqrt{5}}^{a}\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\int_{3}^{\sqrt{a^2+4}}\frac{dt}{t^2-4}=\int_{3}^{\sqrt{a^2+4}}\frac{dt}{(t-2)(t+2)}$$

$$=\frac{1}{4}\int_{3}^{\sqrt{a^2+4}}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Big|_3^{\sqrt{a^2+4}}=\frac{1}{4}\ln\left(5\cdot\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}\right).$$

Ta có: $I=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ln\left(5\cdot\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3},\left(a>\sqrt{5}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{a^2+4}-2\right)=\sqrt{a^2+4}+2\Leftrightarrow a=2\sqrt{3}.$$ **Chọn A.**

Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Tính các tích phân sau:

$I=\int_0^1 x(1-x)^{19}dx$ ĐS: $I=\frac{1}{120}$

$I=\int_{-1}^0 x^2(x+1)^9dx$ ĐS: $I=\frac{1}{660}$

$I=\int_0^1 (1+3x)(1+2x+3x^2)^{10}dx$ ĐS: $I=\frac{6^{11}-1}{22}$

$I=\int_0^1 2\left[x(1-x^2)\right]^5dx$ ĐS: $I=\frac{1}{168}$

$I=\int_0^1 \frac{x^5}{x^2+1}dx$ ĐS: $I=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$

$I=\int_0^1 x(1-x^2)^n dx,\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ĐS: $I=\frac{1}{2n+2}$

Bài tập 2: Tính các tích phân sau (đặt $t=\sqrt[n]{f(x)}\Rightarrow t^n=f(x)\Rightarrow nt^{n-1}dt=f'(x)dx$ và đổi cận)

$I=\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$ ĐS: $I=-\frac{468}{7}$

$I=\int_0^{\sqrt{7}} x.\sqrt[3]{1+x^2}dx$ ĐS: $I=\frac{45}{8}$

$I=\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ ĐS: $I=\frac{93}{10}$

$I=\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$ ĐS: $I=\frac{29}{270}$

$I=\int_1^3 x\sqrt[3]{x^2-1}dx$ ĐS: $I=\frac{14\sqrt{3}}{5}$

$I=\int_0^{\frac{7}{3}} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$ ĐS: $I=\frac{46}{15}$

$I=\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$ ĐS: $I=\frac{64}{105}$

$I=\int_0^6 \frac{2dx}{\sqrt{4x+1}+1}$ ĐS: $I=4-\ln 3$

Bài tập 3: Tính các tích phân sau (đổi biến của hàm logarit):

$I=\int_1^e \frac{1+2\ln x}{x}dx$ ĐS: $I=2$

$I=\int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)^2}dx$ ĐS: $I=-\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}$

$I=\int_0^1 \frac{x\ln(x^2+4)}{x^2+4}dx$ ĐS: $I=\frac{\ln^2 5-\ln^2 4}{4}$

$I=\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x(1+2\ln x)}dx$ ĐS: $I=\frac{\ln 3}{8}$

$I=\int_1^{e^3} \frac{\ln^3 x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$ ĐS: $I=\frac{15}{4}-\ln 2$

$I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln^2 x}\ln x}{x}dx$ ĐS: $I=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

$I=\int_1^e \frac{\log_2^3 x}{x\sqrt{3+\ln^2 x}}dx$ ĐS: $I=\frac{4}{27\ln^3 2}$

$I=\int_2^5 \frac{\ln(\sqrt{x-1}+1)}{x-1+\sqrt{x-1}}dx$ ĐS: $I=\ln^2 3-\ln^2 2$

$I=\int_1^{e^e} \frac{1+\ln^4 x}{x}dx$ ĐS: $I=\frac{6}{5}$

$I=\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x.\ln ex}$ ĐS: $I=2\ln 2-\ln 3$

$I=\int_1^e \frac{\ln x+1}{x\ln x+1}dx$ ĐS: $I=\ln(1+e)$

$I=\int_1^e \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}dx$ ĐS: $I=\frac{10\sqrt{5}}{3}-\frac{16}{3}$

$I=\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ ĐS: $I=\frac{\pi}{6}$

$I=\int_1^e \frac{\ln^3 x-2\log_2 x}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}dx$ ĐS: $I=\frac{4}{27}-\frac{2}{3\ln 2}$

$I=\int_0^1 \frac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{9-x^2}dx$ ĐS: $I=\frac{\ln^2 2}{12}$

$I=\int_1^e \frac{xe^x+1}{x(e^x+\ln x)}dx$ ĐS: $I=\ln\frac{e^e+1}{e}$

$I=\int_1^{e^2}\frac{2\ln x-1}{x(8\ln^2 x-8\ln x+3)}dx$ ĐS: $I=\frac{1}{8}\ln\frac{19}{3}$

$I=\int_1^{e\sqrt{e}}\frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}dx$ ĐS: $I=\frac{5}{3}$

$I=\int_1^{e}\frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx$ ĐS: $I=\frac{116}{135}$

$I=\int_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+\ln x}}$ ĐS: $I=\frac{3\sqrt[3]{4}-3}{2}$

Bài tập 4: Tính các tích phân sau (liên hợp và biến đổi):

$I=\int_0^1\frac{2x^3+3x}{x\sqrt{x^2+3}-4}dx$ ĐS: $I=2-4\ln 2$

$I=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx$ ĐS: $I=\frac{1}{3}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

$I=\int_0^2\frac{2x^3-3x^2+x}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$ ĐS: $I=\frac{4}{3}$

$I=\int_0^4\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}dx$ ĐS: $I=\frac{80}{9}$

$I=\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$ ĐS: $I=\frac{3-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)}{2}$

$I=\int_0^1\frac{x^2-\sqrt{1-x}}{x+2}dx$ ĐS: $I=4\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{3}\ln(2-\sqrt{3})$

$I=\int_0^4\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+9})-3x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx$ ĐS: $I=\frac{\ln^2 9-\ln^2 3}{2}-44$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(\sin x+\frac{\cos 2x}{\sqrt{1+3\cos x}}\right)dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{4}-\frac{118}{405}$

$I=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{x^4}{\left(x-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+1}}dx$ ĐS: $I=\frac{19}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$

Bài tập 5: Tính các tích phân sau (đổi biến của hàm số mũ):

$I=\int_0^1(2x-1)e^{x-x^2}dx$ ĐS: $I=0$

$I=\int_1^3\frac{dx}{e^x-1}$ ĐS: $I=\ln\frac{e^2+e-1}{e^2}$

$I=\int_0^1\frac{dx}{e^{2x}+5}$ ĐS: $I=\frac{1}{10}\ln\frac{6e^2}{e^2+5}$

$I=\int_0^1\frac{(1+e^x)^3}{e^x}dx$ ĐS: $I=\frac{e^3+6e^2+e-2}{2e}$

$I=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x+1)^3}}$ ĐS: $I=\sqrt{2}-2$

$I=\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$ ĐS: $I=\frac{20}{3}$

$I=\int_0^{\ln 6}\frac{e^x dx}{3\sqrt{3+e^x}+2e^x+7}$ ĐS: $I=\ln\frac{80}{63}$

$I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{(e^x+1)^2}$ ĐS: $I=\frac{1}{6}$

$I=\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2e^{-x}-3}$ ĐS: $I=\ln\frac{3}{2}$

$I=\int_0^{\ln 2}\frac{2e^x-1}{e^x+1}dx$ ĐS: $I=3\ln 3-4\ln 2$

$I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$ ĐS: $I=3\ln 3-4\ln 2$

$I=\int_0^{\ln 2}e^x\sqrt{5-e^x}dx$ ĐS: $I=\frac{16}{3}-2\sqrt{3}$

$I=\int_0^{\ln 6}\frac{dx}{\sqrt{e^x+3}}$ ĐS: $I=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

$I=\int_0^{\ln 16}\frac{dx}{\sqrt[4]{e^x}+4}$ ĐS: $I=\ln\frac{3}{5}$

Bài tập 6: Tính các tích phân sau (dạng $f(\sin x).\cos x \xrightarrow{PP}$ đặt $t=\sin x$ hoặc $t=a+b\sin x$, dạng $f(\cos x).\sin x \xrightarrow{PP}$ đặt $t=\cos x$ hoặc $t=a+b\cos x$):

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\sin x}dx$ ĐS: $I=2-2\ln 2$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x(1+\sin^2 x)^3dx$ ĐS: $I=\frac{15}{4}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin x-3)\cos x}{2\sin x+1}dx$ ĐS: $I=1-2\ln 3$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx$ ĐS: $I=2$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{3\cos^2 x+1}dx$ ĐS: $I=\frac{\ln 4}{3}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{2}+1$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos 2x+3\cos x+2}dx$ ĐS: $I=\ln\frac{3}{2}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)^2\cos x dx$ ĐS: $I=\frac{7}{3}$

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx$ ĐS: $I=2\ln 2-2$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x(1+\cos x)^2dx$ ĐS: $I=\frac{17}{12}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan x dx$ ĐS: $I=\ln 2-\frac{3}{8}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x}dx$ ĐS: $I=\ln\frac{4}{3}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x-\sin^3 3x}{1+\cos 3x}dx$ ĐS: $I=-\frac{1}{6}+\frac{\ln 2}{3}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$ ĐS: $I=\frac{\pi}{4}$

Bài tập 7: Tính các tích phân sau (dạng $f(\tan x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\xrightarrow{PP}$ đặt $t=\tan x$):

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan x)^2}{\cos^2 x}dx$ ĐS: $I=\frac{7}{3}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x+e^{\tan x})\sin x}{\cos^3 x}dx$ ĐS: $I=\sqrt{2}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sqrt{2}(1+\tan^3 x)}{\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$ ĐS: $I=5$

$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$ ĐS: $I=2\ln\frac{3}{2}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x}dx$ ĐS: $I=\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{9}$

$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$ ĐS: $I=1+\frac{1}{2}\ln 3$

$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x(2-\sin 2x)}{\cos^3 x}dx$ ĐS: $I=\pi-4$

$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$ ĐS: $I=\frac{3}{8}$

Bài tập 8: Tính các tích phân sau (dạng $f(\sin x\pm\cos x)\cdot(\sin x\pm\cos x)\xrightarrow{PP}$ đặt $t=\sin x\pm\cos x$):

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x+3}dx$ ĐS: $I=\ln\frac{4}{3+\sqrt{2}}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{(\sin x-\cos x+3)^3}dx$ ĐS: $I=\frac{1}{32}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}dx$ ĐS: $I=\frac{4-2\sqrt{2}}{4}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x+2)^3}dx$ ĐS: $I=\frac{13-9\sqrt{2}}{18}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{1+\cos^2 x}dx$ ĐS: $I=2-6\ln\frac{4}{3}$

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$ ĐS: $I=1$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{(1+\sin 2x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$ ĐS: $I=\sqrt{2}-1$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x(1+\sin^2 x)^3dx$ ĐS: $I=\frac{15}{4}$

2. Phương pháp đổi biến số dạng 2

Dấu hiệu	*Cách đặt*
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert\sin t \quad \text{với} \quad t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x=\lvert a\rvert\cos t \quad \text{với} \quad t\in[0;\pi] \end{array}\right.$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\lvert a\rvert}{\sin t} \quad \text{với} \quad t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\backslash\{0\} \\ x=\frac{\lvert a\rvert}{\cos t} \quad \text{với} \quad t\in[0;\pi]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{array}\right.$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x=\lvert a\rvert\tan t \quad \text{với} \quad t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ x=\lvert a\rvert\cot t \quad \text{với} \quad t\in(0;\pi) \end{array}\right.$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ *hoặc* $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x=a.\cos 2t$ với $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x=a+(b-a)sin^2t$ với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
$\frac{1}{(x-a)^n.\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$x-a=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}.$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi 3 dấu hiệu đầu đi với x mũ chẵn. Ví dụ, để tính tích phân $I=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

Bài toán 1: Tính các tích phân sau: a) $I=\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}dx$ b) $I=\int\limits_2^{2/\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Lời giải:

a) Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đặt $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $dx=\cos t dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \end{cases}$.

Khi đó: $I=\int\limits_0^{\pi/6}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t.dt=\int\limits_0^{\pi/6}\cos^2 t.dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6}(1+\cos 2t).dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/6}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Cách 2: Đặt $x=\cos t\Rightarrow dx=-\sin t dt$, $t\in\left[0;\pi\right]$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3} \end{cases}$.

$\Rightarrow I=-\int\limits_{\pi/2}^{\pi/3}\sqrt{1-\cos^2 t}.\sin t dt=-\int\limits_{\pi/2}^{\pi/3}\sin^2 t dt=-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi/3}(1-\cos 2t)dt=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi/3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

b) Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đặt $x=\frac{1}{\sin t},t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, suy ra $dx=-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow t=\frac{\pi}{3} \end{cases}$.

Khi đó: $I=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{-\frac{1}{\sin^2 t}\cos t dt}{\frac{1}{\sin t}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}=-\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}dt=-t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=-\frac{\pi}{6}$.

Cách 2: Đặt $x=\frac{1}{\cos t},t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, suy ra $dx=\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{3} \\ x=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \end{cases}$.

Khi đó: $I=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/6}\frac{\frac{1}{\cos^2 t}\sin t dt}{\frac{1}{\cos t}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/6}dt=t\Big|_{\pi/3}^{\pi/6}=-\frac{\pi}{6}$.

Bài toán 2: Tính các tích phân sau: a) $I=\int\limits_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx$ b) $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+1}$ c) $I=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

Lời giải:

a) Đặt $x=\tan t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \end{cases}$.

Khi đó: $I=\int\limits_0^{\pi/4}\tan t.\sqrt{1+\tan^2 t}.\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin x dt}{\cos^4 t}=-\int\limits_0^{\pi/4}\frac{d(\cos t)}{\cos^4 t}=\frac{1}{3\cos^3 t}\Big|_0^{\pi/4}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

b) Đặt $x=\tan t,t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}=\left(1+\tan^2 t\right)dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \end{cases}$.

Khi đó: $I=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{(1+\tan^2 t)dt}{\tan^2 t+1}=\int\limits_0^{\pi/4}dt=t\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}.$

c) Đặt: $t=\sin x, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, suy ra $dt=\cos x dx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{cases}.$

Do đó: $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t.\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t dt=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt$

$\Rightarrow I=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}.\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}.$

Bài toán 3: Tính các tích phân sau: a) $I=\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ b) $I=\int\limits_{5/4}^{3/2}\sqrt{(x-1)(2-x)}dx$

Lời giải:

a) Đặt $x=\cos 2t$, $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $dx=-2\sin 2t dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\\ x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{cases}.$

Ta có: $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}}(-2\sin 2t dt)=|\cot t|(-2\sin 2t dt)=-4\cos^2 t dt=-2(1+\cos 2t)dt.$

Khi đó: $I=-2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=-2\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=-2\left(1+\frac{\pi}{4}\right).$

b) Đặt $x=1+\sin^2 t$, $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ khi đó $dx=\sin 2t dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\frac{5}{4}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}\\ x=\frac{3}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{cases}.$

Ta có $\sqrt{(x-1)(2-x)}dx=\sin^2 2t dt=(1-\cos 4t)dt.$

Khi đó: $I=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}(1-\cos 4t)dt=\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right).$

Bài toán 4: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}dx$ b) $I=\int\limits_1^2\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ c) $I=\int\limits_{-1}^{\sqrt{2}-1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

Lời giải:

a) Đặt: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{cases}.$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

b) Vì: $3+2x-x^2=4-(x-1)^2$. Cho nên:

Đặt: $x-1=2\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos t dt;\quad \sin t=\frac{x-1}{2}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=0\\ x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}\end{cases}$

Do đó: $I=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx=\int_0^{\pi/6}\frac{1}{\sqrt{4(1-\sin^2 t)}}2\cos t dt=\int_0^{\pi/6}dt=\frac{\pi}{6}$

$\left(t\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\Rightarrow\cos t>0\right)$.

c) $I=\int_{-1}^{\sqrt{2}-1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\int_{-1}^{\sqrt{2}-1}\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}$

Đặt $x+1=\sqrt{2}\tan t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\sqrt{2}\frac{dt}{\cos^2 t}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=0\\ x=\sqrt{2}-1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

$$I=\int_{-1}^{\sqrt{2}-1}\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\int_0^{\pi/4}\frac{\sqrt{2}dt}{\sqrt{2(1+\tan^2 t)}\cos^2 t}=\int_0^{\pi/4}\frac{dt}{\cos t}=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos t dt}{1-\sin^2 t}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\cos t}{\sin t-1}-\frac{\cos t}{\sin t+1}\right)dt=-\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/4}\frac{d(\sin t-1)}{\sin t-1}-\int_0^{\pi/4}\frac{d(\sin t+1)}{\sin t+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|\Big|_0^{\pi/4}=-\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Tính các tích phân sau:

$I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx,\ (a\in\mathbb{R}^+)$ ĐS: $I=\frac{\pi a^4}{16}$	$I=\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ (a>0)$ ĐS: $I=\frac{\pi}{6}$
$I=\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$ ĐS: $I=\pi$	$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ĐS: $I=\frac{\pi-2}{8}$
$I=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{2}$	$I=\int_0^2(x+1)\sqrt{4-x^2}dx$ ĐS: $I=\frac{8}{3}+\pi$

$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}$

$I=\int\limits_0^3 \dfrac{1+2016^x\sqrt{6x-x^2}}{2016^x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{1-2016^{-3}}{\ln 2016}+\dfrac{9\pi}{4}$

$I=\int\limits_0^1\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x\sqrt{x}}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\right)x^2dx$ ĐS: $I=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{27\sqrt{3}-50\sqrt{2}+16}{18}$

Bài tập 2: Tính các tích phân sau:

$I=\int\limits_0^a \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}},\ (a>0)$ ĐS: $I=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

$I=\int\limits_0^1 \dfrac{x^3}{1+x^8}dx$ ĐS: $I=\dfrac{\pi}{16}$

$I=\int\limits_0^2 x^2\sqrt{x^2+4}dx$ ĐS: $I=6\sqrt{2}-2\ln(1+\sqrt{2})$

$I=\int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x^2}{\sqrt{3+x^2}}dx$ ĐS: $I=2\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

$I=\int\limits_0^a \sqrt{a^2+x^2}dx$ ĐS: $I=\dfrac{a^2}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$

$I=\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ ĐS: $I=\ln(1+\sqrt{2})$

$I=\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$ ĐS: $I=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$I=\int\limits_1^e \dfrac{dx}{x\sqrt{1+3\ln^2 x}}$ ĐS: $I=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

Bài tập 3: Tính các tích phân sau:

$I=\int\limits_a^{2a} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},\ (a>0)$ ĐS: $I=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

$I=\int\limits_a^{2a} \sqrt{x^2-a^2}dx,\ (a>0)$ ĐS: $I=a^2\left[\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$

$I=\int\limits_{\sqrt{2}}^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ ĐS: $I=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

$I=\int\limits_1^2 \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$ ĐS: $I=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

Bài tập 4: Tính các tích phân sau:

$I=\int\limits_0^2 \sqrt{\dfrac{2-x}{x+2}}dx$ ĐS: $I=\pi-2$

$I=\int\limits_1^2 \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}dx$ ĐS: $I=\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$

$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\dfrac{x}{x^3+1}}dx$ ĐS: $I=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}$

$I=\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(1+x^3)\sqrt[3]{1+x^3}}$ ĐS: $I=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$I=\int\limits_0^1 \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$ ĐS: $I=2-\dfrac{\pi}{2}$

$I=\int\limits_0^1 \sqrt{\dfrac{3-x}{1+x}}dx$ ĐS: $I=\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2$

$I=\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}$ ĐS: $I=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$

$I=\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}$ ĐS: $I=\dfrac{17-9\sqrt{3}}{9}$

3. Phương pháp đổi biến cho một số hàm đặc biệt

Đây là phương pháp đổi biến được sử dụng khi phương pháp đổi biến số dạng 1 và dạng 2 không dùng được, phương pháp này ít được sử dụng hơn nhưng đặc biệt hiệu quả với các lớp hàm số có dạng đặc biệt, phức tạp và có cận đặc biệt.

Nhận xét: Các bài toán dưới đây đều có một cách làm chung là đổi biến $\boxed{x=a+b-t}$ *với* a,b *là 2 cận.*

1. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$. Khi đó : $\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=\int\limits_{0}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]dx}$ (1)

- Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ, khi đó: $\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0}$ (1.1).
- Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn, khi đó: $\begin{cases}\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx} & (1.2)\\ \boxed{\int\limits_{-a}^{a} \dfrac{f(x)}{1+c^x}dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{a} f(x)dx} & (0<c\neq 1)\ (*)\end{cases}$

Chú thích:

- Trắc nghiệm: Các em được dùng các kết quả $(1),(1.1),(1.2),(*)$.
- Tự luận: Trong quá trình làm bài các em không cần sử dụng các kết quả $(1),(1.1),(1.2),(*)$ mà các hệ thức này sẽ xuất hiện trong quá trình giải bằng việc đổi biến $\boxed{x=-t}$ (tổng quát đặt $x=a+b-t$).

Một số bài toán minh họa

Bài toán 1 : Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{xdx}{4-\sin^2 x}$ *b)* $I=\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{x^4}{1+2018^x}dx$

Lời giải:

a) $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{xdx}{4-\sin^2 x}$. Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt\Rightarrow xdx=tdt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

Do đó : $I=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \dfrac{tdt}{4-\sin^2 t}=-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{tdt}{4-\sin^2 t}=-\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{xdx}{4-\sin^2 x}=-I\Rightarrow 2I=0\Rightarrow I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{xdx}{4-\sin^2 x}=0.$

b) $I=\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{x^4}{1+2018^x}dx$. Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-2\Rightarrow t=2\\ x=2\Rightarrow t=-2\end{cases}$

$\Rightarrow I=\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{(-t)^4}{1+2018^{-t}}dt=\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{t^4}{1+\dfrac{1}{2018^t}}dt=\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{t^4.2018^t}{1+2018^t}dt=\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{t^4.\left(1+2018^t-1\right)}{1+2018^t}dt$

$$= \int_{-2}^{2}\left(t^4 - \frac{t^4}{1+2018^t}\right)dt = \frac{t^5}{5}\Big|_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2}\frac{t^4}{1+2018^t}dt = \frac{64}{5} - I.$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{64}{5} \Rightarrow I = \frac{32}{5}.$$

Bài toán 2 : Tính các tích phân sau:

a) $I = \int_{-1}^{1}\frac{\cos x}{e^x+1}dx$ *b)* $I = \int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx$ *c)* $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx$

Lời giải:

a) $I = \int_{-1}^{1}\frac{\cos x}{e^x+1}dx$. Đặt $x=-t \Rightarrow x=-dt$, $\cos x = \cos t$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=-1 \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = -\int_{1}^{-1}\frac{\cos t}{e^{-t}+1}dt = \int_{-1}^{1}\frac{\cos t}{\frac{1}{e^t}+1}dt = \int_{-1}^{1}\frac{e^t.\cos t}{e^t+1}dt = \int_{-1}^{1}\frac{e^x.\cos x}{e^x+1}dx$$

$$\Rightarrow 2I = I + I = \int_{-1}^{1}\frac{\cos x dx}{e^x+1} + \int_{-1}^{1}\frac{e^x\cos x dx}{e^x+1} = \int_{-1}^{1}\cos x dx = \sin x\Big|_{-1}^{1} = 2\sin 1 \Rightarrow I = \sin 1.$$

b) $I = \int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx$. Đặt $x=-t \Rightarrow x=-dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=-1 \end{cases}$.

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx = \int_{-1}^{1}\frac{t^4}{2^{-t}+1}dt = \int_{-1}^{1}\frac{2^t.t^4}{2^t+1}dt = \int_{-1}^{1}\frac{\left(2^t+1\right)t^4 - t^4}{2^t+1}dt = \int_{-1}^{1}t^4dt - \int_{-1}^{1}\frac{t^4}{2^t+1}dt = \int_{-1}^{1}x^4dx - I$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-1}^{1}x^4dx \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^4dx = \frac{1}{2}\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{5}.$$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^x}dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx = A + B \quad (*)$

+ Tính $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{e^x\left(1+e^x\right)}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\right)d\left(e^x\right) = \ln\frac{e^x}{1+e^x}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad (1)$

+ Tính $B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\sin 2x}{1+e^x}dx$. Đặt $x=-t \Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow B = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(-t\right)\sin\left(-2t\right)}{1+e^{-t}}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^t\sin t\sin 2t}{1+e^t}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1+e^t-1\right)\sin t\sin 2t}{1+e^t}dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sin 2tdt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\sin 2t}{1+e^t}dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos t - \cos 3t\right)dt - B$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin t - \frac{\sin 3t}{3} \right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - B = \frac{4}{3} - B.$$

Suy ra: $B = \frac{4}{3} - B \Leftrightarrow 2B = \frac{4}{3} \Leftrightarrow B = \frac{2}{3}$ (2). Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được: $I = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$.

2. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, khi đó ta có: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ $(*)$

Hệ quả: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, khi đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ $(**)$

Chú thích:

- Trắc nghiệm: Các em được dùng các kết quả $(*),(**)$.
- Tự luận: Trong quá trình làm bài các em không cần sử dụng các kết quả $(*),(**)$ mà các hệ thức này sẽ xuất hiện trong quá trình giải bằng việc đổi biến $x = a+b-t$.

Bài toán minh họa

Bài toán: Tính các tích phân sau:

$a)$ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx$

$b)$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x}dx$

Lời giải:

$a)$ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx$. Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t}\right)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - I = t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - I = \frac{\pi}{2} - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} - I \Leftrightarrow 2I = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}.$$

Nhận xét: Như vậy từ ví dụ trên với cách gán n một giá trị cụ thể ta tạo ra được vô số bài toán kiểu như: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[2018]{\sin x}}{\sqrt[2018]{\sin x} + \sqrt[2018]{\cos x}}dx$;...

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$. Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t \Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{\cos t+\sin t}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t+\cos^3 t-\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin t\cos t\right)dt-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt-I=\left(t+\frac{1}{4}\cos 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-I=\frac{\pi-1}{2}.$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi-1}{2}-I \Leftrightarrow 2I=\frac{\pi-1}{2} \Leftrightarrow I=\frac{\pi-1}{4}.$$

3. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a+b-x)=f(x)$, khi đó: $\int\limits_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)dx \quad (*)$

Hệ quả: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thì:

- $\int\limits_\alpha^{\pi-\alpha} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_\alpha^{\pi-\alpha} f(\sin x)dx$, đặc biệt $\alpha=0$ thì $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx \quad (1)$
- $\int\limits_\alpha^{2\pi-\alpha} xf(\cos x)dx=\pi\int\limits_\alpha^{2\pi-\alpha} f(\cos x)dx$, đặc biệt $\alpha=0$ thì $\int\limits_0^{2\pi} xf(\cos x)dx=\pi\int\limits_0^{2\pi} f(\cos x)dx \quad (2)$

Chú thích:

- Trắc nghiệm: Các em được dùng các kết quả $(1),(2)$.
- Tự luận: Trong quá trình làm bài các em không cần sử dụng các kết quả $(1),(2)$ mà các hệ thức này sẽ xuất hiện trong quá trình giải bằng việc đổi biến $x=a+b-t$.

Bài toán minh họa

Bài toán: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\left(\tan x+\cot x\right)dx$ *b)* $\int\limits_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\cos x}dx$ *c)* $I=\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\cos^2 x-4}dx$

Lời giải:

a) $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\left(\tan x+\cot x\right)dx$. Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t \Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t=\frac{\pi}{6} \end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cot\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\left(\cot t+\tan t\right)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cot t+\tan t\right)dt-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}t\left(\tan t+\cot t\right)dt=\frac{\pi}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\sin t}dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos t}dt\right)-I$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(\sin t\right)}{\sin t}dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\left(\cos t\right)}{\cos t}dt\right)-I=\frac{\pi}{2}\ln\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-I=\frac{\pi}{2}\ln 3-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\ln 3-I\Leftrightarrow 2I=\frac{\pi}{2}\ln 3\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{4}\ln 3.$$

b) $\int_0^{2\pi}\frac{x\sin x}{3+\cos x}dx$. Đặt $x=2\pi-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\pi\\x=2\pi\Rightarrow t=0\end{cases}$.

$$\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\frac{x\sin x}{3+\cos x}dx=\int_0^{2\pi}\frac{\left(2\pi-t\right)\sin\left(2\pi-t\right)}{3+\cos\left(2\pi-t\right)}dt=\int_0^{2\pi}\frac{\left(2\pi-t\right)\sin t}{3+\cos t}dt=2\pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{3+\cos t}dt-\int_0^{2\pi}\frac{t\sin t}{3+\cos t}dt$$

$$=-2\pi\int_0^{2\pi}\frac{d\left(3+\cos t\right)}{3+\cos t}dt-I=-2\pi\ln\left|3+\cos t\right|\Big|_0^{2\pi}-I=0-I=-I$$

$$\Rightarrow I=-I\Leftrightarrow I=0$$

c) $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2 x-4}dx$. Đặt $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=\pi\\x=\pi\Rightarrow t=0\end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{\cos^2(\pi-t)-4}dt=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{\cos^2 t-4}dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\cos^2 t-4}dt-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{\cos^2 t-4}dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x-4}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2 x-4}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x-4}dx-I$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x-4}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-4}=\frac{\pi}{8}\ln\left|\frac{\cos x-2}{\cos x+2}\right|\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{4}\ln 3.$$

Bài tập tự luyện

Tính các tích phân sau:

$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^7-x^5+x^3-x}{\cos^4 x}dx$ ĐS: $I=0$ *Gợi ý: Đặt* $x=-t$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan x\right)dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{8}.\ln 2$ *Gợi ý: Đặt* $x=\frac{\pi}{4}-t$

$I=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x^2\ln\frac{1-x}{1+x}dx$ ĐS: $I=0$ *Gợi ý: Đặt* $x=-t$

$I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(e^x+1\right)\left(x^2+1\right)}$ ĐS: $I=\frac{\pi}{4}$ *Gợi ý: Đặt* $x=-t$

$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ ĐS: $I=0$ *Gợi ý: Đặt* $x=-t$

$I=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$ ĐS: $I=0$ *Gợi ý: Đặt* $x=-t$

$I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{e^x+1}dx$ ĐS: $I=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$ *Gợi ý: Đặt* $x=-t$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos^2\left(\cos x\right)}-\tan^2\left(\sin x\right)\right]dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{2}$ *Gợi ý: Đặt* $x=\frac{\pi}{2}-t$

$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{6^x+1}dx$ ĐS: $I=\frac{5}{32}$ *Gợi ý: Đặt* $x=-t$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2012}x+\cos^2 x}{1+\sin^{2012}x+\cos^{2012}x}dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{4}$ *Gợi ý: Đặt* $x=\frac{\pi}{2}-t$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin 2x}dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{4}$ *Gợi ý: Đặt* $x=\frac{\pi}{2}-t$

$I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x[(3\pi\cos x+4\sin x)\sin^2 x+4]}{\sqrt{1+\sin^3 x}}dx$ ĐS: $I=2\pi^2$ *Gợi ý: Đặt* $x=\pi-t$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ ĐS: $I=\frac{\pi-1}{4}$ *Gợi ý: Đặt* $x=\frac{\pi}{2}-t$

III. PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

1. Phương pháp

Thuật toán:

- ***Bước 1:*** Ta biến đổi tích phân ban đầu về dạng : $I=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f_1(x).f_2(x)dx$
- ***Bước 2:*** Đặt : $\begin{cases}u=f_1(x)\\dv=f_2(x)\end{cases}\to\begin{cases}du=f'_1(x)dx\\v=\int f_2(x)dx\end{cases}$
- ***Bước 3:*** Khi đó : $I=\int\limits_a^b udv=u.v\Big|_a^b-\int\limits_a^b v.du$

Chú ý: Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int\limits_a^b vdu$ dễ tính hơn $\int\limits_a^b udv$.

THỨ TỰ ƯU TIÊN ĐẶT u : NHẤT - LOG; NHÌ - ĐA, TAM - LƯỢNG; TỨ - MŨ

Nghĩa là nếu có ln hay $\log_a x$ thì chọn $u=\ln$ hay $u=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ và $dv=$ còn lại. Nếu không có ln; log thì chọn $u=$ đa thức và $dv=$ còn lại. Nếu không có log, đa thức, ta chọn $u=$ lượng giác,….cuối cùng là mũ.

Ta thường gặp các dạng sau: *(Với $P(x)$ là đa thức)*

Dạng / Đặt	$I=\int\limits_a^b P(x)\begin{bmatrix}\sin x\\\cos x\end{bmatrix}dx$	$I=\int\limits_a^b P(x)e^{ax+b}dx$	$I=\int\limits_a^b P(x)\ln(mx+n)dx$	$I=\int\limits_a^b\begin{bmatrix}\sin x\\\cos x\end{bmatrix}e^x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$\ln(mx+n)$	$\begin{bmatrix}\sin x\\\cos x\end{bmatrix}$
dv	$\begin{bmatrix}\sin x\\\cos x\end{bmatrix}dx$	$dv=e^{ax+b}dx$	$P(x)dx$	$e^x dx$

- Lưu ý rằng bậc của đa thức và bậc của ln tương ứng với số lần tích phân từng phần.

- Dạng mũ nhân lượng giác là dạng tích phân từng phần luân hồi.

- Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm, tích phân bằng sơ đồ đường chéo; sử dụng "kĩ thuật chọn hệ số" đã trình bày ở phần nguyên hàm (trang ...)

2. Một số bài toán minh họa và các kĩ thuật tính tích phân từng phần

Bài toán 1: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$ b) $I=\int\limits_0^{e-1} x\ln(x+1)dx.$ c) $\int\limits_0^1 x\ln(1+x^2)dx$ d) $I=\int\limits_0^1 x\tan^2 x.dx$

Lời giải:

a) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Do đó $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

b) Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = \dfrac{x^2-1}{2} \end{cases}$.

Khi đó :

$$I = \int\limits_0^{e-1} x\ln(x+1)dx = \left[\ln(x+1)\frac{x^2-1}{2}\right]\Bigg|_0^{e-1} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{e-1}(x-1)dx = \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^{e-1}$$

$$= \frac{e^2-2e+2}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^2-4e+3}{2} = \frac{e^2+1}{4}.$$

c) Đặt: $\begin{cases} u = \ln(1+x^2) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2xdx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$.

Khi đó:

$$I = \frac{1}{2}x^2\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \frac{\ln 2}{2} - \int\limits_0^1 \frac{\left[x\left(x^2+1\right)-x\right]}{1+x^2}dx = \frac{\ln 2}{2} - \int\limits_0^1\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{\ln}{2} - \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]\Bigg|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

d) Biến đổi I về dạng: $I = \int\limits_0^1 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\cos^2 x}}_{I_1} - \int\limits_0^1 xdx = I_1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = I_1 - \frac{1}{2}.$

Tính I_1 : Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$.

Khi đó: $I_1 = x\tan x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \tan x dx = \left(x\tan x + \ln\left|\cos x\right|\right)\Big|_0^1 = \tan 1 + \ln\left(\cos 1\right).$

Suy ra: $I = \tan 1 + \ln\left(\cos 1\right) - \frac{1}{2}.$

Bài toán 2: Tính tích phân: $I = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{x^2 dx}{\left(x\sin x + \cos x\right)^2}$

Lời giải:

Ta có: $I = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{x^2 dx}{\left(x\sin x + \cos x\right)^2} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{x\cos x}{\left(x\sin x + \cos x\right)^2}.\frac{x}{\cos x}dx$

Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{x}{\cos x} \\ dv=\dfrac{x\cos x}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}dx=\dfrac{d\left(x\sin x+\cos x\right)}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}dx \\ v=\int\dfrac{d\left(x\sin x+\cos x\right)}{\left(x\sin x+\cos^2 x\right)}=-\dfrac{1}{x\sin x+\cos x} \end{cases}$

Khi đó: $I=-\dfrac{x}{\left(x\sin x+\cos x\right)\cos x}\Big|_0^{\pi/4}+\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{dx}{\cos^2 x}=-\dfrac{2\pi}{4+\pi}+\tan x\Big|_0^{\pi/4}=-\dfrac{2\pi}{4+\pi}+1=\dfrac{4-\pi}{4+\pi}.$

Nhận xét: Do $\left(x\sin x+\cos x\right)'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$ nên ta tách

$$\frac{x^2}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}=\frac{x\cos x}{\left(x\sin x+\cos x\right)^2}.\frac{x}{\cos x}$$

Bài toán 3: Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx=-\dfrac{\pi}{a}+\dfrac{3}{2}\ln\left(b\right)$. Tính $a-2b$?

Lời giải:

$$I=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\ln\left(\cos x.(1+\tan x)\right)}{\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}+\frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx+\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}dx=I+J.$$

Đặt $\begin{cases} u=\ln\cos x \quad \Rightarrow du=-\dfrac{\sin x}{\cos x}dx \\ dv=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx \ , \ v=\tan x \end{cases}$.

$$I=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx=\tan x.\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int\limits_0^{\pi/4}\tan^2 x dx=\tan x.\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\left(-x+\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}+1$$

+ Tính $J=\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=1+\tan x\Rightarrow dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx.$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1,\ \ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=2$

$J=\int\limits_1^2\ln t\,dt$. Đặt $\begin{cases} u=\ln t \quad \Rightarrow du=\dfrac{1}{t}dt \\ dv=dt \ , \quad v=t \end{cases} \Rightarrow J=\int\limits_1^2\ln t\,dt=t\ln t\Big|_1^2-\int\limits_1^1 dt=\left(t\ln t-t\right)\Big|_1^2=2\ln 2-1$

Vậy $\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3}{2}\ln 2\Rightarrow a=4;b=2\Rightarrow a-2b=0.$

Bài toán 4: Tính tích phân $\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx$

Lời giải:

Ta có: $\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{\ln(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{\ln\left(\cos x.(1+\tan x)\right)}{\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\dfrac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}+\dfrac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}\right)dx$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx + \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}dx = I + J.$$

+ Tính $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$: Đặt $\begin{cases} u = \ln\cos x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\sin x}{\cos x}dx \\ v = \tan x \end{cases}$.

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx = \tan x.\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx = \tan x.\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$$

$$= \tan x.\ln\cos x\Big|_0^{\pi/4} \left(-x + \tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} + 1$$

+ Tính $J = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan x)}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t = 1 + \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2 \end{cases}$.

$$\Rightarrow J = \int_1^2 \ln t\, dt \text{ . Đặt } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{t}dt \\ v = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow J = t\ln t\Big|_1^2 - \int_1^2 dt = \left(t\ln t - t\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

Vậy $\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\ln 2.$

Bài toán 5: Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \frac{\ln\left(4x^2 + 8x + 3\right)}{\left(x+1\right)^3}dx$

Lời giải:

Cách giải thông thường:

Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(4x^2 + 8x + 3\right) \\ dv = \frac{dx}{\left(x+1\right)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{8x+8}{4x^2+8x+3}dx \\ v = -\frac{1}{2\left(x+1\right)^2} \end{cases}$

Khi đó: $I = \frac{-\ln\left(4x^2+8x+3\right)}{2\left(x+1\right)^2}\Big|_0^1 + 4\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+1\right)\left(4x^2+8x+3\right)} = -\frac{\ln 15}{8} + \frac{\ln 3}{2} + 4I_1 \quad (*)$

Tính $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+1\right)\left(4x^2+8x+3\right)}$

Ta phân tích: $\frac{1}{\left(x+1\right)\left(4x^2+8x+3\right)} = \frac{1}{\left(x+1\right)\left(2x+1\right)\left(2x+3\right)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x+3}.$

$\Leftrightarrow A\left(2x+1\right)\left(2x+3\right) + B\left(x+1\right)\left(2x+3\right) + C\left(x+1\right)\left(2x+1\right) = 1 \quad \left(2^*\right)$

Chọn x lần lượt là các giá trị $-1; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}$ thay vào $\left(2^*\right)$ ta được: $\begin{cases} A = -1 \\ B = C = 1 \end{cases}$

Khi đó: $I_1=\int_0^1\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x+3}\right)dx=\left(-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|4x^2+8x+3|\right)\Big|_0^1=-\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{15}{3}$ $(**)$

Thay $(**)$ vào $(*)$ ta được: $I=\frac{15}{8}\ln 15-\frac{3}{2}\ln 3-4\ln 2.$

Cách giải theo "kĩ thuật chọn hệ số":

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(4x^2+8x+3\right)\\ dv=\frac{dx}{(x+1)^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{8x+8}{4x^2+8x+3}dx\\ v=-\frac{1}{2(x+1)^2}+2=\frac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2}\end{cases}$

$\left(v=\int\frac{dx}{(x+1)^3}=-\frac{1}{2(x+1)^2}+C\right.$ và chọn $\left.C=2\right)$

$\Rightarrow I=\frac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^3}\ln\left(4x^2+8x+3\right)\Big|_0^1-4\int_0^1\frac{dx}{x+1}=\frac{15}{8}\ln 15-\frac{3}{2}\ln 3-4\ln|x+1|\Big|_0^1=\frac{15}{8}\ln 15-\frac{3}{2}\ln 3-4\ln 2.$

Bài tập: Tính các tích phân sau (kĩ thuật chọn hệ số C phù hợp để $\int_a^b v.du$ đơn giản hơn):

$I=\int_0^1(2x-1)\ln(x+1)dx$ ĐS: $I=\frac{3}{2}-2\ln 2.$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}dx$ ĐS: $I=3\ln 3-\frac{5}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}$

$I=\int_2^3\ln\left[2+x(x^2-3)\right]dx$ ĐS: $I=5\ln 5-4\ln 2-3$

$I=\int_1^4\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln(x+\sqrt{x}-1)dx$ ĐS: $I=5\ln 5-4$

$I=\int_0^1 x.\ln(2+x^2)dx$ ĐS: $I=\frac{3}{2}\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}$

$I=\int_0^{\ln 2}e^x\ln(e^x+1).dx.$ ĐS: $I=3\ln 3-2\ln 2-1$

$I=\int_0^1\frac{5x-3\ln(x+2)}{(x+1)^2}dx$ ĐS: $I=\frac{9}{2}\ln 3-4\ln 2-\frac{5}{2}$

$I=\int_1^2\frac{\ln x.dx}{(x+2)^2}$ ĐS: $I=\ln 3-\frac{3}{2}\ln 2.$

$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log_2(3\sin x+\cos x)}{\sin^2 x}dx$ ĐS: $I=\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{23}{2}\ln 2-3\ln 3-\frac{\pi}{4}\right)$

$I=\int_0^1\frac{\ln(4x^2+8x+3)}{(x+1)^3}dx.$ ĐS: $I=\frac{15}{8}\ln 15-\frac{3}{2}\ln 3-4\ln 2.$

Bài toán 6: Tích phân $I=\int_0^1 e^x\sin^2(\pi x)dx=\frac{a\pi^2(e-1)}{b(a\pi^2+1)}$. Tính a^2-3b?

Lời giải:

Cách 1: *Cách giải tích phân từng phần thông thường*

Ta có: $I=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x\left[1-\cos(2\pi x)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^x dx-\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 e^x\cos(2\pi x)dx}_{I_1}=\frac{1}{2}e^x\Big|_0^1-\frac{1}{2}I_1=\frac{e-1}{2}-\frac{I_1}{2}$ $(*)$

Tính I_1 bằng pp từng phần: Đặt $\begin{cases} u=\cos(2\pi x) \\ dv=e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=-2\pi\sin(2\pi x).dx \\ v=e^x \end{cases}$

Khi đó: $I_1=e^x\cos(2\pi x)\Big|_0^1+2\pi\underbrace{\int_0^1 e^x\sin(2\pi x)dx}_{I_2}=e-1+2\pi I_2 \qquad (1)$

Tính I_2 bằng pp từng phần: Đặt: $\begin{cases} u=\sin(2\pi x) \\ dv=e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=2\pi\cos(2\pi x)dx \\ v=e^x \end{cases}$

Khi đó: $I_2=e^x\sin(2\pi x)\Big|_0^1-2\pi\underbrace{\int_0^1 e^x\cos(2\pi x)dx}_{I_1}=-2\pi I_1 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $I_1=e-1-4\pi^2 I_1\Rightarrow I_1=\dfrac{e-1}{4\pi^2+1}$

Thay I_1 vào (*) ta được: $I=\dfrac{e-1}{2}-\dfrac{e-1}{2(4\pi^2+1)}=\dfrac{4\pi^2(e-1)}{2(4\pi^2+1)}\Rightarrow a=4;b=2\Rightarrow a^2-3b=10.$

Cách 2: *Cách giải tích phân từng phần theo sơ đồ đường chéo*

Ta có: $I=\dfrac{1}{2}\int_0^1 e^x\left[1-\cos(2\pi x)\right]dx=\dfrac{1}{2}\left[\int_0^1 e^x dx-\underbrace{\int_0^1 e^x\cos(2\pi x)dx}_{I_1}\right]=\dfrac{1}{2}e^x\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}I_1=\dfrac{e-1}{2}-\dfrac{I_1}{2}$ (*)

Tính $I_1=\int_0^1 e^x\cos(2\pi x)dx$ bằng sơ đồ đường chéo:

$$\Rightarrow I_1=\left[\cos(2\pi x)e^x-\left(-2\sin(2\pi x)e^x\right)\right]\Big|_0^1-4\pi^2\int_0^1 e^x\cos(2\pi x)dx$$

$$=\left[\cos(2\pi x)+2\sin(2\pi x)\right]e^x\Big|_0^1-4\pi^2 I_1$$

$$=e-1-4\pi^2 I_1$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{e-1}{4\pi^2+1}$$

Đạo hàm	*Dấu*	*Nguyên hàm*
$u=\cos(2\pi x)$	+	$dv=e^x$
$-2\pi\sin(2\pi x)$	−	e^x
$-4\pi^2\cos(2\pi x)$	+	e^x

Thay vào (*) ta được: $I=\dfrac{4\pi^2(e-1)}{2(4\pi^2+1)}$.

$\Rightarrow a=4;b=2\Rightarrow a^2-3b=10.$

Nhận xét: *Bài toán trên dùng phương pháp sơ đồ đường chéo cho bài toán tích phân lặp.*

Bài toán 7: Tính tích phân: $I=\int_{1/3}^{e/3}(2x+1)\ln^3(3x)dx$

Lời giải:

Cách 1: Cách giải từng phần thông thường

Đặt: $\begin{cases} u=\ln^3(3x) \\ dv=(2x+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{3\ln^2(3x)}{x}dx \\ v=x^2+x \end{cases}$

$\Rightarrow I=(x^2+x)\ln^3(3x)\Big|_{1/3}^{e/3}-3\int\limits_{1/3}^{e/3}(x+1)\ln^2(3x)dx=\dfrac{e^2}{9}+\dfrac{e}{3}-3J$

Tính $J=\int\limits_{1/3}^{e/3}(x+1)\ln^2(3x)dx$. Đặt : $\begin{cases} u=\ln^2(3x) \\ dv=(x+1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{2\ln(3x)}{x}dx \\ v=\dfrac{x^2}{2}+x \end{cases}$

$\Rightarrow J=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\ln^2(3x)\Big|_{1/3}^{e/3}-\int\limits_{1/3}^{e/3}(x+2)\ln(3x)dx=\dfrac{e^2}{18}+\dfrac{e}{3}-K$

Tính $K=\int\limits_{1/3}^{e/3}(x+2)\ln(3x)dx$. Đặt: $\begin{cases} u=\ln(3x) \\ dv=(x+2)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{dx}{x} \\ v=\dfrac{x^2}{2}+2x \end{cases}$

$\Rightarrow K=\left[\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\ln(3x)\right]\Big|_{1/3}^{e/3}-\int\limits_{1/3}^{e/3}\left(\dfrac{x}{2}+2\right)dx=\dfrac{e^2}{18}+\dfrac{2e}{3}-\left(\dfrac{x^2}{4}+2x\right)\Big|_{1/3}^{e/3}=\dfrac{e^2}{36}+\dfrac{25}{36}$

$\Rightarrow I=\dfrac{e^2}{9}+\dfrac{e}{3}-3J=\dfrac{e^2}{9}+\dfrac{e}{3}-3\left(\dfrac{e^2}{18}+\dfrac{e}{3}-K\right)=\dfrac{e^2}{9}+\dfrac{e}{3}-3\left(\dfrac{e^2}{18}+\dfrac{e}{3}-\dfrac{e^2}{36}-\dfrac{25}{36}\right)=\dfrac{e^2}{36}-\dfrac{2e}{3}+\dfrac{25}{12}.$

Cách 2: Cách giải theo sơ đồ đường chéo

Chuyển (Chia)	**Đạo hàm (u)**	**Dấu**	**Nguyên hàm (dv)**	**Nhận (Nhân)**
	$\ln^3 3x$	+	$2x+1$	
$\dfrac{3}{x}$	$\dfrac{3\ln^2 3x}{x}$		x^2+x	$\dfrac{3}{x}$
	$\ln^2 3x$	−	$3x+3$	
$\dfrac{2}{x}$	$\dfrac{2\ln 3x}{x}$		$\dfrac{3x^2}{2}+3x$	$\dfrac{2}{x}$
	$\ln 3x$	+	$3x+6$	
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x}$		$\dfrac{3x^2}{2}+6x$	$\dfrac{1}{x}$
	1	−	$\dfrac{3}{2}x+6$	
	0		$\dfrac{3x^2}{4}+6x$	

Kết quả: $I=\left[\ln^3 3x\left(x^2+x\right)-\ln^2 3x\left(\frac{3x^2}{2}+3x\right)+\ln 3x\left(\frac{3x^2}{2}+6x\right)-\frac{3x^2}{4}-6x\right]\Big|_{1/3}^{e/3}$

$=\left[\left(\frac{e^2}{9}+\frac{e}{3}\right)-\left(\frac{e^2}{6}+e\right)+\left(\frac{e^2}{6}+2e\right)-\frac{e^2}{12}-2e\right]-\left(-\frac{1}{12}-2\right)=\frac{e^2}{36}-\frac{2e}{3}+\frac{25}{12}.$

Chú ý: Nếu các em không nhớ kiến thức về kĩ thuật chọn hệ số và tích phân từng phần bằng phương pháp đường chéo thì các em có thể xem lại kiến thức này đã trình bày ở phần nguyên hàm.

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Tính các tích phân sau (dạng tích phân từng phần cơ bản):

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos^2 x}$ ĐS: $I=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$

$I=\int_0^1\frac{3x+1}{e^{2x}}dx$ ĐS: $I=\frac{5}{4}-\frac{11}{4e^2}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\sin^2 xdx$ ĐS: $I=\frac{\pi^2+4}{16}$

$I=\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}dx$ ĐS: $I=\frac{5}{3}\ln 2-\ln 3$

$I=\int_0^{\ln 2}\frac{x}{e^x+e^{-x}+2}dx$ ĐS: $I=\frac{5}{3}\ln 2-\ln 3$

$I=\int_0^1(x^2+2x)e^x dx$ ĐS: $I=e$

$I=\int_0^1 e^x\sin^2(\pi x)dx$ ĐS: $I=\frac{2\pi^2(e-1)}{1+4\pi^2}$

$I=\int_0^1 x\ln(x^2+x+1)dx$ ĐS: $I=\frac{3}{4}\ln 3-\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$

$I=\int_1^2\frac{x^2-1}{x^2}\ln x dx$ ĐS: $I=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}$

$I=\int_0^1\frac{x+1}{e^{2x}}dx$ ĐS: $I=\frac{3-5e^{-2}}{4}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$ ĐS: $I=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\pi}{4}$

$I=\int_2^3 2^x(3x+1)dx$ ĐS: $I=\frac{52}{\ln 2}-\frac{12}{\ln^2 2}$

$I=\int_0^{e^\pi}\cos(\ln x)dx$ ĐS: $I=-\frac{e^\pi+1}{2}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos 2xdx$ ĐS: $I=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-2}{5}$

$I=\int_0^1\frac{x.\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ĐS: $I=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-1$

$I=\int_1^e\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+1}\ln x dx$ ĐS: $I=\frac{3e+1}{e+1}-2\ln\frac{e+1}{2}$

Bài tập 2: Tính các tích phân sau (tách ra 2 tích phân *A* và *B*, với *A* sử dụng đổi biến, *B* sử dụng từng phần):

$I=\int_1^e\left(x+\frac{1+\ln x}{x}\right)\ln x dx$ ĐS: $I=\frac{e^2}{4}+\frac{13}{12}$

$I=\int_1^2 x.(\sqrt{x-1}+\ln x)dx$ ĐS: $I=\frac{16}{15}+2\ln 2-\frac{3}{4}$

$I=\int_0^{\ln 2}e^x(x+\sqrt{e^x-1})dx$ ĐS: $I=2\ln 2-\frac{1}{3}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x+2x)\cos x dx$ ĐS: $I=\pi-\frac{11}{6}$

$I=\int_0^1\left(xe^x+\frac{x^4}{x^5+1}\right)dx$ ĐS: $I=1+\frac{\ln 2}{5}$

$I=\int_1^e\left(\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}+x\right)\ln x dx$ ĐS: $I=\frac{e^2}{4}+\frac{19-8\sqrt{2}}{12}$

$I=\int\limits_{-1}^{0}x(e^{2x}+\sqrt{x+1})\,dx$ ĐS: $I=\frac{3}{4e^2}-\frac{31}{60}$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(x+2+\tan^2 x)\sin x\,dx$ ĐS: $I=\sqrt{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

$I=\int\limits_{0}^{1}(\sqrt{1+3x^2}+e^x)x\,dx$ ĐS: $I=\frac{16}{9}$

$I=\int\limits_{0}^{1}x(e^x+\sqrt{x^2+1})dx$ ĐS: $I=\frac{2\sqrt{2}+2}{3}$

$I=\int\limits_{1}^{e}\left(\frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}+2\ln x\right)dx$ ĐS: $I=\frac{22-6\sqrt{3}}{3}$

$I=\int\limits_{-1}^{0}\frac{x^2}{x-1}\ln(1-x)dx$ ĐS: $I=2\ln 2-\frac{\ln^2 2}{2}-\frac{5}{4}$

$I=\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x+x^2\ln(x^2+2)}{x}dx$ ĐS: $I=\frac{e^2+2}{2}\ln(e^2+2)-\frac{3\ln 3}{2}-\frac{e^2-2}{2}$

$I=\int\limits_{1}^{2}x(\sqrt{x+1}-\ln x)dx$ ĐS: $I=\frac{8\sqrt{3}}{5}-\frac{4\sqrt{2}}{15}+2\ln 2-\frac{3}{4}$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{1}{x^2+1}+\sin^2 x\right)dx$ ĐS: $I=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi^2+4}{4}+\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$

$I=\int\limits_{1}^{e}\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+3x^2\ln x\right)dx$ ĐS: $I=\frac{5-2\sqrt{2}+2e^3}{3}$

Bài tập 3: Tính các tích phân (Sử dụng đổi biến trước, rồi tính tích phân từng phần sau):

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$ ĐS: $I=1-2\ln 2$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi^3}{27}}\sin\sqrt[3]{x}dx$ ĐS: $I=3\pi-6$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin^2 x}\sin x\cos^3 x\,dx$ ĐS: $I=\frac{e-1}{2}$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x\ln(\cos x)}{\cos x}dx$ ĐS: $I=\sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\ln(1+\cos^2 x)dx$ ĐS: $I=2\ln 2-1$

$I=\int\limits_{1-\frac{\pi^2}{4}}^{1}\cos\sqrt{1-x}dx$ ĐS: $I=\pi-2$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi^2}{16}}(\tan^3\sqrt{x}+\tan\sqrt{x})dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{2}-1$

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x}dx$ ĐS: $I=\frac{\sqrt{3}\ln 3}{2}-\sqrt{3}-1$

$I=\int\limits_{0}^{e-1}\frac{x\left[1+\ln^3(x^2+1)\right]}{x^2+1}dx$ ĐS: $I=\frac{1}{2}\ln(e^2-2e+2)+\frac{\ln^4(e^2-2e+2)}{8}$

$I=\int\limits_{1}^{e}\ln(\sqrt{1+\ln^2 x}+\ln x)^{\frac{1}{x}}dx$ ĐS: $I=\ln(\sqrt{2}+1)+1-\sqrt{2}$

Bài tập 4: Tính các tích phân sau (loại phân số hỗn tạp):

$I=\int\limits_{1}^{e}\frac{(x^3+1)\ln x+2x^2+1}{2+x\ln x}dx$ ĐS: $I=\frac{e^3-1}{3}+\ln\frac{e+2}{2}$

$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{4}+\ln\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\right]$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(x+1)(\sin x+\cos x)+\cos x}{(x+1)\sin x+\cos x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{\pi}{2}+\ln\dfrac{\pi+2}{2}$.

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2x\cos x+(x-2)\sin x}{x\cos x-\sin x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{\pi}{2}+\ln\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$I=\int\limits_1^e\dfrac{x+1+(x^2+1)\ln x}{1+x\ln x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{e^2-1}{2}+\ln(e+1)$

$I=\int\limits_1^e\dfrac{2x^3+1+(x^4+1)\ln x}{2+x\ln x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{e^2-1}{4}+\ln\dfrac{e+2}{2}$

$I=\int\limits_1^e\dfrac{\ln^2 x+x(2\ln x+1)+2x^2}{(x\ln x+x^2)^2}dx$ ĐS: $I=\dfrac{2e^2-1}{e^2+e}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{x\sin x+(x+1)\sin 2x}{2\cos x+1}dx$ ĐS: $I=I=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x^2+1-2\sin x-4\cos^2 x}{2\cos x+x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{\pi^2}{8}+\ln\dfrac{\pi}{4}-2$

$I=\int\limits_1^e\dfrac{(2x^2+3)\ln x+2x+3}{x\ln x+1}dx$ ĐS: $I=e^2-1+3\ln(e+1)$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x-\sin x+x^2}{x+\cos x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{\pi^2}{8}-1+\ln\dfrac{\pi}{2}$

$I=\int\limits_0^1\dfrac{x^3e^x+2x(e^x+1)}{x^2+2}dx$ ĐS: $I=1+\ln\dfrac{3}{2}$

$I=\int\limits_0^1\dfrac{x+\ln(x+1)}{(x+2)^2}dx$ ĐS: $I=\dfrac{2}{3}\ln 2-\dfrac{1}{3}$

$I=\int\limits_1^2\dfrac{(\ln x+1)x-3\ln x}{x^3-3x^2}dx$ ĐS: $I=\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{6}\ln 2$

$I=\int\limits_0^1\dfrac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2e+1}{3}$

$I=\int\limits_0^1\dfrac{x^2e^{2x}+3xe^x+e^x+1}{xe^x+1}dx$ ĐS: $I=2+\ln(e+1)$

$I=\int\limits_1^e\dfrac{1+x^2\ln x}{x+x^2\ln x}dx$ ĐS: $I=e-\ln(e+1)$

$I=\int\limits_0^1\dfrac{(x^2e^x+2x+1)e^x}{xe^x+1}dx$ ĐS: $I=1+\ln(e+1)$

$I=\int\limits_0^1\dfrac{2xe^x-1}{1+x^2e^x}dx$ ĐS: $I=\ln(e+1)-1$

$I=\int\limits_0^1\dfrac{x^2+e^x\sqrt{x}+x}{(x+1)e^x}dx$ ĐS: $I=3-\dfrac{2}{e}-\dfrac{\pi}{2}$

C. TÍNH TÍCH PHÂN CÁC DẠNG HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Đối với những dạng hàm số khác nhau sẽ có những hướng đi khác nhau, cho nên trong phần này thầy sẽ chia ra một số dạng hàm số thường gặp để các em khi gặp một bài toán tích phân bất kỳ nào sẽ có cách giải kết hợp với các phương pháp ở phần B để tìm ra nhanh lời giải.

I. HÀM HỮU TỈ

1. Phương pháp

Bài toán tổng quát: Tính tích phân $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot dx$ với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không căn.

- Nếu bậc của tử số $P(x)<$ bậc của mẫu số $Q(x)\xrightarrow{PP}$ Xem xét mẫu số, ta có các trường hợp phổ biến sau:

(1) $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{A}{ax+b}dx=\frac{A}{a}\ln\left|ax+b\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}=\frac{A}{a}\ln\left|\frac{a\beta+b}{a\alpha+b}\right|$

(2) $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{A}{ax^2+bx+c}$

$\Delta>0:\ I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{A}{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}dx=\frac{A}{a\left(x_2-x_1\right)}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{x-x_2}-\frac{1}{x-x_1}\right)\xrightarrow{Quay\ Ve}(1)$

$\Delta=0:\ I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{Adx}{a\left(x-x_0\right)^2}=-\frac{A}{a\left(x-x_0\right)}\Big|_{\alpha}^{\beta}=\ldots$ (2.1)

$\Delta<0:\ I=\frac{A}{a}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\left(x+x_o\right)^2+k^2}\xrightarrow[t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)]{\text{Đặt } x+x_0=k\tan t}I=\frac{A}{ka}\int\limits_{\alpha}^{\beta}dt=\frac{A}{ka}t\Big|_{\alpha}^{\beta}=\ldots$ (2.2)

(3) $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$

$\Delta>0:\ I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{C\left(x-x_1\right)+D\left(x-x_2\right)}{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}dx=\frac{1}{a}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{C}{x-x_2}+\frac{D}{x-x_1}\right)dx\xrightarrow{Quay\ Ve}(1)$

$\Delta=0:\ I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{Ax+B}{a\left(x-x_0\right)^2}dx=\frac{1}{a}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{A\left(x-x_0\right)+C}{a\left(x-x_0\right)^2}dx$

$=\frac{1}{a}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{A}{x-x_0}+\frac{C}{\left(x-x_0\right)^2}\right)dx\to(1)\&(2.1)$

$\Delta<0:\ I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{k\left(ax^2+bx+c\right)'+h}{ax^2+bx+c}dx=k\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}+h\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

$=\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}+\text{TH}$ (2.2)

(4) $Q(x)$ có bậc lớn hơn 2, ta thực hiện giảm bậc (bằng cách đổi biến, tách ghép, nhân, chia,...) để đưa bài toán về các trường hợp $(1),(2),(3)$.

- Nếu bậc của tử số $P(x)\geq$ bậc của mẫu số $Q(x)\xrightarrow{PP}$ Chia đa thức (đã học ở lớp 8).

$I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{P(x)}{Q(x)}=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[H(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}\right]dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}H(x)dx+\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{R(x)}{Q(x)}dx=I_1+I_2$ $\left[\begin{array}{l}I_1:\text{Tích phân cơ bản}\\ I_2:\text{Quay về Th bậc tử <mẫu}\end{array}\right.$

Chú ý: Đối với những bài toán phức tạp, để đưa về các dạng $(1),(2),(3)$ ta phải thực hiện biến đổi phân số ban đầu thành tổng các phân số và tìm các hệ số bằng phương pháp đồng nhất thức đã trình bày ở phần nguyên hàm. Một số trường hợp thường gặp:

- $\dfrac{1}{(ax+b)\cdot(cx+d)}=\dfrac{1}{ad-bc}\cdot\left(\dfrac{a}{ax+b}-\dfrac{c}{cx+d}\right).$
- $\dfrac{mx+n}{(ax+b)(cx+d)}=\dfrac{A}{ax+b}+\dfrac{B}{cx+d}$
- $\dfrac{mx+n}{(ax+b)^2}=\dfrac{A}{ax+b}+\dfrac{B}{(ax+b)^2}$
- $\dfrac{mx+n}{(ax+b)^2(cx+d)}=\dfrac{A}{(ax+b)^2}+\dfrac{B}{cx+d}+\dfrac{C}{ax+b}.$
- $\dfrac{1}{(x-m)\cdot(ax^2+bx+c)}=\dfrac{A}{x-m}+\dfrac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$, với $\Delta=b^2-4ac<0.$
- $\dfrac{1}{(x-a)^2\cdot(x-b)^2}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dfrac{C}{x-b}+\dfrac{D}{(x-b)^2}.$
- $\dfrac{P(x)}{(x-x_o)^n}=\dfrac{A}{x-x_o}+\dfrac{B}{(x-x_o)^2}+\cdots+\dfrac{C}{(x-x_o)^n}.$
- $\dfrac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots}=\dfrac{A}{x-x_1}+\dfrac{B}{x-x_2}+\dfrac{C}{x-x_3}+\cdots$

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Tính các tích phân sau: a) $I=\int\limits_1^2\dfrac{x^3}{2x+3}dx$ b) $I=\int\limits_{\sqrt{5}}^3\dfrac{x^2-5}{x+1}dx$ c) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^3}{x^2-1}dx$

Lời giải:

a) Ta có: $\dfrac{x^3}{2x+3}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\left(2x^3+3x^2\right)-\dfrac{3}{2}\left(2x^2+3x\right)+\dfrac{9}{4}\left(2x+3\right)-\dfrac{27}{4}}{2x+3}=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{9}{8}-\dfrac{27}{8\left(2x+3\right)}.$

$\Rightarrow\int\limits_1^2\dfrac{x^3}{2x+3}dx=\int\limits_1^2\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{9}{8}-\dfrac{27}{8\left(2x+3\right)}\right)dx=\left(\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{8}x^2+\dfrac{9}{8}x-\dfrac{27}{16}\ln\left|2x+3\right|\right)\Big|_1^2=-\dfrac{13}{6}-\dfrac{27}{16}\ln 35$

b) Ta có: $\dfrac{x^2-5}{x+1}=\dfrac{x^2-1-4}{x+1}=x-1-\dfrac{4}{x+1}.$

$\Rightarrow\int\limits_{\sqrt{5}}^3\dfrac{x^2-5}{x+1}dx=\int\limits_{\sqrt{5}}^3\left(x-1-\dfrac{4}{x+1}\right)dx=\left(\dfrac{1}{2}x^2-x-4\ln\left|x+1\right|\right)\Big|_{\sqrt{5}}^3=\sqrt{5}-1+4\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right).$

c) Ta có: $\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{x\left(x^2-1\right)+x}{x^2-1}=x+\dfrac{x}{x^2-1}.$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{x}{x^2-1} \right) dx = \int_1^{\frac{1}{2}} xdx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}.$$

Bài toán 2: Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$.

Lời giải:

Cách 1: *(Phương pháp đồng nhất thức)*

Ta có: $f(x) = \frac{4x+1}{x^2+5x+6} = \frac{4x+11}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

Thay $x=-2$ vào hai tử số: $3=A$ và thay $x=-3$ vào hai tử số: $-1=-B$ suy ra $B=1$

Do đó: $f(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

Vậy: $\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx = 3\ln\left|x+2\right| + \ln\left|x+3\right|\Big|_0^1 = 2\ln 3 - \ln 2$

Cách 2: *(Nhảy tầng lầu)*

Ta có: $f(x) = \frac{2(2x+5)+1}{x^2+5x+6} = 2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = 2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(2.\frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \left(2\ln\left|x^2+5x+6\right| + \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| \right)\Big|_0^1 = 2\ln 3 - \ln 2.$$

Bài toán 3: Tính các tích phân sau: a) $I = \int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$ b) $I = \int_0^1 \frac{4x}{4x^2-4x+1}dx$

Lời giải:

a) ***Cách 1:*** Thực hiện cách chia đa thức x^3 cho đa thức x^2+2x+1 đã học ở chương trình lớp 8.

Ta được: $\frac{x^3}{x^2+2x+1} = x-2+\frac{3x+2}{x^2+2x+1}$

$$I = \int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx = \int_0^3 (x-2)dx + \int_0^3 \frac{3x+3-1}{x^2+2x+1}dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right)\Big|_0^3 + \frac{3}{2}\int_0^3 \frac{d(x^2+2x+1)}{x^2+2x+1} - \int_0^3 \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\ln(x+1)^2\Big|_0^3 + \frac{1}{x+1}\Big|_0^3 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\ln 16 + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{4} + 6\ln 2.$$

Cách 2: Ta có: $\int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx = \int_0^3 \frac{x^3}{(x+1)^2}dx$

Đặt: $t = x+1$ suy ra: $dx = dt; x = t-1$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=3 \Rightarrow t=4 \end{cases}$.

Do đó: $\int_0^3 \frac{x^3}{(x+1)^2}dx = \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^2}dt = \int_1^4 \left(t-3+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2} \right) dt = \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + 3\ln\left|t\right| + \frac{1}{t} \right)\Big|_1^4 = -\frac{9}{4} + 6\ln 2.$

b) Ta có: $\dfrac{4x}{4x^2-4x+1}=\dfrac{4x}{(2x-1)^2}$

Đặt: $t=2x-1$ suy ra: $dt=2dx\to dx=\dfrac{1}{2}dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=-1\\x=1\Rightarrow t=1\end{cases}$

Do đó: $\displaystyle\int_0^1\frac{4x}{4x^2-4x+1}dx=\int_0^1\frac{4x}{(2x-1)^2}dx=\int_{-1}^1\frac{4.\frac{1}{2}(t+1)}{t^2}\frac{1}{2}dt=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\left(\ln|t|-\frac{1}{t}\right)\Big|_{-1}^1=-2$.

Bài toán 4: Tính các tích phân sau: a) $I=\displaystyle\int_0^2\frac{x}{x^2+4x+5}dx$ b) $I=\displaystyle\int_0^2\frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx$

Lời giải:

a) Ta có: $\displaystyle\int_0^2\frac{x}{x^2+4x+5}dx=\int_0^2\frac{x}{(x+2)^2+1}dx$

Đặt: $x+2=\tan t$, suy ra: $dx=\dfrac{1}{\cos^2 t}dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow\tan t=2\\x=2\Rightarrow\tan t=4\end{cases}$

Do đó: $\displaystyle\int_0^2\frac{x}{(x+2)^2+1}dx=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\tan t-2}{1+\tan^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\sin t}{\cos t}-2\right)dt=\left(-\ln|\cos t|-2t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}\ (1)$

Từ: $\begin{cases}\tan t=2\Rightarrow 1+\tan^2 t=5\Leftrightarrow\cos^2 t=\dfrac{1}{5}\Rightarrow\cos t_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\\tan t=4\Rightarrow 1+\tan^2 t=17\Leftrightarrow\cos^2 t=\dfrac{1}{17}\Rightarrow\cos t_2=\dfrac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}$

Vậy: $\left(-\ln|\cos t|-2t\right)\Big|_{t_1}^{t_2}=-\left[\left(\ln|\cos t_2|\right)-2t_2\right]-\left(\ln|\cos t_1|-2t_1\right)=-\ln\left|\dfrac{\cos t_2}{\cos t_1}\right|+2\left(t_2-t_1\right)$

$=2\left(\arctan 4-\arctan 2\right)-\ln\left|\dfrac{1}{\sqrt{17}}.\sqrt{5}\right|=2\left(\arctan 4-\arctan 2\right)-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{17}$.

b) Ta có: $\dfrac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}=\dfrac{x^3+4x+2x^2+8+1}{x^2+4}=x+2+\dfrac{1}{x^2+4}$

Do đó: $\displaystyle\int_0^2\frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4}dx=\int_0^2\left(x+2+\frac{1}{x^2+4}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^2+\int_0^2\frac{dx}{x^2+4}=6+J\ \ (1)$

Tính tích phân $J=\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx$

Đặt: $x=2\tan t$ suy ra: $dx=\dfrac{2}{\cos^2 t}dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$. Ta có: $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]\to\cos t>0$

Khi đó: $J=\displaystyle\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 t}\frac{2}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$. Từ $(1)\Rightarrow I=6+\dfrac{\pi}{8}$.

Bài toán 5: Tính các tích phân sau: a) $I=\int\limits_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx$ b) $I=\int\limits_{-1}^0 \frac{x^4}{(x-1)^3}dx$

Lời giải:

a) ***Cách 1:***

Đặt: $x+1=t$, suy ra $x=t-1$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Do đó: $\int\limits_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx=\int\limits_1^2 \frac{t-1}{t^3}dt=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt=\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{8}$

Cách 2:

Ta có: $\frac{x}{(x+1)^3}=\frac{(x+1)-1}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}$

Do đó: $\int\limits_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right]dx=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{8}$

b) Đặt: $x-1=t$, suy ra: $x=t+1$.Đổi cận: $\begin{cases} x=-1\Rightarrow t=-2 \\ x=0\Rightarrow t=-1 \end{cases}$.

Do đó: $\int\limits_{-1}^0 \frac{x^4}{(x-1)^3}dx=\int\limits_{-2}^{-1}\frac{(t+1)^4}{t^3}dt=\int\limits_{-2}^{-1}\frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}{t^3}dt=\int\limits_{-2}^{-1}\left(t+4+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt$

$$=\left(\frac{1}{2}t^2+4t+6\ln|t|-\frac{4}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\right)\Big|_{-2}^{-1}=\frac{33}{8}-6\ln 2\ .$$

Bài toán 6: Tính tích phân $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(a\sqrt{3}+b+c\pi\right)+4$. Với a, b, c là các số nguyên. Khi đó biểu thức $a+b^2+c^4$ có giá trị bằng ?

Lời giải:

Ta có $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}} \frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}dx=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\left(-4+\frac{x^2+1}{x^4+1}\right)dx=-4\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}dx+\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=I+J$.

+ Tính $I=-4\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}dx=-4x\Big|_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}=-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+4$.

+ Tính $J=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx.$

Đặt $t=x-\frac{1}{x}\Rightarrow dt=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$. Khi $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$.

Khi đó $J=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$. Đặt $t=\sqrt{2}\tan u\Rightarrow dt=\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)du$. Đổi cận: $\begin{cases}t=0\Rightarrow u=0\\ t=\sqrt{2}\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

Suy ra $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\left(1+\tan^2 u\right)}{2\left(1+\tan^2 u\right)}du=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}du=\frac{\sqrt{2}}{2}u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$.

Vậy $\int\limits_1^{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}\frac{-4x^4+x^2-3}{x^4+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(-16\sqrt{3}-16+\pi\right)+4\Rightarrow\begin{cases}a=b=-16\\ c=1\end{cases}$.

Vậy $a+b^2+c^4=241$.

Bài toán 7: Tính các tích phân sau: a) $I=\int\limits_2^3\frac{1}{(x-1)(x+1)^3}dx$ b) $I=\int\limits_2^3\frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}dx$

Lời giải:

a) ***Cách 1.*** *(Phương pháp đồng nhất thức)*

Ta có: $\frac{1}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}\quad(1)$

Thay hai nghiệm mẫu số vào hai tử số: $\begin{cases}1=4A\\ 1=-2C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{4}\\ C=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

$(1)\Leftrightarrow\frac{(A+B)x^2+(2A+C)x+A-B-C}{(x-1)(x+1)^2}\Rightarrow A-B-C=1\Leftrightarrow B=A-C-1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{4}$

Do đó: $\int\limits_2^3\frac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int\limits_2^3\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}.\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{4}\ln(x-1)(x+1)+\frac{1}{2}.\frac{1}{(x+1)}\right]\Big|_2^3=\frac{1}{4}\ln 8=\frac{3}{4}\ln 2$.

Cách 2: *(Phương pháp đổi biến)*

Đặt: $t=x+1$, suy ra: $x=t-1$. Đổi cận: $\begin{cases}x=2\Rightarrow t=3\\ x=3\Rightarrow t=4\end{cases}$..

Khi đó: $I=\int\limits_2^3\frac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int\limits_3^4\frac{dt}{t^2(t-2)}=\frac{1}{2}\int\limits_3^4\frac{t-(t-2)}{t^2(t-2)}dt=\frac{1}{2}\left(\int\limits_2^4\frac{1}{t(t-2)}dt-\int\limits_3^4\frac{1}{t}dt\right)$

$\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int\limits_2^4\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t}\right)dt-\int\limits_3^4\frac{1}{t}dt\right)=\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t}\right|-\frac{1}{2}\ln|t|\right)\Big|_3^4=\frac{3}{4}\ln 2$.

b) Đặt: $t=x-1$, suy ra: $x=t+1$, $dx=dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=2\Rightarrow t=1\\ x=3\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Do đó: $\int\limits_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^2(x+2)}dx = \int\limits_1^2 \frac{(t+1)^2}{t^2(t+3)}dt = \int\limits_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}dt$

Cách 1: *(Phương pháp đồng nhất thức)*

Ta có: $\frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)} = \frac{At+B}{t^2} + \frac{C}{t+3} = \frac{(At+B)(t+3)+Ct^2}{t^2(t+3)} = \frac{(A+C)t^2+(3A+B)t+3B}{t^2(t+3)}$

Đồng nhất hệ số hai tử số: $\begin{cases} A+C=1 \\ 3A+B=2 \\ 3B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{3} \\ A=\frac{5}{9} \\ C=\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)} = \frac{1}{9}\frac{t+3}{t^2} + \frac{4}{9}\frac{1}{t+3}$

Do đó: $\int\limits_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}dt = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{t+3}\right)\right)dt = \left(\frac{1}{9}\left(\ln|t|-\frac{3}{t}\right)+\frac{4}{9}\ln|t+3|\right)\Big|_1^2 = \frac{17}{6}+\frac{4}{9}\ln 5-\frac{7}{9}\ln 2$

Cách 2:

Ta có: $\frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{3t^2+6t+3}{t^3+3t^2}\right) = \frac{1}{3}\left[\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}+\frac{3}{t^2(t+3)}\right] = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{t^2-(t^2-9)}{t^2(t+3)}\right)\right]$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\frac{1}{t+3}-\frac{1}{9}\frac{t-3}{t^2} = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\frac{1}{t+3}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{t^2}\right)\right]$$

Vậy: $\int\limits_1^2 \frac{t^2+2t+1}{t^2(t+3)}dt = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{3}\left(\frac{3t^2+6t}{t^3+3t^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)\right)dt = \left[\frac{1}{3}\ln|t^3+3t^2|+\frac{1}{27}\left(\ln\left|\frac{t+3}{t}\right|-\frac{3}{t}\right)\right]\Big|_1^2$

Do đó $I = \frac{17}{6}+\frac{4}{9}\ln 5-\frac{7}{9}\ln 2$.

Bài toán 8: Tính tích phân sau:

a) $I = \int\limits_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}dx$ b) $I = \int\limits_3^4 \frac{x+1}{x(x^2-4)}dx$ c) $\int\limits_2^3 \frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)}dx$

Lời giải:

a) ***Cách 1:*** *(Phương pháp đồng nhất thức)*

Ta có: $f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

Đồng nhất hệ số hai tử số bằng cách thay các nghiệm: $x=0; x=1$ và $x=-1$ vào hai tử ta có:

$$\begin{cases} x=0 \to 1=-A \\ x=-1 \to 1=2C \\ x=1 \to 1=2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Vậy: $\int_2^3 \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}dx=\int_2^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\left(\ln\left(x-1\right)\left(x+1\right)\right)-\ln\left|x\right|\right]\Big|_2^3=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$

Cách 2: *(Phương pháp nhảy lầu)*

Ta có: $\frac{1}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{x^2-\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x}$

Do đó: $\int_2^3 \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}dx=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{2xdx}{x^2-1}-\int_2^3\frac{1}{x}dx=\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)-\ln x\right)\Big|_2^3=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3.$

b) ***Cách 1:*** *(Phương pháp đồng nhất thức)*

Ta có: $\frac{x+1}{x\left(x^2-4\right)}=\frac{x+1}{x\left(x-2\right)\left(x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A\left(x^2-4\right)+Bx\left(x+2\right)+Cx\left(x-2\right)}{x\left(x^2-4\right)}$

Thay các nghiệm của mẫu số vào hai tử số:

Khi $x=0:\ 1=-4A$ suy ra: $A=-\frac{1}{4}$

Khi $x=-2:\ -1=8C$ suy ra $C=-\frac{1}{8}$

Khi $x=2:\ 3=8B$ suy ra: $B=\frac{3}{8}$

Do đó: $f\left(x\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{x+2}\right)$

Vậy: $\int_3^4 \frac{x+1}{x\left(x^2-4\right)}dx=-\frac{1}{4}\int_2^3\frac{1}{x}dx-\frac{1}{8}\int_2^3\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{8}\int_2^3\frac{1}{x+2}dx=\left(-\frac{1}{4}\ln\left|x\right|-\frac{1}{8}\ln\left|x-2\right|+\frac{3}{8}\ln\left|x+2\right|\right)\Big|_2^3$

$$=\frac{5}{8}\ln 3-\frac{3}{8}\ln 5-\frac{1}{4}\ln 2.$$

Cách 2: *(Phương pháp nhảy lầu)*

Ta có: $\frac{x+1}{x\left(x^2-4\right)}=\frac{1}{\left(x^2-4\right)}+\frac{1}{x\left(x^2-4\right)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{x^2-\left(x^2-4\right)}{x\left(x^2-4\right)}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x}\right)$$

Do đó: $\int_3^4 \frac{x+1}{x\left(x^2-4\right)}=\frac{1}{4}\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-4\right)-\ln\left|x\right|\right]\Big|_3^4$

c) ***Cách 1:*** *(Phương pháp đồng nhất thức)*

Ta có: $\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}=\frac{x^2}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$

$$=\frac{A\left(x+1\right)\left(x+2\right)+B\left(x-1\right)\left(x+2\right)+C\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}$$

Thay lần lượt các nghiệm mẫu số vào hai tử số:

Thay: $x=1$ ta có: $1=2A$, suy ra: $A=\frac{1}{2}$

Thay: $x=-1$ ta có: $1=-2B$, suy ra: $B=-\frac{1}{2}$

Thay: $x=-2$ ta có: $4=-5C$, suy ra: $C=-\frac{5}{4}$

Do đó: $I=\int_2^3\frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)}dx=\int_2^3\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{5}{4}\frac{1}{x+2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{5}{4}\ln|x+2|\right]_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

Cách 2. (Nhảy tầng lầu)

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{x^2-1+1}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\frac{x(x+1)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{x+1}\right]=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)-\frac{1}{x+1}\right].$$

Từ đó suy ra kết quả.

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^1\frac{x^2-2x+3}{2-x}dx$ ĐS: $I=3\ln 2-\frac{1}{2}$

b) $I=\int_1^e\frac{x^3+x^2-2x+1}{x^3}dx$ ĐS: $I=\frac{2e^3+4e-1}{2e^2}-\frac{3}{2}$

c) $I=\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx$ ĐS: $I=-\frac{1}{2}+\ln 2$

d) $I=\int_0^1\frac{x^3}{x+2}dx$ ĐS: $I=\frac{10}{3}-8\ln\frac{3}{2}$

e) $I=\int_0^1\frac{x^5}{x^2+1}dx$ ĐS: $I=\frac{2\ln 2-1}{4}$

f) $I=\int_0^1\frac{x}{(x+1)^2}dx$ ĐS: $I=-\frac{1}{2}+\ln 2$

g) $I=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$ ĐS: $I=\frac{1}{2}\ln 2$

h) $I=\int_0^1\frac{x(x-1)}{x^2-4}dx$ ĐS: $I=1+\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$

i) $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2(x^2+1)}$ ĐS: $I=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}$

j) $I=\int_0^1\frac{dx}{x^2-5x+6}$ ĐS: $I=\ln\frac{4}{3}$

k) $I=\int_1^2\frac{2x+1}{x(x+1)}dx$ ĐS: $I=\ln 3-\ln 2$

l) $I=\int_3^4\frac{4x+3}{x^2-3x+2}dx$ ĐS: $I=18\ln 2-7\ln 3$

m) $I=\int_0^1\frac{xdx}{(x+1)^3}$ ĐS: $I=\frac{1}{8}$

n) $I=\int_0^1\frac{x+1}{x^2+1}dx$ ĐS: $I=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$.

o) $I=\int_0^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{9x^2+4}$ ĐS: $I=\frac{\pi}{24}$

p) $I=\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+2x+4}$ ĐS: $I=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$

q) $I=\int_0^1\frac{3}{1+x^3}dx$ ĐS: $I=\ln 2+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

r) $I=\int_0^1\frac{x^3+2x^2+10x+1}{x^2+2x+9}dx$ ĐS: $I=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

Bài tập 2: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^2 \frac{3x^2+x}{x^3+x^2+x+1}dx$ b) $I=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+x^3}$ c) $I=\int_0^3 \frac{x^3dx}{x^2+2x+1}$

d) $I=\int_0^1 \frac{x}{(1+2x)^3}dx$ e) $I=\int_2^3 \frac{x^2dx}{(1-x)^9}$ f) $I=\int_1^4 \frac{dx}{x^2(1+x)}$

g) $I=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3x^2+2}{x^2+1}dx$ h) $I=\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{x+1}dx$ i) $I=\int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x^2+x}dx$

j) $I=\int_0^1 \frac{4x+8}{x^2+4x+2016}dx$ k) $I=\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+10x+5}{x^2+2x+5}dx$ l) $\int_0^2 \frac{(x^3+2x^2+4x+9)dx}{x^2+4}$

m) $I=\int_{-1}^0 \frac{2x^3-6x^2+9x+9}{x^2-3x+2}dx$ n) $I=\int_2^3 \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}dx$ o) $I=\int_0^1 \frac{2x+7}{x^2+7x+14}dx$

Bài tập 3: Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$ b) $\int_0^2 \frac{6x+2}{x^2-x+1}dx$ c) $\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$

d) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$ e) $\int_1^2 \frac{dx}{x\left(1+x^4\right)}$ f) $\int_1^2 \frac{1-x^{2012}}{x\left(1+x^{2012}\right)}dx$

g) $\int_2^3 \frac{x^4dx}{\left(x^2-1\right)^2}$ h) $\int_1^2 \frac{1-x^2}{1+x^4}dx$ i) $\int_0^1 \frac{2-x^4}{1+x^2}dx$

j) $\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+2\right)^2\left(x+3\right)^2}$ k) $\int_0^1 \frac{1}{x^4+4x^2+3}.dx$ l) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}.dx$

m) $\int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9}{\left(x^5+1\right)^3}.dx$ n) $\int_0^1 \frac{\left(x+1\right)^2}{x^2+1}dx$ o) $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

p) $\int_1^2 \frac{4x^3-4x^2+7x-2}{4x^2-4x+1}dx$ q) $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^4+3x^2+2}$ r) $\int_0^2 \frac{2x^2+x-1}{x^2+2x+4}dx$

s) $\int_{-2}^{-1} \frac{\left(x^2-1\right)dx}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}$ t) $\int_1^2 \frac{\left(x^2-1\right)dx}{x^4-5x^3-4x^2-5x+1}$ u) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x^5}$

II. HÀM LƯỢNG GIÁC

1. Biến đổi và đổi biến cơ bản đưa về tích phân cơ bản

➢ Đối với những bài tích phân lượng giác, các em phải nắm vững các kiến thức công thức cộng, công thức nhân đôi, công thức nhân ba, công thức biến đổi tổng thành tích, công thức biến đổi tích thành tổng, công thức hạ bậc,...để đưa hàm số dưới dấu tích phân thành tổng hiệu các biểu thức có thể lấy nguyên hàm dựa vào bảng nguyên hàm cơ bản.

✓ Tích lượng giác bậc một của sin và cosin $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức tích thành tổng.

- $\sin ax.\cos bx=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\right]$
- $\sin ax.\sin bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right]$
- $\cos ax.\cos bx=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right]$

✓ Bậc chẵn của sin và cosin $\xrightarrow{PP}$ Hạ bậc:

- $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$
- $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{3}{4}$
- $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{3}{8}\cos 4x+\frac{5}{8}$

➢ Sử dụng phương pháp đổi biến để đưa bài toán tích phân lượng giác thành bài toán tính tích phân cơ bản. Một số dạng đổi biến thường gặp:

1.1) $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\sin x\right]\cos x dx$. Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$

1.2) $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\cos x\right]\sin x dx$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx$

2.1) $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\sin^2 x\right]\sin 2x dx$. Đặt $t=\sin^2 x\Rightarrow dt=\sin 2x dx$

2.2) $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\cos^2 x\right]\sin 2x dx$. Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow dt=-\sin 2x dx$

3.1) $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\tan x\right]\frac{1}{\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx=\left(1+\tan^2 x\right)dx$

3.2) $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\cot x\right]\frac{1}{\sin^2 x}dx$. Đặt $t=\cot x\Rightarrow dt=-\frac{1}{\cos^2 x}dx=-\left(1+\cot^2 x\right)dx$

4.1) $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\sin x+\cos x\right]\left(\cos x-\sin x\right)dx$. Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow dt=\left(\cos x-\sin x\right)dx$

4.2) $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\sin x-\cos x\right]\left(\cos x+\sin x\right)dx$. Đặt $t=\sin x-\cos x\Rightarrow du=(\cos x+\sin x)dx$

Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Hãy tính các tích phân sau:

a) $J=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sin 7xdx$

b) $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin xdx}{\sin^2 x+2\cos x.\cos^2\dfrac{x}{2}}$

c) $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$

d) $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$

Lời giải:

a) $J=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 5xdx-\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 9xdx=\dfrac{1}{10}\sin 5x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{1}{18}\sin 9x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{4}{45}.$

b) $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin xdx}{\sin^2 x+2\cos x.\cos^2\dfrac{x}{2}}=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin xdx}{\sin^2 x+\cos x.\left(1+\cos x\right)}=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}dx=-\ln\left|1+\cos x\right|\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2$

c) Ta có $\cos x(\sin^4 x+\cos^4 x)=\cos x\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]$

$$=\cos x\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=\cos x\left[1-\frac{1}{4}\left(1-\cos 4x\right)\right]$$

$$=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos x\cos 4x$$

$$=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{8}\left(\cos 5x+\cos 3x\right).$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin^4 x+\cos^4 x)dx=\frac{3}{4}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx+\frac{1}{8}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 5xdx+\frac{1}{8}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\text{co}3xdx$$

$$=\frac{3}{4}\sin x\Big|_{0}^{\pi/2}+\frac{1}{40}\sin 5x\Big|_{0}^{\pi/2}+\frac{1}{24}\sin 3x\Big|_{0}^{\pi/2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{40}-\frac{1}{24}=\frac{11}{15}.$$

d) $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\left(\sin x+\cos x\right)^2}}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\left|\sin x+\cos x\right|}dx\qquad(1)$

Vì: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right);\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}\le x+\dfrac{\pi}{4}\le 3\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0$

Mặt khác: $d\left(\sin x+\cos x\right)=\left(\cos x-\sin x\right)dx$

Cho nên: $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{d\left(\sin x+\cos x\right)}{\sin x+\cos x}=-\ln\left|\sin x+\cos x\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\left[\ln 1-\ln\sqrt{2}\right]=\dfrac{1}{2}\ln 2.$

Bài toán 2: Tính các tích phân sau

a) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^4 x dx$ b) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx$ c) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$ d) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x} dx$ e) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx$

Lời giải:

a) Ta có: $\tan^4 x = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^4 x} - 2\frac{1}{\cos^2 x} + 1$

Do đó: $I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^4 x dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^4 x} - 2\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right) dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(1+\tan^2 x\right)\frac{dx}{\cos^2 x} - \left[2\tan x + x\right]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \left(\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \left(2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{12}\right) = \left(2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\right) - \left(2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}.$

* Chú ý: Ta còn cách phân tích khác:

$\tan^4 x = \tan^2 x\left(\tan^2 x + 1 - 1\right) = \tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right) - \tan^2 x = \tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right) - \left(\tan^2 x + 1\right) + 1$

Vậy: $I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right) - \left(\tan^2 x + 1\right) + 1\right] dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x . \frac{dx}{\cos^2 x} - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dx$

$= \left(\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{1}{3}3\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{12}$

b) Ta có: $\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} = \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^3}{\sin^4 x} = \frac{1-3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x}{\sin^4 x} = \frac{1}{\sin^4 x} - 3\frac{1}{\sin^2 x} + 3 - \sin^2 x$

$\Rightarrow I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\sin^4 x} dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cot^2 x\right)\frac{dx}{\sin^2 x} - 3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x} + 3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx$

$= -\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cot^2 x\right) d\left(\cot x\right) + 3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\left(\cot x\right) + 3\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 2x\right) dx$

$= \left(-\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + 3\cot x + 3x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(-\frac{1}{3}\cot^3 x + 2\cot x + \frac{5}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{8} + \frac{23}{12}.$

c) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^6 x} dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^6 x} - \frac{1}{\cos^4 x}\right) dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)^2\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\tan^2 x+\tan^4 x\right)d\left(\tan x\right)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)d\left(\tan x\right)$$

$$=\left(\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x-\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{15}.$$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{4-\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{4-\frac{1+\cos 2x}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin 2x}{7-\cos 2x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(7-\cos 2x\right)}{7-\cos 2x}=-\ln\left|7-\cos 2x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln\frac{3}{4}$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(1+\sin 2x\right)}{1+\sin 2x}=\frac{1}{2}\ln\left|1+\sin 2x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$.

Bài toán 3: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{10}x+\cos^{10}x-\sin^4 x\cos^4 x\right)dx$

b) $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

Lời giải:

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{10}x+\cos^{10}x-\sin^4 x\cos^4 x\right)dx$

Ta có: $\sin^{10}x+\cos^{10}x-\sin^4 x\cos^4 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)\left(\cos^6 x-\sin^6 x\right)$

$=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^4 x+\cos^2 x\sin^2 x\right)$

$=\cos^2 2x\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)=\cos^2 2x-\frac{1}{16}\sin^2 4x=\frac{1+\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 8x}{32}=\frac{15}{32}+\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 8x$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{15}{32}+\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 8x\right)dx=\frac{15}{32}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{32.8}\sin 8x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{15\pi}{64}$.

b) $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$

Ta có: $\dfrac{1}{\sin x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{1}{\sin x\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x\right)}=\dfrac{2}{\sin^2 x\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}$

Vậy: $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{2}{\sqrt{3}+\cot x}\dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{2d\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}{\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\ln\dfrac{3}{2}$.

Bài toán 4: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

b) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx$

c) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$

d) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\sin x+1}dx$

Lời giải:

a) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(2\cos x+1\right)\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

Đặt: $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\dfrac{t^2-1}{3}\Rightarrow\sin xdx=-\dfrac{2}{3}tdt\\ x=0\Rightarrow t=2;x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$

Khi đó: $I=\int\limits_2^1\dfrac{\left(2\dfrac{t^2-1}{3}+1\right)}{t}\left(-\dfrac{2}{3}tdt\right)=2\int\limits_1^2\dfrac{2t^2+1}{9}dt=\dfrac{2}{9}\left[\dfrac{1}{3}t^3+t\right]\Big|_1^2=\dfrac{34}{27}$

b) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin x\cos^2 x}{1+\cos x}dx=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{\cos x+1}\sin xdx$

Đặt: $t=1+\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$ Đổi cận: $\begin{cases}x=0\to t=2\\ x=\dfrac{\pi}{2}\to t=1\end{cases}$

$\Rightarrow I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{\cos x+1}\sin xdx=2\int\limits_2^1\dfrac{\left(t-1\right)^2}{t}dt=2\int\limits_2^1\left(t-2+\dfrac{1}{t}\right)dt=2\left(\dfrac{1}{2}t^2-2t+\ln|t|\right)\Big|_1^2=2\ln 2-1.$

c) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$. Đặt: $t=\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}\Rightarrow t^2=\cos^2 x+4\sin^2 x$

Do đó: $\begin{cases}2tdt=\left(-2\sin x\cos x+8\sin x\cos x\right)dx=3\sin 2xdx\Rightarrow\sin 2xdx=\dfrac{2}{3}tdt\\ x=0\Rightarrow t=1;x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=2\end{cases}$

Vậy: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx=\frac{2}{3}\int\limits_1^2\frac{tdt}{t}=\frac{2}{3}\int\limits_1^2 dt=\frac{2}{3}t\Big|_1^2=\frac{2}{3}.$

d) Ta có: $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x=\left(4\cos^2 x-3\right)\cos x=\left(4-4\sin^2 x-3\right)\cos x=\left(1-4\sin^2 x\right)\cos x$

Cho nên: $\frac{\cos 3x}{1+\sin x}dx=\frac{\left(1-4\sin^2 x\right)}{1+\sin x}\cos x dx$

Đặt: $t=1+\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2\end{cases}$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\sin x+1}dx=\int\limits_1^2\frac{\left[1-4\left(t-1\right)^2\right]}{t}dt=\int\limits_1^2\left(8-4t-\frac{3}{t}\right)dt=\left(8t-2t^2-3\ln|t|\right)\Big|_1^2=2-3\ln 2.$

Bài toán 5: Tính các tích phân sau

a) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{\left(\sin x-\cos x+3\right)^3}dx$ b) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx$ c) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x-\sin^3 3x}{1+\cos 3x}dx$

Lời giải:

a) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{\left(\sin x-\cos x+3\right)^3}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\left(\sin x-\cos x+3\right)^3}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\cos x-\sin x\right)}{\left(\sin x-\cos x+3\right)^3}\left(\cos x+\sin x\right)dx.$

Đặt: $t=\sin x-\cos x+3\Rightarrow dt=\left(\cos x+\sin x\right)dx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\to t=2\\ x=\frac{\pi}{2}\to t=4\end{cases}$

$\Rightarrow I=\int\limits_2^4\frac{3-t}{t^3}dt=\int\limits_2^4\left(3\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left(-\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{t}\right)\Big|_2^4=\frac{1}{32}.$

b) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx$. Đặt: $t=1+2\sin 2x\Rightarrow dt=4\cos 2x dx\Rightarrow\cos 2x dx=\frac{1}{4}dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=3\end{cases}$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx=\frac{1}{4}\int\limits_1^3\frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t|\Big|_1^3=\frac{1}{4}\ln 3.$

c) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x-\sin^3 3x}{1+\cos 3x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x\left(1-\sin^2 3x\right)}{1+\cos 3x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x.\cos^2 3x}{1+\cos 3x}dx$

Đặt: $t=1+\cos 3x\Rightarrow dt=-3\sin 3x dx\Rightarrow\sin 3x dx=-\frac{1}{3}dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\ x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=1\end{cases}$

$\Rightarrow I=-\frac{1}{3}\int\limits_2^1\frac{\left(t-1\right)^2}{t}dt=\frac{1}{3}\int\limits_1^2\left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2-2t+\ln|t|\right)\Big|_1^2=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\ln 2.$

2. Hữu tỉ hóa tích phân hàm lượng giác

- ***Dạng 2.1.Tính*** $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$ (2.1)

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Khi đó: $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\alpha\Rightarrow t=t_1\\x=\beta\Rightarrow t=t_2\end{cases}$

$\Rightarrow I=I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}=\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{2dt}{(c-b)t^2+2at+b+c}$ (tích phân hữu tỉ) đã biết cách tính.

- ***Dạng 2.2. Tính*** $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{m\sin x+n\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$ (2.2).

Phân tích: $\frac{m\sin x+n\cos x}{a\sin x+b\cos x}=\frac{A(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}+\frac{B(a\cos x-b\sin x)}{a\sin x+b\cos x}$.

Tìm A,B bằng phương pháp đồng nhất thức:

$$m\sin x+n\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)\Rightarrow\begin{cases}m=Aa-Bb\\n=Ab+Ba\end{cases}$$

Khi đó: $I=A\int\limits_{\alpha}^{\beta}dx+B\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}=\left(Ax+\ln\left|a\sin x+b\cos x\right|\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}$

- ***Dạng 2.3. Tính*** $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{m\sin x+n\cos x+p}{a\sin x+b\cos x+c}dx$ (2.3).

Phân tích: $\frac{m\sin x+n\cos x+p}{a\sin x+b\cos x+c}=\frac{A(a\sin x+b\cos x+c)}{a\sin x+b\cos x+c}+\frac{B(a\cos x-b\sin x)}{a\sin x+b\cos x+c}+\frac{C}{a\sin x+b\cos x+c}$

Tìm A,B,C bằng phương pháp đồng nhất thức:

$$m\sin x+n\cos x+p=A(a\sin x+b\cos x+c)+B(a\cos x-b\sin x)+C\Rightarrow\begin{cases}m=Aa-Bb\\n=Ab+Ba\\p=Ac+C\end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{m\sin x+n\cos x+p}{a\sin x+b\cos x+c}dx=A\int\limits_{\alpha}^{\beta}dx+B\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos+c}dx+C\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{a\sin x+b\cos+c}$$

$$=Ax\Big|_{\alpha}^{\beta}+\mathrm{B}.\ln\left|a\sin x+b\cos+c\right\|_{\alpha}^{\beta}+C.(2.1)$$

- ***Dạng 2.4. Tính*** $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x+d}$ (2.4)

Biến đổi $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(a+d)\sin^2x+b\sin x\cos x+(c+d)\cos^2x}=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\frac{dx}{\cos^2x}}{(a+d)\tan^2x+b\tan x+(c+d)}$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2x}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\alpha\Rightarrow t=t_1\\x=\beta\Rightarrow t=t_2\end{cases}$

$\Rightarrow I=\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{(a+d)t^2+bt+(c+d)}$ đã tính được.

Một số bài toán minh họa

Bài toán: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

b) $I=\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{2\sin x+11\cos x}{3\sin x+4\cos x}dx$

c) $I=\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x+7\cos x+6}{4\sin x+3\cos x+5}dx$

d) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+2\cos x+3}dx$

e) $I=\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x+2}$.

Lời giải:

a) $\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}dt=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)dx\Leftrightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$

Khi đó: $I_1=\int\limits_0^1\dfrac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\limits_0^1\dfrac{dt}{t+1}=\ln\left|t+1\right|\Big|_0^1=\ln 2.$

b) $I=\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{2\sin x+11\cos x}{3\sin x+4\cos x}dx$

Ta phân tích: $2\sin x+11\cos x=A\left(3\sin x+4\cos x\right)+B\left(3\cos x-4\sin x\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin x+11\cos x=\left(3A-4B\right)\text{sinx}+\left(4A+3B\right)\text{cosx}$

$\Rightarrow\begin{cases}3A-4B=2\\ 4A+3B=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\ B=1\end{cases}$

Khi đó: $I=\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{2\left(3\sin x+4\cos x\right)+\left(3\cos x-4\sin x\right)}{3\sin x+4\cos x}dx=2\int\limits_0^{\pi/4}dx+\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{d\left(3\sin x+4\cos x\right)}{3\sin x+4\cos x}$

$=\left(2x+\ln\left|3\sin x+4\cos x\right|\right)\Big|_0^{\pi/4}=\dfrac{\pi}{2}+\ln\dfrac{7\sqrt{2}}{8}.$

c) $I=\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x+7\cos x+6}{4\sin x+3\cos x+5}dx$

Phân tích $\sin x+7\cos x+6=A\left(4\sin x+3\cos x+5\right)+B\left(4\cos x-3\sin x\right)+C$

$\Leftrightarrow\sin x+7\cos x+6=\left(4A-3B\right)\text{sinx}+\left(3A+4B\right)\cos x+5A+C$

$\Rightarrow\begin{cases}4A-3B=1\\ 3A+4B=7\Leftrightarrow A=B=C=1\\ 5A+C=6\end{cases}$

Khi đó: $I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{4\sin x+3\cos+5}{4\sin x+3\cos+5}dx+\int\limits_0^{\pi/2}\frac{4\cos x-3\sin x}{4\sin x+3\cos+5}dx+\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{4\sin x+3\cos+5}dx$

$=\int\limits_0^{\pi/2}dx+\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\left(4\sin x+3\cos+5\right)}{4\sin x+3\cos+5}+I_1=\left(x+\ln\left|4\sin x+3\cos+5\right|\right)\Big|_0^{\pi/2}+I_1=\frac{\pi}{2}+\ln\frac{9}{8}+I_1\quad(*).$

+ Tính $I_1=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{4\sin x+3\cos+5}dx$

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$

Suy ra: $I_1=\int\limits_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4.\frac{2t}{1+t^2}+3.\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=\int\limits_0^1\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int\limits_0^1\frac{dt}{\left(t+2\right)^2}=-\frac{1}{t+2}\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$

Thay $I_1=\frac{1}{6}$ vào $(*)$ ta được: $I=\frac{\pi}{2}+\ln\frac{9}{8}+\frac{1}{6}.$

d) Phân tích: $\frac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+2\cos x+3}=\frac{A\left(\sin x+2\cos x+3\right)}{\sin x+2\cos x+3}+\frac{B\left(\cos x-2\sin x\right)}{\sin x+2\cos x+3}+\frac{C}{\sin x+2\cos x+3}$

Quy đồng mẫu số và đồng nhất hệ số hai tử số:

$$\Leftrightarrow\sin x-\cos x+1=\left(A-2B\right)\sin x+\left(2A+B\right)\cos x+3A+C\Rightarrow\begin{cases}A-2B=1\\ 2A+B=-1\\ 3A+C=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{5}\\ B=-\frac{3}{5}\\ C=\frac{4}{5}\end{cases}.$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+2\cos x+3}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{5}\right)dx-\frac{3}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\sin x+2\cos x+3\right)}{\sin x+2\cos x+3}+\frac{4}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+2\cos x+3}dx$$

$$=-\frac{\pi}{10}-\frac{3}{5}\ln\left|\sin x+2\cos x+3\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{5}J=-\frac{\pi}{10}-\frac{3}{5}\ln\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\ln J\quad(2)$$

- Tính tích phân J:

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}dt=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx\Leftrightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+2\cos x+3}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2dt}{t^2+2t+3}=\int\limits_0^1\frac{2dt}{\left(t+1\right)^2+2}\quad(*)$$

Tính $(*)$: Đặt: $t+1=\sqrt{2}\tan u\Rightarrow dt=\sqrt{2}\frac{du}{\cos^2 u}$.

Đổi cận: $\begin{cases} t=0 \Rightarrow \tan u=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u=\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}=u_1 \\ t=1 \to \tan u=\sqrt{2} \Rightarrow u=\arctan\sqrt{2}=u_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{2dt}{(t+1)^2+2}=\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{\dfrac{2}{\cos^2 u}}\frac{\sqrt{2}du}{\cos^2 u}=\int_{u_1}^{u_2}\frac{\sqrt{2}}{2}du=\frac{\sqrt{2}}{2}(u_2-u_1).$$

Vậy: $I=-\dfrac{\pi}{10}-\dfrac{3}{5}\ln\dfrac{4}{5}-\dfrac{4}{5}\dfrac{\sqrt{2}}{2}(u_2-u_1)$ $\quad \begin{cases} u_1=\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ u_2=\arctan\sqrt{2} \end{cases}$

e) $I=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x+2}$.

$$I=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x+2}=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{3\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}=\int_0^{\pi/4}\frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{3\tan^2 x+2\tan x-1}$$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{3t^2+2t-1}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dt}{(3t-1)(t+1)}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{3}{4}.\frac{1}{3t-1}-\frac{1}{4}.\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(\frac{1}{4}\ln|3t-1|-\frac{1}{4}\ln|t+1|\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3t-1}{t+1}\right|\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{4}\ln\left(-5+4\sqrt{2}\right)$$

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Tính các tích phân sau:

a) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{(\sin x+1)^4}dx$ b) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x dx$ c) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^6 x dx$

d) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$ e) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\sin x+3\cos x+5}dx$ f) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+7\cos x+6}{4\sin x+3\cos x+5}dx$

g) $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$ h) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin x dx$ i) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x+2}$

j) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+2\cos x+3}dx$ k) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+2\cos x+3}dx$ l) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx$

m) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan x dx$ n) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{1+\cos x}dx$ o) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$

p) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$ q) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$ r) $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}dx$

Bài tập 2: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$ b) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{1+\cos^2 x}dx$ c) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$

d) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}dx$ e) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x\cos x}{1+\cos^2 2x}dx$ f) $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$

g) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin 2x}$ h) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\left(\sin x+\cos x+2\right)^3}dx$ i) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\left(\sin x+2\cos x\right)^2}$

j) $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}$ k) $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3\cot x+1}}{\sin^2 x}dx$ l) $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x\sqrt{\cot x}}dx$

m) $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 x+9\cos^2 x}dx$ n) $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$ o) $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$

Bài tập 3: Tính các tích phân lượng giác sau:

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{\cos 2x}dx$ ĐS: $I=\frac{1}{2}\ln 2$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}dx$ ĐS: $I=\ln\frac{10}{9}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 x-1)\cos^2 x dx$ ĐS: $I=\frac{8}{15}-\frac{\pi}{4}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{1+4\cos x}\sin x dx$ ĐS: $I=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2x\cos^4 x dx$ ĐS: $I=\frac{1}{5}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^4 x+1}{\cos^4 x}dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$ ĐS: $I=0$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{\sin x}+\cos x)\cos x dx$ ĐS: $I=\frac{\pi}{4}+e-1$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin x(1-\sin x)}{\cos^3 x}dx$ ĐS: $I=1$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ ĐS: $I=\frac{34}{27}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{2\sin x\cos^3 x+\cos^4 x}dx$ ĐS: $I=1+\frac{1}{8}\ln 3$

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x\sin^2 x}$ ĐS: $I=\frac{4}{3}+\frac{8\sqrt{3}}{27}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{1}{\cos x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}dx$ ĐS: $I=\sqrt{2}\ln\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x}{\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$ ĐS: $I=\sqrt{5}-\sqrt{3}$

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin^2 x+3\sin x\cos x+1}dx$ ĐS: $I=\ln\dfrac{4}{3}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{1}{2}\ln 2$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx$ ĐS: $I=-\dfrac{10\sqrt{3}}{27}+\dfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{4\cos^2 x+9\sin^2 x}}$ ĐS: $I=\dfrac{1}{5}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos 2x}dx$ ĐS: $I=2-\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{3-2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}}\right|$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{1}{5\cos^2 x-8\sin x\cos x+3\sin^2 x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6+\sqrt{3}}{5}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{5-4\sin x-\cos^2 x+\cos x}}dx$ ĐS: $I=-\dfrac{14}{3}+12\ln\dfrac{3}{2}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)\sin x dx$ ĐS: $I=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\ln 2}{2}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos^2 x(1+\cos x)-\sin^2 x(1+\sin x)}{\sin x+\cos x}dx$ ĐS: $I=\sqrt{2}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\ln 2$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{3\cos 2x-\sin 4x}{2-\sin x-\cos x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{13\sqrt{2}-5}{3}+6\ln(2-\sqrt{2})$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{4(\sin x+\cos x)-\cos 2x}{2(\sin x-\cos x-1)-\sin 2x}dx$ ĐS: $I=5\ln 2-3\ln 5$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

$I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt[3]{\sin^3 x-\sin x}}{\sin^3 x}\cot x dx$ ĐS: $I=-\dfrac{1}{8\sqrt[3]{3}}$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx$ ĐS: $I=\dfrac{1}{4}\ln 3$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\sin^2 x+2\cos x.\cos^2\dfrac{x}{2}}dx$ ĐS: $I=\ln 2$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}dx$ ĐS: $I=\dfrac{26}{3}-12\ln 2$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{b^2\cos^2 x+c^2\sin^2 x}}dx$ ĐS: $I=\dfrac{1}{|b|+|c|}$

III. HÀM VÔ TỶ

1. Phương pháp

Thường sẽ có 2 loại bài tập tính tích phân hàm vô tỉ với cách giải đặc thù sau:

- Phân tích, biến đổi để làm mất căn thức (biến đổi thành bình phương dưới căn rồi đưa ra ngoài; nhân lượng liên hợp để mất căn).
- Sử dụng phương pháp đổi biến, đây là phương pháp phổ biến nhất để giải một bài toán tích phân hàm vô tỷ, ta thường gặp các dạng sau đây:

Dạng 1: $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ (với $R\left(x\right)$ là hàm số hữu tỉ của biến x)

Cách giải: Đặt $t=\sqrt[n]{ax+b}$

Dạng 2: $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}R\left(x,\sqrt[m]{x^p},\sqrt[n]{x^q},...,\sqrt[s]{x^r}\right)dx$ (với $R\left(x\right)$ là hàm số hữu tỉ của biến x)

Cách giải: Với $k=BCNN\left(m,n,...,s\right)$ ta đặt $t=\sqrt[k]{x}\Rightarrow x=t^k$

Dạng 3: $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

+ *Cách 1:* Đặt $t=\sqrt{ax^2+bx+c}$ (nếu giải được)

+ *Cách 2:* Biến đổi $\sqrt{ax^2+bx+c}$ và đặt theo 3 hướng sau:

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{A^2-u^2}$ thì đặt $u=A\cos t$ với $0\le t\le\pi$ (hoặc $u=A\sin t$ với $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$)

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{u^2+A^2}$ thì đặt $u=A\tan t$ với $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ $\left(*\right)$

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{u^2-A^2}$ thì đặt $u=\frac{A}{\cos t}$ với $0\le t\le\pi$ và $t\ne\frac{\pi}{2}$ $\left(**\right)$

(với u là biểu thức chứa biến x và A là hằng số)

Dạng 4: $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ (với $R\left(x\right)$ là hàm số hữu tỉ của biến x)

Cách giải: Đặt $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Rightarrow t^n=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\frac{b-dt^n}{ct^n-a}\Rightarrow dx=\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a}\right)'dt$

Dạng 5: $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}R\left(x,\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)dx$ hoặc $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}R\left(x,\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)dx$

Cách giải: Đặt $x=a\cos 2t$ và sử dụng công thức $1-\cos 2t=2\sin^2 t$, $1+\cos 2t=2\cos^2 t$.

Dạng 6: $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}R\left(x,\frac{1}{\sqrt{\left(ax+b\right)\left(cx+d\right)}}\right)dx$ (với $R\left(x\right)$ là hàm số hữu tỉ của biến x)

Cách giải: Đặt $t=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$

Các em có thể xem thêm các cách đặt biến số của hàm vô tỉ ở phần phương pháp đổi biến số dạng 1 và dạng 2.

Chú ý: Đối với bài toán tính $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}}$ thì ta có thể không cần lượng giác hóa như cách đặt như ở phần $(*),(**)$; ta có thể trình bày như sau:

Cách 1: Biến đổi $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2\pm k}\right)dx}{\left(x+\sqrt{x^2\pm k}\right)\sqrt{x^2\pm k}}=\frac{d\left(x+\sqrt{x^2\pm k}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2\pm k}\right)}=\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm k}\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}=...$

Cách 2: Đặt $t=x+\sqrt{x^2\pm k}\Rightarrow dt=1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm k}}dx=\frac{x+\sqrt{x^2\pm k}}{\sqrt{x^2\pm k}}dx=\frac{tdx}{\sqrt{x^2\pm k}}\Rightarrow\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}}$

Đổi cận $\begin{cases}x=\alpha\Rightarrow t=t_1\\ x=\beta\Rightarrow t=t_2\end{cases}\Rightarrow\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k}}=\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_{t_1}^{t_2}=\ln\left|\frac{t_2}{t_1}\right|.$

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Tính các tích phân sau: *a)* $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ *b)* $\int\limits_0^1\frac{x^3dx}{x+\sqrt{1+x^2}}$

Lời giải:

a) $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}dx=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}dx$

$=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{2}{3}\left[\left(x+1\right)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1$

$=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-2\right).$

b) $\int\limits_0^1\frac{x^3dx}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{x^3\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)dx}{x^2-\left(1+x^2\right)}=\int\limits_0^1(x^3\sqrt{1+x^2}-x^4)dx=\int\limits_0^1x^3\sqrt{1+x^2}dx-\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=J-\frac{1}{5}.$

Tính $J=\int\limits_0^1x^3\sqrt{1+x^2}dx=\int\limits_0^1x^2\sqrt{1+x^2}xdx.$

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t^2=1+x^2\Rightarrow tdt=xdx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\end{cases}$

$\Rightarrow J=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)t.tdt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^4-t^2\right)dt=\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{15}+\frac{2}{15}$

$\Rightarrow I=\frac{2\sqrt{2}}{15}+\frac{2}{15}-\frac{1}{5}=\frac{2\sqrt{2}}{15}-\frac{1}{15}.$

Nhận xét: Ở câu a) và câu b) ta đều nhân lượng liên hiệp để khử mẫu đưa về bài toán dễ tính hơn.

Bài toán 2: *(Đề minh họa BGD 2018)* Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=24$ **B.** $P=12$ **C.** $P=18$ **D.** $P=46$

Lời giải:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx \quad \left(\text{do } \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=1\right)$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx = \left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2 = 4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2 = \sqrt{32}-\sqrt{12}-2.$$

$\Rightarrow a+b+c=46.$

Bài toán 3: Tính $P=a+b$. Biết:

a) $I=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = a+\ln b-\ln\sqrt{3}$ b) $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = 2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$

Lời giải:

a) Đặt $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2=1+x^2 \Rightarrow tdt=xdx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \end{cases}$

Khi đó $I=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}xdx = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t}{t^2-1}.tdt = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$

$$= \int_{\sqrt{2}}^2 \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt = \left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_{\sqrt{2}}^2 = 2-\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2}\ln 3$$

$\Rightarrow a=2-\sqrt{2}; b=\sqrt{2}+1 \Rightarrow P=a+b=3.$

b) Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1+\sqrt{3} \\ x=1 \Rightarrow t=2+\sqrt{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)dx = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}}dx = t.\frac{dx}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}} = \frac{2dt}{t}$$

Khi đó: $I_4 = 2\int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = 2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} = 2\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right) \Rightarrow a=2; b=3 \Rightarrow a+b=5.$

Bài toán 4: Cho tích phân $I=\int_a^2 \left(4+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\right)dx = \frac{28}{3}$. Tính $P=6a+\sqrt{1+a^3}$?

Lời giải:

Ta có $I=\int\limits_a^2 4dx+\int\limits_a^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$

Tính $B=\int\limits_a^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$. Đặt $\sqrt{1+x^3}=t\Rightarrow 1+x^3=t^2\Rightarrow x^2dx=\frac{2}{3}tdt$

Khi đó $B=\int\limits_a^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\Big|_a^2=2-\frac{2}{3}\sqrt{1+b^3}$

Ta có: $I=4x+\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\Big|_a^2=10-\left(4a+\frac{2}{3}\sqrt{1+a^3}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{28}{3}=10-\left(4a+\frac{2}{3}\sqrt{1+a^3}\right)\Leftrightarrow 4a+\frac{2}{3}\sqrt{1+a^3}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 6a+\sqrt{1+a^3}=1$. Vậy $P=6a+\sqrt{1+a^3}=1$.

Bài toán 5: Cho $I=\int\limits_{\sqrt{5}}^a \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3},\ \left(a>\sqrt{5}\right)$. Tính a^2.

Lời giải:

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow tdt=xdx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\sqrt{5}\\x=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=3\\t=\sqrt{a^2+4}\end{cases}$.

$$I=\int\limits_{\sqrt{5}}^a \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\int\limits_3^{\sqrt{a^2+4}} \frac{dt}{t^2-4}=\int\limits_3^{\sqrt{a^2+4}} \frac{dt}{(t-2)(t+2)}=\frac{1}{4}\int\limits_3^{\sqrt{a^2+4}}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Big|_3^{\sqrt{a^2+4}}=\frac{1}{4}\ln\left(5\cdot\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}\right)$$

Ta có: $I==\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\ln\left(5\cdot\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3},\left(a>\sqrt{5}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{a^2+4}-2\right)=\sqrt{a^2+4}+2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+4}=4\Leftrightarrow a=2\sqrt{3}\Rightarrow a^2=12.$$

Bài toán 6: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_4^6\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}.\frac{1}{x+2}dx$ *b)* $I=\int\limits_{-1}^1\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}.\frac{1}{(2-x)^2}dx$

Lời giải:

a) $I=\int\limits_4^6\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}.\frac{1}{x+2}dx$

Đặt $t=\sqrt{\frac{x-4}{x+2}}\Rightarrow t^2=\frac{x-4}{x+2}\Rightarrow x=\frac{2t^2+4}{1-t^2}\Leftrightarrow x=\frac{6}{1-t^2}-2\ (*)\Rightarrow dx=\frac{12tdt}{(1-t^2)^2}$

Từ $(*)\Rightarrow x+2=\frac{6}{1-t^2}\Rightarrow\frac{1}{x+2}=\frac{1-t^2}{6}$.

Đổi cận : $\begin{cases} x=4\Rightarrow t=0 \\ x=6\Rightarrow t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy $I=\int\limits_4^6\sqrt{\dfrac{x-4}{x+2}}.\dfrac{dx}{x+2}=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}t\dfrac{1-t^2}{6}.\dfrac{12tdt}{(1-t^2)^2}$

$=2\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{t^2}{1-t^2}dt=2\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{1-t^2}-1\right)dt=2\left(\ln\left|\dfrac{1+t}{1-t}\right|-t\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=2\ln 3-1.$

b) $I=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}.\dfrac{1}{(2-x)^2}dx$

Đặt $t=\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}\Rightarrow t^3=\dfrac{2-x}{2+x}\quad (*)\Rightarrow x=\dfrac{2-2t^3}{1+t^3}\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{1+t^3}-2\quad (**)\Rightarrow dx=\dfrac{-12t^2dt}{(1+t^3)^2}$

Từ $(*),(**)\Rightarrow 2-x=(2+x)t^3=\dfrac{4t^3}{1+t^3}\Rightarrow\dfrac{1}{(2-x)^2}=\dfrac{(1+t^3)^2}{16t^6}.$

Đổi cận : $\begin{cases} x=-1\Rightarrow t=\sqrt[3]{3} \\ x=1\Rightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases}$

Vậy $I=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}.\dfrac{1}{(2-x)^2}dx=\int\limits_{\sqrt[3]{3}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}t.\dfrac{(1+t^3)^2}{16t^6}.\dfrac{-12t^2dt}{(1+t^3)^2}=-\dfrac{3}{4}\int\limits_{\sqrt[3]{3}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}\dfrac{dt}{t^3}=\dfrac{3}{8t^2}\Big|_{\sqrt[3]{3}}^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}=\dfrac{3}{8}\left(\sqrt[3]{9}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}\right).$

Bài toán 7: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{(x-1)(3-x)}dx$ b) $I=\int\limits_0^1\dfrac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ c) $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}\dfrac{4x-3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$

Lời giải:

a) Ta có: $I=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{(x-1)(3-x)}dx=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{-3-x^2+2x}dx=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{3}\sqrt{1-(x-2)^2}dx.$

Đặt $x-2=\sin t, t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos tdt;\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos t\geq 0$. Đổi cận $\begin{cases} x=\dfrac{5}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6} \\ x=3\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$

$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos tdt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2t}{2}dt=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}.$

b) $I=\int\limits_0^1\dfrac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$

Ta có: $(3+3x-x^2)'=3-2x$ và $3+4x=9-2(3-2x)$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^1\frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int\limits_0^1\frac{7-2\left(2-2x\right)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int\limits_0^1\frac{7}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx-\int\limits_0^1\frac{2\left(2-2x\right)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=I_1-I_2.$

+ Tính $I_1=\int\limits_0^1\frac{7}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=\int\limits_0^1\frac{7}{\sqrt{4-\left(x-1\right)^2}}dx$.

Đặt $x-1=2\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos tdt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}\\ x=1\Rightarrow t=0\end{cases}$.

Vì $t\in\left[-\frac{\pi}{6};0\right]\Rightarrow\cos t>0\Rightarrow I_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^0\frac{14\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^0\frac{14\cos t}{2\left|\cos t\right|}dt=7t\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^0=\frac{7\pi}{6}$.

+ Tính $I_2=\int\limits_0^1\frac{2\left(2-2x\right)}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$. Đặt $t=\sqrt{3+2x-x^2}\Rightarrow dt=\frac{\left(2-2x\right)}{2\sqrt{3+2x-x^2}}dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=\sqrt{3}\\ x=1\Rightarrow t=2\end{cases}$.

$\Rightarrow I_2=4\int\limits_{\sqrt{3}}^2 dt=4t\Big|_{\sqrt{3}}^2=8-4\sqrt{3}.$

$\Rightarrow I=I_1-I_2=\frac{7\pi}{6}+4\sqrt{3}-8.$

c) $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}\frac{4x-3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$.

Ta có: $\left(5+4x-x^2\right)'=4-2x$ và $4x-3=5-2\left(4-2x\right)$.

$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}\frac{4x-3}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}\frac{5}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}\frac{2\left(4-2x\right)}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx=I_1-I_2.$

+ Tính $I_1=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}\frac{5}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}\frac{5}{\sqrt{9-\left(x-2\right)^2}}dx$.

Đặt $x-2=3\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=3\cos tdt$. Đổi cận $\begin{cases}x=\frac{7}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}\\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}\end{cases}$.

$\Rightarrow I_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{5.3\cos t}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}dt=\frac{5\pi}{3}$.

+ Tính $I_2=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}}\frac{2\left(4-2x\right)}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{5+4x-x^2}\Rightarrow dt=\dfrac{4-2x}{2\sqrt{5+4x-x^2}}dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\\ x=\dfrac{7}{2}\Rightarrow t=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow I_2=0$

$\Rightarrow I=I_1-I_2=\dfrac{5\pi}{3}-0=\dfrac{5\pi}{3}.$

Bài toán 8: Tính các tích phân sau: a) $I=\int\limits_5^{3\sqrt{5}}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx$ b) $I=\int\limits_0^1\dfrac{a}{\sqrt{3x^2+12}}dx$

Lời giải:

a) $I=\int\limits_5^{3\sqrt{5}}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx$

Đặt $u=x+\sqrt{x^2-9}\Rightarrow du=\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}\right)dx=\dfrac{x+\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-9}}dx=\dfrac{udx}{\sqrt{x^2-9}}\Rightarrow\dfrac{du}{u}=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-9}}.$

Đổi cận $\begin{cases}x=5\Rightarrow u=9\\ x=3\sqrt{5}\Rightarrow u=6+3\sqrt{5}\end{cases}.$

$\Rightarrow I=\int\limits_9^{6+3\sqrt{5}}\dfrac{du}{u}=\left(\ln|u|\right)\Big|_9^{6+3\sqrt{5}}=\ln\left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{3}\right).$

b) $I=\int\limits_0^1\dfrac{a}{\sqrt{3x^2+12}}dx=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\int\limits_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

Đặt $u=x+\sqrt{x^2+4}\Rightarrow du=\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}dx\Rightarrow\dfrac{du}{u}=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$

$I=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\int\limits_2^{1+\sqrt{5}}\dfrac{1}{u}du=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\left(\ln u\right)\Big|_2^{1+\sqrt{5}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right|.$

3. Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x}dx$ b) $I=\int\limits_1^2\dfrac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$ c) $I=\int\limits_1^2\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

d) $I=\int\limits_1^2\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ e) $I=\int\limits_0^1\dfrac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}}$ f) $I=\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2\dfrac{dx}{x.\sqrt{x^2-1}}$

g) $I=\int\limits_0^4\dfrac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx\cdot$ h) $I=\int\limits_0^4\dfrac{1}{3x+1+\sqrt{6x+1}}dx.$ i) $I=\int\limits_0^4\dfrac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}\cdot dx\cdot$

j) $I=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}}dx\cdot$ k) $I=\int_0^3\left(e^x-\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\right)\cdot dx\cdot$ l) $I=\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\cdot dx\cdot$

m) $I=\int_0^1 (x-1)^3\sqrt{2x-x^2}.dx.$ n) $I=\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx\cdot$ o) $I=\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}\cdot$

p) $I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}\cdot$ q) $I=\int_{\sqrt{7}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}\cdot$ r) $I=\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}\cdot$

s) $I=\int_1^4 \frac{dx}{x.(1+\sqrt{x})}\cdot$ t) $I=\int_0^2 \frac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}dx\cdot$ u) $I=\int_1^4 \frac{e^{4\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\cdot dx\cdot$

Bài tập 2: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ b) $I=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$ c) $I=\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}+1}{x+2}dx$

d) $I=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}}dx$ e) $I=\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ f) $I=\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x.\sqrt{x^2+4}}$

g) $I=\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}.dx$ h) $I=\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}$ i) $I=\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}.dx$

j) $I=\int_1^2 \frac{xdx}{x+\sqrt{x^2-1}}$ k) $I=\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^2+\sqrt{x^4+1}}$ l) $I=\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x^3}{x+\sqrt{x^2+4}}dx$

m) $I=\int_0^1 \frac{2x-x^3}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$ n) $I=\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$ o) $I=\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}}$

p) $I=\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\cdot$ q) $I=\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx\cdot$ r) $I=\int_1^{27} \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt[3]{x^2}}dx\cdot$

IV. HÀM CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

Ở phần ứng dụng tính diện tích hình phẳng và thể thể tích khối tròn xoay, các công thức tính toán sẽ liên quan đến tích phân chứa trị tuyệt đối. Cho nên, trong phân này chúng ta sẽ tìm hiểu về tích phân chứa giá trị tuyệt đối.

1. Phương pháp

Nếu dưới dấu tích phân có dấu trị tuyệt dối $I=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)\right|dx$ thì tìm cách phá trị tuyệt đối bằng cách đi xét dấu của $f(x)$ trong đoạn $[\alpha;\beta]$. Cụ thể:

Bước 1: Giải phương trình $f(x)=0\Rightarrow x_i=?$

Bước 2: Lập bảng xét dấu của $f(x)$ trong các khoảng thuộc $[\alpha;\beta]$.

Bước 3: Ta dựa vào công thức $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta}f(x)dx\ \ (\alpha<\gamma<\beta)$ để tách:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)\right|dx=\int_{\alpha}^{x_i}\left|f(x)\right|dx+\int_{x_i}^{\beta}\left|f(x)\right|dx$$

Sau đó phá trị tuyệt đối, trở về tích phân cơ bản.

Chú ý: Đối với bài toán có nhiều dấu trị tuyệt đối lồng vào nhau $\left(\int_{\alpha}^{\beta}\left(\left|f(x)\right|,\left|g(x)\right|,\left|h(x)\right|,...\right)\right)$ ta sẽ mượn bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối.

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Tính các tích phân sau:

a) $I=\int_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|dx$ b) $\int_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}dx$ c) $\int_{-3}^{5}\left(\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right)dx$

d) $\int_{-1}^{2}\left(x+\left|1-x\right|-\left|x+2\right|\right)dx$ e) $I=\int_{-1}^{1}\frac{\left|x\right|}{x^4-x^2-12}dx$ f) $I=\int_{1}^{5}\frac{2\left|x-2\right|+1}{x}dx$

Lời giải:

a) Tính $I=\int_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|dx$

Lập bảng xét dấu của x^2-1 trên đoạn $[-2;2]$

x	-2		-1		1		2
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó $I=\int_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|dx=\int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^2-1\right)dx$

$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{1}^{2}=4.$

b) Tính $\int_0^3 \sqrt{x^3-2x^2+x}dx$

$$I=\int_0^3 \sqrt{x^3-2x^2+x}dx=\int_0^3 \sqrt{x\left(x^2-2x+1\right)}dx=\int_0^3 |x-1|\sqrt{x}dx$$
$$=\int_0^1 |x-1|\sqrt{x}dx+\int_1^3 |x-1|\sqrt{x}dx=\int_0^1 (1-x)\sqrt{x}dx+\int_1^3 (x-1)\sqrt{x}dx$$
$$=\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx+\int_1^3 \left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_1^3=\frac{24\sqrt{3}+8}{15}.$$

c) Tính $\int_{-3}^5 \left(|x+2|-|x-2|\right)dx$

Ta sẽ mượn bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-3		-2		2		5
$\|x+2\|$	$-x-2$	0	$x+2$			$x+2$	
$\|x-2\|$	$-x+2$			$-x+2$	0	$x-2$	
$\|x+2\|-\|x-2\|$	-4			$2x$		4	

(Nghĩa là: với $x\in[-3;-2]$ thì $|x+2|-|x-2|=-4$; với $x\in[-2;2]$ thì $|x+2|-|x-2|=2x$,...)

$$\Rightarrow I=\int_{-3}^{-2}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx+\int_{-2}^{2}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx+\int_{2}^{5}\left(|x+2|-|x-2|\right)dx$$
$$=-4\int_{-3}^{-2}dx+2\int_{-2}^{2}xdx+4\int_{2}^{5}dx=-4x\Big|_{-3}^{-2}+x^2\Big|_{-2}^{2}+4x\Big|_{2}^{5}=8.$$

d) Tính $\int_{-1}^2 \left(x+|1-x|-|x+2|\right)dx$

Ta sẽ mượn bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-1		1		2
$\|1-x\|$	$1-x$	0	$x-1$		
$\|x+2\|$	$x+2$			$x+2$	
$x+\|1-x\|-\|x+2\|$	$-x-1$			$x-3$	

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-x-1)dx+\int_{1}^{2}(x-3)dx=-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{2}.$$

e) Tính $I=\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{x^4-x^2-12}dx$

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{|x|}{x^4-x^2-12}dx=\int\limits_{-1}^{0}\frac{|x|}{x^4-x^2-12}dx+\int\limits_{0}^{1}\frac{|x|}{x^4-x^2-12}dx=-\int\limits_{-1}^{0}\frac{x}{x^4-x^2-12}dx+\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{x^4-x^2-12}dx$

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=-1\Rightarrow t=1\\x=0\Rightarrow t=0\\x=1\Rightarrow t=1\end{cases}$.

$\Rightarrow I=-\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{0}\frac{dt}{t^2-t-12}+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2-t-12}=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2-t-12}+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2-t-12}$

$=\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2-t-12}=\frac{1}{7}\int\frac{(t+3)-(t-4)}{(t+3)(t-4)}dt=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{t-4}-\frac{1}{t+3}\right)dt=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{t-4}{t+3}\right|\Bigg|_0^1=\frac{2}{7}\ln\frac{3}{4}.$

f) Tính $I=\int\limits_{1}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}dx$

Ta có: $I=\int\limits_{1}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}dx=\int\limits_{1}^{2}\frac{2|x-2|+1}{x}dx+\int\limits_{2}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}dx$

$=\int\limits_{1}^{2}\frac{2(2-x)+1}{x}dx+\int\limits_{2}^{5}\frac{2(x-2)+1}{x}dx=\int_1^2\frac{5-2x}{x}dx+\int_2^5\frac{2x-3}{x}dx$

$=\int_1^2\left(\frac{5}{x}-x\right)dx+\int_2^5\left(2-\frac{3}{x}\right)dx$

$=\left(5\ln|x|-x\right)\Big|_1^2+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_2^5=8\ln 2-3\ln 5+4.$

Bài toán 2: Tính các tích phân sau: a) $\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx$ b) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}dx$

Lời giải:

a) Tính $\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx$

Ta có: $\sqrt{1-\sin 2x}=\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=|\sin x+\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

Với $x\in[0;\pi]\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

+ Với $x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ thì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$

+ Với $x-\frac{\pi}{4}\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$ thì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$

$\Rightarrow I=-\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx+\sqrt{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=2\sqrt{2}.$

b) Tính $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}dx$

Ta có: $\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}=\sqrt{\left(\tan x-\cot x\right)^2}=\left|\tan x-\cot x\right|=\left|\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x.\cos x}\right|=2\left|\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}\right|$

$\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}\le 2x\le\dfrac{2\pi}{3}$

+ $2x\in\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì $\begin{cases}\sin 2x>0\\ \cos 2x>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}>0$ khi $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$

+ $2x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right]$ thì $\begin{cases}\sin 2x>0\\ \cos 2x<0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}<0$ khi $2x\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right]$

$\Rightarrow I=2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}dx-2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{d\left(\sin 2x\right)}{\sin 2x}dx-\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{d\left(\sin 2x\right)}{\sin 2x}dx=\ln\left|\sin 2x\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}-\ln\left|\sin 2x\right|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=2\ln\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

3. Bài tập tự luyện

Tính các tích phân sau:

a) $I=\int\limits_0^2\left|x^2-x\right|dx$ ĐS: 1

b) $\int\limits_{-2}^1\left(\left|x+1\right|-\left|x\right|\right)dx$ ĐS: 0

c) $I=\int\limits_0^1\sqrt{4x^2-4x+1}dx$ ĐS: $\dfrac{1}{2}$

d) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x\right|dx$ ĐS: 2

e) $\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx$ ĐS: $4\sqrt{2}$

f) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}dx$ ĐS: $2\sqrt{2}$

g) $I=\int\limits_{-2}^2\left|2x-\left|x+1\right|\right|dx$ ĐS: 6

h) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|x^4-4x^2+3\right|dx$ ĐS: $\dfrac{112-24\sqrt{3}}{15}$

i) $\int\limits_0^5\left(x+3-\left|x^2-4x+3\right|\right)dx$ ĐS: $\dfrac{109}{6}$

j) $I=\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{x^2}{4\sqrt{2}}\right)dx$ ĐS: $\pi+\dfrac{2}{3}$

D. THỦ THUẬT CASIO GIẢI NHANH BÀI TOÁN TÍCH PHÂN

I. TÍNH NHANH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1. Lệnh tính tích phân

Để tính giá trị 1 tích phân xác định ta sử dụng lệnh



2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: *[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017]* Tính tích phân $I=\int_1^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$

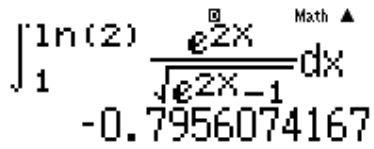
A. $\sqrt{3}-\sqrt{e^2-1}$ **B.** $2\sqrt{\ln 2-1}$ **C.** $\sqrt{\ln^2 2-1}$ **D.** Cả 3 đáp án trên đều sai

Lời giải:

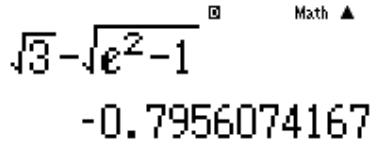
- Gọi lệnh tính giá trị tích phân



- Điền hàm $f(x)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ và các cận 1 và $\ln 2$ vào máy tính Casio Rồi nhấn nút = ta nhận được ngay kết quả của tích phân là $-0,7956...$



- Giữ nguyên kết quả này ở máy tính Casio số 1 , dùng máy tính Casio thứ 2 để tính kết qua của các đáp án **A**, **B**, **C**, **D** ta thấy đáp số **A**



Đây là giá trị giống hệt tích phân, vậy **A** là đáp số chính xác.

Bài toán 2: *[THPT Thuận Thành 1 – Bắc Ninh 2017]* Tính tích phân $I=\int_1^e\frac{x^2+2\ln x}{x}dx$:

A. $I=e^2-\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{e^2+1}{2}$ **C.** $I=e^2+1$ **D.** $I=\frac{e^2}{2}$

Lời giải:

- Tính tích phân $I=\int_1^e\frac{x^2+2\ln x}{x}dx=4.1945...=\frac{e^2+1}{2}\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**



- Chú ý: Tự luận ta nên tách tích phân thành 2 tích phân con để dễ xử lý :

$$I=\int_1^e xdx+2\int_1^e \ln x.\frac{1}{x}dx$$

Nếu tích phân "xuất hiện cụm $\frac{1}{x}dx$ " thì Đặt $\ln x=t$, vi phân hai vế $\Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt$.

Đổi biến : $\begin{bmatrix} x=1\Rightarrow t=0 \\ x=e\Rightarrow t=1 \end{bmatrix}$. Khi đó tích phân trở thành $\int_1^e xdx+2\int_o^1 tdt=\frac{e^2+1}{2}$.

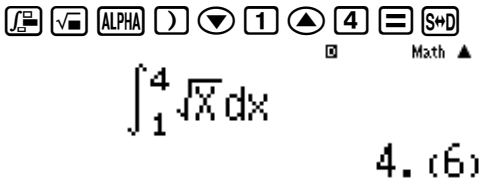
Bài toán 3: **[*Báo Toán học tuổi trẻ T11 năm 2016*]**

So sánh các tích phân $I=\int_1^4 \sqrt{x}dx, J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos xdx, K=\int_0^1 x.e^x$ .Ta có kết quả nào sau đây:

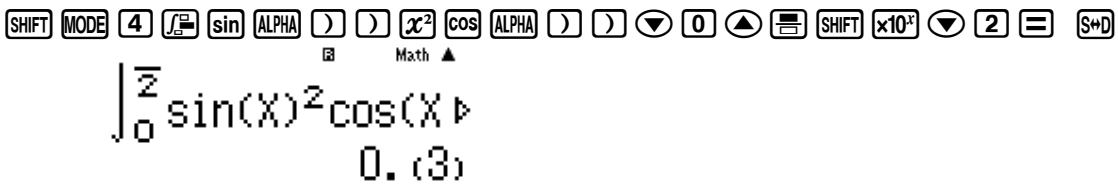
A. $I>K>J$ **B.** $I>J>K$ **C.** $J>I>K$ **D.** $K>I>J$

Lời giải:

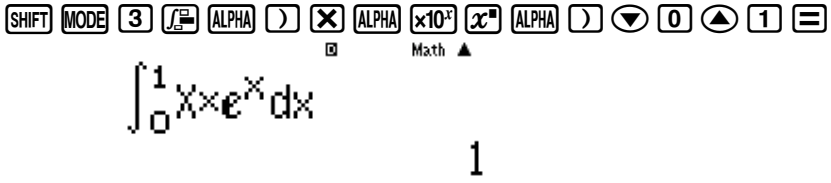
- Tính giá trị tích phân I ta được $I=4.6666...$ và ghi giá trị này ra nháp.



- Tính giá trị tích phân J ta được $J=0.3333...$ và lại ghi giá trị này ra nháp



- Tính tiếp giá trị cuối cùng $K=1$



Rõ ràng $4.6666>1>0.3333$ hay $I>K>J$. Vậy đáp án chính xác là **A**.

❖ **Bình luận :**

Qua bài toán trên ta thấy rõ hơn sức mạnh của Casio khi giải nhanh những bài tích phân xác định, phương pháp tự luận cũng có nhưng rất dài dòng, tôi xin không đề cập tới dành thời gian cho các bài khác quan trọng hơn.

Bài toán 4: *[Báo Toán Học Tuổi Trẻ tháng 12 năm 2016]* Tích phân $\int_0^1 \left(\left|3x-1\right|-2\left|x\right|\right)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{7}{6}$ **C.** $\frac{-11}{6}$ **D.** 0

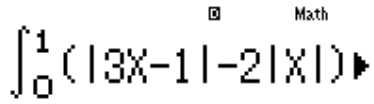
Lời giải:

- Cách gọi lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT hyp

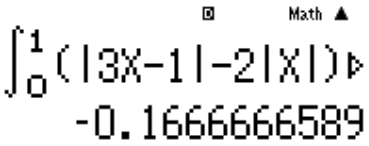


- Khi biết lệnh giá trị tuyệt đối rồi chúng ta nhập tích phân và tính giá trị một cách bình thường

(-) SHIFT hyp 3 ALPHA) − 1 ▶ − 2 SHIFT hyp ALPHA) ▶) ▼ 0 ▲ 1



Nhấn nút = ta sẽ nhận được giá trị tích phân là $I=-0,16666...$



Đây chính là giá trị xuất hiện ở đáp số **A**. Vậy **A** là đáp số chính xác của bài toán.

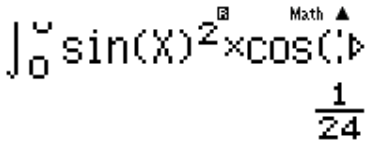
Bài toán 5: *[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017]* Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x\cos x dx=\frac{1}{64}$ thì n bằng :

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải:

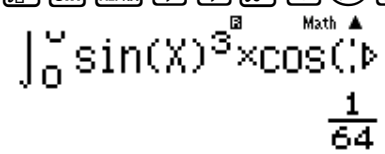
- Với $n=2$ tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\cos x dx=\frac{1}{24}\neq\frac{1}{64}$ $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

∫ sin ALPHA)) x^2 × cos ALPHA)) ▼ 0 ▲ ⬒ SHIFT $\times 10^x$ ▼ 6 =



- Với $n=3$ tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x\cos x dx=\frac{1}{64}$ $\Rightarrow$ Đáp án **B** chính xác

∫ sin ALPHA)) $x^\square$ 3 ▶ × cos ALPHA)) ▼ 0 ▲ ⬒ SHIFT $\times 10^x$ ▼ 6 =



Chú ý: Tự luận với dấu hiệu *"xuất hiện cụm* $\cos x dx$ *"* ta sẽ đặt $t = \sin x$.

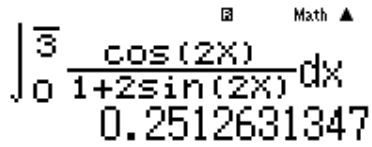
Bài toán 6: *[THPT Nho Quan – Ninh Bình 2017]* Cho $\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx = \frac{1}{4}\ln 3$. Tìm giá trị của a :

A. 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Lời giải:

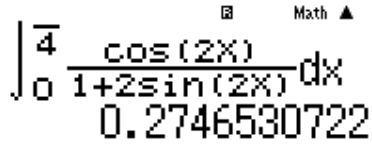
- Thử với $a = 3$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx = 0.2512... \neq \frac{1}{4}\ln 3 \Rightarrow$ Đáp số **A** sai

SHIFT MODE 4 ∫ ▭ cos 2 ALPHA)) ▼ 1 + 2 sin 2 ALPHA)) ▼ 0 ▲ ▭ SHIFT ×10^x ▼ 3 =



- Thử với $a = 4$ Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x} dx = 0.2746 = \frac{1}{4}\ln 3 \Rightarrow$ Đáp số **C** đúng.

▶ ▶ ▲ ▶ ▼ ▶ DEL 4 =



Chú ý: Tự luận với dấu hiệu *"xuất hiện cụm* $\cos 2x dx$ *"* ta sẽ đặt $\sin 2x = t$ là ẩn phụ.

II. GIẢI NHANH BÀI TOÁN TÍCH PHÂN CHỐNG CASIO

Bài toán tích phân chống Casio thường là những bài toán vận dụng-vận dụng cao, không thể bấm kết quả ra ngay được; yêu cầu các em phải có kỹ năng tốt hơn. Bài toán sẽ trở nên đơn giản và giúp cho các em tiết kiệm thời gian hơn nếu biết sử dụng Casio đúng phương pháp và thuần thục.
Khuyến khích: Các em nên giải bằng tự luận trước, nếu khó quá thì mới nghĩ đến phương pháp Casio.

1. Kiến thức nền tảng

a. Kỹ thuật ép hệ phương trình: Cho hệ thức $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(a,b,c)$, muốn tìm a,b,c thỏa mãn hệ thức $h(a,b,c)=m$. Ta sẽ tính giá trị tích phân $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx =$ rồi lưu vào A.

Vậy ta sẽ ép được hệ phương trình $\begin{cases} f(a,b,c)=A \\ h(a,b,c)=m \end{cases}$. Để giải hệ phương trình này ta sẽ sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE hoặc chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio.

(Xem các bài toán minh họa 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)

b. Kỹ thuật ép cận nguyên hàm: Cho nguyên hàm gốc $\int f(x)dx$ và nguyên hàm hệ quả $\int f[u(t)]dt$ qua phép đổi biến $x=u(t)$. Để sử dụng được máy tính Casio ta ép hệ số cho nguyên hàm gốc để trở thành tích phân xác định $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Vì nguyên hàm gốc và nguyên hàm hệ quả là tương đương nên $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} f[u(t)]dx$ (α',β' là 2 cận mới).

(Xem các bài toán minh họa 13,14,15,16,17)

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Biết $\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$

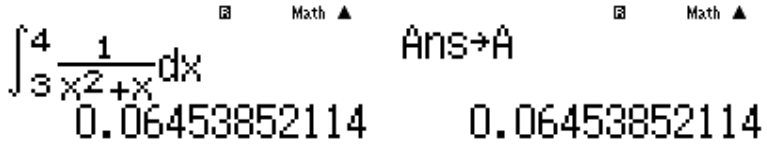
A. $S=6$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=0$

(Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017)

Lời giải:

- Tính tích phân $\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}$ và lưu vào biến A





- Khi đó $A = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5 \Leftrightarrow A = \ln\left(2^a.3^b.5^c\right) \Leftrightarrow 2^a.3^b.5^c = e^A = \frac{16}{15}$

ALPHA ×10^x x^■ ALPHA (−) =



Dễ thấy $\frac{16}{15}=\frac{2.2.2.2}{3.5}=2^4.3^{-1}.5^{-1}=2^a.3^b.5^c \Rightarrow a=4;b=-1;c=-1 \Rightarrow S=2$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B.**

Nhận xét: Đây là bài toán tích phân hữu tỉ, có thể phân tích về tích phân cơ bản như sau:

$$\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

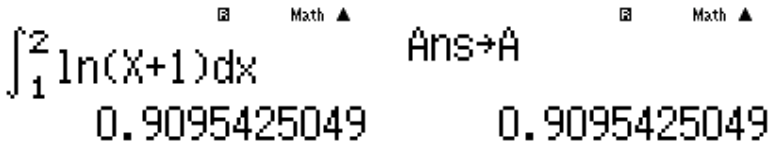
Bài toán 2: Cho $I=\int_1^2 \ln(x+1)dx=a\ln 3+b\ln 2+c \ \ (a,b,c\in Z)$. Tính giá trị của biểu thức $A=a+b+c$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải:

- Tính giá trị tích phân $I=\int_1^2 \ln(x+1)dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A

ab/c ln ALPHA) + 1) ▼ 1 ▲ 2 = SHIFT RCL (−)



- Khi đó $a\ln 3+b\ln 2+c=A \Leftrightarrow \ln(3^a.2^b.e^c)=\ln e^A \Leftrightarrow 3^a.2^b.e^c=e^A \Leftrightarrow 3^a.2^b=\frac{e^A}{e^c}$

Để tính được $3^a.2^b$ ta sử dụng chức năng MODE 7 với hàm $f(X)=3^a.2^b=\frac{e^A}{e^c}$

MODE 7 ab/c ALPHA ×10^x x^■ ALPHA (−) ▼ ALPHA ×10^x x^■ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Quan sát màn hình xem giá trị nào của $f(X)$ (cũng là của $3^a.2^b$) là số hữu tỉ thì nhận(vì a,b là các số nguyên)

Dễ thấy với $X=c=-1$ thì $3^a.2^b=6.75=\frac{27}{4}=3^3.2^{-2} \Rightarrow a=3;b=-2$

Tóm lại $a+b+c=3-2-1=0$

$\Rightarrow$ Đáp án **A** là đáp án chính xác.

Nhận xét: Bài toán này có thể làm tự luận bằng phương pháp từng phần sẽ nhanh hơn, bài toán này đưa ra để lấy ý tưởng giải những bài toán khó hơn.

Bài toán 3: Cho $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=(a+b)\ln 3+c\ln 2\ \ (a,b,c\in Q)$. Tính giá trị của biểu thức :

$A=a+b+c$

A. 0 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 2

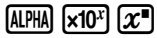
Lời giải:

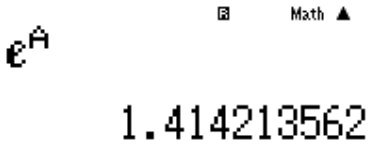
- Tính giá trị tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A





- Khi đó $(a+b)\ln 3+c\ln 2=A\Leftrightarrow \ln(3^{a+b}.2^c)=\ln e^A$. Mà ta tính được $e^A=\sqrt{2}$





$\Rightarrow 3^{a+b}.2^c=\sqrt{2}=3^0.2^{\frac{1}{2}}\Rightarrow a+b=0;c=\frac{1}{2}$

Tóm lại $a+b+c=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Đáp án **B** là đáp án chính xác.

Bài toán 4: Cho $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 xdx=\pi a+b\ \ (a,b\in Q)$. Tính giá trị của biểu thức $A=a+b$

A. $\frac{11}{32}$ **B.** $-\frac{5}{32}$ **C.** 4 **D.** 7

Lời giải:

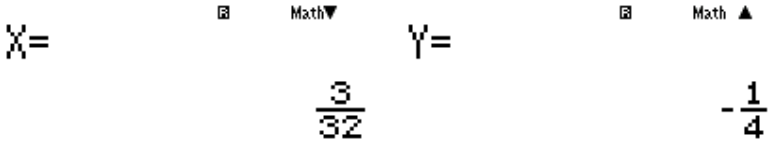
- Tính giá trị tích phân $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 xdx=\pi a+b$ rồi lưu giá trị này vào biến A





- Khi đó $\pi a+b=A$. Nếu đáp số B đúng thì hệ $\begin{cases}\pi a+b=A\\ a+b=-\dfrac{5}{32}\end{cases}$ có nghiệm hữu tỉ (thuộc Q)

  = = ▶ ▶ ▼ − 5 ÷ 3 2 = =

  Rõ ràng $a=\dfrac{3}{32};b=-\dfrac{1}{4}$ là các số hữu tỉ. Suy ra $a+b=-\dfrac{5}{32}$

  $\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác.

Bài toán 5: Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\left(1+\sin 2x\right)dx=\dfrac{\pi^2+a}{b}\to\left(a,b,c\in Z\right)$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính biểu thức $A=a+b$

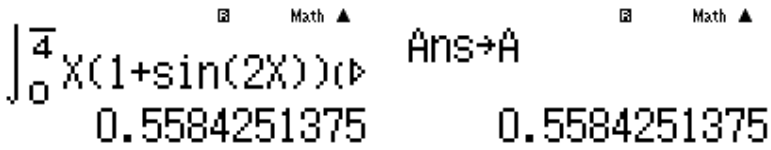
A. 20 **B.** 40 **C.** 60 **D.** 10

Lời giải:

- Tính giá trị tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\left(1+\sin 2x\right)dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A

  📋 ALPHA) (1 + sin 2 ALPHA))) ▼ 0 ▲ 🖨 SHIFT ×10^x ▼ 4 = SHIFT

  Jz

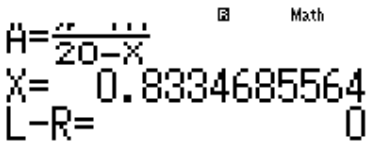
  

- Khi đó $\dfrac{\pi^2+a}{b}=A$. Nếu đáp số **A** đúng thì $a+b=20\Rightarrow b=20-a\Rightarrow A=\dfrac{\pi^2+a}{20-a}$

  Sử dụng chức năng SHIFT SOLVE để tìm a (với a là số nguyên)

  ALPHA (−) ALPHA CALC 🖨 SHIFT ×10^x x² + ALPHA) ▼ 2 0 − ALPHA) SHIFT CALC =

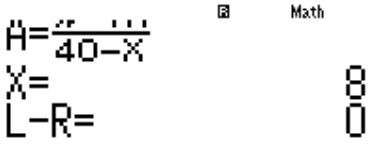
  1 0 =

  Kết quả không ra một số nguyên $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Nếu đáp số **B** đúng thì $a+b=40\Rightarrow b=40-a\Rightarrow A=\dfrac{\pi^2+a}{40-a}$

  ▶ ▶ ▶ ▶ ▼ ▶ 4 SHIFT CALC = 2 0 =

  Vậy $a=8\Rightarrow b=32$ $\Rightarrow$ Đáp án **B** là đáp án chính xác.

Bài toán 6: Cho $I=\int_1^2 x^3\ln^2 x dx=\dfrac{ae^4+b}{c}$ $(a,b,c\in Z)$ với $\dfrac{a}{c};\dfrac{b}{c}$ là các phân số tối giản. Tính biểu thức $A=a+b$

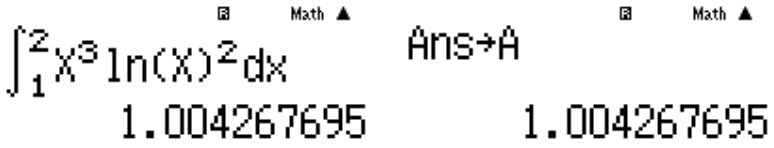
A. 15 **B.** –28 **C.** 36 **D.** 46

Lời giải:

- Tính giá trị tích phân $I=\int_1^2 x^3\ln^2 x dx$ rồi lưu giá trị này vào biến A

ALPHA) (1 + sin 2 ALPHA))) ▼ 0 ▲ ▤ SHIFT ×10^x ▼ 4 =

SHIFT RCL (−)



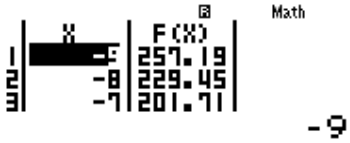
- Khi đó $\dfrac{ae^4+b}{c}=A$. Nếu đáp số **A** đúng thì $c=15-a-b \Rightarrow 15A-a.A-b.A=a.e^4+b$

$\Rightarrow b=\dfrac{15A-a.A-a.e^4}{A+1}$

Sử dụng chức năng MODE 7 để tìm a (với a là số nguyên)

MODE 7 ▤ 1 5 ALPHA (−) − ALPHA (−) ALPHA) − ALPHA ×10^x x^■ 4 ▶ ALPHA) ▼

ALPHA (−) + 1 = = − 9 = 1 0 = 1 =



Kết quả không tìm ra một số nguyên $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự như vậy với đáp số **C** đúng thì $\Rightarrow b=\dfrac{36A-a.A-a.e^4}{A+1}$

AC ▶ ▶ ▶ DEL DEL 3 6 = = = = =



Ta tìm được nghiệm $a=129$ là một số hữu tỉ

$\Rightarrow$ Đáp án **C** là đáp án chính xác.

Bài toán 7: Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=a\pi+\dfrac{1}{4}\ln b$ $(0<a<1.1<b<3)$. Tích ab bằng bao nhiêu ?

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $\dfrac{1}{6}$ **D.** $\dfrac{1}{8}$

[Thi học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Lời giải:

- Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = 0.5659... = A$

SHIFT MODE 4 ▼ ▼ cos ALPHA)) ▼ sin ALPHA)) + cos ALPHA)) ▼ 0 ▲ ▼ SHIFT ×10^x ▼ 4 =

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(X)}{\sin(X)+\cos(X)} = 0.5659858768$$

Lưu giá trị này vào biến A

SHIFT RCL (−)

$$Ans \to A$$

$$0.5659858768$$

Vậy ta có : $a\pi + \frac{1}{4}\ln b = 0.5659... = A \Rightarrow a = \frac{A - \frac{1}{4}\ln b}{\pi}$

- Nếu đáp số A đúng thì $ab = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{A-\frac{1}{4}\ln b}{\pi}.b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b\left(A - \frac{1}{4}\ln b\right) - \frac{\pi}{2} = 0$

Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE để tìm b

ALPHA) (ALPHA (−) − 1 ▼ 4 ▶ ALPHA ALPHA ln ALPHA))) − SHIFT ×10^x ▼ 2 ▶ SHIFT CALC = 0 . 5 =

$$\text{Can't Solve}$$

[AC] :Cancel
[◀][▶]:Goto

Không tìm được b $\Rightarrow$ Đáp án A sai

- Với đáp án B ta có $b\left(A - \frac{1}{4}\ln b\right) - \frac{\pi}{4} = 0$

ALPHA) (ALPHA (−) − 1 ▼ 4 ▶ ln ALPHA))) − SHIFT ×10^x ▼ 4 SHIFT CALC = 0 . 5 =

$$X(A-\tfrac{1}{4}\ln(X)) - \tfrac{\pi}{4}$$
$$X = 2$$
$$L\text{-}R = 0$$

$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$ thỏa điều kiện $0 < a < 1.1 < b < 3$

$\Rightarrow$ Đáp số **B** chính xác của bài toán.

Bài toán 8: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = a + b\pi \ \ (a,b \in Q)$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

A. $P = \frac{5}{4}$ **B.** $P = \frac{3}{4}$ **C.** $P = \frac{1}{4}$ **D.** $P = \frac{11}{4}$

Lời giải:

- Tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$ rồi lưu vào biến A

SHIFT MODE 4 ∫ tan ALPHA)) x^2 ▼ 0 ▲ ⎙ SHIFT ×10^x ▼ 4 = SHIFT RCL (−)

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(X)^2 dx$ Ans→A

0.2146018366 0.2146018366

- Nếu đáp số **A** đúng ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b\pi = A \\ a+b = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.7334...$ không phải là số hữu tỉ $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

MODE 5 1 1 = SHIFT ×10^x = ALPHA (−) = 1 = 1 = 5 ÷ 4 = =

X=

1.733471103

- Tương tự như vậy với đáp án **B** ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b\pi = A \\ a+b = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ **B** là đáp số chính xác

= = ▶ ▶ ▼ 3 ÷ 4 = = =

X= Y=

1 $-\frac{1}{4}$

Bài toán 9: Cho tích phân $(a,b \in Q)$ $\int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx = a.e^2 + b.e$ $(a,b \in Q)$. Tính giá trị của biểu thức $P = a+b$

A. $P = 0.5$ **B.** $P = -1$ **C.** $P = 1$ **D.** $P = 2$

Lời giải:

- Tính giá trị tích phân $\int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx$ rồi lưu vào biến A

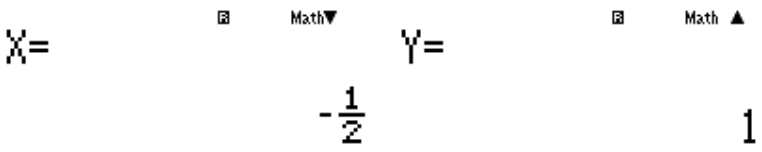
⎙ ⎙ 1 − ALPHA) ▼ ALPHA) x^2 ▶ ALPHA ×10^x $x^{\blacksquare}$ ALPHA) ▼ 1 ▲ 2 = SHIFT RCL (−)

$\int_1^2 \frac{1-X}{X^2} e^X dx$ Ans→A

-0.976246221 -0.976246221

- Với đáp số **A** ta có hệ phương trình $\begin{cases} ae^2 + be = A \\ a+b = 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -0.5 \\ b = 1 \end{cases}$

MODE 5 1 ALPHA ×10^x x^2 = ALPHA ×10^x = ALPHA (−) = 1 = 1 = 0 • 5 = = =



$\Rightarrow$ Đáp số **A** chính xác.

Bài toán 10: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2\cos x}{2 + 3\sin x - \cos 2x} dx = a\ln 2 + b\ln 3 + c \ \left(a,b,c \in Z\right)$. Tính $P = a + b + c$

A. $P = -3$ **B.** $P = -2$ **C.** $P = 2$ **D.** $P = 1$

Lời giải:

- Tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2\cos x}{2 + 3\sin x - \cos 2x} dx$ rồi lưu vào biến A

[▭] [▭] [cos] [3] [ALPHA] [)] [)] [+] [2] [cos] [ALPHA] [)] [)] [▼] [2] [+] [3] [sin] [ALPHA] [)] [)] [−] [cos] [2]
[SECONDE] (cos^{-1}) = [SECONDE] (sin^{-1})



- Vậy $a\ln 2 + b\ln 3 + c = A \Leftrightarrow \ln\left(2^a.3^b.e^c\right) = \ln\left(e^A\right) \Leftrightarrow 2^a.3^b = \frac{e^A}{e^c}$. Tìm $2^a.3^b$ bằng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 với biến $X = c$

[MODE] [7] [▭] [ALPHA] [×10^x] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [(−)] [▼] [ALPHA] [×10^x] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [)] [=] [=] [−] [9] [=] [1] [0] [=] [1] [=]



18

Ta được $2^a.3^b = 18$ với $X = c = -2$. Vậy $18 = 2.3^2 = 2^a.3^b \Rightarrow a = 1; b = 2$

$\Rightarrow P = a + b + c = 1 + 2 - 2 = 1$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D.**

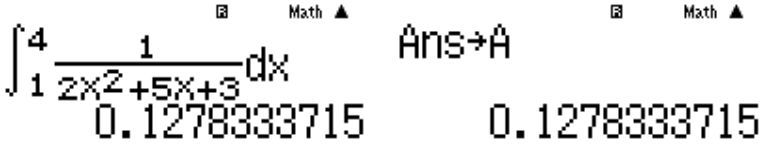
Bài toán 11: Cho tích phân $\int_1^4 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 3} = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 11 \ \left(a,b,c \in Z\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$

A. $P = 1$ **B.** $P = -3$ **C.** 2 **D.** 0

Lời giải:

- Tính giá trị tích phân $\int_1^4 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 3} =$ rồi lưu vào biến A

[▭] [▭] [1] [▼] [2] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [5] [ALPHA] [)] [+] [3] [▼] [1] [▲] [4] [=] [SHIFT] [RCL] [(−)]



- Vậy $a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 11 = A \Leftrightarrow \ln\left(2^a.5^b.11^c\right) = \ln\left(e^A\right) \Leftrightarrow 2^a.5^b.11^c = e^A = \frac{25}{22} = \frac{5.5}{2.11} = 5^2.2^{-1}.11^{-1}$.

Rõ ràng $a=-1;b=2;c=-1 \Rightarrow P=a+b+c=1+2-2=1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A.**

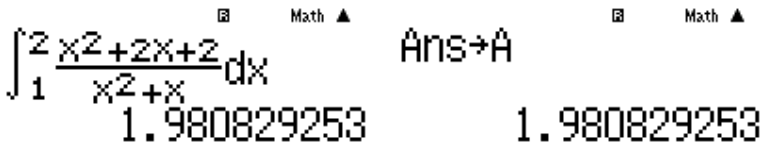
Bài toán 12: Cho tích phân $\int_1^2 \frac{x^2+2x+2}{x^2+x}dx = a\ln 2+b\ln 3+c \ \ (a,b,c\in Z)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$

A. $P=3$ **B.** $P=-2$ **C.** 4 **D.** -1

Lời giải:

- Tính giá trị tích phân $\int_1^4 \frac{dx}{2x^2+5x+3} =$ rồi lưu vào biến A

[fx] [▭] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [2] [ALPHA] [)] [+] [2] [▼] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [ALPHA] [)] [▼] [1] [▲] [2] [=] [SHIFT] Jz



- Vậy $a\ln 2+b\ln 3+c=A \Leftrightarrow \ln\left(2^a.3^b.e^c\right)=\ln\left(e^A\right) \Leftrightarrow 2^a.3^b.e^c=e^A \Leftrightarrow 2^a.3^b=\frac{e^A}{e^c}$. Tìm $2^a.3^b$ bằng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 với biến $X=c$.

[MODE] [7] [▭] [ALPHA] [$\times 10^x$] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [(−)] [▼] [ALPHA] [$\times 10^x$] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [)] [=] [=] [−] [9] [=] [1] [0] [=] [1] [=]



Ta được $2^a.3^b=2.66(6)=\frac{8}{3}=2^3.3^{-1} \Rightarrow a=3;b=-1$ với $X=c=1$.

$\Rightarrow P=a+b+c=3-1+1=3 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A.**

Bài toán 13: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin 2x dx$. Nếu đổi biến số $t=\sin x$ thì :

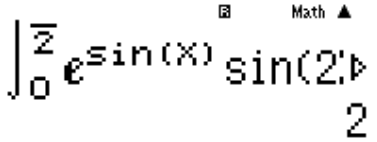
A. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t.t.dt$ **B.** $I=\int_0^1 e^t.t.dt$ **C.** $I=2\int_0^1 e^t.t.dt$ **D.** $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t.t.dt$

(Trích đề thi ĐH khối B năm 2005)

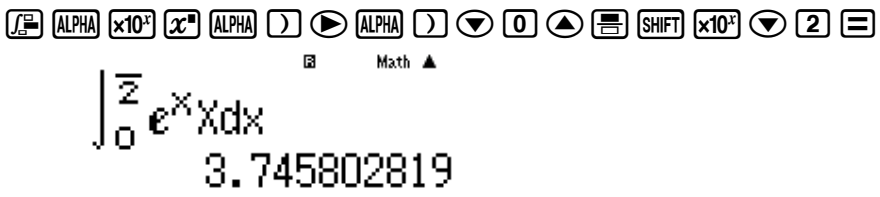
Lời giải:

- Tính giá trị tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin 2x dx$

[fx] [ALPHA] [$\times 10^x$] [$x^{\blacksquare}$] [sin] [ALPHA] [)] [)] [▶] [sin] [2] [ALPHA] [)] [)] [▼] [0] [▲] [▭] [SHIFT] [$\times 10^x$] [▼] 2=

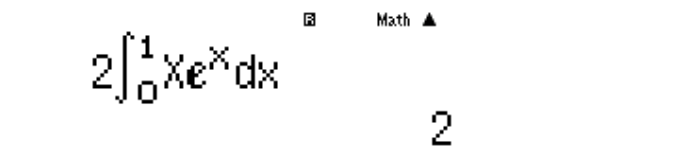


- Nếu đáp án A đúng thì giá trị tích phân ở câu A phải giống giá trị tích phân ở đề bài và cùng bằng 2. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t.t.dt$



Kết quả ra một số khác 2 $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự như vậy với đáp số **C** thì $I=2\int_0^1 e^t.t.dt=2$



$\Rightarrow$ Đáp án **C** là đáp án chính xác

Chú ý : Đổi cận thì phải đổi biến $\Rightarrow$ Dễ dàng loại được đáp án **A** và **D.**

Bài toán 14: Sử dụng phương pháp đổi biến đưa tích phân $I=\int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$ thành tích phân $\int_3^5 f(t)dt$. Khi đó $f(t)$ là hàm nào trong các hàm số sau ?

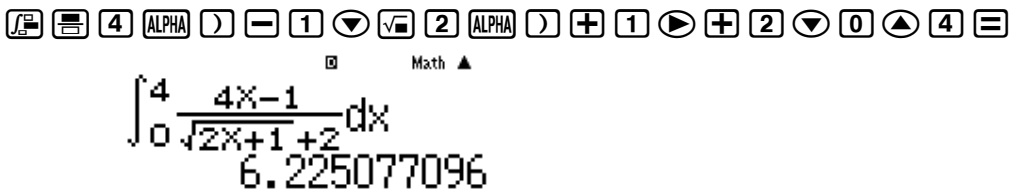
A. $f(t)=\frac{2t^2-3}{t+2}$ **B.** $f(t)=\frac{(2t^2-8t+3)(t+2)}{t}$

C. $f(t)=\frac{2t^2-3}{2(t+2)}$ **D.** $f(t)=\frac{(2t^2-8t+3)(t+2)}{2t}$

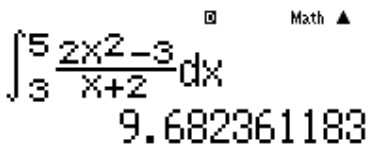
(Trích đề thi ĐH khối D năm 2011)

Lời giải:

- Tính giá trị tích phân $I=\int_0^4 \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$



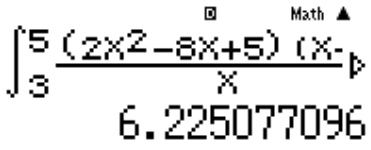
- Nếu đáp án A đúng thì $f(t)=\frac{2t^2-3}{t+2}$ và giá trị tích phân $I=\int_3^5 \frac{2t^2-3}{t+2}dt=6.2250...$ điều này là sai vì $I=\int_3^5 \frac{2t^2-3}{t+2}dt=9.6923...$



Kết quả ra một số khác 2 $\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự như vậy với đáp số **B** chính xác





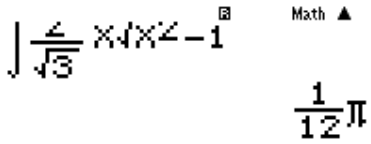
Bài toán 15: Nếu sử dụng phương pháp đổi biến với ẩn phụ $t=\sqrt{x^2-1}$ đưa tích phân $I=\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ thành tích phân nào sau đây ?

A. $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+1}$ **B.** $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{dt}{t^2+1}$ **C.** $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t\left(t^2+1\right)}$ **D.** $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{dt}{t\left(t^2+1\right)}$

Lời giải:

- Tính giá trị tích phân $I=\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{12}$

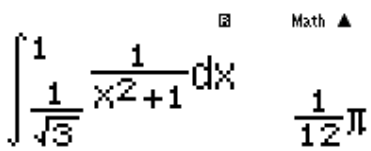




Tích phân nào có giá trị bằng $\frac{\pi}{12}$ thì đó là đáp án đúng.

Ta có đáp án **B** có giá trị : $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\pi}{12}$





$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B.**

Chú ý : Giá trị tích phân không thay đổi theo phép đổi biến (đặt ẩn phụ).

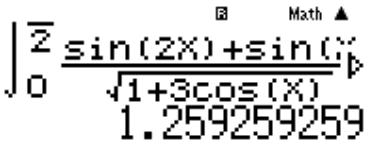
Bài toán 16: Nếu sử dụng phương pháp đổi biến với ẩn phụ $t=1+3\cos x$ đưa nguyên hàm $I=\int\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ thành nguyên hàm nào sau đây ?

A. $\int\frac{-2t^2-1}{\sqrt{t}}dt$ **B.** $\frac{1}{9}\int\frac{-2t^2-1}{\sqrt{t}}dt$ **C.** $\int\frac{-2t-1}{\sqrt{t}}dt$ **D.** $\frac{1}{9}\int\frac{-2t-1}{\sqrt{t}}dt$

Lời giải:

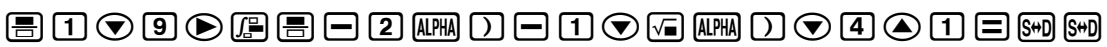
- Chọn cận 0 và $\frac{\pi}{2}$. Tính giá trị tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

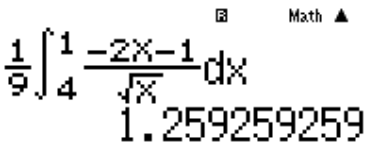




- Tiến hành đổi biến thì phải đổi cận $\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow t=1+\cos 3x=4\\x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{array}\right.$

- Với đáp số **D** ta có $-\frac{1}{9}\int_4^1\frac{2t+1}{\sqrt{t}}dt$





$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Chú ý : Chọn cận thế nào cũng được tuy nhiên nên chọn cận x sao cho t đẹp.

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. *(Đề thi thử nghiệm – Bộ GD & ĐT năm 2016 – 2017 lần 2)* Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $I=\int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x$?

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\frac{7}{2}$.

Câu 2. *(Chuyên Lam Sơn – 2016 – 2017)* Cho hàm $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ với $a<b$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng ?**

A. $\int_a^b kf(x)dx=k\left(F(b)-F(a)\right)$

B. $\int_b^a f(x)dx=F(b)-F(a)$

C. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=a;x=b$; đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và trục hoành được tính theo công thức $S=F(b)-F(a)$

D. $\int_a^b f(2x+3)dx=F(2x+3)\Big|_a^b$

Câu 3. *(THPT Chuyên Đại học Vinh lần 1)* Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và các số thực $a<b<c$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx.$ **B.** $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx.$

C. $\int_a^b f(x)dx=\int_b^a f(x)dx+\int_a^c f(x)dx.$ **D.** $\int_a^b cf(x)dx=-c\int_a^b f(x)dx$.

Câu 4. *(THPT Ngô Sỹ Liên năm 2016 – 2017)* Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx=7, \int_2^6 f(x)dx=3$. Giá trị $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx$ là.

A. 10 **B.** –4 **C.** 4 **D.** 7

Câu 5. *(THPT Thanh Chương 1 – Nghệ An)*

Biết $\int_0^1 f(x)dx=3;\ \int_0^2\left[f(x)-g(x)\right]dx=3;\ \int_0^2\left[f(x)+g(x)\right]dx=7$. Tính $P_{\min}=8\sqrt{2}$?

A. $I=-2$ **B.** $I=2$ **C.** $I=0$ **D.** $I=3$

Câu 6. *(Sở GD và ĐT Bình Phước 2)* Nếu $f(0)=1$, $f'(x)$ liên tục và $\int_0^3 f'(x)dx=9$. Tính $f(3)$

A. 3 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 6

Câu 7. *(Chuyên Thái Bình lần 3)* Cho $\int_{-2}^2 f(x)dx=1$, $\int_{-2}^4 f(t)dt=-4$. Tính $I=\int_2^4 f(y)dy.$

A. $I=-5.$ **B.** $I=-3.$ **C.** $I=3.$ **D.** $I=5.$

Câu 8. Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$ **B.** $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

C. $\int_a^a f(x)dx = 0.$ **D.** $\int_a^b \big(f(x)g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$ **B.** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

C. $\int_a^b f(x)dx = 2\int_a^b f(x)d(2x)$ **D.** $\int_a^b f(x)dx = -2\int_b^a f(x)dx$

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khẳng định nào đúng?

A. $\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. **B.** $\int_a^b f(x).g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$.

C. $\int_a^b kf(x)dx = \int_a^b f(kx)dx$. **D.** $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $a\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào đúng?

A. $\int_a^a f(x)dx = 1.$ **B.** $\int_a^a f(x)dx = 0.$ **C.** $\int_a^a f(x)dx = -1.$ **D.** $\int_a^a f(x)dx = 2f(a).$

Câu 12. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int_0^1 x\mathrm{d}x = -1.$ **B.** $\int_{-2}^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\ln 2.$ **C.** $\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}.$ **D.** $\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$

Câu 13. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $[1;6]$ sao cho $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 3, \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x = -4$. Tính $I = \int_1^6 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=7.$ **B.** $I=-1.$ **C.** $I=1.$ **D.** $I=-7.$

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $a<b<c$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$ **B.** $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$

C. $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$ **D.** $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

Câu 15. Cho hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = -2, \int_2^4 g(x)\mathrm{d}x = 2$. Tính $I = \int_2^4 \big[f(x)-g(x)\big]\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=4$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\int_1^3 2f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=6$. **D.** $I=-6$.

Câu 17. Cho $f(x)+4xf(x^2)=3x$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-2$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$ và $\int_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=8$. Tính $I=\int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-4$. **B.** $I=4$. **C.** $I=\frac{1}{4}$. **D.** $I=-\frac{1}{4}$.

Câu 19. Cho $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{12}}\frac{f(2\tan 3x)}{\cos^2 3x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{3}$. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=\frac{8}{3}$.

Câu 20. Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=7$ .tính tích phân $I=\int_1^{\sqrt{2}} 8xf(x^2)\mathrm{d}x$.

A. $I=8$. **B.** $I=18$. **C.** $I=28$. **D.** $I=38$.

Câu 21. Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2017$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{f(\tan 2x)}{1+4\cos 4x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{2017}{3}$. **B.** $I=\frac{2018}{3}$. **C.** $I=\frac{2018}{4}$. **D.** $I=\frac{2017}{4}$.

Câu 22. Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_0^1\frac{f(\sqrt{3x+1})}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{20}{3}$. **B.** $I=\frac{8}{3}$. **C.** $I=\frac{33}{4}$. **D.** $I=\frac{40}{3}$.

Câu 23. Cho $\int_0^{2017} f(x)\mathrm{d}x=2$. Tính $I=\int_0^{\sqrt{e^{2017}-1}}\frac{x}{x^2+1}f(\ln(x^2+1))\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=5$.

Câu 24. Cho $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x)\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xf(\sin x)\mathrm{d}x$.

A. $I=7$. **B** . $I=8$. **C.** $I=13$. **D.** $I=23$.

Câu 25. *(Sở GD Yên Bái 2016 – 2017 lần 1)* Biết $I=\int_{-1}^{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2-1}\sin\sqrt{x+1}dx=\frac{a\pi+\sqrt{b}}{c},(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $P=abc$?

A. $P=81$. **B.** $P=-81$. **C.** $P=9$. **D.** $P=-9$.

Câu 26. *(Chuyên Lê Quý Đôn – Quảng Trị 2016 – 2017 lần 1)* Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx = a + b\pi$, trong đó a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a + 2b$?

A. $S = 0$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = \frac{1}{2}$. **D.** $S = \frac{3}{8}$.

Câu 27. *(Sở GD & ĐT Thừa Thiên Huế 2016 – 2017)* Tính tích phân $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$.

A. $I = \frac{1}{9}\left(2e^3 + 1\right)$. **B.** $I = \frac{1}{2}\left(2e^3 - 1\right)$. **C.** $I = \frac{1}{2}\left(2e^3 + 1\right)$. **D.** $I = \frac{1}{9}\left(2e^3 - 1\right)$.

Câu 28. *(Chuyên Hùng Vương–Phú Thọ)* Cho $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = a\ln 2 + b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $P = a + 4b$

A. $P = 1$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = -3$.

Câu 29. *(Chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 3)* Cho hàm số $f(x) = \int_{-x}^{x} t\sin t dt$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $-\pi$. **B.** 0. **C.** 2π. **D.** π.

Câu 30. *(THPT Chuyên Biên Hòa – Hà Nam lần 3 2016 – 2017)* Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a\ln 2$ (với a là số thực , b ,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $2a + 3b + c$ là:

A. 4. **B.** -6. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 31. *(THPT Thanh Chương – Nghệ An lần 1)* Biết $I = \int_0^1 \ln(3x+1) dx = a\ln 2 + b$, (với a, $b \in \mathbb{Q}$). Tính $S = 3a - b$.

A. $S = 7$. **B.** $S = 11$. **C.** $S = 8$. **D.** $S = 9$

Câu 32. *(Sở GD Lâm Đồng năm 2016 – 2017)* Cho biết $\int_1^2 \ln\left(9 - x^2\right) dx = a\ln 5 + b\ln 2 + c$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = |a| + |b| + |c|$

A. $S = 34$. **B.** $S = 13$. **C.** $S = 26$. **D.** $S = 18$.

Câu 33. *(Đề thử nghiệm – Bộ GD & ĐT 2016 – 2017 lần 2)* Cho $\int_0^4 f(x) dx = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x) dx$.

A. $I = 32$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 16$. **D.** $I = 4$.

Câu 34. *(Đề thi thử nghiệm – Bộ GD & ĐT năm 2016 – 2017 lần 3)* Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = -12$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 12$. **D.** $I = -8$.

Câu 35. *(Sở GD & ĐT Bắc Giang 2016 – 2017)* Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x).\cos x.dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^3 f(x) dx$.

A. $I=2.$ **B.** $I=6.$ **C.** $I=4.$ **D.** $I=10.$

Câu 36. *(THPT Chuyên Lào Cai lần 1 2016 – 2017)* Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=4$ và $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=2.$ Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=6.$ **B.** $I=2.$ **C.** $I=3.$ **D.** $I=1.$

Câu 37. *(THPT Chuyên Lào Cai lần 1 2016 – 2017)* Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16,$ $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4.$ Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x.$

A. $I=13.$ **B.** $I=12.$ **C.** $I=20.$ **D.** $I=7.$

Câu 38. *(THPT Nam Yên Thành – Nghệ An lần 1 2016 – 2017)* Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\left[1;2\right]$ thỏa $f(1)=0,$ $f(2)=2$ và $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1.$ Tính $I=\int\limits_1^2 x.f'(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=2.$ **B.** $I=1.$ **C.** $I=3.$ **D.** $I=8.$

Câu 39. *(THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên 2016 – 2017)* Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ thỏa mãn $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=7.$ Tính $I=\int\limits_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$

A. $I=7.$ **B.** $I=a+b-7.$ **C.** $I=7-a-b.$ **D.** $I=a+b+7.$

Câu 40. *(Sở GD & ĐT Hà Nội lần 1 2016 – 2017)* Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $\left[-6;6\right].$ Biết rằng $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x=3.$ Tính $I=\int\limits_{-1}^6 f(x)\mathrm{d}x.$

A. $I=11.$ **B.** $I=5.$ **C.** $I=2.$ **D.** $I=14.$

Câu 41. Tính tích phân $I=\int\limits_0^4 \sqrt{2x+1}dx.$

A. $\frac{26}{3}.$ **B.** $\frac{52}{3}.$ **C.** $13.$ **D.** $\frac{39}{2}.$

Câu 42. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)dx.$

A. $-1.$ **B.** $1.$ **C.** $\frac{1}{2}.$ **D.** $-\frac{1}{2}.$

Câu 43. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ là:

A. $I=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$ **B.** $I=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}+1).$ **C.** $I=-\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$ **D.** $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x\sin x dx.$

Câu 44. Tích phân bằng:

A. $\frac{2}{3}.$ **B.** $-\frac{2}{3}.$ **C.** $\frac{3}{2}.$ **D.** $0.$

Câu 45. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u=x^2-1,$ mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=2\int_0^3\sqrt{u}du$. **B.** $I=\int_1^2\sqrt{u}du$. **C.** $I=\int_0^3\sqrt{u}du$. **D.** $I=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{u}du$.

Câu 46. Cho tích phân $I=\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$, khi đặt $t=\sqrt{2x+1}$ thì I sẽ trở thành?

A. $I=\int_1^3\left(t^2+3\right)dt$. **B.** $I=2\int_1^3\left(t^2+3\right)dt$. **C.** $I=\frac{1}{2}\int_1^3\left(t^2+3\right)dt$. **D.** $I=\int_1^3\frac{t^2+3}{2t}dt$.

Câu 47. Tính tích phân $I=\int_1^2\left(2x-1\right)^5dx$

A. $\frac{182}{3}$. **B.** 2. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 48. Bài toán tính tích phân $I=\int_{-2}^1(x+1)^2dx$ được một học sinh giải theo ba bước sau:.

I. Đặt ẩn phụ $t=(x+1)^2$, suy ra $dt=2(x+1)dx$.

II. Từ đây suy ra $\frac{dt}{2(x+1)}=dx\Rightarrow\frac{dt}{2\sqrt{t}}=dx$. Đổi cận

x	-2	1
t	1	4

III. Vậy $I=\int_{-2}^1(x+1)^2dx=\int_1^4\frac{t}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^4=\frac{7}{3}$.

Học sinh này giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai từ Bước I. **B.** Sai ở Bước III. **C.** Sai từ Bước II. **D.** Bài giải đúng.

Câu 49. Xét tích phân $I=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$. Thực hiện phép đổi biến $t=\cos x$, ta có thể đưa I về dạng nào sau đây?

A. $I=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{2t}{1+t}dt$. **B.** $I=\int_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$. **C.** $I=-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{2t}{1+t}dt$. **D.** $I=-\int_0^{\pi/4}\frac{2t}{1+t}dt$.

Câu 50. Cho tích phân: $I=\int_1^e\frac{\sqrt{1-\ln x}}{2x}dx$. Đặt $u=\sqrt{1-\ln x}$ .Khi đó I bằng

A. $I=\int_1^0u^2du$. **B.** $I=-\int_1^0u^2du$. **C.** $I=\int_1^0\frac{u^2}{2}du$. **D.** $I=-\int_0^1u^2du$.

Câu 51. Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2x\tan xdx$ có giá trị bằng.

A. $\ln 3-\frac{3}{5}$. **B.** $\ln 2-2$. **C.** $\ln 2-\frac{3}{4}$. **D.** $\ln 2-\frac{3}{8}$.

Câu 52. Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị của $\int_0^{\pi}\cos^2 x.\sin xdx$?

A. $-\frac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}\pi$.

Câu 53. Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị của $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4+5x^2}}$?

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{10}$.

Câu 54. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx=1$. Tính tích phân $K=\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$.

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 55. Cho biết $I=\int_1^e \frac{1}{x(\ln x+1)}dx=\ln\frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2-b$.

A. 5. **B.** –3. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 56. Cho $I=\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx$. Nếu đặt $\sqrt{1-x^2}=t$ thì I bằng :

A. $\int_0^1 t\left(1-t^2\right)dt$. **B.** $\int_1^0 t\left(1-t\right)dt$. **C.** $\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^2dt$. **D.** $\int_1^0 \left(t^4-t^2\right)dt$.

Câu 57. Cho $I=\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx$. Nếu đặt $x=2\tan t$. Trong khẳng định sau, khẳng định nào ***sai?***

A. $4+x^2=4\left(1+\tan^2 t\right)$. **B.** $dx=2\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

C. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}dt$. **D.** $I=\frac{3\pi}{4}$.

Câu 58. Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin^3 x.\cos x$ và $F\left(0\right)=\pi$. Tìm $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\pi$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\pi$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}+\pi$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$.

Câu 59. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x.dx}{1+\sin^2 x}$?

A. 1. **B.** $\ln 2$. **C.** $-\ln 2$. **D.** $\ln 2-1$.

Câu 60. Biết $\int_2^e \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\left(a-\ln^2 b\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị $a+2b$:

A. 5. **B.** –3. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 61. Cho tích phân: $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{2x}dx$.Đặt $u=\sqrt{1-\ln x}$ .Khi đó I bằng

A. $I=\int_1^0 u^2du$. **B.** $I=-\int_1^0 u^2du$. **C.** $I=\int_1^0 \frac{u^2}{2}du$. **D.** $I=-\int_0^1 u^2du$.

Câu 62. Tích phân $\int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5}dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5}dt$. **B.** $\int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5}dt$. **C.** $\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4}dt$. **D.** $\frac{3}{2}\int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4}dt$.

Câu 63. Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+3\cos x}.\sin x dx$.Đặt $u=\sqrt{3\cos x+1}$ .Khi đó I bằng

A. $\frac{2}{3}\int_1^3 u^2 du$. **B.** $\frac{2}{3}\int_0^2 u^2 du$. **C.** $\frac{2}{9}u^3\Big|_1^2$. **D.** $\int_1^3 u^2 du$.

Câu 64. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ là:

A. $I=\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=\frac{3\pi}{4}$. **C.** $I=\frac{\pi}{4}$. **D.** $I=\frac{5\pi}{4}$.

Câu 65. Tích phân $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ có giá trị là:

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** π.

Câu 66. Trong các hàm f(t) sau, hàm nào thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\tan x)^4 \frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_0^1 f(t)dt$?

A. $f(t)=t^2$. **B.** $f(t)=t^4$. C. $f(t)=(1-t)^2$. D. $f(t)=(t-1)^3$.

Câu 67. Cho hàm số f(x) có đạo hàm trên [a;b] và f(a) = f(b). Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_a^b f'(x)e^{f(x)}dx=\ln(b-a)$. **B.** $\int_a^b f'(x)e^{f(x)}dx=e$.

C. $\int_a^b f'(x)e^{f(x)}dx=1$. **D.** $\int_a^b f'(x)e^{f(x)}dx=0$.

Câu 68. Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^n 2x\cos 2xdx=\frac{1}{128}$, với n là số nguyên dương. Giá trị của n là:

A. 6. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 69. Biết $I=\int_0^1 \frac{xdx}{4-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}$ thì a^2 - b bằng:

A. 13. **B.** 5. **C.** -4. **D.** 0.

Câu 70. Biết $I=\int_{-1}^2 \frac{xdx}{x^2+2}=\frac{1}{a}\ln b$. Chọn đáp án đúng:

A. ab=6. **B.** a =b. **C.** 2a – b = 1. **D.** a>b.

Câu 71. Tính giá trị của $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} f\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$ khi biết $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(x)dx=2$

A. 2. **B.** –2. **C.** 1. **D.** –1.

Câu 72. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx=e$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\int_0^1 f(x)dx = 1.$ **B.** $\int_0^1 f(x)dx = e.$ **C.** $\int_0^e f(x)dx = 1.$ **D.** $\int_0^e f(x)dx = e.$

Câu 73. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ bằng cách đặt $x = \tan t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, mệnh đề sau đây đúng?

A. $I = \int_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{t}.$ **B.** $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+t^2}.$ **C.** $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt.$ **D.** $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tdt.$

Câu 74. *(Đề minh họa lần 3-Bộ GD&ĐT)* Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = 2\int_0^3 \sqrt{u}du.$ **B.** $I = \int_1^2 \sqrt{u}du.$ **C.** $I = \int_0^3 \sqrt{u}du.$ **D.** $I = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du.$

Câu 75. Tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{8\ln x + 1}}{x}dx$ bằng:

A. $-2.$ **B.** $\frac{13}{6}.$ **C.** $\ln 2 - \frac{3}{4}.$ **D.** $\ln 3 - \frac{3}{5}.$

Câu 76. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ là:

A. $\frac{\pi}{6}.$ **B.** $\frac{\pi}{4}.$ **C.** $\frac{\pi}{3}.$ **D.** $\frac{\pi}{2}..$

Câu 77. Tích phân $I = \int_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx$ có giá trị là:

A. $\frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{10}{9}\sqrt{3}.$ **B.** $\frac{4}{3}\sqrt{7} - \frac{10}{9}\sqrt{5}.$ **C.** $\frac{4}{3}\sqrt{6} - \frac{10}{9}\sqrt{5}.$ **D.** $\frac{2}{3}\sqrt{6} - \frac{10}{9}\sqrt{5}.$

Câu 78. Tích phân $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ có giá trị là:

A. $\frac{\pi}{4}.$ **B.** $\frac{\pi}{2}.$ **C.** $\frac{\pi}{3}.$ **D.** $\pi.$

Câu 79. Cho tích phân $I = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2}dx$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt.$ **B.** $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} tdt.$ **C.** $I = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt.$ **D.** $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{t}.$

Câu 80. Biết $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} = -\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$. Tính $S = a + b$

A. $S = 10 + 4\sqrt{3}.$ **B.** $S = \frac{22}{3} - 4\sqrt{3}.$ **C.** $S = 10 - 4\sqrt{3}.$ **D.** $S = \frac{22}{3} + 4\sqrt{3}.$

Câu 81. Cho hàm số f(x) liên tục trên R và $\int_0^{\pi/4} f(\tan x)dx = 4;\ \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 2$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 82. Cho hàm số f(x) liên tục trên R ; có $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 4$ và $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\cos x dx = 2$. Tính $\int_0^3 f(x)dx$

A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 83. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x)\sin x \cos x dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 84. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

A. $I=-6$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=6$.

Câu 85. *(Đề minh họa lần 2-Bộ GD&ĐT)* Cho $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 16$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=32$. **B.** $I=8$. **C.** $I=16$. **D.** $I=4$.

Câu 86. *(Chuyên Lào Cai)* Tính tích phân $\int_0^2 (x+1)^2 x^{2017} dx$ được kết quả là

A. $2^{2017}\left(\frac{4}{2020}+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2018}\right)$. **B.** $\frac{3^3}{3}\frac{2^{2018}}{2018}$.

C. $2^{2018}\left(\frac{4}{2020}+\frac{2}{2019}+\frac{1}{2018}\right)$. **D.** $2^{2018}\left(\frac{4}{2020}+\frac{4}{2019}+\frac{1}{2018}\right)$.

Câu 87. Giá trị của tích phân: $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ là:

A. $\frac{\pi^2}{2}$. **B.** $\frac{\pi^2}{6}$. **C.** $\frac{\pi^2}{8}$. **D.** $\frac{\pi^2}{4}$.

Câu 88. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2007} x}{\sin^{2007} x+\cos^{2007} x}dx$ là

A. $I=\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=\frac{\pi}{4}$. **C.** $I=\frac{3\pi}{4}$. **D.** $I=\frac{5\pi}{4}$.

Câu 89. Giá trị của tích phân $I = 2\int_1^2 \sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\sin x.\cos^5 x dx$ là

A. $\frac{21}{91}$. **B.** $\frac{12}{91}$. **C.** $\frac{21}{19}$. **D.** $\frac{12}{19}$.

Câu 90. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{xdx}{\sin x+1}$ là

A. $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{3}$. **D.** $I=\pi$.

Câu 91. Tích phân $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ có giá trị là

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** π.

Câu 92. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_2^8 f(x)dx=10$. Tính $I=\frac{3}{2}\int_1^3 f(3x-1)dx$

A. 10 **B.** 20 **C.** 5 **D.** 30

Câu 93. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(2x-1)dx=3$. Đẳng thức nào sau đây là đúng.

A. $\int_{-1}^1 f(x+1)dx=\frac{3}{2}$ **B.** $\int_{-1}^1 f(x+1)dx=-\frac{3}{2}$ **C.** $\int_{-1}^1 f(x+1)dx=-6$ **D.** $\int_{-1}^1 f(x+1)dx=6$

Câu 94. *[Lương Thế Vinh lần 1].* Biết $\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{e^x+1}dx=9$, $a\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+\frac{1}{a}$.

A. $T=\frac{10}{3}$. **B.** $T=\frac{5}{2}$. **C.** $T=0$. **D.** $T=-\frac{10}{3}$.

Câu 95. Đặt $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos 2x dx$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $I=e^x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2x dx$ **B.** $I=\frac{1}{2}e^x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2x dx$

C. $I=\frac{1}{2}e^x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2x dx$ **D.** $I=e^x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin 2x dx$

Câu 96. *[Sở Lâm Đồng]* Cho hàm số $y=\cos x$ có đạo hàm liên tục trên K (K là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng của $\mathbb{R}$) thỏa mãn hệ thức $\int f(x)\sin x dx=-f(x)\cos x+\int \cos x.\pi^x dx$. Hỏi $y=f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau.

A. $f(x)=\frac{\pi^x}{\ln\pi}$ B. $f(x)=-\pi^x\ln\pi$ **C.** $f(x)=\pi^x\ln\pi$ **D.** $f(x)=-\frac{\pi^x}{\ln\pi}$

Câu 97. *[Đề minh họa lần 3 -BGD]* Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$

A. -12. **B.** 8 **C.** 12. **D.** -8.

Câu 98. Cho $f(x)$ là hàm lẻ, liên tục trên R. Khi đó $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ có giá trị bằng?

A. 0. **B.** -6. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 99. Cho $f(x)$ là hàm chẵn, liên tục trên R và $\int_0^3 f(x)dx=6$. Khi đó $\int_0^{-3} f(x)dx$ có giá trị bằng?

A. 0 **B.** –6 **C.** 6 **D.** 3

Câu 100. *[Đề thử nghiệm lần 2 - Bộ giáo dục].* Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x)dx$

A. 32 **B.** 16 **C.** 8 **D.** 4

Câu 101. Cho $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 1, \int_{-2}^{4} f(t)dt = -4$. Tính $\int_2^4 f(y)dy$

A. -5. **B.**5 **C.**3. **D.**-3.

Câu 102. Đổi biến $t = \sqrt{1+3\cos x}$ thì tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ được viết lại

A. $I = \frac{1}{9}\int_1^2 (4t^2+2)dt$ **B.** $I = \frac{1}{3}\int_1^2 (4t^2+2)dt$

C. $I = \frac{1}{9}\int_1^2 (2t^2+4)dt$ **D.** $I = \frac{1}{9}\int_1^2 (4t^2+4)dt$

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $f'(x) = 2+\cos 2x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

A. $f(0) = \pi$ **B.** $f(x) = 2x + \frac{\sin 2x}{2} + \pi$

C. $f(x) = 2x - \frac{\sin 2x}{2} + \pi$ **D.** $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Câu 104. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx = \ln(a+\pi) - \frac{b}{c}\ln 2$, với $a,b,c \in \mathbb{N}, \frac{c}{d}$ tối giản. Khi đó $a+b+c$ =?

A. $a+b+c = 11$. **B.** $a+b+c = 10$ **C.** $a+b+c = 9$. **D.** $a+b+c = 8$

Câu 105. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{\frac{1}{3}}^{1} f(3x) = 2$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx = 2$. Tính $I = \int_0^3 f(x)dx$.

A. $I = 8$ **B.** $I = 4$ **C.** $I = 8/3$ **D.** $I = -2$

Câu 106. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}dx$

A. $I = \frac{\pi}{2}$. **B.** $I = \frac{\pi}{4}$. **C.** $I = \frac{\pi}{6}$. **D.** $I = \frac{\pi}{8}$.

Câu 107. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{a}\ln b$, $a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của $a.b$

A. $a.b = 16$. **B.** $a.b = 18$ **C.** $a.b = 12$. **D.** $a.b = 10$.

Câu 108. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, thỏa mãn $F(\frac{\pi}{4}) = 2$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{F(x)}{\cos^2 x}dx = 4$

. Khi đó tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(x)dx$ có giá trị:

A. - 2 **B.** -4 **C.** -1 **D.**-3

Câu 109. $\int\limits_0^1 \left(3^x - 2^x\right)^2 dx$ bằng

A. $\frac{4}{\ln 3} - \frac{10}{\ln 6} + \frac{3}{2\ln 2}$. **B.** $\frac{4}{\ln 3} + \frac{10}{\ln 6} + \frac{3}{2\ln 2}$. **C.** $\frac{4}{\ln 3} - \frac{10}{\ln 6} - \frac{3}{2\ln 2}$. **D.** $\frac{4}{\ln 3} + \frac{10}{\ln 6} - \frac{3}{2\ln 2}$.

Câu 110. $\int\limits_0^2 x\left(x+1\right)^2 dx$ bằng

A. $11\frac{1}{4}$. **B.** $11\frac{1}{3}$. **C.** $11\frac{1}{5}$. **D.** $11\frac{1}{2}$.

Câu 111. $\int\limits_1^2 \frac{\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)}{x^2} dx$ bằng

A. $\frac{21}{3} - 11.\ln 2$. **B.** $11 + \frac{21}{2}\ln 2$. **C.** $\frac{21}{2} + 11.\ln 2$. **D.** $\frac{1}{12} + 2.\ln 11$.

Câu 112. $\int\limits_0^1 \left(1+3x\right)^{\frac{3}{2}} dx$ bằng

A. $5\frac{1}{4}$. **B.** $4\frac{1}{25}$. **C.** $14\frac{2}{5}$. **D.** $4\frac{2}{15}$.

Câu 113. $\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\left(1-x\right)^2} dx$ bằng

A. $\frac{3}{10\sqrt[3]{4}}\left(3\sqrt[3]{9} - 1\right)$. **B.** $\frac{3}{10\sqrt[3]{5}}\left(3\sqrt[3]{7} + 1\right)$. **C.** $\frac{3}{4\sqrt[3]{10}}\left(3\sqrt[3]{5} + 2\right)$. **D.** $\frac{3}{10\sqrt[3]{2}}\left(3\sqrt[3]{6} - 8\right)$.

Câu 114. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx$ bằng.

A. $\frac{1}{8} - \ln\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{8} + \ln\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{8} + \ln\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{8}$.

Câu 115. Nếu $\int\limits_0^m \frac{1}{x\left(x+1\right)} dx = \ln 2$ thì m bằng.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \frac{2}{5} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = -\frac{2}{5} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \frac{2}{5} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -\frac{2}{5} \end{array}\right.$.

Câu 116. Nếu $\int\limits_3^m x^2 dx = 4$ thì m bằng.

A. $\sqrt[3]{39}$. **B.** $\pm\sqrt[3]{39}$. **C.** $-\sqrt[3]{39}$. **D.** $\sqrt{39}$.

Câu 117. Nếu $b - a = 3$ thì $\int\limits_a^b x^2 dx$ có giá trị bằng.

A. $3 - ab$. **B.** $9 - 3ab$. **C.** $9 + 3ab$. **D.** $3 + ab$.

Câu 118. Tích phân $\int\limits_0^m \frac{dx}{e^x + 1}$ bằng

A. $m - \ln\left(e^m + 1\right) - \ln 2$. **B.** $m + \ln\left(e^m + 1\right) + \ln 2$.

C. $m-\ln\left(e^m+1\right)+\ln 2$. **D.** $m+\ln\left(e^m+1\right)-\ln 2$.

Câu 119. Tích phân $\int\limits_0^m \frac{e^x\left(1+x\right)}{1+xe^x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\ln\left|1+me^m\right|$. **B.** $\ln\left|1-me^m\right|$. **C.** $\ln\left|3+me^m\right|$. **D.** $\ln\left|3-me^m\right|$.

Câu 120. Tích phân $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t.\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t.\mathrm{d}x$. **C.** $-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t.\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t.\mathrm{d}x$.

Câu 121. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ với $a>0$ bằng

A. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t$. **B.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}t$. **C.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}t$. **D.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \mathrm{d}t$.

Câu 122. Tích phân $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{\mathrm{d}x}{\frac{9}{25}-x^2}$ bằng

A. $\frac{3}{5}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t$. **B.** $\frac{5}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t$. **C.** $-\frac{3}{5}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t$. **D.** $-\frac{5}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t$.

Câu 123. Tích phân $\int\limits_0^3 \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(1+x\right)^2}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $3\int\limits_1^{\sqrt[3]{4}} \left(t^6-2t^3-1\right)\mathrm{d}t$. **B.** $3\int\limits_1^{\sqrt[3]{4}} \left(t^6+2t^3+1\right)\mathrm{d}t$. **C.** $3\int\limits_1^{\sqrt[3]{4}} \left(t^6-2t^3+1\right)\mathrm{d}t$. **D.** $3\int\limits_1^{\sqrt[3]{4}} \left(t^6+2t^3-1\right)\mathrm{d}t$.

Câu 124. Tích phân $\int\limits_{-1}^0 x\sqrt[3]{1+x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $3\int\limits_0^1 \left(t^6+t^3\right)\mathrm{d}t$. **B.** $\frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left(t^6-t^3\right)\mathrm{d}t$. **C.** $\frac{1}{3}\int\limits_0^1 \left(t^6+t^3\right)\mathrm{d}t$. **D.** $3\int\limits_0^1 \left(t^6-t^3\right)\mathrm{d}t$.

Câu 125. Tích phân $\int\limits_1^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\int\limits_1^2 \left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t$. **B.** $2\int\limits_1^2 \left(t^4+2t^2+1\right)\mathrm{d}t$. **C.** $2\int\limits_1^2 \left(t^4-2t^2-1\right)\mathrm{d}t$. **D.** $2\int\limits_1^2 \left(t^4+2t^2-1\right)\mathrm{d}t$.

Câu 126. Tích phân $\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $3\int\limits_1^2 \left(t^2-1\right)\mathrm{d}t$. **B.** $3\int\limits_1^2 \left(t^2+1\right)\mathrm{d}t$. **C.** $2\int\limits_1^2 \left(t^2-1\right)\mathrm{d}t$. **D.** $2\int\limits_1^2 \left(t^2+1\right)\mathrm{d}t$.

Câu 127. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x\left(2+\ln x\right)^2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{6}-\ln\frac{5}{6}$. **B.** $-\frac{1}{6}+\ln\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{1}{3}-\ln\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}$.

Câu 128. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\left(1-\tan x\right)}$ bằng

A. $\int_0^{1-\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}t}{t}$. **B.** $-\int_0^{1-\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}t}{t}$. **C.** $2\int_0^{1-\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}t}{t}$. **D.** $-2\int_0^{1-\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Câu 129. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x+1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}+1+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos x}$. **B.** $\frac{\pi}{4}+1-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos x}$. **C.** $\frac{\pi}{2}+1+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos x}$. **D.** $\frac{\pi}{2}+1-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos x}$.

Câu 130. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-2\right)\sin 2x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{2}+2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x$. **B.** $\frac{\pi}{2}+2-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

C. $\frac{\pi}{2}-2-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x$. **D.** $\frac{\pi}{2}-2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

Câu 131. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{x}\cos x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{18}-3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x$.

Câu 132. $\int_{-1}^{0}\left(2x+3\right)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $e-3+\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$. **B.** $e+3-2\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$. **C.** $e-3-\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$. **D.** $e-3+2\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

Câu 133. $\int_0^1\left(x-2\right)\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2-e^3}{5}-\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. **B.** $\frac{2-e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. **C.** $\frac{2+e^3}{5}-\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. **D.** $\frac{2+e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

Câu 134. $\int_0^{\ln 2}xe^{-2x}dx$ bằng

A. $e^{\ln\left(2\ln 2-1\right)}$. **B.** $e^{\ln\left(2\ln 2+1\right)}$. **C.** $e^{\ln\left(\ln 2-1\right)}$. **D.** $e^{\ln\left(\ln 2+1\right)}$.

Câu 135. $\int_1^e\sqrt{x}\ln x\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{e}^3}-\frac{3}{2}\int_1^e x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$. **B.** $\frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{e}^3}-\frac{2}{3}\int_1^e x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$. **C.** $\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{e}^3}-\frac{2}{3}\int_1^e x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$. **D.** $\frac{3}{2}\sqrt{\mathrm{e}^3}-\frac{3}{2}\int_1^e x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$.

Câu 136. $\int_1^e x^2 \ln x dx$ bằng

A. $\frac{e^3}{6}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx$. **B.** $\frac{e^3}{2}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx$. **C.** $\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx$. **D.** $\frac{e^3}{9}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx$.

Câu 137. $\int_0^1 \ln(2x+1)dx$ bằng

A. $\ln 3-\int_0^1\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)dx$. **B.** $\ln 3-\int_0^1\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)dx$.

C. $\frac{3}{2}\ln 3-\int_0^1\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)dx$. **D.** $\frac{3}{2}\ln 3-\int_0^1\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)dx$.

Câu 138. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\ln(\sin x)dx$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 139. Cho $0<a<1<b$, khi đó $\int_a^b |x^2-x|dx$ bằng

A. $-\int_a^1(x^2-x)dx+\int_1^b(x^2-x)dx$. **B.** $\int_a^1(x^2-x)dx-\int_1^b(x^2-x)dx$.

C. $\int_a^1(x^2-x)dx+\int_1^b(x^2-x)dx$. **D.** $-\int_a^1(x^2-x)dx-\int_1^b(x^2-x)dx$.

Câu 140. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $\int_1^2 f(x)dx=3, \int_1^3 f(x)dx=5$. Biểu thức $\int_2^3 f(x)dx=$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 15.

Câu 141. Tìm hai số thực A,B sao cho $f(x)=A\sin\pi x+B$, biết rằng $f'(1)=2$ và $\int_0^2 f(x)dx=4$.

A. $\begin{cases}A=-2\\B=-\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}A=2\\B=-\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}A=-2\\B=\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}A=-\frac{2}{\pi}\\B=2\end{cases}$.

Câu 142. Giá trị của a để đẳng thức $\int_1^2\left[a^2+(4-4a)x+4x^3\right]dx=\int_2^4 2xdx$ là đẳng thức đúng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 143. Giá trị của tích phân $I=\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}$ $(a>0)$ là

A. $\frac{\pi}{4a}$. **B.** $\frac{\pi^2}{4a}$. **C.** $-\frac{\pi^2}{4a}$. **D.** $-\frac{\pi}{4a}$.

Câu 144. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$ là

A. $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{-\pi}{\sqrt{2}}$.

Câu 145. Cho $I=\int\limits_x^1\dfrac{dt}{1+t^2}$. Tích phân nào sau đây có giá trị bằng với giá trị của tích phân đã cho.

A. $-\int\limits_1^x\dfrac{dt}{1+t^2}$. **B.** $\int\limits_1^x\dfrac{dt}{1+t^2}$. **C.** $\int\limits_1^{\frac{1}{x}}\dfrac{dt}{1+t^2}$. **D.** $-\int\limits_1^{\frac{1}{x}}\dfrac{dt}{1+t^2}$.

Câu 146. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx$ là

A $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $-\sqrt{3}\ln 2-\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$.

Câu 147. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^2\min\left\{1,x^2\right\}dx$ là

A. 4. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $-\dfrac{3}{4}$.

Câu 148. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-8}^{-3}\dfrac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx$ là

A. $\ln\dfrac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\ln 2$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 149. Biết $I=\int\limits_1^a\dfrac{x^3-2\ln x}{x^2}dx=\dfrac{1}{2}+\ln 2$. Giá trị của a là

A. 2. **B.** $\ln 2$. **C.** π. **D.** 3.

Câu 150. Cho $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}dx$, $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{(\sin x+2)^2}dx$. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

A. $I_1=\dfrac{14}{9}$. **B.** $I_1>I_2$. **C.** $I_2=2\ln\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}$. **D.** $I_2=2\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}$.

Câu 151. Tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn $\int\limits_0^m\left(2x+5\right)dx=6$ là

A. $m=1,m=-6$. **B.** $m=-1,m=-6$. **C.** $m=-1,m=6$. **D.** $m=1,m=6$.

Câu 152. Cho hàm số $h(x)=\dfrac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}$. Tìm để $h(x)=\dfrac{a\cos x}{(2+\sin x)^2}+\dfrac{b\cos x}{2+\sin x}$ và tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx$

A. $a=-4,\ b=2;\ I=\dfrac{2}{3}+2\ln\dfrac{3}{2}$. **B.** $a=4,\ b=-2;\ I=-\dfrac{2}{3}-2\ln\dfrac{3}{2}$.

C. $a=2,\ b=4;\ I=-\dfrac{1}{3}+4\ln\dfrac{3}{2}$. **D.** $a=-2,\ b=4;\ I=\dfrac{1}{3}+4\ln\dfrac{3}{2}$.

Câu 153. Giá trị trung bình của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$, kí hiệu là $m(f)$ được tính theo công thức $m(f)=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$. Giá trị trung bình của hàm số $f(x)=\sin x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\dfrac{4}{\pi}$. **B.** $\dfrac{3}{\pi}$. **C.** $\dfrac{1}{\pi}$. **D.** $\dfrac{2}{\pi}$.

Câu 154. Cho $I=\int\limits_0^1\dfrac{dx}{3x+1}$; $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx$; $K=\int\limits_{-1}^2\left(x^2+3x+1\right)dx$. Tích phân nào bằng $\dfrac{21}{2}$?

A. K. **B.** I. **C.** J. **D.** J và K.

Câu 155. Với $0<a<1$, giá trị của tích phân sau $\int\limits_0^a\dfrac{dx}{x^2-3x+2}dx$ là:

A. $\ln\left|\dfrac{a-2}{2a-1}\right|$. **B.** $\ln\left|\dfrac{a-2}{a-1}\right|$. **C.** $\ln\left|\dfrac{a-2}{2(a-1)}\right|$. **D.** $\ln\left|\dfrac{a-2}{2a+1}\right|$.

Câu 156. Cho $2\sqrt{3}m-\int\limits_0^1\dfrac{4x^3}{(x^4+2)^2}dx=0$. Khi đó giá trị của $144m^2-1$ bằng

A. $\dfrac{-2}{3}$. **B.** $4\sqrt{3}-1$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 157. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $(a;b)$, đồng thời thỏa mãn $f(a)=f(b)$. Lựa chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int\limits_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=2$. **B.** $\int\limits_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=1$. **C.** $\int\limits_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=-1$. **D.** $\int\limits_a^b f'(x).e^{f(x)}dx=0$.

Câu 158. Kết quả phép tính tích phân $I=\int\limits_1^5\dfrac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ có dạng $I=a\ln 3+b\ln 5\ (a,b\in\mathbb{Z})$. Khi đó $a^2+ab+3b^2$ có giá trị là

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 159. Với $n\in\mathbb{N},n\geq 1$, tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\sin x dx$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{1}{2n}$. **B.** $\dfrac{1}{n-1}$. **C.** $\dfrac{1}{n+1}$. **D.** $\dfrac{1}{n}$.

Câu 160. Với $n\in\mathbb{N},n>1$, giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\cos x}+\sqrt[n]{\sin x}}dx$ là

A. $-\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{3\pi}{4}$. **D.** $-\dfrac{3\pi}{4}$.

Câu 161. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{2017\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ là

A. $3034\sqrt{2}$. **B.** $-4043\sqrt{2}$. **C.** $3043\sqrt{2}$. **D.** $4034\sqrt{2}$.

Câu 162. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\dfrac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}\right)dx$ là

A. $2\ln 3-1$. **B.** $-2\ln 2-1$. **C.** $2\ln 2-1$. **D.** $-2\ln 3-1$.

Câu 163. Có mấy giá trị của b thỏa mãn $\int_0^b (3x^2-12x+11)dx=6$

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 164. Biết rằng $\int_0^b 6dx=6$ và $\int_0^a xe^x dx=a$. Khi đó biểu thức $b^2+a^3+3a^2+2a$ có giá trị bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 165. Biết rằng $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}=A$, $\int_0^{b\pi} 2dx=B$ (với $a,b>0$). Khi đó giá trị của biểu thức $4aA+\frac{B}{2b}$ bằng

A. 2π . **B.** π. **C.** 3π. **D.** 4π.

Câu 166. Cho $f(x),g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $\int_0^1 g(x)f'(x)dx=-1$,

$\int_0^1 g'(x)f(x)dx=2$. Tính $I=\int_0^1 [f(x)g(x)]'dx$.

A. $I=3$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=2$.

Câu 167. Cho $f(x),g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[1;3]$ và thỏa mãn $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]dx=10$,

$\int_1^3 [2f(x)-g(x)]dx=6$. Tính $I=\int_1^3 [f(x)+g(x)]dx$

A. $I=6$. **B.** $I=7$. **C.** $I=8$. **D.** $I=9$.

Câu 168. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ và thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx=7$, $\int_2^4 f(x)dx=3$. Tính $I=$

$\int_0^2 f(x)dx+\int_4^{10} f(x)dx$.

A. $I=3$. **B.** $I=2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=4$.

Câu 169. Biết $\int_0^1 2f(x)dx=6$, $\int_0^2 [2f(x)-g(x)]dx=5$, $\int_0^2 [3f(x)+g(x)]dx=35$.Tính $I=\int_1^2 f(x)dx$.

A. $I=2$. **B.** $I=3$. **C.** $I=5$. **D.** $I=6$.

Câu 170. Cho hàm số chẵn $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $\int_{-2}^2 f(x)dx=2$ .Tính $I=\int_0^1 f(2x)dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=1$.

Câu 171. Cho hàm số lẻ $f(x)$ liên tục trên R và $\int_{-2}^0 f(x)dx=15$ và $\int_2^3 f(x)dx=5$. Tính $I=\int_0^3 f(x)dx$.

A. $I=-10$. **B.** $I=10$. **C.** $I=-20$. **D.** $I=20$.

Câu 172. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $\int_0^2 f(x)dx=3$. Tính $I=\int_{-1}^1 f(|2x|)dx$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=3$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{2}{3}$.

Câu 173. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(x)+2f(1-x)=3x$ với $\forall x\in R$ Tính $I=\int_0^1 f(x)dx.$

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=1$.

Câu 174. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ với $\forall x\in R^*$. Tính $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx.$

A. $I=\frac{4}{9}$. **B.** $I=\frac{9}{4}$. **C.** $I=-\frac{4}{9}$. **D.** $I=-\frac{9}{4}$.

Câu 175. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 xf(x)dx=3$. Tính $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x)\sin 4x\,dx$.

A. $K=3$. **B.** $K=-3$. **C.** $K=2$. **D.** $K=4$.

Câu 176. Biết $\int_0^{\ln 2} f(e^{2x})dx=10$. Tính $I=\int_1^4\frac{f(x)}{x}dx$.

A. $I=10$. **B.** $I=5$. **C.** $I=20$. **D.** $I=15$.

Câu 177. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^4\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\sin x\,dx=1$.

Tính $K=\int_0^2 f(x)\,dx$.

A. $K=3$. **B.** $K=2$. **C.** $K=13$. **D.** $K=4$.

Câu 178. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ và thỏa mãn $\int_1^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)dx=8$. Tính $I=\int_1^2 xf(x)dx$.

A. $I=2$. **B.** $I=8$. **C.** $I=4$. **D.** $I=16$.

Câu 179. Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\,dx$ bằng cách đặt $t=x^2-1$ mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=2\int_1^3\sqrt{t}\,dt$. **B.** $I=\int_1^2\sqrt{t}\,dt$. **C.** $I=\int_0^3\sqrt{t}\,dt$. **D.** $I=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{t}\,dt$.

Câu 180. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^e\frac{f(\ln x)}{x}dx=e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_0^1 f(x)dx=1$. **B.** $\int_0^1 f(x)dx=e$. **C.** $\int_0^e f(x)dx=1$. **D.** $\int_0^e f(x)dx=e$.

Câu 181. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và thỏa mãn $\int_a^b f(x)dx=7$. Tính $I=\int_a^b f(a+b-x)dx$.

A. $I=7$. **B.** $I=a+b-7$. **C.** $I=a+b+7$. **D.** $I=7-a-b$.

Câu 182. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính

$K=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

A. $K=-6$. **B.** $K=0$. **C.** $K=-2$. **D.** $K=6$.

Câu 183. Cho hàm số chẵn $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+e^x}dx=4$. Tính $I=\int_{0}^{1}f(x)dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=2$. **C.** $I=8$. **D.** $I=4$.

Câu 184. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=6$ và $\int_{a}^{b}\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx=1$. Tính $I=\int_{a}^{b}x.\sin\frac{\pi x}{2}dx$.

A. $I=-\frac{12}{\pi}$. **B.** $I=-\frac{14}{\pi}$. **C.** $I=\frac{12}{\pi}$. **D.** $I=\frac{14}{\pi}$.

Câu 185. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên R, $F(5)=5$, $\int_{-2}^{3}F(x+2)dx=-1$. Tính $J=\int_{0}^{5}x.f(x)dx$.

A. $J=28$. **B.** $J=19$. **C.** $J=29$. **D.** $J=26$.

Câu 186. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên R thỏa mãn $\int_{1}^{e}\frac{1}{x}.F(x)dx=1$ và $F(e)=3$. Tính $I=\int_{1}^{e}\ln x.f(x)dx$.

A. $I=3$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-2$.

Câu 187. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và $\int_{0}^{1}f(x)dx=-1, f(1)=1$. Tính $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'(\sin x)dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=1$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

Câu 188. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên R và thỏa mãn $\int_{0}^{2}f(x)dx=-3,\ f(2)=2$. Tính $I=\int_{0}^{1}x.f'(2x)dx$.

A. $I=20$. **B.** $I=\frac{5}{7}$. **C.** $I=\frac{7}{4}$. **D.** $I=5$.

Câu 189. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_{0}^{1}(x+1)f'(x)dx=10,\ 2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int_{0}^{1}f(x)dx$.

A. $I=-12$. **B.** $I=8$. **C.** $I=12$. **D.** $I=-8$.

Câu 190. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên R thỏa mãn $\int_{0}^{1}F(x)dx=-1$ và $F(1)=1$. Tính $I=\int_{0}^{1}x.f(x)dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-2$.

Câu 191. Biết $\int_{0}^{1}\frac{3x-1}{x^2+6x+9}dx=3\ln\frac{a}{b}-\frac{5}{6}$; trong đó a,b là hai số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $ab=-5$. **B.** $ab=12$. **C.** $ab=6$. **D.** $ab=\frac{5}{4}$.

Câu 192. Biết $\int\limits_0^1 x.e^{-x}\,dx=a-\frac{b}{e}$. Tính $M=a+2b$.

A. $M=5$. **B.** $M=6$. **C.** $M=7$. **D.** $M=3$.

Câu 193. Biết $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx=\frac{a\sqrt{2}+b}{3}\left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$. Tính $S=a+b$.

A. $S=8$. **B.** $S=0$. **C.** $S=2$. **D.** $S=4$.

Câu 194. Biết $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=a+b.\ln\frac{1+e}{2}$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=1$.

Câu 195. Biết $\int\limits_0^1 x\cos 2x\,dx=\frac{1}{4}\left(a\sin 2+b\cos 2+c\right)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. $a+b+c=1$. **B.** $a-b+c=0$. **C.** $a+2b+c=0$. **D.** $2a+b+c=-1$.

Câu 196. Biết $\int\limits_0^1 3e^{\sqrt{1-3x}}\,dx=\frac{a}{5}e^2+\frac{b}{3}e+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Tính $S=a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}$.

A. $S=10$. B. $S=5$. C. $S=6$. D. $S=9$.

Câu 197. Cho $\int\limits_2^5 f\left(x\right)dx=m$. Tính $I=\int\limits_2^1 x.f\left(x^2+1\right)dx$ theo m.

A. $I=-\frac{m}{3}$. **B.** $I=2m$. **C.** $I=\frac{m}{2}$. **D.** $I=-\frac{m}{2}$.

Câu 198. Tìm $a>0$ sao cho $\int\limits_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1}\,dx=\frac{a^2}{2}+a+\ln 3$.

A. $a=5$. **B.** $a=4$. **C.** $a=3$. **D.** $a=2$.

Câu 199. Tìm n thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x.\cos x\,dx=\frac{1}{128\left(n+1\right)}$.

A. $n=5$. **B.** $n=4$. **C.** $n=3$. **D.** $n=6$.

Câu 200. Cho hai số thực a,b thỏa mãn $3a+2b=1$ và $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(ax+b\right)\sin x\,dx=4$. Tính $P=a-b$.

A. $P=11$. **B.** $P=-7$. **C.** $P=4$. **D.** $P=-18$.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

1.A	2.A	3.C	4.C	5.B	6.C	7.A	8.D	9.B	10.A
11.B	12.D	13.B	14.B	15.C	16.C	17.A	18.B	19.B	20.C
21.D	22.A	23.A	24.D	25.B	26.A	27.A	28.D	29.D	30.A
31.D	32.B	33.B	34.D	35.B	36.A	37.D	38.C	39.A	40.D
41.A	42.B	43.A	44.A	45.C	46.C	47.A	48.C	49.A	50.B
51.D	52.C	53.A	54.B	55.C	56.C	57.D	58.C	59.B	60.B
61.A	62.A	63.A	64.C	65.C	66.B	67.D	68.C	69.A	70.B
71.D	72.B	73.C	74.C	75.B	76.A	77.C	78.D	79.A	80.C
81.A	82.C	83.A	84.D	85.B	86.D	87.D	88.B	89.D	90.D
91.D	92.C	93.D	94.A	95.B	96.A	97.D	98.A	99.B	100.C
101.A	102.A	103.C	104.A	105.C	106.B	107.A	108.A	109.A	110.B
111.C	112.D	113.A	114.C	115.D	116.A	117.C	118.C	119.A	120.D
121.C	122.B	123.C	124.D	125.A	126.C	127.D	128.B	129.C	130.D
131.B	132.D	133.B	134.A	135.C	136.C	137.B	138.C	139.A	140.C
141.D	142.B	143.A	144.A	145.C	146.D	147.B	148.A	149.A	150.D
151.A	152.A	153.D	154.A	155.B	156.A	157.D	158.B	159.C	160.B
161.D	162.C	163.D	164.C	165.A	166.B	167.A	168.D	169.C	170.A
171.A	172.B	173.B	174.B	175.A	176.C	177.D	178.C	179.C	180.B
181.A	182.B	183.D	184.A	185.D	186.C	187.D	188.C	189.D	190.C
191.B	192.A	193.B	194.C	195.B	196.A	197.D	198.D	199.D	200.D

Câu 1. **Chọn A.**

$I=\int\limits_{1}^{2}f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{1}^{2}=f(2)-f(1)=2-1=1$.

Câu 2. **Chọn A.**

Theo định nghĩa và tính chất tích phân ta có: $\int\limits_{a}^{b}kf\left(x\right)dx=kF(x)\Big|_{a}^{b}=k\left(F\left(b\right)-F\left(a\right)\right)$.

Câu 3. **Chọn C.**

Câu 4. **Chọn C.**

Ta có: $\int\limits_{0}^{10}f\left(x\right)dx=\int\limits_{0}^{2}f\left(x\right)dx+\int\limits_{2}^{6}f\left(x\right)dx+\int\limits_{6}^{10}f\left(x\right)dx\Leftrightarrow P=\int\limits_{0}^{10}f\left(x\right)dx-\int\limits_{2}^{6}f\left(x\right)dx=7-3=4$

Câu 5. **Chọn B.**

$\int\limits_{0}^{2}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]dx=\int\limits_{0}^{2}f(x)dx-\int\limits_{0}^{2}g(x)dx=3\quad(1)$

$\int_0^2 \left[f(x)+g(x) \right] dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(x)dx = 7 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\int_0^2 f(x)dx = 5, \quad \int_0^2 g(x)dx = 2$

$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 5 - 3 = 2$

Câu 6. **Chọn C.**

Ta có: $\int_0^3 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^3 = f(3) - f(0) = 9 \Rightarrow f(3) = 9 + 1 = 10$.

Câu 7. **Chọn A.**

$I = \int_2^4 f(y)\mathrm{d}y = \int_{-2}^4 f(y)\mathrm{d}y - \int_{-2}^2 f(y)\mathrm{d}y = \int_{-2}^4 f(t)\mathrm{d}t - \int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x = -5$

Câu 8. **Chọn D.**

Câu 9. **Chọn B.**

Theo tính chất tích phân ta có: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

Câu 10. **Chọn A.**

Theo tính chất tích phân ta có $\int_a^b \left[f(x)+g(x) \right] \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

Câu 11. **Chọn B.**

Câu 12. **Chọn D.**

Ta có : $\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

Câu 13. **Chọn B.**

Ta có $I = \int_1^6 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x = 3 - 4 = -1$

Câu 14. **Chọn B.**

Theo tính chất tích phân, ta có. $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$

Câu 15. **Chọn C.**

Ta có: $I = \int_2^4 \left[f(x)-g(x) \right] \mathrm{d}x = \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x - \int_2^4 g(x)\mathrm{d}x = -2 - 2 = -4$

Câu 16. **Chọn C.**

Ta có: $I = \int_1^3 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2.3 = 6$

Câu 17. **Chọn A.**

$I_1 = \int_0^1 4xf(x^2)\mathrm{d}x$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$. Suy ra: $I_1 = 2I \Rightarrow 3I = \int_0^1 3x\mathrm{d}x = \frac{3}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2}$.

Câu 18. **Chọn B.**

Đặt $t=\sqrt{x+1}$. Suy ra: $\int_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x=8=\int_1^2 2tf\left(t\right)\mathrm{d}x\Rightarrow I=4$

Câu 19. **Chọn B.**

Đặt $t=2\tan 3x, dt=\dfrac{6}{\cos^2 3x}dx$. $I=\dfrac{1}{6}\int_0^2 f(t)dt\Rightarrow I=\dfrac{2}{3}$

Câu 20. **Chọn C.**

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2x\mathrm{d}x$. Khi đó: $I=\int_1^2 4f(t)dt=28$

Câu 21. **Chọn D.**

Ta có: $1+\cos 4x=2\cos^2 2x$. Đặt $t=\tan 2x\Rightarrow dt=\dfrac{2}{\cos^2 2x}dx$. Vậy $I=\int_0^1 \dfrac{1}{4}f(t)dt=\dfrac{2017}{4}$

Câu 22. **Chọn A.**

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow 2tdt=3dx$. Vậy $I=\int_1^2 \dfrac{2}{3}f(t)dt=\dfrac{20}{3}$

Câu 23. **Chọn A.**

Đặt $t=\ln(x^2+1)\Rightarrow dt=\dfrac{2x}{x^2+1}dx$. Vậy $I=\int_0^{2017}\dfrac{1}{2}f(t)dt=1$

Câu 24. **Chọn D.**

$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(2x)\mathrm{d}x=10\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x=20$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$. Vậy $I=\int_0^1 f(t)dt=23.$

Câu 25. **Chọn B.**

$I=\int_{-1}^{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2-1}\sin\sqrt{x+1}dx=\dfrac{a\pi+\sqrt{b}}{c},\left(a,\mathrm{b},\mathrm{c}\in\mathbb{Z}\right)$

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2$=x+1$\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=0; x=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^2-1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$.

$I=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{t}.\sin t\mathrm{d}t=-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{t}\,\mathrm{d}\cos t=\left(-2t.\cos t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos t\,\mathrm{d}t=-\dfrac{\pi}{3}+\left(2\sin t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$.

Suy ra $a=-1; b=27; c=3$. Suy ra $abc=-81$.

Câu 26. **Chọn A.**

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\cos 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$. Suy ra

$I=\left(\dfrac{1}{2}x\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2xdx=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}\left(\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\Rightarrow b=\dfrac{1}{8}; a=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow S=a+2b=0$.

Câu 27. **Chọn A.**

Đặt $u=\ln x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ và $\mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\Rightarrow v=\dfrac{x^3}{3}$.

$\Rightarrow I=\dfrac{x^3\ln x}{3}\Big|_1^e-\int\limits_1^e\dfrac{x^2}{3}dx=\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{x^3}{9}\Big|_1^e=\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{e^3}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{9}\left(2e^3+1\right).$

Câu 28. **Chọn D.**

$\int\limits_1^2\dfrac{\ln\left(x+1\right)}{x^2}dx=a\ln 2+b\ln 3$. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+1\right)\\ dv=\dfrac{1}{x^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x+1}dx\\ v=\dfrac{-1}{x}\end{cases}$.

$\Rightarrow I=\left(-\dfrac{1}{x}\ln\left(x+1\right)\right)\Big|_1^2+\int\limits_1^2\dfrac{1}{x\left(x+1\right)}dx=\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln 3+\int\limits_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln 3+\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|\Big|_1^2$

$=3\ln 2-\dfrac{3}{2}\ln 3$

Suy ra $a=3;b=-\dfrac{3}{2}$. Suy ra $a+4b=-3$.

Câu 29. **Chọn D.**

$f(x)=\int\limits_{-x}^{x}t\sin t dt.$

$f\left(x\right)=\int\limits_{-x}^{x}\mathrm{t}.\sin t\mathrm{d}t=-\int\limits_{-x}^{x}\mathrm{t}\,\mathrm{d}\cos t=\left(-t.\cos t\right)\Big|_{-x}^{x}+\int\limits_{-x}^{x}\cos t\,\mathrm{d}t=-2x\cos x+\left(\sin t\right)\Big|_{-x}^{x}=2\sin x-2x\cos x$

$f'\left(x\right)=2x\sin x\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$.

Câu 30. **Chọn A.**

$I=\int\limits_1^2\dfrac{\ln x}{x^2}dx=\dfrac{b}{c}+a\ln 2$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\dfrac{1}{x^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}dx\\ v=\dfrac{-1}{x}\end{cases}$. Suy ra $I=\left(-\dfrac{1}{x}\ln x\right)\Big|_1^2+\int\limits_1^2\dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{-1}{x}\Big|_1^2=-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $a=\dfrac{-1}{2};b=1;c=2$. Suy ra $2a+3b+c=4$.

Câu 31. **Chọn D.**

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(3x+1\right)\\ dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{3}{3x+1}dx\\ v=x\end{cases}$.

$\Rightarrow I=\int\limits_0^1\ln\left(3x+1\right)dx=\left(x.\ln\left(3x+1\right)\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\dfrac{3x}{3x+1}dx$

$=2\ln 2-\int\limits_0^1\left(1-\dfrac{1}{3x+1}\right)dx=2\ln 2-\left(x-\dfrac{1}{3}\ln\left|3x+1\right|\right)\Big|_0^1=\dfrac{8}{3}\ln 2-1$

Suy ra $a=\dfrac{8}{3}$, $b=-1$. Vậy $S=3a-b=9$

Câu 32. **Chọn B.**

$I=\int_1^2 \ln\left(9-x^2\right)dx=a\ln 5+b\ln 2+c$. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(9-x^2\right)\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{-2x}{9-x^2}dx\\v=x\end{cases}$.

$\Rightarrow I=\left(x\ln\left(9-x^2\right)\right)\Big|_1^2+2\int_1^2\dfrac{x^2}{9-x^2}dx=2\ln 5-\ln 8+2\int_1^2\dfrac{x^2-9+9}{9-x^2}dx$

$=2\ln 5-\ln 8-2\int_1^2 dx+3\int_1^2\left(\dfrac{1}{3+x}+\dfrac{1}{3-x}\right)dx=2\ln 5-\ln 8-2+3\ln\left|9-x^2\right|\Big|_1^2=5\ln 5-4\ln 8+2$

Suy ra $a=5;b=-4;c=2$. Suy ra $S=|a|+|b|+|c|=13$.

Câu 33. **Chọn B.**

$I=\int_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;x=2\Rightarrow t=4.$

$I=\dfrac{1}{2}\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=8.$

Câu 34. **Chọn D.**

Ta có $10=\int_0^1\left(x+1\right)f'\left(x\right)dx=\int_0^1\left(x+1\right)d\left(f\left(x\right)\right)=\left(x+1\right)f\left(x\right)\Big|_0^1-\int_0^1 f\left(x\right)d\left(x+1\right)$

$=2f\left(1\right)-f\left(0\right)-\int_0^1 f\left(x\right)dx\ =2-\int_0^1 f\left(x\right)dx$

Vậy $\int_0^1 f\left(x\right)dx=-8$.

Câu 35. **Chọn B.**

Đặt $t=\sqrt{x}$, $x=1\Rightarrow t=1$, $x=9\Rightarrow t=3$, $2dt=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ nên ta có $\int_1^9\dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=\int_1^3 f(t)2dt=4$

Suy ra $\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=2$

Mặt khác đặt $t=\sin x$, $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$, $\mathrm{d}\left(\sin x\right)=\cos x\mathrm{d}x$

Nên ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x).\cos x.\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=2$

Vậy $I=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=6$

Câu 36. **Chọn A.**

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=4$. Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\left(\tan^2 x+1\right)\mathrm{d}x$

Khi đó $4=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{f(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int_0^1\dfrac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

Do đó $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\left(x^2+1-1\right) f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2+4 \Leftrightarrow I = 6.$

Câu 37. **Chọn D.**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(2x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2} f(2x) \end{cases}$

Do đó $I = \int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} xf(2x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} f(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = 8 - \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x.$

Mặt khác $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4.$

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2\mathrm{d}x$

Suy ra $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2.$ Vậy $I = 8 - \frac{1}{2}.2 = 8 - 1 = 7.$

Câu 38. **Chọn C.**

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$. Áp dụng công thức tích phân từng phần ta được

$I = \left(xf(x)\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2f(2) - f(1) - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2.2 - 0 - 1 = 3.$

Câu 39. **Chọn A.**

Đặt $t = a + b - x \Rightarrow -dt = dx.$

Đổi cận $x = b \Rightarrow t = a;\ x = a \Rightarrow t = b$

Nên $I = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f\left(t\right)\mathrm{d}t = \int_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t = 7.$

Câu 40. **Chọn D.**

Xét tích phân $K = \int_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x = 3.$

Đặt $u = -2x \Rightarrow \mathrm{d}u = -2\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{2}$. Đổi cận: Khi $x = 1 \Rightarrow u = -2;\ x = 3 \Rightarrow u = -6$

Vậy, $K = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{-6} f\left(u\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-6}^{-2} f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Mà $K = 3$, nên $\int_{-6}^{-2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 6.$

Vì f là hàm chẵn trên $\left[-6;6\right]$ nên $\int_2^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_{-6}^{-2} f\left(x\right)\mathrm{d}x = 6$. Từ đó suy ra

$I = \int_{-1}^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_2^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 8 + 6 = 14.$

Câu 41. **Chọn A.**

$I = \int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left(2x+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{26}{3}.$

Câu 42. **Chọn B.**

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)dx=-2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=-2\left(0-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Câu 43. **Chọn A.**

Cách 1: Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow 2tdt=2xdx\Leftrightarrow tdt=xdx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

$$I=\int_1^{\sqrt{2}}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Cách 2: Bấm máy tính $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ = 0.6094757082 rồi so sánh đáp án.

Câu 44. **Chọn A.**

Cách 1:Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$. Đổi cận : x = 0 $\Rightarrow$ t = 1; x = Π $\Rightarrow$ t = -1.

$$\int_0^{\pi}\cos^2x\sin xdx=\int_1^{-1}t^2(-dt)=\int_{-1}^{1}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$$

Cách 2:

Ấn shift + mode +4 chuyển chế độ máy sang radian.

Bấm máy tính $\int_0^{\pi}\cos^2x\sin xdx=\frac{2}{3}$ rồi so sánh đáp án.

Câu 45. **Chọn C.**

Đặt $u=x^2-1$ ta được $du=2xdx$. Suy ra $I=\int_0^3\sqrt{u}du$.

Câu 46. **Chọn C.**

Đặt $t=\sqrt{2x+1}$ ta có $t^2=2x+1\Rightarrow tdt=dx$ và $x=\frac{t^2-1}{2}$. Suy ra $I=\frac{1}{2}\int_1^3(t^3+3)dt$.

Câu 47. **Chọn A.**

♦Tự luận: Tính tích phân $I=\int_1^2(2x-1)^5dx$.

Đặt $u=2x-1\Rightarrow\frac{1}{2}du=dx$. Đổi cận $x=1\Rightarrow u=1;x=2\Rightarrow u=3$. Nên $I=\frac{1}{2}\int_1^3u^5du=\frac{182}{3}$.

♦Trắc nghiệm: Bấm MTCT $I=\int_1^2(2x-1)^5dx=\frac{182}{3}$.

Câu 48. **Chọn C.**

Khi đặt $t=(x+1)^2$ với $-2\le x\le 1$ thì không suy ra $\sqrt{t}=x+1$ được, vì $x+1$ có thể bị âm khi $-2\le x\le -1$.

Câu 49. **Chọn A.**

Ta có $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$. Khi $x=0$ thì $t=1$, khi $x=\frac{\pi}{3}$ thì $t=\frac{1}{2}$.

Vậy $I=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\pi/3}\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}dx=-\int_1^{1/2}\frac{2t}{1+t}dt=\int_{1/2}^1\frac{2t}{1+t}dt$.

Câu 50. **Chọn B.**

[Phương pháp tự luận]

Đặt $u=\sqrt{1-\ln x}\Rightarrow u^2=1-\ln x\Rightarrow \frac{dx}{x}=-2udu$. Với $x=1\Rightarrow u=1, x=e\Rightarrow u=0$.

Khi đó $I=-\int_1^0 u^2du$.

[Phương pháp trắc nghiệm].

Bước 1: Bấm máy tính để tính $\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{2x}dx$.

Bước 2: Bấm SHIFT STO A để lưu vào biến A.

Bước 3: Bấm $A-\left(-\int_1^0 u^2du\right)=0$. Vậy đáp án là B.

Câu 51. **Chọn D.**

[Phương pháp tự luận]

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x.\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x}dx$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow I=-\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{1-u^2}{u}du=\ln 2-\frac{3}{8}$.

[Phương pháp trắc nghiệm].

Bấm máy tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan xdx-\left(\ln 2-\frac{3}{8}\right)$ được đáp số là 0.

Vậy đáp án là $\ln 2-\frac{3}{8}$.

Câu 52. **Chọn C.**

Cách1: Bấm máy tính

Cách 2. $\int_0^{\pi}\cos^2 \text{x.sinx}dx=-\int_0^{\pi}\cos^2 x\ \text{d(cosx)}=\text{-}\frac{1}{3}\cos^3 \text{x}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3}$

Câu 53. **Chọn A.**

Cách1: Bấm máy tính

Cách 2. Đặt $t=\sqrt{5\text{x}^2+4}\Rightarrow t^2=5\text{x}^2+4\Rightarrow t\text{d}t=5\text{x}\text{d}\text{x}$

Khi $x:0\to 1$ thì $t:2\to 3$. Ta có $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{4+5x^2}}=\frac{1}{5}\int_2^3 dt=\frac{1}{5}t\Big|_2^3=\frac{1}{5}$

Câu 54. **Chọn B.**

Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow dx=2dt$. Khi đó $K=2\int_0^1 f(t)dt=2\int_0^1 f(x)dx=2$.

Câu 55. **Chọn C.**

Đặt $t=\ln x+1\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$. Khi đó $I=\int_1^e\frac{1}{x(\ln x+1)}dx=\int_1^2\frac{1}{t}dt=\ln t\Big|_1^2=\ln 2$.

Do đó $a=2,\ b=1$. Vậy $S=3$.

Câu 56. **Chọn C.**

Cách 1:

Đặt $t=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2=1-x^2 \Rightarrow 2tdt=-2xdx \Rightarrow tdt=-xdx$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=1 \Rightarrow t=0$.

$$I=\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx=\int_1^0 (1-t^2)^2 t(-tdt)=\int_0^1 t^2(1-t^2)^2 dt.$$

Cách 2: Bấm máy tính $I=\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}dx = 0.07619047619$.

$$\int_0^1 t\left(1-t^2\right)dt=0.25;\ \int_1^0 t\left(1-t\right)dt=-\frac{1}{6};\ \int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^2 dt=0.07619047619.$$

Câu 57. **Chọn D.**

Đặt $x=2\tan t \Rightarrow dx=2(1+\tan^2 t)dt$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=2 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

$$I=\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1+\tan^2 t)dt}{4\tan^2 t+4}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}dt.$$

Vậy đáp án A, B, C đúng.

Chọn đáp án D.

Cách 2: Bấm máy tính $I=\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{\pi}{8}$. Đáp án D sai.

Câu 58. **Chọn D.**

Đặt $t=x^4$ ta được $dt=4x^3dx$. Suy ra $I=\frac{1}{4}\int_0^{625} 2^t dt=\frac{1}{4}.\frac{2^{625}-1}{\ln 2}=\frac{2^{625}-1}{\ln 16}$.

Câu 59. **Chọn C.**

Đặt $t=\sin x$ hoặc sử dụng vi phân:

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \sin^3 x.\cos x.dx=\int \sin^3 x.d(\sin x)=\frac{1}{4}\sin^4 x+C.$$

$$F(0)=\pi \Rightarrow C=\pi \Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}\sin^4 x+\pi \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}+\pi.$$

Câu 60. **Chọn B.**

♦Tự luận: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x.dx}{1+\sin^2 x}$

Đặt $u=1+\sin^2 x \Rightarrow du=\sin 2xdx$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=2$. Nên $I=\int_1^2 \frac{du}{u}=\ln 2$.

♦Trắc nghiệm: Bấm MTCT $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x.dx}{1+\sin^2 x}=\ln 2$.

Câu 61. **Chọn A.**

♦Tự luận: Biết $\int_2^e \frac{\ln x}{x}dx=a-\ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị $a+2b$:

đặt $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$. Đổi cận $x=2 \Rightarrow u=\ln 2$; $x=e \Rightarrow u=1$.

Ta được $\int_2^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_{\ln 2}^1 udu = \frac{1}{2}\left(1-\ln^2 2\right)$. Nên $a+2b=5$.

Câu 62. **Chọn A.**

[Phương pháp tự luận].

Đặt $u=\sqrt{1-\ln x} \Rightarrow u^2=1-\ln x \Rightarrow \frac{dx}{x}=-2udu$. Với $x=1\Rightarrow u=1, x=e\Rightarrow u=0$.

Khi đó $I=-\int_1^0 u^2du$.

[Phương pháp trắc nghiệm].

Bước 1: Bấm máy tính để tính $\int_1^e \frac{\sqrt{1-\ln x}}{2x}dx$.

Bước 2: Bấm SHIFT STO A để lưu vào biến A.

Bước 3: Bấm $A-\left(-\int_1^0 u^2du\right)=0$. Vậy đáp án là A.

Câu 63. **Chọn A.**

Đặt $t=1+x^2 \Rightarrow dt=2xdx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=1\Rightarrow t=2$. Vậy $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5}dt$.

Câu 64. **Chọn C.**

Đặt $u=\sqrt{3\cos x+1} \Rightarrow 2udu=-3\sin xdx$. Khi $x=0\Rightarrow u=2;\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$.

Khi đó $I=\frac{2}{3}\int_1^2 u^2du=\frac{2}{9}u^3\Big|_1^2$.

Câu 65. **Chọn C.**

Đặt $x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=(\tan^2 x+1)dt$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, suy ra $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 t+1}{1+\tan^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4}$.

Câu 66. **Chọn B.**

Đặt $t=1-\tan x\Rightarrow dt=-\frac{1}{\cos^2 x}dx$

Khi $x:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $t:1\to 0$. Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)^4\frac{1}{\cos^2 x}dx=-\int_1^0 t^4dt=\int_{10}^1 t^4dt$

Câu 67. **Chọn D.**

Đặt $t=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$ Khi $x:a\to b$ thì $t:f(a)\to f(b)$.

.

Ta có $\int_a^b f'\left(x\right)e^{f(x)}dx=\int_{f(a)}^{f(b)}e^t dt=e^t\Big|_{f(a)}^{f(b)}=e^{f(b)}-e^{f(a)}=0$

Câu 68. **Chọn C.**

Đặt $t=\sin 2x\Rightarrow dt=2\cos 2xdx\Rightarrow \cos 2x.dx=\frac{1}{2}dt..$

$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^n 2x \cos 2x dx = \frac{1}{128} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt = \frac{1}{128} \Leftrightarrow \frac{t^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{1}{128} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n(n+1)} = \frac{1}{64}$.

Do đó $2^n.(n+1) = 32 \Leftrightarrow n = 3$.

Câu 69. **Chọn A.**

Cách 1: Đặt t = 4 – x² ⇒ dt = -2xdx. Đổi cận: x = 0 ⇒ t = 4, x = 1 ⇒ t = 3.

$I = \int_0^1 \frac{xdx}{4-x^2} \Leftrightarrow I = \int_4^3 \frac{\frac{-1}{2}}{t} dt = \frac{1}{2}\ln|t||_3^4 = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$. Suy ra a = 4, b = 3 Vậy a² – b = 13.

Cách 2:

Nhận xét a, b ∈ Q.

Bước 1: Dùng máy tính $I = \int_0^1 \frac{xdx}{4-x^2}$ = 0.1438410362 Shift sto A.

Bước 2: Thử đáp án:.

Với đáp án A a² – b = 13 rút b = a² – 13.

Nhập vào màn hình chính phương trình: $\frac{1}{2}\ln\frac{x}{x^2-13} - A$.

Ấn shift slove dò nghiệm nếu nghiệm là số hữu tỷ chọn đáp án này nếu không dò đáp án khác.

Câu 70. **Chọn B.**

Cách 1:

Đặt t = x² + 2 ⇒ dt = 2xdx. Đổi cận: x= -1 ⇒ t = 3, x = 2 ⇒ t = 6.

$I = \int_{-1}^2 \frac{xdx}{x^2+2} = \int_3^6 \frac{0.5}{t} dt = \frac{1}{2}\ln|t||_3^6 = \frac{1}{2}\ln 2$ .Suy ra a = 2 , b = 2.

Chọn đáp án B.

Cách 2: Bước 1: Dùng máy tính $I = \int_{-1}^2 \frac{xdx}{4+x^2}$ = 0.2350018146 Shift sto A.

Bước 2: Thử đáp án:.

Với đáp án A a.b= 6 rút b = $\frac{6}{a}$.

Nhập vào màn hình chính phương trình: $\frac{1}{x}\ln\frac{6}{x} - A$.

Ấn shift slove dò nghiệm nếu nghiệm là số hữu tỷ chọn đáp án này nếu không dò đáp án khác.

Câu 71. **Chọn D.**

Đặt $t = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow dt = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)dx$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}; x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 0$.

Suy ra $I = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 f(t)\frac{1}{2}\text{dt} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(t)\text{dt} = -1$.

Câu 72. **Chọn B.**

Đặt $t=\ln x$ ta được $dt=\dfrac{1}{x}dx$. Suy ra $e=\int\limits_0^1 f(t)dt$.

Câu 73. **Chọn C.**

♦Tự luận: Tính tích phân $I=\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}$ bằng cách đặt $x=\tan t,\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

Đặt $x=\tan t\Rightarrow dx=\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0\,;x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$. Nên $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}dt$.

♦Trắc nghiệm: Bấm MTCT $I=\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}\approx 0,785$

A. $I=\int\limits_1^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dt}{t}\approx -0,24$. **B.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dt}{1+t^2}\approx 0,665$. **C.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}dt\approx 0,785$. **D.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}tdt\approx 0,308$.

Câu 74. **Chọn C.**

♦Tự luận: $I=\int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$.

đặt $u=x^2-1\Rightarrow du=2xdx$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow u=1\,;x=2\Rightarrow u=3$. Nên $I=\int\limits_0^3\sqrt{u}du$.

♦Trắc nghiệm:

Bấm MTCT $I=\int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx\approx 3,464$

A. $I=2\int\limits_0^3\sqrt{u}du\approx 6,9$. **B.** $I=\int\limits_1^2\sqrt{u}du\approx 1,21$.

C. $I=\int\limits_0^3\sqrt{u}du\approx 3,464$. **D.** $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2\sqrt{u}du\approx 0,69$.

Câu 75. **Chọn B.**

[Phương pháp tự luận].

Đặt $t=\sqrt{8\ln x+1}\Rightarrow tdt=\dfrac{4}{x}dx$. Với $x=1\Rightarrow t=1,\ x=e\Rightarrow t=3$.

Vậy $I=\dfrac{1}{4}\int\limits_1^3 t^2dt=\dfrac{t^3}{12}\Big|_1^3=\dfrac{13}{6}$.

[Phương pháp trắc nghiệm].

Bấm máy tính $I=\int\limits_1^e\dfrac{\sqrt{8\ln x+1}}{x}dx$ được đáp số là $\dfrac{13}{6}$. Vậy đáp án là $\dfrac{13}{6}$.

Câu 76. **Chọn A.**

Đặt $x=\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos t dt$. Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0,\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Vậy $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{|\cos t|}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}$.

Câu 77. **Chọn C.**

Ta có $t=x^3+5\Rightarrow dt=3x^2dx$. Khi $x=0$ thì $t=5$; khi $x=1$ thì $t=6$..

Vậy $I=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx=\int\limits_5^6\sqrt{t}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int\limits_5^6(t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{3}\frac{(t)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_5^6=\frac{2}{9}t\sqrt{t}\Big|_5^6=\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$.

Câu 78. **Chọn D.**

Đặt $x=2\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Khi x = 0 thì t = 0. Khi $x=2$ thì $t=\frac{\pi}{2}$..

Từ $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos t dt$.

Vậy $\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t dt=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\pi$.

Câu 79. **Chọn A.**

Đặt $x=\sqrt{2}\tan x\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}dt$. Khi $x:0\to\sqrt{2}$ thì $t:0\to\frac{\pi}{4}$.

$\Rightarrow I=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\left(\tan^2 t+1\right)\cos^2 t}=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}dt$

Câu 80. **Chọn C.**

Đặt t = cosx $\Leftrightarrow dt=-\sin x dx$ và $\sin^2 x=1-t^2$, đổi cận

$\left\{x=\frac{\pi}{6}\to t=\frac{\sqrt{3}}{2};x=\frac{\pi}{3}\to t=\frac{1}{2}\right\}$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x}=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}.\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\ln(7+4\sqrt{3})-\frac{1}{2}\ln 2$

Suy ra $I=-\frac{1}{2}\left[\ln(7-4\sqrt{3})+\ln 3\right]=-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)\Rightarrow\begin{cases}a=7-4\sqrt{3}\\b=3\end{cases}\Rightarrow a+b=10-4\sqrt{3}$

Câu 81. **Chọn A.**

Đặt t = tanx $\Rightarrow\int\limits_0^{\pi/4}f(\tan x)dx=\int\limits_0^1\frac{f(t)}{t^2+1}dt=\int\limits_0^1\frac{f(\mathrm{x})}{x^2+1}dt=4$.

$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\frac{f(x)}{x^2+1}+\int\limits_0^1\frac{x^2f(x)}{x^2+1}=6$.

Câu 82. **Chọn C.**

Đặt t = $\sqrt{x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow \displaystyle\int_1^9 \dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = 2\int_1^3 f\left(t\right)dt = 4 \Rightarrow \int_1^3 f\left(t\right)dt = 2$.

Đặt t = sinx $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dt = \cos x dx \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\pi/2} f\left(\sin x\right)\cos x dx = \int_0^1 f\left(t\right)dt = 2$.

Vậy $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f\left(t\right)dt + \int_1^3 f\left(t\right)dt = 4.$

Câu 83. **Chọn A.**

Đặt $x = \cos 2t$ ta được $dx = -2\sin 2tdt = -4\sin t\cos tdt$.

Do đó $2 = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = -4\int_{\frac{\pi}{4}}^0 f(\cos 2t)\sin t\cos tdt = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2t)\sin t\cos tdt$.

Suy ra $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2t)\sin t\cos tdt = \dfrac{1}{2}$.

Câu 84. **Chọn D.**

Đặt $x = -t$ ta được $\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x)dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t)d(-t) = -\int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t)dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$.

$I = \displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x)dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$.

Hay $I = \displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2+2\cos 2x}dx = 2\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left|\cos x\right|dx = 6$.

Câu 85. **Chọn B.**

Cho $\displaystyle\int_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 16$. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^2 f\left(2x\right)\mathrm{d}x.$

$I = \displaystyle\int_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$. Đặt $t = 2x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = 2 \Rightarrow t = 4.$.

Khi đó: $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 8.$

Câu 86. **Chọn D.**

Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 \left(x+1\right)^2 x^{2017}dx$ được kết quả là.

$I = \displaystyle\int_0^2 \left(x^{2019} + 2.x^{2018} + x^{2017}\right)dx = \left[\dfrac{x^{2020}}{2020} + \dfrac{2.x^{2019}}{2019} + \dfrac{x^{2018}}{2018}\right]_0^2 = 2^{2018}\left(\dfrac{4}{2020} + \dfrac{4}{2019} + \dfrac{1}{2018}\right)$.

Câu 87. **Chọn D.**

$x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt \Rightarrow I = \displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\left(\pi - t\right)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \pi\int_0^\pi \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt - I$

$\Rightarrow 2I = \pi\displaystyle\int_0^\pi \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt = -\pi\int_0^\pi \dfrac{d(\cos t)}{1+\cos^2 t} = \pi\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow I = \dfrac{\pi^2}{4}$

Câu 88. **Chọn B.**

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.

Suy ra: $I=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^{2017}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{2017}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^{2017}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2017}t}{\sin^{2017}t+\cos^{2017}t}dx=J$ (1).

Mặt khác $I+J=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $I=\frac{\pi}{4}$.

Tổng quát: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n}x}{\sin^{n}x+\cos^{n}x}dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{n}x}{\sin^{n}x+\cos^{n}x}dx=\frac{\pi}{4},n\in\mathbb{Z}^{+}$.

Câu 89. **Chọn D.**

Đặt $t=\sqrt[6]{1-\cos^{3}x}\Leftrightarrow t^{6}=1-\cos^{3}x\Rightarrow 6t^{5}dt=3\cos^{2}x\sin xdx$.

$\Rightarrow dx=\frac{2t^{5}dt}{\cos^{2}x\sin x}\Rightarrow I=2\int\limits_{0}^{1}t^{6}\left(1-t^{6}\right)dt=2\left(\frac{t^{7}}{7}-\frac{t^{13}}{13}\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{12}{91}$.

Câu 90. **Chọn D.**

Đặt: $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\pi,\ x=\pi\Rightarrow t=0$.

$\Rightarrow I=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)dt}{\sin(\pi-t)+1}=\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{\sin t+1}-\frac{t}{\sin t+1}\right)dt$

$=\pi\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dt}{\sin t+1}-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dt}{\sin t+1}$.

$=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dt}{\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^{2}}=\frac{\pi}{4}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dt}{\cos^{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{d\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{0}^{\pi}=\pi$.

Tổng quát: $\int\limits_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}f(\sin x)dx$.

Câu 91. **Chọn D.**

Đặt $x=2\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Khi x = 0 thì t = 0. Khi $x=2$ thì $t=\frac{\pi}{2}$.

Từ $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos tdt$.

Vậy $\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4-x^{2}}dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^{2}t}.2\cos tdt=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2}tdt=\pi$.

Câu 92. **Chọn C.**

Đặt $t=3x-1\Leftrightarrow dt=3dx$ và đổi cận $\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\x=3\Rightarrow t=8\end{cases}$. Khi đó $I=\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{8}f(t)dt=5$

Câu 93. **Chọn D.**

Đặt $t+1=2x-1\Rightarrow dt=2dx\Rightarrow\begin{cases}x=0,\ t+1=-1\\ x=1,\ t+1=1\end{cases}$

Khi đó $\int\limits_0^1 f(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 f(t+1)dt=3\Rightarrow\int\limits_{-1}^1 f(t+1)dt=6\Rightarrow\int\limits_{-1}^1 f(x+1)dx=6$

Câu 94. **Chọn A.**

Đặt $t=-x=>I=\int\limits_{-a}^a\frac{t^2e^t}{e^t+1}dt=\int\limits_{-a}^a\frac{x^2e^x}{e^x+1}dx=>$

$2I=\int\limits_{-a}^a\frac{x^2}{e^x+1}dx+\int\limits_{-a}^a\frac{x^2e^x}{e^x+1}dx=\int\limits_{-a}^a x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^a=\frac{2a^3}{3}=>\frac{a^3}{3}=9=>a=3\Rightarrow T=a+\frac{1}{a}=\frac{10}{3}.$

Câu 95. **Chọn B.**

Đặt $\begin{cases}u=e^x\\ dv=\cos 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=e^xdx\\ v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin 2xdx$

Câu 96. **Chọn A.**

Từ hệ thức $\int f(x)\sin xdx=-f(x)\cos x+\int\pi^x\cos xdx\Rightarrow f'(x)=\pi^x\Rightarrow f(x)=\frac{\pi^x}{\ln\pi}$

Câu 97. **Chọn D.**

♦Tự luận: $\int\limits_0^1(x+1)f'(x)dx=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$

$\begin{cases}u=x+1\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\int f'(x)dx=f(x)\end{cases}$

$\Rightarrow I=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)dx=10\Leftrightarrow 2f(1)-f(0)-\int\limits_0^1 f(x)dx=10\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)dx=-8.$

♦Trắc nghiệm: Cho $f(x)$ là một hàm chẵn bất kỳ, ví dụ $f(x)=4x^3$ dùng máy tính tích phân

Câu 98. **Chọn A.**

♦Tự luận: Do $f(x)$ là hàm lẻ, nên $f(-x)=-f(x)$ hay $\int\limits_{-3}^3 f(-x)dx=\int\limits_{-3}^3-f(x)dx$

$-\int\limits_{-3}^3 f(x)dx=F(3)-F(-3)$

$\int\limits_{-3}^3 f(-x)dx=F(-3)-F(3)$

$-2\int\limits_{-3}^3 f(x)dx=-\int\limits_{-3}^3 f(x)dx+\int\limits_{-3}^3 f(-x)dx=F(3)-F(-3)+F(-3)-F(3)=0$

$\Rightarrow\int\limits_{-3}^3 f(x)dx=0$

♦Trắc nghiệm: Cho $f(x)$ là một hàm lẻ bất kỳ, ví dụ $f(x)=4x^3$ dùng máy tính tích phân

Câu 99. Chọn B.

Ta có tính chất: $f(x)$ là một hàm chẵn, khi đó $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

Câu 100. Chọn C.

Cho $\int_{0}^{4} f(x)dx = 16$. Tính $I = \int_{0}^{2} f(2x)dx$

Đặt $t = 2x$

$I = \int_{0}^{2} f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{4} f(t)dt = 8$

Câu 101. Chọn A.

$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow F(2) - F(-2) = 1$

$\int_{-2}^{4} f(t)dt = -4 \Leftrightarrow F(4) - F(-2) = -4$

$\int_{2}^{4} f(y)dy = F(4) - F(2) = F(4) - F(-2) - \left(F(2) - F(-2)\right) = -4 - 1 = -5$

Câu 102. Chọn A.

$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(1+2\cos x)}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$, đặt $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow 2tdt = -3\sin x dx$, khi đó $\frac{1}{9}\int_{1}^{2}(4t^2+2)dt$.

Câu 103. Chọn C.

Ta tìm được $f(x) = 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$, do điều kiện $f(\frac{\pi}{2}) = 2\pi$ nên $f(x) = 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + \pi$

Câu 104. Chọn A.

Ta có: $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(x\sin x + \cos x)}{x\sin x + \cos x} = \ln(\frac{4+\pi}{4\sqrt{2}})$

Câu 105. Chọn C.

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx$, khi đó $2 = 3\int_{1}^{3} f(t)dt \Rightarrow \int_{1}^{3} f(t)dt = \frac{2}{3} \Rightarrow \int_{1}^{3} f(x)dx = \frac{2}{3}$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$, khi đó: $2 = \int_{0}^{1} f(t)dt \Rightarrow \int_{0}^{1} f(x)dx = 2$. Do đó ta tìm được:

$$\int_{0}^{3} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = \frac{8}{3}$$

♦ Trắc nghiệm: thế đáp án vào đẳng thức trên mà hai vế giống nhau ta được đáp án.

Câu 106. Chọn B.

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t$, khi đó $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} t}{\sin^{2018} t + \cos^{2018} t}dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}dx$

Nên $2I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

Câu 107. Chọn A.

Đặt $x=\frac{\pi}{4}-t$, khi đó I được viết lại : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\frac{2}{1+\tan x})dx=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$, từ đó tìm được $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$

Do đó a.b = 16.

Câu 108. Chọn A.

Đặt $\begin{cases}u=F(x)\\dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f(x)dx\\v=\tan x\end{cases}$. Do đó: $4=\tan x.F(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xf(x)dx$.

Từ đó ta tìm được đáp án A.

Câu 109. Chọn A.

$$\int_0^1\left(3^x-2^x\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(9^x-2.6^x+4^x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{9^x}{\ln 9}-2.\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{4^x}{\ln 4}\right)\Big|_0^1=\frac{4}{\ln 3}-\frac{10}{\ln 6}+\frac{3}{2\ln 2}.$$

Câu 110. Chọn B.

$$\int_0^2 x\left(x+1\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^2 x\left(x^2+2x+1\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^3+2x^2+x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{34}{3}=11\frac{1}{3}.$$

Câu 111. Chọn C.

$$\int_1^2\frac{\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x+6+\frac{11}{x}+\frac{6}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+6x+11.\ln x-\frac{6}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{21}{2}+11.\ln 2$$

Câu 112. Chọn D.

$$\int_0^1\left(1+3x\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1\left(1+3x\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\left(1+3x\right)=\frac{2\left(1+3x\right)^{\frac{5}{2}}}{15}\Big|_0^1=\frac{62}{25}=4\frac{2}{15}$$

Câu 113. Chọn A.

▪ Cách 1: $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\left(1-x\right)^2}\mathrm{d}x=-\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1-x\right)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}\left(1-x\right)=\frac{-3}{5}\left(1-x\right)^{\frac{5}{3}}\Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{10\sqrt[3]{4}}\left(3\sqrt[3]{9}-1\right)$

▪ Cách 2: Đặt $1-x=t\Rightarrow -\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$

Đổi cận: Với $x=\frac{-1}{2}\Rightarrow t=\frac{3}{2}$ và $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Khi đó, $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\left(1-x\right)^2}\mathrm{d}x=-\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{t^2}\mathrm{d}t=-\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}t^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}t=\frac{-3}{5}t^{\frac{5}{3}}\Big|_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{10\sqrt[3]{4}}\left(3\sqrt[3]{9}-1\right)$

Câu 114. Chọn C.

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2+x+1}{x+1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\left(x+1\right)+1}{x+1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\ln\left|x+1\right|\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}+\ln\frac{3}{2}$$

Câu 115. Chọn D.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{m}\frac{1}{x(x+1)}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{m}\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}dx=\ln|x|-\ln|x+1|\Big|_{\frac{1}{2}}^{m}=\ln|m|-\ln|m+1|-\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}=\ln 3\left|\frac{m}{m+1}\right|$$

$$\ln 3\left|\frac{m}{m+1}\right|=\ln 2\Leftrightarrow 3\left|\frac{m}{m+1}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\dfrac{m}{m+1}=2\\3\dfrac{-m}{m+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3m=2m+2\\-3m=2m+2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-\dfrac{2}{5}\end{array}\right.$$

Câu 116. Chọn A.

$$\int_{3}^{m}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{3}^{m}=\frac{m^3}{3}-\frac{3^3}{3}=\frac{m^3}{3}-9\quad\Rightarrow\frac{m^3}{3}-9=4\Leftrightarrow m=\sqrt[3]{39}$$

Câu 117. Chọn C.

$$\int_{a}^{b}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{a}^{b}=\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{(b-a)\left[(a-b)^2+3ab\right]}{3}=\frac{3.\left[3^2+3ab\right]}{3}=9+3ab$$

Câu 118. Chọn C.

Đặt $e^x=t\Rightarrow e^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, $t:1\to e^m$.

$$\Rightarrow\int_{0}^{m}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int_{0}^{m}\frac{e^x\mathrm{d}x}{e^x(e^x+1)}=\int_{0}^{e^m}\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\int_{0}^{e^m}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln t-\ln(t+1)\right)\Big|_{1}^{e^m}$$

$$=\ln e^m-\ln(e^m+1)+\ln 2=m-\ln(e^m+1)+\ln 2.$$

Câu 119. Chọn A.

Đặt $t=1+xe^x\Rightarrow\mathrm{d}t=e^x(1+x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$, $t:1\to 1+me^m$.

$$\Rightarrow\int_{0}^{m}\frac{e^x(1+x)}{1+xe^x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1+me^m}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|\Big|_{0}^{1+me^m}=\ln\left|1+me^m\right|.$$

Câu 120. Chọn D.

Đặt $x=\sin t\Rightarrow\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$, $t:0\to\dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\mathrm{d}t=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t.$$

Câu 121. Chọn C.

Đặt $x=a\sin t\Rightarrow\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$, $t:0\to\dfrac{\pi}{6}$.

$$\Rightarrow\int_{0}^{\frac{a}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{a\cos t\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{a\cos t\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}}=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{a\cos t\mathrm{d}t}{a\cos t}=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t.$$

Câu 122. Chọn B.

Đặt $x=\dfrac{3}{5}\tan t\Rightarrow\mathrm{d}x=\dfrac{3}{5}.\dfrac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$, $t:\dfrac{\pi}{6}\to\dfrac{\pi}{4}$.

$$\Rightarrow\int_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}}\frac{\mathrm{d}x}{\frac{9}{25}-x^2}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{3}{5}\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{9}{25}-\frac{9}{25}\tan^2 t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{3}{5}\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{9}{25}(1-\tan^2 t)}\mathrm{d}t=\frac{5}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t.$$

Câu 123. Chọn C.

Đặt $t=\sqrt[3]{1+x}\Rightarrow t^3=1+x\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$, $t:1\to\sqrt[3]{4}$.

$$\Rightarrow\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt[3]{4}}\frac{\left(t^3-1\right)^2}{t^2}3t^2\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt[3]{4}}\left(t^6-2t^3+1\right)\mathrm{d}t.$$

Câu 124. Chọn D.

Đặt $t=\sqrt[3]{1+x}\Rightarrow t^3=1+x\Rightarrow 3t^2\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$, $t:1\to 1$.

$$\Rightarrow\int_{-1}^0 x\sqrt[3]{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(t^3-1\right).t.3t^2\mathrm{d}t=3\int_0^1\left(t^6-t^3\right)\mathrm{d}t.$$

Câu 125. Chọn A.

Đặt $t=\sqrt{\ln x+1}\Rightarrow t^2=\ln x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$, $t:1\to 2$.

$$\Rightarrow\int_1^{e^3}\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\left(t^2-1\right)^2 2t}{t}\mathrm{d}t=2\int_1^2\left(t^2-1\right)^2\mathrm{d}t=2\int_1^2\left(t^4-2t^2+1\right)\mathrm{d}t$$

Câu 126. Chọn C.

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$, $t:1\to 2$.

$$\Rightarrow\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{t^2-1}{t}2t\mathrm{d}t=2\int_1^2\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t.$$

Câu 127. Chọn D.

Đặt $2+\ln x=t\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}t$, $t:2\to 3$,

$$\Rightarrow\int_1^e\frac{\ln x}{x\left(2+\ln x\right)^2}\mathrm{d}x=\int_2^3\frac{t-2}{t^2}\mathrm{d}t=\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\ln t\Big|_2^3+\frac{2}{t}\Big|_2^3=-\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}.$$

Câu 128. Chọn B.

Đặt $1-\tan x=t\Rightarrow-\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=dt$, $t:1\to 1-\sqrt{3}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\left(1-\tan x\right)}=-\int_0^{1-\sqrt{3}}\frac{dt}{t}$.

Câu 129. Chọn C.

Đặt $\begin{cases}2x+1=u\\ \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ v=\tan x\end{cases}$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x+1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\left(2x+1\right)\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+1-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+1+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\left(\cos x\right)}{\cos x}.$$

Câu 130. Chọn D.

Đặt $\begin{cases}x-2=u\\ \sin 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x-2\right)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left(x-2\right)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x$$

Câu 131. **Chọn B.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = u \\ \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\mathrm{d}x .$$

Câu 132. **Chọn D.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} 2x+3 = u \\ e^{-x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} (2x+3)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -(2x+3)e^{-x}\Big|_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} e^{-x}\mathrm{d}x = e - 3 + 2\int_{-1}^{0} e^{-x}\mathrm{d}x .$$

Câu 133. **Chọn B.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x-2 = u \\ e^{3x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x-2)\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = (x-2)\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}\mathrm{d}x = \frac{2-e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}\mathrm{d}x .$$

Câu 134. **Chọn A.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = u \\ e^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ v = e^{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = xe^{x}\Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^{x}\mathrm{d}x = 2\ln 2 - e^{x}\Big|_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - 1 = e^{\ln(2\ln 2 - 1)} .$$

Câu 135. **Chọn C.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} \ln x = u \\ \sqrt{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}u \\ v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^e \sqrt{x}\ln x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{e^3} - \frac{2}{3}\int_1^e x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x .$$

Câu 136. **Chọn C.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} \ln x = u \\ x^2\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}u \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases} \Rightarrow \int_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x = x^3\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\mathrm{d}x$$

Câu 137. **Chọn B.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} \ln(2x+1) = u \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\mathrm{d}x}{2x+1} = \mathrm{d}u \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln(2x+1)\mathrm{d}x = x\ln(2x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 x.\frac{2}{2x+1}\mathrm{d}x = \ln 3 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x .$$

Câu 138. **Chọn C.**

Đặt $\begin{cases}\ln(\sin x)=u\\ \cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin x}=\mathrm{d}u\\ v=\sin x\end{cases}$

$$\Rightarrow\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(\sin x)\mathrm{d}x=\sin x\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu 139. Chọn A.

Ta có sơ đồ dấu của x^2-x như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$--$	0	$+$	

Với $0<a<1<b$ thì ta có sơ đồ dấu của x^2-x trên các đoạn $[a;1]$ và $[1;b]$ như sau

x	$-\infty$		0	a	1		b	$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$--$	0	$+$		

Như vậy, trên đoạn $[a;1]$ thì $x^2-x<0\Rightarrow|x^2-x|=-(x^2-x)$, trên đoạn $[1;b]$ thì $x^2-x>0\Rightarrow|x^2-x|=(x^2-x)$

$$\Rightarrow\int_a^b|x^2-x|\mathrm{d}x=\int_a^1|x^2-x|\mathrm{d}x+\int_1^b|x^2-x|\mathrm{d}x=-\int_a^1(x^2-x)\mathrm{d}x+\int_1^b(x^2-x)\mathrm{d}x.$$

Câu 140. Chọn C.

Ta có $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow 3+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=5\Rightarrow\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=2.$

Câu 141. Chọn D.

$f(x)=A\sin\pi x+B\Rightarrow f'(x)=A\cos\pi x$

$f'(1)=2\Rightarrow A\pi\cos\pi=2\Rightarrow A=-\dfrac{2}{\pi}$

$\int_0^2 f(x)dx=4\Rightarrow\int_0^2(A\sin\pi x+B)dx=4\Rightarrow-\dfrac{A}{\pi}\cos 2\pi+2B+\dfrac{A}{\pi}\cos 0=4\Rightarrow B=2$

Câu 142. Chọn B.

$12=\int_1^2\left[a^2+(4-4a)x+4x^3\right]dx=\left[a^2x+(2-2a)x^2+x^4\right]\Big|_1^2\Rightarrow a=3.$

Câu 143. Chọn A.

Đặt $x=a\tan t;\ t\in\left(\dfrac{\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=a(1+\tan^2 t)dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=a\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{a(1+\tan^2 t)}{a^2\tan^2 t+a^2}dt=\dfrac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\dfrac{\pi}{4a}.$

Câu 144. Chọn A.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$. Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Vậy $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx=\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{dt}{\sqrt{3-2t^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{dt}{\sqrt{\dfrac{3}{2}-t^2}}$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cos u\quad\Rightarrow\quad dt=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\sin udu$. Đổi cận : $\begin{cases}t=0\to u=\dfrac{\pi}{2}\\ t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\to u=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$, suy ra

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{2}-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin udu}{\sqrt{\frac{3}{2}\left(1-\cos^2 u\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}du=\frac{1}{\sqrt{2}}u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

Câu 145. Chọn C.

Đặt $u=\dfrac{1}{t}\Rightarrow t=\dfrac{1}{u}\Rightarrow dt=-\dfrac{1}{u^2}du$. Đổi cận $t=x\Rightarrow u=\dfrac{1}{x};t=1\Rightarrow u=1$

$$\int\limits_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int\limits_{\frac{1}{x}}^1\frac{-\frac{1}{u^2}du}{1+\frac{1}{u^2}}=\int\limits_{\frac{1}{x}}^1\frac{-du}{u^2+1}=\int\limits_1^{\frac{1}{x}}\frac{du}{u^2+1}\Rightarrow\int\limits_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int\limits_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$$

Câu 146. Chọn D.

$$\begin{cases}u=\ln(\sin x)\Rightarrow du=\cot^2 xdx\\ dv=\dfrac{1}{\sin^2 x}dx\Rightarrow v=-\cot x\end{cases}$$

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx=-\cot x\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 xdx$$

$$=\left(\sqrt{3}\ln\frac{1}{2}-\cot x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

Câu 147. Chọn B.

Xét hiệu số $1-x^2$ trên đoạn $[0;2]$ để tìm $\min\left\{1,x^2\right\}$.

Vậy $I=\int\limits_0^2\min\left\{1,x^2\right\}dx=\int\limits_0^1x^2dx+\int\limits_1^2dx=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^2+x\Big|_1^2=\dfrac{4}{3}$.

Câu 148. Chọn A.

Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow x=1-t^2\Rightarrow dx=-2tdt$. Đổi cận $\begin{cases}x=-8\Rightarrow t=3\\ x=-3\Rightarrow t=2\end{cases}$.

Vậy $I=\int\limits_{-8}^{-3}\dfrac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx=\int\limits_3^2\dfrac{-2tdt}{\left(1-t^2\right)t}=2\int\limits_2^3\dfrac{tdt}{\left(1-t^2\right)t}=2\int\limits_2^3\dfrac{dt}{1-t^2}=\ln\left|\dfrac{t+1}{t-1}\right|\Big|_2^3=\ln\dfrac{2}{3}$.

Câu 149. Chọn A.

$$I=\int_1^a \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2=\int_1^a xdx-2\int_1^a \frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{1}{a}\ln a+\frac{1}{a}-1\right)=\frac{1}{2}+\ln 2\Rightarrow a=2$$

HD casio: Nhập $\int_1^2 \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx-\frac{1}{2}-\ln 2=0$ nên $a=2$.

Câu 150. Chọn D.

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}dx=\int_1^4 \frac{\sqrt{t}}{3}dt=\frac{14}{9}$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(\sin x+2)^2}dx=2\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$$

Câu 151. Chọn A.

$$\int_0^m (2x+5)dx=6\Rightarrow (x^2+5x)\Big|_0^m=6\Rightarrow m^2+5m-6=0\Rightarrow m=1,\ m=-6.$$

Hướng dẫn casio: Thay $m=1$ và $m=-6$ vào thấy thỏa mãn.

Câu 152. Chọn A.

Sử dụng đồng nhất thức, ta thấy

$$h(x)=\frac{a\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{b\cos x}{2+\sin x}=\frac{a\cos x+b\cos x(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{b}{2}=1\\ a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=2\end{cases}.$$

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-4\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{2\cos x}{2+\sin x}\right)dx=\left(-\frac{4}{2+\sin x}+2\ln|2+\sin x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=-\frac{4}{3}+2\ln 3+2-2\ln 2=\frac{2}{3}+2\ln\frac{3}{2}.$$

Câu 153. Chọn D.

$$m(f)=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}.$$

Câu 154. Chọn A.

$$I=\int_0^1\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln|3x+1|\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 4$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\frac{1}{2}$$

$$K=\int_{-1}^2\left(x^2+3x+1\right)dx=\frac{21}{2}.$$

Câu 155. Chọn B.

$$\int_0^a\frac{dx}{x^2-3x+2}=\int_0^a\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|_0^a=\ln\left|\frac{a-2}{a-1}\right|$$

Câu 156. Chọn A.

$$2\sqrt{3}.m-\int_0^1\frac{d(x^4+2)}{(x^4+2)^2}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{3}.m+\left.\frac{1}{(x^4+2)}\right|_0^1=0\Leftrightarrow 2\sqrt{3}m+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{12\sqrt{3}}.$$

Vậy $144m^2-1=144\left(\frac{1}{12\sqrt{3}}\right)^2-1=\frac{-2}{3}$.

Câu 157. Chọn D.

$$\int_a^b e^{f(x)}f'(x)dx=\int_a^b e^{f(x)}d(f(x))=\left.e^{f(x)}\right|_a^b=e^{f(b)}-e^{f(a)}=0.$$

Câu 158. Chọn B.

Ta có $I=\int_1^5\frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}=2\int_2^4\frac{1}{t^2-1}dt=\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\ln 3-\ln 5$, suy ra $a=2,b=-1$.

Vậy $a^2+ab+3b^2=4-2+3=5$.

Câu 159. Chọn C.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^n\sin xdx=\int_0^1 t^n dt=\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

Câu 160. Chọn B.

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dx=-dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\cos x}+\sqrt[n]{\sin x}}dx=2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

Câu 161. Chọn D.

Do hàm số $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$ là hàm liên tục và tuần hoàn với chu kì $T=\pi$ nên ta có

$$\int_0^T f(x)dx=\int_T^{2T}f(x)dx=\int_{2T}^{3T}f(x)dx=...=\int_{(n-1)T}^{nT}f(x)dx$$

$$\Rightarrow\int_0^{nT}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx+\int_T^{2T}f(x)dx+...+\int_{(n-1)T}^{nT}f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$$

$$\Rightarrow\int_0^{2017\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=2017\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=2017\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin xdx=4034\sqrt{2}$$

Câu 162. Chọn C.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln(1+\sin x)^{1+\cos x}-\ln(1+\cos x)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\ln(1+\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos x)dx$$

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+\cos x\right)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+\sin t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)dx$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\ln(1+\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln(1+\sin x)dx=2\ln 2-1$$

Câu 163. **Chọn D.**

$$\int_0^b(3x^2-12x+11)dx=\left(x^3-6x^2+11x\right)\Big|_0^b=b^3-6b^2+11b-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\\b=2\\b=3\end{array}\right.$$

Câu 164. **Chọn C.**

+Ta có $\int_0^b 6dx=6\Rightarrow b=1$.

+Tính $\int_0^a xe^x dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$.

Khi đó, $\int_0^a xe^x dx=xe^x\Big|_0^a-\int_0^a e^x dx=e^a-e^a+1=a\Rightarrow a=1$. Vậy $b^2+a^3+3a^2+2a=7$.

Câu 165. **Chọn A.**

+Tính $\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}$

Đặt $t=a\tan x;\ a\in\left(\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=a(1+\tan^2 t)dt$

Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0;\ x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$. Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a(1+\tan^2 t)}{a^2\tan^2 t+a^2}dt=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4a}$

+Tính: $\int_0^{b\pi}2dx=2b\pi$, suy ra $\frac{B}{2b}=\pi$

Câu 166. **Chọn B.**

$$I=\int_0^1\left[f(x)g(x)\right]'dx\ =I=\int_0^1\left[f(x)g(x)\right]'dx\ =\int_0^1 g(x)f'(x)dx+\int_0^1 g'(x)f(x)dx\ =-1+2=1$$

Câu 167. **Chọn A.**

Ta có $\begin{cases}\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]dx=10\\\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]dx=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_1^3 f(x)dx+3\int_1^3 g(x)dx=10\\2\int_1^3 f(x)dx-\int_1^3 g(x)dx=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_1^3 f(x)dx=4\\\int_1^3 g(x)dx=2\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=6$$

Câu 168. **Chọn D.**

Ta có $\int_0^{10}f(x)dx=7\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^{10}f(x)dx=7$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + 3 + \int_4^{10} f(x)dx = 7 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + \int_4^{10} f(x)dx = 4$$

Câu 169. Chọn C.

+) $\int_0^1 2f(x)dx = 6 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 3$

+) $\int_0^2 \left[2f(x) - g(x)\right]dx + \int_0^2 \left[3f(x) + g(x)\right]dx = 5 + 35 = 40$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \left[2f(x) - g(x) + 3f(x) + g(x)\right]dx = 40$$

$$\Leftrightarrow 5\int_0^2 f(x)dx = 40 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow 3 + \int_1^2 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow I = 5.$$

Câu 170. Chọn A.

Đặt $2x = t \Rightarrow 2dx = dt$, $x: 0 \to 1 \Rightarrow t: 0 \to 2 \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt$.

Mặt khác vì $f(x)$ là hàm chẵn nên ta có $\int_{-2}^2 f(x)dx = 2 \Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 1$

Vậy ta có $I = \frac{1}{2}$.

Câu 171. Chọn A.

$I = \int_0^3 f(x)dx$ $I = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + 5$

Mặt khác Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$, $x: -2 \to 0 \Rightarrow t: 2 \to 0.$

$$\Rightarrow \int_{-2}^0 f(x)dx = 15 \Leftrightarrow -\int_2^0 f(-t)dt = 15 \Leftrightarrow \int_0^2 f(-t)dt = 15 \Leftrightarrow \int_0^2 f(-x)dx = 15$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^2 f(x)dx = 15 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = -15$$ (Vì $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(-x) = -f(x)$)

$\Rightarrow I = -15 + 5 = -10$.

Câu 172. Chọn B.

+) $I = \int_{-1}^1 f\left(\left|2x\right|\right)dx = \int_{-1}^0 f\left(\left|2x\right|\right)dx + \int_0^1 f\left(\left|2x\right|\right)dx = \int_{-1}^0 f\left(-2x\right)dx + \int_0^1 f\left(2x\right)dx$

+) Đặt $-2x = t \Rightarrow -2dx = dt$, $x: -1 \to 0 \Rightarrow t: 2 \to 0.$

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 f\left(-2x\right)dx = -\frac{1}{2}\int_2^0 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = \frac{3}{2}$$

+) Đặt $2x = t \Rightarrow 2dx = dt$, $x: 0 \to 1 \Rightarrow t: 0 \to 2.$

$$\Rightarrow \int_0^1 f\left(2x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = \frac{3}{2}$$

Vậy $I = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$.

Câu 173. Chọn B.

Từ $f(x)+2f(1-x)=3x \Rightarrow f(x)=3x-2f(1-x)$

$\Rightarrow I=\int\limits_0^1 f(x)dx. =\int\limits_0^1 \left[3x-2f(1-x)\right]dx=\frac{3}{2}-2\int\limits_0^1 f(1-x)dx$

Đặt $1-x=t \Rightarrow -dx=dt$, $x:0\to 1 \Rightarrow t:1\to 0.$

$\Rightarrow 2\int\limits_0^1 f(1-x)dx=-2\int\limits_1^0 f(t)dt=2\int\limits_0^1 f(t)dt=2I$

Vậy ta có $I=\frac{3}{2}-2I \Leftrightarrow I=\frac{1}{2}.$

Câu 174. Chọn B.

$$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{3x-f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx=\frac{9}{2}-\int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx$$

Đặt $\frac{1}{x}=t \Rightarrow -\frac{1}{x^2}dx=dt$, $x:\frac{1}{2}\to 2 \Rightarrow t:2\to\frac{1}{2}.$

$$\Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx=\Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x.f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx=-\int\limits_2^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(t)}{t}dt=I$$

Vậy $I=\frac{9}{2}-I \Leftrightarrow I=\frac{9}{4}.$

Câu 175. Chọn A.

$$K=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\cos 2x\right)\sin 4x\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\cos 2x\right)2\sin x\cos x\,dx$$

Đặt $\cos 2x=t \Rightarrow -2\sin 2x\,dx=dt,\ t:1\to 0 \Rightarrow K=-\int\limits_1^0 f\left(t\right)t\,dt=\int\limits_0^1 f\left(t\right)t\,dt=\int\limits_0^1 f\left(x\right)x\,dx=3.$

Câu 176. Chọn C.

Đặt $e^{2x}=t \Rightarrow 2e^{2x}dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{2e^{2x}}=\frac{dt}{2t}$, $x:0\to\ln 2$ thì $t:1\to 4$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{\ln 2} f\left(e^{2x}\right)dx=10 \Leftrightarrow \int\limits_1^4 f\left(t\right)\frac{1}{2t}dt=10 \Leftrightarrow \int\limits_1^4 \frac{f\left(t\right)}{t}dt=20 \Leftrightarrow \int\limits_1^4 \frac{f\left(x\right)}{x}=20.$$

Câu 177. Chọn D.

Đặt $\sqrt{x}=t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt$, $x:1\to 4$ thì $t:1\to 2$

$$\int\limits_1^4 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=6 \Leftrightarrow 2\int\limits_1^2 f\left(t\right)dt=6 \Leftrightarrow \int\limits_1^2 f\left(t\right)dt=3 \Leftrightarrow \int\limits_1^2 f\left(x\right)dx=3.$$

Đặt $\cos x=t \Rightarrow -\sin x\,dx=dt$, $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:1\to 0$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos x\right)\sin x\,dx=1 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f\left(t\right)\,dt=1 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=1$$

Vậy $K=\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_1^2 f(x)dx=1+3=4$.

Câu 178. Chọn C.

Đặt $\sqrt{x+1}=t\Rightarrow x+1=t^2$, $dx=2dt$, $x:0\to 3$ thì $t:1\to 2$

$\int\limits_0^3 f\left(\sqrt{x+1}\right)dx=8\Leftrightarrow 2\int\limits_1^2 tf(t)dt=8\Leftrightarrow \int\limits_1^2 tf(t)dt=4\Leftrightarrow \int\limits_1^2 xf(x)dx=4$.

Câu 179. Chọn C.

Đặt $t=x^2-1\Rightarrow dt=2x\,dx$, $t:0\to 3$ $\Rightarrow I=\int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\,dx=\int\limits_0^3 \sqrt{t}\,dt$.

Câu 180. Chọn B.

Đặt $\ln x=t\Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt$, $t:0\to 1$; $\int\limits_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx=\int\limits_0^1 f(t)dt=\int\limits_0^1 f(x)dx$

Vì $\int\limits_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx=e\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx=e$.

Câu 181. Chọn A.

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow dt=-dx$, $t:b\to a$

$I=\int\limits_a^b f(a+b-x)dx=-\int\limits_b^a f(t)dt=\int\limits_a^b f(t)dt=\int\limits_a^b f(x)dx=7$.

Câu 182. Chọn B.

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$, $x:-\frac{3\pi}{2}\to\frac{3\pi}{2}$ thì $t:\frac{3\pi}{2}\to-\frac{3\pi}{2}$

$K=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} f(-t)dt=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)dt=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$

$\Rightarrow K+K=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx+\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$

$\Leftrightarrow 2K=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[f(x)+f(-x)\right]dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos 2x}\,dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\left(2\cos^2 x-1\right)}dx$

$\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2 x}\,dx=2\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx=2\sin x\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=0$.

Câu 183. Chọn D.

Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$, $x:-1\to 0$ thì $t:1\to 0$

Ta có: $\int\limits_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}dx=4\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^0 \frac{f(x)}{1+e^x}dx+\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{1+e^x}dx=4\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^1 \frac{f(-t)}{1+e^{-t}}dt+\int\limits_0^1 \frac{f(t)}{1+e^t}dt=4$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 \frac{e^t f(t)}{1+e^t}dt+\int\limits_0^1 \frac{f(t)}{1+e^t}dt=4\Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[\frac{e^t f(t)}{1+e^t}+\frac{f(t)}{1+e^t}\right]dt=4\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f(t)dt=4$.

Câu 184. **Chọn A.**

Đặt: $6-x=t\Rightarrow -dx=dt$. Với $x=a\Rightarrow t=b;\ x=b\Rightarrow t=a$ (vì $a+b=6$)

$$\Rightarrow J=\int_a^b \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx=-\int_b^a \frac{\sqrt{\ln(3+t)}}{\sqrt{\ln(3+t)}+\sqrt{\ln(9-t)}}dt=\int_a^b \frac{\sqrt{\ln(3+t)}}{\sqrt{\ln(3+t)}+\sqrt{\ln(9-t)}}dx$$

$$=\int_a^b \frac{\sqrt{\ln(3+x)}}{\sqrt{\ln(3+x)}+\sqrt{\ln(9-x)}}dx$$

$$\Rightarrow J+J=1+1\Leftrightarrow \int_a^b \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx+\int_a^b \frac{\sqrt{\ln(3+x)}}{\sqrt{\ln(3+x)}+\sqrt{\ln(9-x)}}dx=2$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \left(\frac{\sqrt{\ln(3+x)}}{\sqrt{\ln(3+x)}+\sqrt{\ln(9-x)}}+\frac{\sqrt{\ln(3+x)}}{\sqrt{\ln(3+x)}+\sqrt{\ln(9-x)}}\right)dx=2$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \frac{\sqrt{\ln(3+x)}+\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(3+x)}+\sqrt{\ln(9-x)}}dx=2\Leftrightarrow \int_a^b dx=2\Leftrightarrow b-a=2.$$

Như vậy ta có: $\begin{cases}a+b=6\\ b-a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=4\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_a^b x.\sin\frac{\pi x}{2}dx=\int_2^4 x.\sin\frac{\pi x}{2}dx=-\frac{\pi}{12}\ (SD\ Casio)$$

Câu 185. **Chọn D.**

Đặt: $x+2=t\Rightarrow dx=dt$ Với $x=-2\Rightarrow t=0;\ x=3\Rightarrow t=5$

Do đó $\int_{-2}^{3} F(x+2)dx=-1\Leftrightarrow \int_0^5 F(t)dt=-1$

Đặt $\begin{cases}x=u\\ f(x)dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=F(x)\end{cases}\Rightarrow J=x.F(x)\Big|_0^5-\int_0^5 F(x)dx=5.F(5)-\int_0^5 F(t)dt=5.5-(-1)=26.$

Câu 186. **Chọn C.**

Đặt $\begin{cases}\ln x=u\\ f(x)dx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{x}dx\\ v=F(x)\end{cases}\Rightarrow I=\int_1^e \ln x.f(x)dx=\ln x.F(x)\Big|_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}F(x)dx=3-1=2$

Câu 187. **Chọn D.**

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f'(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x.\cos x.f'(\sin x)dx$$

Đặt $\sin x=t\Rightarrow \cos x\,dx=dt$ với $x=0\Rightarrow t=0;\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\Rightarrow I=\int_0^1 t.f'(t)dt$

Đặt $\begin{cases}t=u\\ f'(t)dt=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\ v=f(t)\end{cases}.$

$$\Rightarrow I=2\left[t.f(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)dt\right]=2\left[f(1)-\int_0^1 f(x)dx\right]=2\left[1-(-1)\right]=4.$$

Câu 188. **Chọn C.**

Đặt: $\begin{cases} x=u \\ f'(2x)\,dx=dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\dfrac{1}{2}f(2x) \end{cases}$

$I=\dfrac{1}{2}x.f(2x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\,dx=\dfrac{1}{2}f(2)-\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\,dx=1-\dfrac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\,dx$

Đặt $2x=t\Rightarrow 2\,dx=dt$ với $x=0\Rightarrow t=0;\ x=1\Rightarrow t=2$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\,dx=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,dt=\dfrac{1}{4}\int_0^2 f(x)\,dx=\dfrac{1}{4}(-3)=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow I=1-(-\dfrac{3}{4})=\dfrac{7}{4}$.

Câu 189. **Chọn D.**

Đặt $\begin{cases} x+1=u \\ f'(x)\,dx=dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^1 (x+1)f'(x)\,dx=10\Leftrightarrow (x+1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\,dx=10$

$\Leftrightarrow 2f(1)-f(0)-\int_0^1 f(x)\,dx=10\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=-8$

Câu 190. **Chọn C.**

Đặt $\begin{cases} x=u \\ f(x)\,dx=dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=F(x) \end{cases} \Rightarrow I=\int_0^1 x.f(x)\,dx=x.F(x)\Big|_0^1-\int_0^1 F(x)\,dx=F(1)-(-1)=1+1=2$.

Câu 191. **Chọn B.**

Ta có: $\int_0^1 \dfrac{3x-1}{x^2+6x+9}dx=\int_0^1 \dfrac{3x-1}{(x+3)^2}dx=\int_0^1 \dfrac{3(x+3)-10}{(x+3)^2}dx=\int_0^1 (\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{10}{(x+3)^2})dx$

$=3\ln(x+3)\Big|_0^1+\dfrac{10}{x+3}\Big|_0^1=3\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{6}$.

Đồng nhất $3\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{6}$ với $3\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{5}{6}\Rightarrow a=4,b=3\Rightarrow ab=12$

Câu 192. **Chọn A.**

Đặt $\begin{cases} x=u \\ e^{-x}\,dx=dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=-e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 x.e^{-x}\,dx=-x.e^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx=-\dfrac{1}{e}-e^{-x}\Big|_0^1=-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}+1=1-\dfrac{2}{e}$.

Đồng nhất $1-\dfrac{2}{e}$ với $a-\dfrac{b}{e}\Rightarrow a=1;b=2\Rightarrow M=a+2b=5$.

Câu 193. **Chọn B.**

Ta có : $\int_1^{\sqrt{2}} \dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}dx=\int_1^2 2x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)dx=\int_1^{\sqrt{2}} 2x^2\,dx-\int_1^{\sqrt{2}} 2x\sqrt{x^2-1}\,dx=I_1-I_2$.

- $I_1=\int_1^{\sqrt{2}} 2x^2\,dx=\dfrac{2x^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}-2}{3}$.
- Đặt $t=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow x^2-1=t^2\Rightarrow 2xdx=2tdt$. Đổi cận : $x=1\Rightarrow t=0;x=\sqrt{2}\Rightarrow t=1$.

$\Rightarrow I_2=\int_1^{\sqrt{2}} 2x\sqrt{x^2-1}\,dx=2\int_0^1 t^2\,dt=\dfrac{2t^3}{3}\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}\Rightarrow \int_1^{\sqrt{2}} \dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2-1}}dx=I_1-I_2=\dfrac{4\sqrt{2}-4}{3}$

$\Rightarrow a=4;b=-4\Rightarrow S=a+b=0$.

Câu 194. Chọn C.

Đặt $t=e^x \Rightarrow e^x dx=dt$. Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=e$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x\left(e^x+1\right)} = \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^e \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \ln t\Big|_1^e - \ln(t+1)\Big|_1^e = 1-\ln(e+1)+\ln 2$$

$$= 1-\ln\frac{e+1}{2} \Rightarrow a=1; b=-1\Rightarrow S=0 .$$

Câu 195. Chọn B.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\cos 2x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=du \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$$\int_0^1 x\cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2+\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\sin 2+\frac{1}{2}\cos 2-\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(2\sin 2+\cos 2-1)$$

$\Rightarrow a=2, b=1, c=-1 \Rightarrow a-b+c=0$.

Câu 196. Chọn A.

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2tdt=3dx$. Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=2$.

$\int_0^1 3e^{\sqrt{1-3x}}\, dx = 2\int_1^2 t.e^t\, dt$. Đặt $\begin{cases} u=t \\ dv=e^t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt=du \\ v=e^t \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 3e^{\sqrt{1-3x}}\, dx = 2\left[t.e^t\Big|_1^2 - \int_1^2 e^t\, dt\right] = 2\left[2e^2-e-e^t\Big|_1^2\right] = 2e^2 .$$

$\Rightarrow a=10, b=0, c=0\Rightarrow S=10.$

Câu 197. Chọn D.

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow dt=2x\, dx$. Đổi cận : $x=2\Rightarrow t=5; x=1\Rightarrow t=2$.

$$I=\int_2^1 x.f\left(x^2+1\right)dx = \frac{1}{2}\int_5^2 f(t)\, dt = -\frac{1}{2}\int_2^5 f(t)\, dt = -\frac{1}{2}\int_2^5 f(x)\, dx = -\frac{m}{2}$$

Câu 198. Chọn D.

$$\int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx = \int_0^a \frac{(x+1)^2+1}{x+1}dx = \int_0^1 \left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^a + x\Big|_0^a + \ln(x+1)\Big|_0^a$$

$$= \frac{a^2}{2}+a+\ln(a+1)$$

$\Rightarrow a+1=3\Rightarrow a=2$.

Câu 199. Chọn D.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x\, dx$. Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x.\cos x\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n\, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+1).2^{n+1}}.$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x.\cos x\, dx = \frac{1}{128(n+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1).2^{n+1}} = \frac{1}{128(n+1)} \Leftrightarrow 2^{n+1}=128 \Leftrightarrow n+1=7 \Leftrightarrow n=6 .$$

Câu 200. **Chọn D.**

Đặt $\begin{cases} u = ax + b \\ dv = \sin x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = a\, dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+b)\sin x\, dx = -(ax+b).\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = b + a\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = b + a$.

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (ax+b)\sin x\, dx = 4 \Leftrightarrow b + a = 4$.

Như vậy ta có $\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ a = b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 11 \end{cases} \Rightarrow P = a - b = -18$.

Chủ đề 3

ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

☆☆☆

A. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

I. LÝ THUYẾT CẦN NẮM

Trước khi vào lý thuyết của phần ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng, ta sẽ chứng minh tính chất được dùng trong phần này.

Tính chất: Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$ $(*)$

Chứng minh:

Hàm số $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a;b]$, nghĩa là $f(x)$ luôn dương hoặc luôn âm $\forall x \in [a;b]$.

Trường hợp 1: $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a;b]$:

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

$\Rightarrow F'(x) = f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a;b] \Rightarrow F(x)$ luôn đồng biến trên $[a;b] \Rightarrow F(b) \geq F(a) \Rightarrow F(b) - F(a) \geq 0.$

Ta có: $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (1)

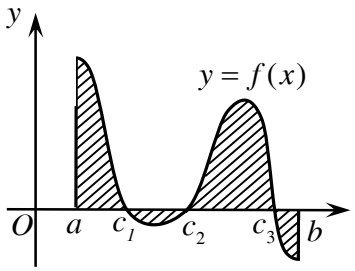
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|F(x)\Big|_a^b\right| = |F(b) - F(a)| = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Từ $(1),(2) \Rightarrow \int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

Trường hợp 2: $f(x) < 0 \ \ \forall x \in [a;b]$: Chứng minh tương tự, suy ra: $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

Qua hai trường hợp, ta suy ra được điều phải chứng minh.

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)|dx$



$$(H): \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$$

Phương pháp giải:

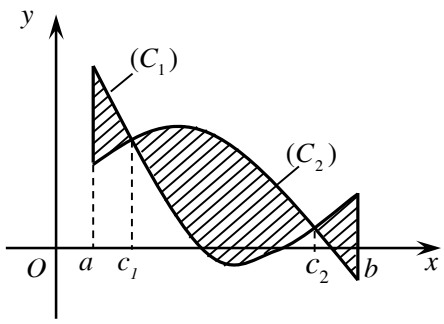
Cách 1: Tính $S=\int_a^b |f(x)|dx$ theo phương pháp đã trình bày ở phần tích phân hàm trị tuyệt đối.

Cách 2: Áp dụng tính chất $(*)$ đã được chứng minh ở trên.

- Giải phương trình $f(x)=0$ (1) trên đoạn $[a;b]$.
- Nếu (1) vô nghiệm thì $S=\int_a^b |f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.
- Nếu (1) có nghiệm thuộc $[a;b]$, giả sử có duy nhất 1 nghiệm là α thì:

$$S=\int_a^b |f(x)|dx=\int_a^\alpha |f(x)|dx+\int_\alpha^b |f(x)|dx=\left|\int_a^\alpha f(x)dx\right|+\left|\int_\alpha^b f(x)dx\right|$$

2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$



$$(H):\begin{cases}(C_1):y=f(x)\\(C_2):y=g(x)\\x=a\\x=b\end{cases}$$

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx}$$

Phương pháp giải:

Cách 1: Tính $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ theo pp đã trình bày ở phần tích phân hàm trị tuyệt đối.

Cách 2: Áp dụng tính chất $(*)$ đã được chứng minh ở trên.

- Giải phương trình $f(x)=g(x)$ (1) trên đoạn $[a;b]$.
- Nếu (1) vô nghiệm thì $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right|$.
- Nếu (1) có nghiệm thuộc $[a;b]$, giả sử có duy nhất 1 nghiệm là α thì:

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=\left|\int_a^\alpha (f(x)-g(x))dx\right|+\left|\int_\alpha^b (f(x)-g(x))dx\right|$$

Chú ý: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y)$, $x=h(y)$ và hai đường thẳng $y=c$, $y=d$ được xác định: $S=\int_c^d |g(y)-h(y)|dy$.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

1. Một số bài toán về tính diện tích giới hạn bởi các đường cho trước

Trong phần này, tôi sẽ trình bày hướng đi hơn là tập trung giải chi tiết các tích phân hàm trị tuyệt đối; vấn đề này đã được đề cập trước đó, các em có thể xem lại trong phần C- IV (chủ đề 2).

Bài toán 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^2+4$, đường thẳng $x=3$, trục tung và trục hoành là :

A. $\frac{22}{3}$ **B.** $\frac{32}{3}$ **C.** $\frac{25}{3}$ **D.** $\frac{23}{3}$

Lời giải:

Chọn D.

Theo công thức ta có $S=\int\limits_0^3\left|-x^2+4\right|dx$

Xét phương trình $-x^2+4=0$ trên đoạn $\left[0;3\right]$ có nghiệm $x=2$.

Suy ra $S=\int\limits_0^3\left|-x^2+4\right|dx=\int\limits_0^2\left|-x^2+4\right|dx+\int\limits_2^3\left|-x^2+4\right|dx=\int\limits_0^2\left(-x^2+4\right)dx+\int\limits_2^3\left(4-x^2\right)dx=\frac{23}{3}$.

Hoặc $S=\int\limits_0^3\left|-x^2+4\right|dx=\left|\int\limits_0^2\left(-x^2+4\right)dx\right|+\left|\int\limits_2^3\left(-x^2+4\right)dx\right|=\frac{23}{3}$.

Bài toán 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^3-4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3;x=4$ là

A. $\frac{202}{3}$ **B.** $\frac{203}{4}$ **C.** $\frac{201}{5}$ **D.** $\frac{201}{4}$

Lời giải:

Chọn D.

Xét phương trình $x^3-4x=0$ trên đoạn $\left[-3;4\right]$ có nghiệm $x=-2;\ x=0;\ x=2$.

Suy ra $S=\int\limits_{-3}^{-2}\left|x^3-4x\right|dx+\int\limits_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|dx+\int\limits_{0}^{2}\left|x^3-4x\right|dx+\int\limits_{2}^{4}\left|x^3-4x\right|dx=\frac{201}{4}$

Nhận xét: Dùng bảng xét dấu để bỏ trị tuyệt đối, sau đó tính tích phân cơ bản nếu làm tự luận. Đối với trắc nghiệm, các em có thể sử dụng máy tính cầm tay để bấm kết quả.

Bài toán 3: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+1$ và $y=x^3-4x^2+2x+1$ là

A. $\frac{37}{13}$ **B.** $\frac{37}{12}$ **C.** 3 **D.** 4

Lời giải:

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$2x^3-3x^2+1=x^3-4x^2+2x+1$$
$$\Leftrightarrow \left(2x^3-3x^2+1\right)-\left(x^3-4x^2+2x+1\right)=x^3+x^2-2x=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left(x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Nên $S=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|dx=\left|\int\limits_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx\right|+\left|\int\limits_{0}^{1}(x^3+x^2-2x)dx\right|$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{1}\right|=\frac{37}{12}.$$

Nhận xét: Áp dụng nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int\limits_a^b\left|f(x)\right|dx=\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$

Bài toán 4: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-1\right|$, $y=\left|x\right|+5$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{71}{3}$ **B.** $\frac{73}{3}$ **C.** $\frac{70}{3}$ **D.** $\frac{74}{3}$

Lời giải:

Chọn B.

Xét phương trình $\left|x^2-1\right|=\left|x\right|+5$ có nghiệm $x=-3,\ x=3$

Suy ra $S=\int\limits_{-3}^{3}\left|\left(\left|x^2-1\right|-\left(\left|x\right|+5\right)\right)\right|dx=2\int\limits_{0}^{3}\left|\left|x^2-1\right|-\left(x+5\right)\right|dx$ (vì hàm số $\left|x^2-1\right|-\left(\left|x\right|+5\right)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung).

Bảng xét dấu x^2-1 trên đoạn $\left[0;3\right]$

x	0		1		3
x^2-1		-	0	+	

Vậy $S=2\left(\int\limits_{0}^{1}\left|-x^2-x-4\right|dx+\int\limits_{1}^{3}\left|x^2-x-6\right|dx\right)=2\left[\int\limits_{0}^{1}\left(x^2+x+4\right)dx+\int\limits_{1}^{3}\left(-x^2+x+6\right)dx\right]=\frac{73}{3}.$

Hoặc $S=2\left(\int\limits_{0}^{1}\left|-x^2-x-4\right|dx+\int\limits_{1}^{3}\left|x^2-x-6\right|dx\right)=2\left[\left|\int\limits_{0}^{1}\left(-x^2-x-4\right)dx\right|+\left|\int\limits_{1}^{3}\left(x^2-x-6\right)dx\right|\right]=\frac{73}{3}.$

Bài toán 5: Hình phẳng $\left(H\right)$ được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$, $y=x+3$. Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{108}{5}$ **B.** $\frac{109}{5}$ **C.** $\frac{109}{6}$ **D.** $\frac{119}{6}$

Lời giải:

Chọn C.

Xét phương trình $\left|x^2-4x+3\right|=x+3$ có nghiệm $x=0,\ x=5$

$\Rightarrow S=\int_0^5\left|\left[\left|x^2-4x+3\right|-(x+3)\right]\right|dx=\int_0^5\left|\left|x^2-4x+3\right|-x-3\right|dx$

Ta có $x^2-4x+3\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge 3\end{array}\right.$.

Suy ra $S=\int_0^5\left|\left|x^2-4x+3\right|-x-3\right|dx=\int_0^1\left(\left|x^2-5x\right|\right)dx+\int_1^3\left(\left|-x^2+3x-6\right|\right)dx+\int_3^5\left(\left|x^2-5x\right|\right)dx=\frac{109}{6}$.

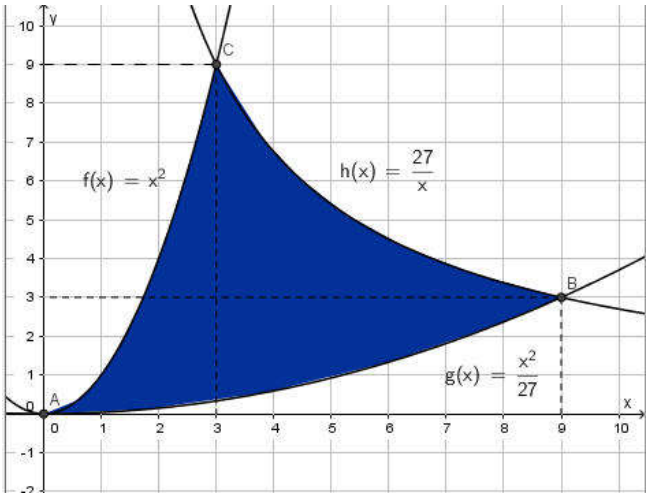
Bài toán 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2;\ y=\frac{1}{27}x^2;\ y=\frac{27}{x}$ bằng

A. $27\ln 2$ **B.** $27\ln 3$ **C.** $28\ln 3$ **D.** $29\ln 3$

Lời giải:

Chọn B.

Xét các pthđgđ $x^2-\frac{x^2}{27}=0\Rightarrow x=0;\ x^2-\frac{27}{x}=0\Rightarrow x=3;\ \frac{x^2}{27}-\frac{27}{x}=0\Rightarrow x=9$

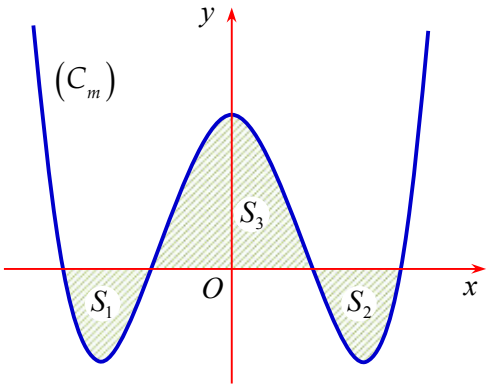


Suy ra

$S=\int_0^3\left(x^2-\frac{x^2}{27}\right)dx+\int_3^9\left(\frac{27}{x}-\frac{x^2}{27}\right)dx=27\ln 3$.

Bài toán 7: **(CHU VĂN AN – HN)** Cho hàm số $y=x^4-3x^2+m$ có đồ thị (C_m) với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ .

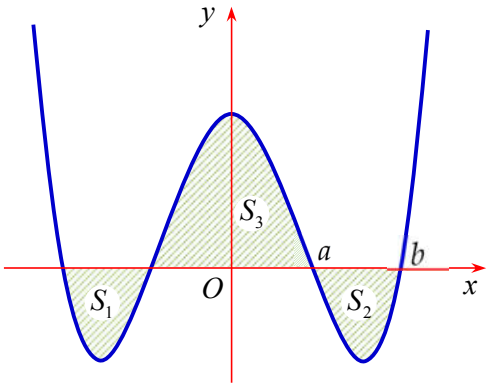
Gọi S_1, S_2 và S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm m để $S_1+S_2=S_3$.



A. $m=-\frac{5}{2}$. **B.** $m=-\frac{5}{4}$.

C. $m=\frac{5}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{4}$.

Lời giải:



Chọn D.

Đặt $f(x;m)=x^4-3x^2+m$

Giả sử a,b $(a<b)$ là nghiệm dương của phương trình $x^4-3x^2+m=0$.

Khi đó ta có: $b^4-3b^2+m=0$ (1)

Vì $x^4-3x^2+m=0$ là hàm trùng phương nên có tính chất đối xứng:

$$\Rightarrow S_1=S_2\Rightarrow S_1+S_2=S_3\Leftrightarrow 2S_2=S_3\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_3=S_2.$$

$$\int_0^a\left|f(x,m)\right|dx=\int_a^b\left|f(x,m)\right|dx\Leftrightarrow\int_0^a f(x,m)dx=-\int_a^b f(x,m)$$

$$\Leftrightarrow\int_0^a f(x,m)dx+\int_a^b f(x,m)dx=0\Leftrightarrow\int_0^b f(x,m)dx=0$$

$$\int_0^b\left(x^4-3x^2+m\right)dx=0\Rightarrow\frac{b^5}{5}-b^3+mb=0\Rightarrow\frac{b^4}{5}-b^2+m=0\ (2)\ (do\ b>0)$$

Từ (1) và (2), trừ vế theo vế ta được $\frac{4}{5}b^4-2b^2=0\Rightarrow b^2=\frac{5}{2}$ (do $b>0$).

Thay trở ngược vào (1) ta được $m=\frac{5}{4}$.

Bài toán 8: *(TOÁN HỌC TUỔI TRẺ LẦN 8)* Cho hàm số $y=\frac{x^4}{2}-2m^2x^2+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là:

A. $\varnothing$. **B.** $\{\pm1\}$. **C.** $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\pm1\right\}$. **D.** $\left\{\pm\frac{1}{2};\pm1\right\}$.

Lời giải:

Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$$y'=2x^3-4m^2x=2x\left(x^2-2m^2\right);\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{2}m\\x=-\sqrt{2}m\end{array}\right.$$

Đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow m\neq0$

Vì $a=\frac{1}{2}>0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$ suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(0;2)$

Đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại có phương trình là $d:y=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$$\frac{x^4}{2}-2m^2x^2+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^2=4m^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2|m|\\x=-2|m|\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: (chú ý rằng hàm số đã cho là hàm chẵn)

$$S=\int_{-2|m|}^{2|m|}\left|\frac{x^4}{2}-2m^2x^2\right|dx=2\int_{0}^{2|m|}\left|\frac{x^4}{2}-2m^2x^2\right|dx=2\left|\int_{0}^{2|m|}\left(\frac{x^4}{2}-2m^2x^2\right)dx\right|=2\left|\left(\frac{x^5}{10}-\frac{2}{3}m^2x^3\right)\right|_0^{2|m|}\Bigg|=\frac{64}{15}|m|^5$$

Ta có $S=\frac{64}{15}\Leftrightarrow|m|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$.

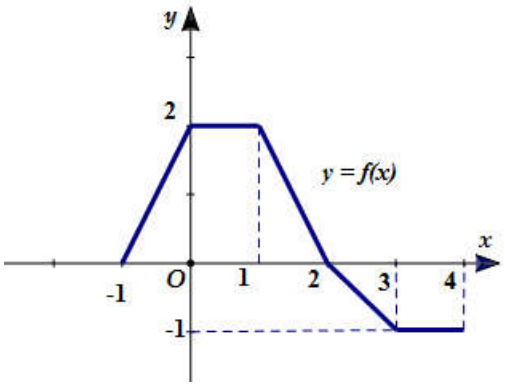
Bài toán 9: ***(THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN)*** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1;4]$ như hình vẽ dưới. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{4}f(x)dx$

A. $I=\frac{5}{2}$.

B. $I=\frac{11}{2}$.

C. $I=5$.

D. $I=3$.



Lời giải:

Chọn A.

Gọi $A(-1;0)$, $B(0;2)$, $C(1;2)$, $D(2;0)$, $E(3;-1)$, $F(4;-1)$, $H(1;0)$, $K(3;0)$, $L(4;0)$.

Khi đó $I=\int_{-1}^{4}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{4}f(x)dx$

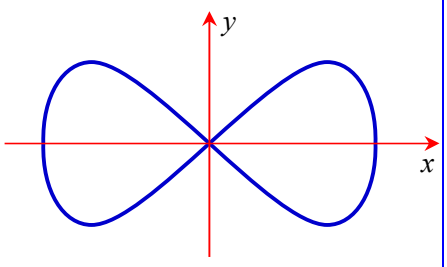
$=\int_{-1}^{0}|f(x)|dx+\int_{0}^{1}|f(x)|dx+\int_{1}^{2}|f(x)|dx-\int_{2}^{3}|f(x)|dx-\int_{3}^{4}|f(x)|dx$

(do $f(x)\ge0,\forall x\in[-1;2]$ và $f(x)\le0,\forall x\in[2;4]$)

$=S_{ABO}+S_{OBCH}+S_{HCD}-S_{DKE}-S_{EFLK}=\frac{1}{2}2\cdot1+2\cdot1+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1-\frac{1}{2}1\cdot1-1\cdot1=\frac{5}{2}$.

2. Một số bài toán về ứng dụng tích phân tính diện tích trong thực tế

Bài toán 1: **(CHUYÊN VINH – L2)** Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2\left(25 - x^2\right)$ như hình vẽ bên. Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.



A. $S = \dfrac{125}{6}\left(m^2\right)$ **B.** $S = \dfrac{125}{4}\left(m^2\right)$ **C.** $S = \dfrac{250}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $S = \dfrac{125}{3}\left(m^2\right)$

Lời giải:

Chọn D.

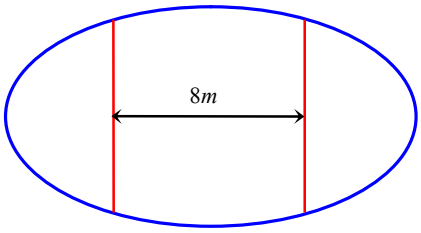
Vì tính đối xứng trụ nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y = \pm\dfrac{1}{4}x\sqrt{25 - x^2} \Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$.

Góc phần tư thứ nhất $y = \dfrac{1}{4}x\sqrt{25 - x^2}; x \in \left[0; 5\right]$

Nên $S_{(I)} = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^5 x\sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{125}{12} \Rightarrow S = \dfrac{125}{3}(m^3)$.

Bài toán 2: Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)



A. 7.862.000 đồng. **B.** 7.653.000 đồng. **C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

Lời giải:

Chọn B.

Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Từ giả thiết ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

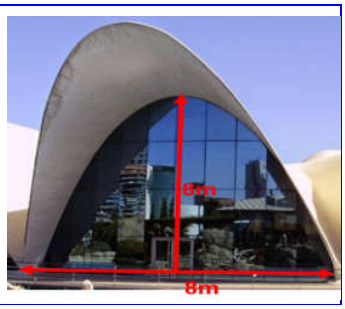
Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{5}{8}\sqrt{64 - y^2} \quad (E_1) \\ y = \dfrac{5}{8}\sqrt{64 - y^2} \quad (E_1) \end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}dx=\frac{5}{2}\int_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}dx$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

Bài toán 3: Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hoá có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cường lực cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao *8m* và rộng *8m (như hình vẽ)*

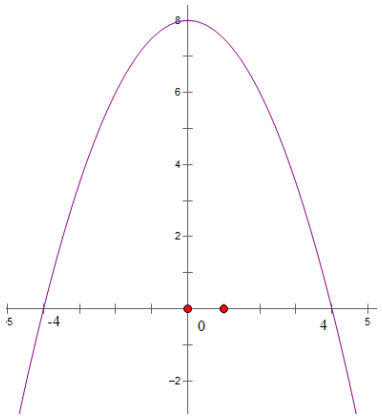


A. $\frac{28}{3}\left(m^2\right)$ **B.** $\frac{26}{3}\left(m^2\right)$ **C.** $\frac{128}{3}\left(m^2\right)$ **D.** $\frac{131}{3}\left(m^2\right)$

Lời giải:

Chọn D.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có

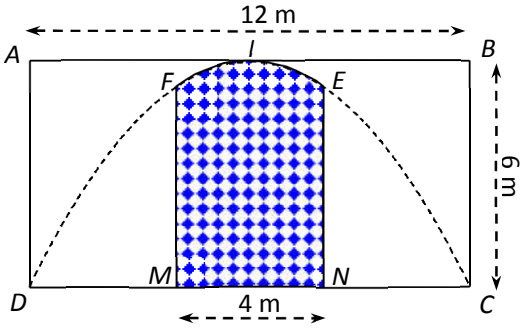
Gọi $(P_1): y=ax^2+c$ là Parabol đi qua hai điểm $A(4;0), B(0;8)$

Nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}0=a.16+c\\c=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\c=8\end{cases}\Rightarrow(P_1): y=-\frac{1}{2}x^2+8$$

$$S=\int_{-4}^{4}\left|-\frac{1}{2}x^2+8\right|=\frac{128}{3}\left(m^2\right).$$

Bài toán 4: Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC=6\ m$, chiều dài $CD=12\ m$ *(hình vẽ bên)*. Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN=4\ m$; cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C, D. Kinh phí làm bức tranh là 900.000 đồng/m^2. Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó ?



A. 20.400.000 đồng. **B.** 20.600.000 đồng. **C.** 20.800.000 đồng. **D.** 21.200.000 đồng.

Lời giải:

Chọn D.

- Nếu chọn hệ trục tọa độ có gốc là trung điểm O của MN, trục hoành trùng với đường thẳng MN thì parabol có phương trình là $y=-\frac{1}{6}x^2+6$.

- Khi đó diện tích của khung tranh là $S=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{6}x^2+6\right)dx=\frac{208}{9}\ m^2$

- Suy ra số tiền là: $\frac{208}{9}\times 900.000=20.800.000$ đồng.

Bài toán 5: Một Chi đoàn thanh niên đi dự trại ở một đơn vị bạn, họ dự định dựng một lều trại có dạng parabol (nhìn từ mặt trước, lều trại được căng thẳng từ trước ra sau, mặt sau trại cũng là parabol có kích thước giống như mặt trước) với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía trong trại để cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

A. $60(m^3)$ **B.** $36(m^3)$ **C.** $40(m^3)$ **D.** $48(m^3)$

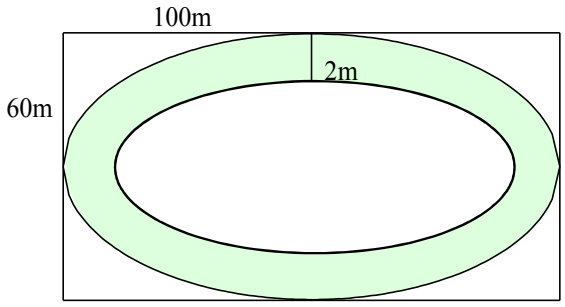
Lời giải:

Chọn A.

Giả sử nền trại là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3$ mét, $BC=6$ mét, đỉnh của parabol là I. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, $A\left(-\frac{3}{2};0\right),B\left(\frac{3}{2};0\right),I\left(0;3\right)$, phương trình của parabol có dạng: $y=ax^2+b\left(a\neq 0\right)$, do I,A,B thuộc $\left(P\right)$ nên ta có: $y=-\frac{4}{3}x^2+3$.

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là: $V=6.2\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{4}{3}x^2+3\right)dx=36(m^3)$.

Bài toán 6: Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài $100m$ và chiều rộng là $60m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (Như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip, Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường 600.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 293904000. **B.** 283904000. **C.** 293804000. **D.** 283604000.

Lời giải:

Chọn A.

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt gốc tọa độ O vào tâm của hình Elip.

Phương trình Elip của đường viền ngoài của con đường là $(E_1):\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1$. Phần đồ thị của (E_1) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}=f_1(x)$.

Phương trình Elip của đường viền trong của con đường là $(E_2):\frac{x^2}{48^2}+\frac{y^2}{28^2}=1$. Phần đồ thị của (E_2) nằm phía trên trục hoành có phương trình $y=28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}=f_2(x)$.

Gọi S_1 là diện tích của (E_1) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_1(x)$. Gọi S_2 là diện tích của (E_2) và bằng hai lần diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đồ thị hàm số $y=f_2(x)$.

Gọi S là diện tích con đường.

Khi đó: $S=S_1-S_2=2\int\limits_{-50}^{50}30\sqrt{1-\frac{x^2}{50^2}}dx-2\int\limits_{-48}^{48}28\sqrt{1-\frac{x^2}{48^2}}dx$.

Tính tích phân $I=2\int\limits_{-a}^{a}b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx,(a,b\in\mathbb{R}^+)$.

Đặt $x=a\sin t,\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=a\cos t dt$. Đổi cận $x=-a\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2};x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Khi đó $I=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}b\sqrt{1-\sin^2 t}.a\cos t\,dt=2ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=ab\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=ab\pi$.

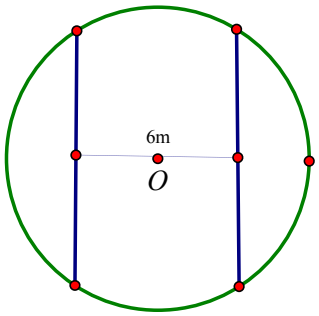
Do đó $S=S_1-S_2=50.30\pi-48.28\pi=156\pi$.

Vậy tổng số tiền làm con đường đó là $600000.S=600000.156\pi\approx 294053000$ (đồng).

Bài toán 7: Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng$/m^2$. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)

A. 8412322 đồng. **B.** 8142232 đồng.

C. 4821232 đồng. **D.** 4821322 đồng.



Lời giải:

Chọn D.

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn , khi đó phương trình đường tròn tâm O là $x^2+y^2=36$.

Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình: $y=\sqrt{36-x^2}=f(x)$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3;\ x = 3$

$\Rightarrow S = 2\int_{-3}^{3} \sqrt{36 - x^2}\,dx$

Đặt $x = 6\sin t \Rightarrow dx = 6\cos t dt$. Đổi cận : $x = -3 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$; $x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow S = 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 36\cos^2 t dt = 36\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1)dt = 18(\sin 2t + 2t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 18\sqrt{3} + 12\pi$

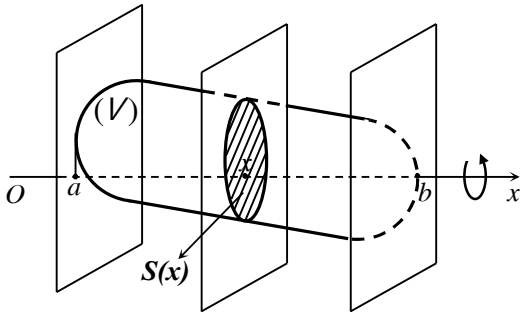
Do đó số tiền cần dùng là $70000.S \approx 4821322$ đồng.

B. TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

I. LÝ THUYẾT CẦN NẮM

1. Tính thể tích vật thể

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

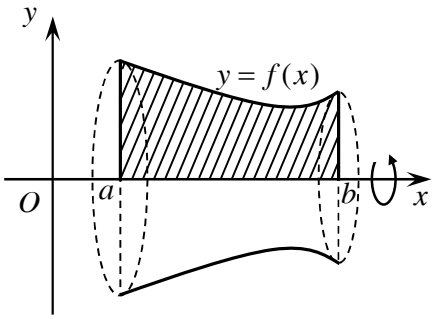


$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $V = \int_a^b S(x)dx$

2. Tính thể tích khối tròn xoay

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:

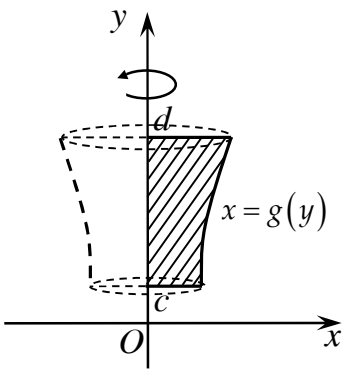


$$\begin{cases} (C): y = g(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$V_x = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$

Tương tự:

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases}$$

$$V_y = \pi \int_c^d \left[g(y) \right]^2 dy$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:

$$V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$$

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

1. Một số bài toán tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường cho trước

Bài toán 1: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y^2=4x$ và đường thẳng $x=4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi D xoay quanh trục Ox là:

A. 32π **B.** 64π **C.** 16π **D.** 4π

Lời giải :

Chọn A.

Giao điểm của đường $y^2=4x$ với trục hoành là : $O(0;0)$.

Phần phía trên Ox của đường $y^2=4x$ có phương trình $y=2\sqrt{x}$.

Suy ra thể tích khối tròn xoay sinh ra khi D xoay quanh trục Ox là: $V=\int_0^4\pi.(2\sqrt{x})^2dx=32\pi.$

Bài toán 2: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\ln x$, $y=0$, $x=2$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $2\ln^2 2-4\ln 2+2$ **B.** $\pi\left(2\ln^2 2+4\ln 2-2\right)$

C. $2\pi\left(\ln^2 2-2\ln 2+1\right)$ **D.** $\pi\left(2\ln 2-1\right)$

Lời giải :

Chọn C.

Tọa độ giao điểm của hai đường $y=\ln x$ và $y=0$ là điểm $C(1;0)$.

Nên thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\int_1^2\pi.\ln^2 xdx.$

Đặt $\begin{cases}u=\pi\ln^2 x\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2\pi\ln x}{x}dx\\v=x\end{cases}$. Suy ra : $V=\pi x\ln^2 x\Big|_1^2-2\pi\int_1^2\ln xdx=2\pi\ln^2 2-2\pi I$.

Tính $I=\int_1^2\ln xdx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dx=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\v=x\end{cases}$. Nên $I=x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2dx=2\ln 2-1.$

Vậy $V=2\pi\ln^2 2-2\pi\left(2\ln 2-1\right)=2\pi\left(\ln^2 2-2\ln 2+1\right)$.

Bài toán 3: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=a.x^2$, $y=bx$ $(a,b\neq 0)$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\pi.\frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$ **B.** $V=\pi.\frac{b^5}{5a^3}$ **C.** $V=\pi.\frac{b^5}{3a^3}$ **D.** $V=\pi.\frac{b^5}{a^3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

Lời giải :

Chọn D.

Tọa độ giao điểm của hai đường $y=ax^2$ và $y=bx$ là các điểm $O(0;0)$ và $A(\frac{b}{a};\frac{b^2}{a})$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\int_0^{\frac{b}{a}}\pi.b^2x^2dx-\int_0^{\frac{b}{a}}\pi.a^2x^4dx=\pi.\frac{b^5}{a^3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$.

Bài toán 4: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3-6x^2+9x,\ y=0$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{729\pi}{35}$ **B.** $\frac{27\pi}{4}$ **C.** $\frac{256608\pi}{35}$ **D.** $\frac{7776\pi}{5}$

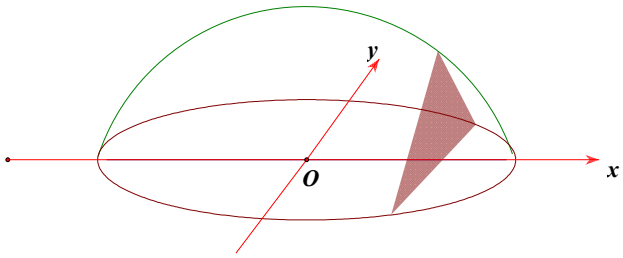
Lời giải :

Chọn A.

Tọa độ giao điểm của đường $y=x^3-6x^2+9x$ với $y=0$ là các điểm $O(0;0)$ và $A(3;0)$.

Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\int_0^3\pi\left(x^3-6x^2+9x\right)^2dx=\frac{729\pi}{35}$.

Bài toán 5: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=16$ (nằm trong mặt phẳng Oxy), cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



A. $V=\frac{256\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\frac{256}{3}$. **C.** $V=\frac{32\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{32}{3}$.

Lời giải :

Chọn A.

Giao điểm của thiết diện và Ox là H. Đặt $OH=x$ suy ra cạnh của thiết diện là $2\sqrt{16-x^2}$. Diện tích thiết diện tại H là $S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}4(16-x^2)$.

Vậy thể tích của vật thể là $V=\int_{-4}^{4}\sqrt{3}(16-x^2)dx=\frac{256\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 6: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y^2=4x$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\dfrac{88\pi}{5}$. **B.** $V=\dfrac{9\pi}{70}$. **C.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{6\pi}{5}$.

Lời giải :

Chọn A.

Với $x\in[0;2]$ thì $y^2=4x\Leftrightarrow y=\sqrt{4x}$

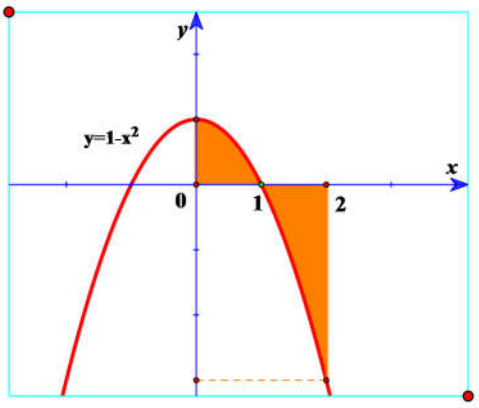
Tọa độ giao điểm của đường $y=2x^2$ với $y^2=4x$ là các điểm $O(0;0)$ và $A(1;2)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int\limits_0^1\left|\left(2x^2\right)^2-4x\right|dx=\pi\int\limits_0^1\left(4x-4x^2\right)dx=\dfrac{6\pi}{5}$.

Bài toán 7: Thể tích khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y=\left(1-x^2\right)$, $y=0$, $x=0$ và $x=2$ khi quay quanh trục Ox bằng:

A. $\dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.** 2π. **C.** $\dfrac{46\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{5\pi}{2}$.

Lời giải :

Chọn A.



Thể tích khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y=\left(1-x^2\right)$, $y=0$, $x=0$ và $x=2$ khi quay quanh trục Ox là: $V=\pi\int\limits_0^2\left(1-x^2\right)^2dx=\pi\int\limits_0^2\left(1-2x^2+x^4\right)dx=\pi\left(x-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\dfrac{46}{15}\pi$.

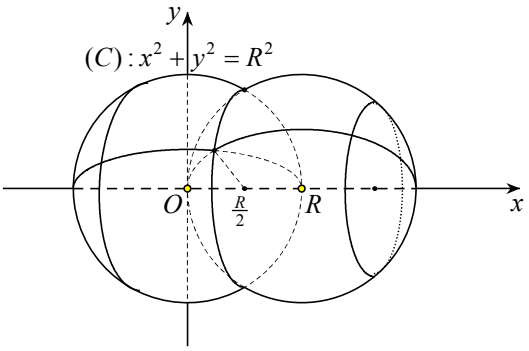
2. Một số bài toán tính thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay trong thực tế

Bài toán 1: ***(CHU VĂN AN – HN)*** Cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2).

A. $V=\pi R^3$. **B.** $V=\dfrac{\pi R^3}{2}$. **C.** $V=\dfrac{5\pi R^3}{12}$. **D.** $V=\dfrac{2\pi R^3}{5}$.

Lời giải:

Chọn C.



Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ

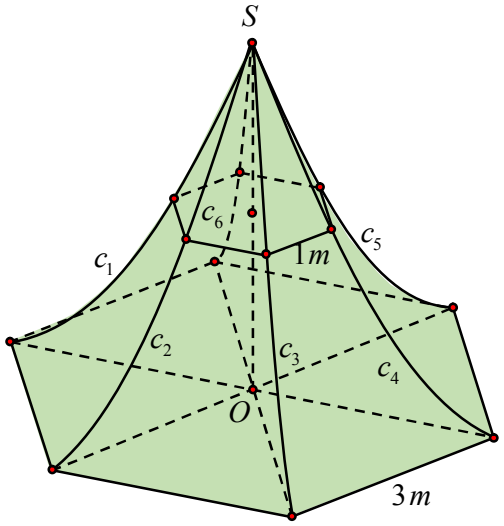
Khối cầu $S(O,R)$ chứa một đường tròn lớn. Đường tròn lớn có phương trình là: $(C): x^2+y^2=R^2$

$\Rightarrow y(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ (C) là phương trình nửa đường tròn nằm phía trên trục Ox.

Quay hình phẳng giới hạn bởi phương trình (C); $x=\dfrac{R}{2}$; $x=R$ quanh trục hoành ta được $\dfrac{1}{2}V$ tạo thành từ phần chung của 2 quả cầu (S_1) và (S_2).

Vậy thể tích chung của hai quả cầu cần tính là: $V=2\pi\displaystyle\int_{\frac{R}{2}}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{5\pi R^3}{12}$.

Bài toán 2: Người ta dựng một cái lều vải (H) có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO=6m$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các cạnh bên của (H) là các sợi dây c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6 nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến (nếu có) của (H) với mặt phẳng (P) vuông góc với SO là một lục giác đều và khi (P) qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh bằng $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều (H) đó.



A. $\dfrac{135\sqrt{3}}{5}(m^3)$ **B.** $\dfrac{96\sqrt{3}}{5}(m^3)$

C. $\dfrac{135\sqrt{3}}{4}(m^3)$ **D.** $\dfrac{135\sqrt{3}}{8}(m^3)$

Lời giải:

Chọn D.

Đặt hệ tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;6), B(1;3), C(3;0)$ nên có phương trình là $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{7}{2}x+6$

Theo hình vẽ ta có cạnh của thiết diện là BM

Suy ra: $2y = x^2 - 7x + 12 \Rightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 2y + \frac{1}{4} \Rightarrow \left|x - \frac{7}{2}\right| = \sqrt{2y + \frac{1}{4}}$

Vì $x \in [0;3] \Rightarrow \frac{7}{2} - x = \sqrt{2y + \frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} - \sqrt{2y + \frac{1}{4}}$

Nếu ta đặt $t = OM$ thì $BM = \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}$

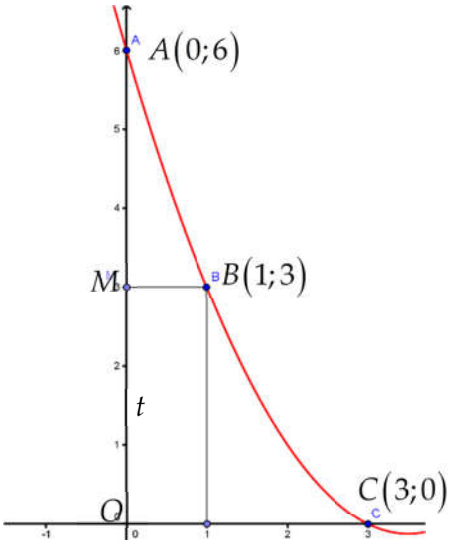
Khi đó diện tích của thiết diện lục giác:

$S(t) = 6.\frac{BM^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}\right)^2$, với $t \in [0;6]$

(Diện tích thiết diện lục giác bằng 6 lần diện tích tam giác đều nhỏ tạo nên nó)

Vậy thể tích của túp lều theo đề bài là:

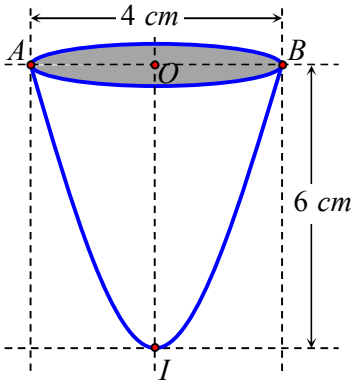
$V = \int_0^6 S(t)dt = \int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}\right)^2 dt = \frac{135\sqrt{3}}{8}.$



Bài toán 3: Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là $4cm$ và chiều cao là $6cm$. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích $V\left(cm^3\right)$ của vật thể đã cho.

A. $V = 12\pi$. **B.** $V = 12$.

C. $V = \frac{72}{5}\pi$. **D.** $V = \frac{72}{5}$.



Lời giải:

Chọn A.

Chọn gốc tọa độ O trùng với đỉnh I của parabol (P). Vì parabol (P) đi qua các điểm $A(-2;6), B(2;6)$ và $I(0;0)$ nên parabol (P) có phương trình $y = \frac{3}{2}x^2$.

Ta có $y = \frac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}y$.

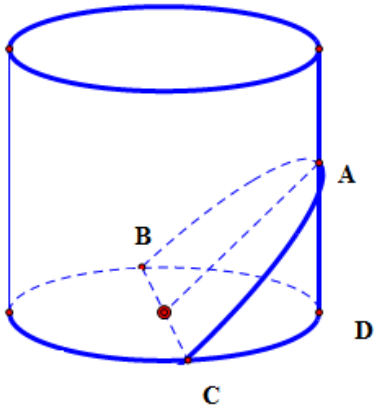
Khi đó thể tích của vật thể đã cho là $V = \pi\int_0^6 \left(\frac{2}{3}y\right)dy = 12\pi\left(cm^3\right)$.

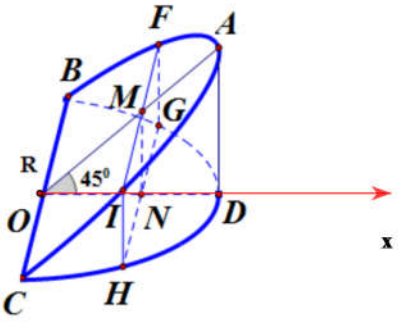
Bài toán 4: *(THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Tp. HCM năm 2016 – 2017)* Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R. Tính thể tích vật thể tạo thành bởi đáy của hình trụ và mặt phẳng qua đường kính đáy, biết mặt phẳng tạo với đáy một góc 45^0.

A. $V = \frac{8R^3}{3}$. **B.** $V = \frac{2\pi R^3}{3}$. **C.** $V = \frac{2R^3}{3}$. **D.** $V = \frac{8\pi R^3}{3}$.

Lời giải :

Chọn C.





Gắn trục tọa độ Ox như hình vẽ. Gọi BC là đường kính đáy

Điểm A là điểm thuộc mặt phẳng cắt khối trụ sao cho $OA \perp BC$.

D là hình chiếu vuông góc của A trên (BCD)

Ta có: $\widehat{((ABC);(BCD))} = 45^0 \Rightarrow \widehat{AOD} = 45^0$.

Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với trục Ox, cắt khối vật thể theo một thiết diện là hình chữ nhật $FGHI$; $M = OA \cap IF; N = OD \cap HG$.

Đặt $ON = x$. Ta có: $IH = FG = MN = x.\tan 45^0 = x$; $HG = 2NH = 2\sqrt{OH^2 - ON^2} = 2\sqrt{R^2 - x^2}$

Diện tích hình chữ nhật $FGHI$ bằng: $MN.HG = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Diện tích $FGHI$ là một hàm liên tục trên đoạn $[0;R]$

Thể tích khối vật thể tạo thành:

$$V = \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}d\left(R^2 - x^2\right) = -\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)\sqrt{R^2 - x^2}\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3.$$

Nhận xét: Học sinh có thể dùng phương pháp đổi biến số để tính tích phân trên bằng cách đặt: $\sqrt{R^2 - x^2} = t$.

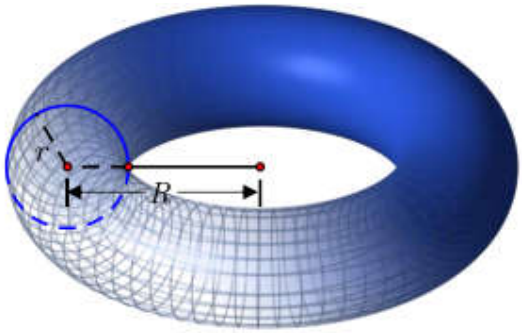
Công thức tổng quát khi mặt phẳng cắt khối trụ tạo với đáy góc α thì thể tích tạo thành:

$$\boxed{V = \frac{2}{3}R^3 \tan\alpha}$$

Bài toán 5: Một hình xuyến dạng cái phao có kích thước như hình vẽ. Tính thể tích của hình đó theo R và r.

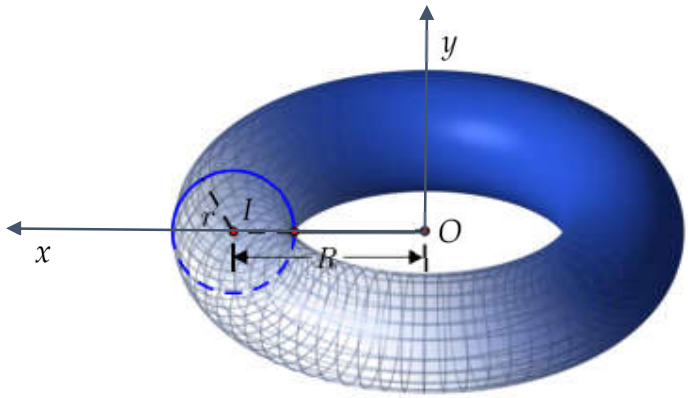
A. $V = 2\pi^2 r^2 R$. **B.** $V = 2\pi^2 r R^2$.

C. $V = \pi^2 r^2 R$. **D.** $V = \pi^2 r R^2$.



Lời giải:

Chọn A.



Xét hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ.

$\Rightarrow$Phương trình đường tròn tâm $I(R;0)$, bán kính r có phương trình là: $(x-R)^2+y^2=r^2$.

$$|x-R|=\sqrt{r^2-y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=R+\sqrt{r^2-y^2} \\ x=R-\sqrt{r^2-y^2} \end{cases}$$

Khi đó hình xuyến dạng cái phao được tạo ra khi ta quay đường tròn $(I;r)$ quanh trục Oy.

Thể tích cái phao là:

$$\Rightarrow V=\pi\int_{-r}^{r}\left|\left(R+\sqrt{r^2-y^2}\right)^2-\left(R-\sqrt{r^2-y^2}\right)^2\right|dy=4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-y^2}\,dy.$$

Đặt $y=r\sin t \Leftrightarrow dy=r\cos t dt \xrightarrow[-r\to\frac{\pi}{2}]{r\to\frac{\pi}{2}} V=4\pi R\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(r\cos t)^2$

$$=2\pi r^2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=2\pi r^2R\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi^2r^2R$$

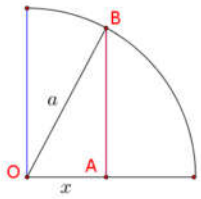
Bài toán 6: Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau. Xem hình vẽ bên. Tính thể tích của (H).

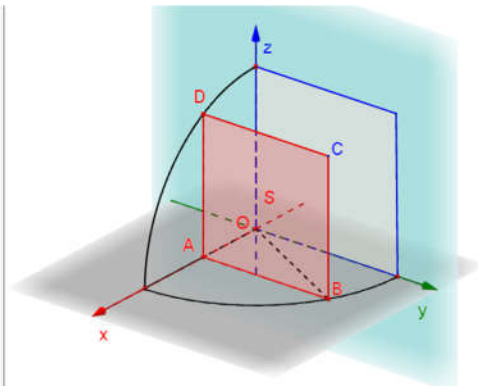
A. $V_{(H)}=\frac{2a^3}{3}$. **B.** $V_{(H)}=\frac{3a^3}{4}$. **C.** $V_{(H)}=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V_{(H)}=\frac{\pi a^3}{4}$.

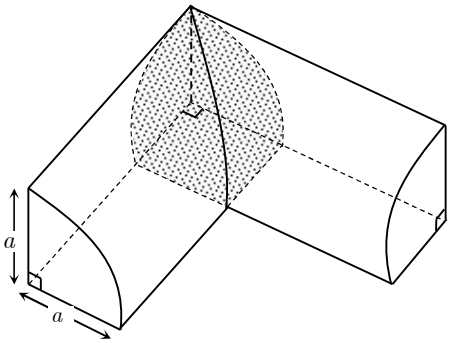
Lời giải:

Ta gọi trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó phần giao (H) là một vật thể có đáy là một phần tư hình tròn tâm O bán kính a, thiết diện của mặt phẳng vuông góc với trục Ox là một hình vuông có diện tích $S(x)=a^2-x^2$

Thể tích khối (H) là $\int_0^a S(x)dx=\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{2a^3}{3}$.





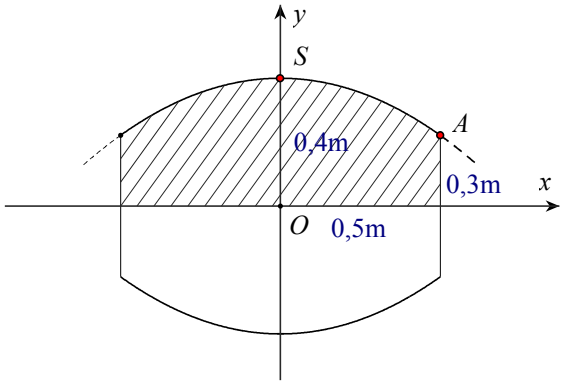


Bài toán 7: Một thùng rượu có bán kính các đáy là $30cm$, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là $40cm$, chiều cao thùng rượu là $1m$ (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) là bao nhiêu ?

A. $425,2\ lit.$ **B.** $425162\,lit.$ **C.** $212581\,lit.$ **D.** $212,6\,lit.$



Lời giải:



Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5;\ 0,3)$ và có đỉnh $S(0;\ 0,4)$ (hình vẽ).

Khi đó, thể tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P), trục hoành và hai đường thẳng $x = \pm 0,5$ quay quanh trục Ox.

Dễ dàng tìm được $(P): y = -\frac{2}{5}x^2 + 0,4$

Thể tích thùng rượu là : $V = \pi \int\limits_{-0,5}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4 \right)^2 dx = 2\pi \int\limits_{0}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4 \right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500} \approx 425,5$ (l)

C. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG CÁC LĨNH VỰC KHÁC

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN LƯU Ý

1. Một vật chuyển động theo phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian từ $t=a$ đến $t=b$ $(a<b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là : $\boxed{S=\int_a^b v(t)dt}$

2. Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $T=t_2-t_1$ là: $\boxed{v=\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt}$

3. Theo Định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x)=kx$, với $k(N/m)$ là độ cứng của lò xo. Công cần để kéo dãn lò xo từ độ dài l_1 đến độ dài l_2 là: $\boxed{A=\int_{l_1}^{l_2} f(x)\mathrm{d}x}$

4. Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là:

$$\boxed{Q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)\mathrm{d}t}$$

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=160-10t\ (m/s)$. Quãng đường mà vật chuyển động từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm mà vật dừng lại là

A. 1028 *m*. **B.** 1280 *m*. **C.** 1308 *m*. **D.** 1380 *m*.

Lời giải:

Chọn B.

Khi vật dừng lại thì $v(t)=160-10t=0\Leftrightarrow t=16$

Suy ra: $S=\int_0^{16} v(t)dt=\int_0^{16}(160-10t)dt=\left(160t-5t^2\right)\Big|_0^{16}=1280\ m.$

Bài toán 2: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)\ (m/s)$, có gia tốc $a(t)=v'(t)=\dfrac{3}{2t+1},\ (m/s^2)$. Vận tốc của ô tô sau 10 giây (*làm tròn đến hàng đơn vị*) là

A. $4,6m/s$. **B.** $7,2m/s$. **C.** $1,5m/s$. **D.** $2,2m/s$.

Lời giải:

Chọn A.

Vận tốc của ô tô sau 10 giây là: $v=\int_0^{10}\dfrac{3}{2t+1}dt=\dfrac{3}{2}\ln\left|2t+1\right|\Big|_0^{10}=\dfrac{3}{2}\ln 21\approx 4,6\ (m/s).$

Bài toán 3: Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc (theo cm^2/s) là $a(t)=\dfrac{-20}{(1+2t)^2}$ (với t tính bằng giây). Tìm hàm vận tốc v theo t, biết rằng khi $t=0$ thì $v=30\ (cm/s)$.

A. $\dfrac{10}{1+2t}$ **B.** $\dfrac{10}{1+2t}+20$ **C.** $(1+2t)^{-3}+30$ **D.** $\dfrac{-20}{(1+2t)^2}+30$

Lời giải:

Chọn B.

$v(t)=\int a(t)dt=\int\dfrac{-20}{(1+2t)^2}dt=\dfrac{10}{1+2t}+C$

Do $v(0)=30$, suy ra $\dfrac{10}{1+2.0}+C=30\Leftrightarrow C=20$

Vậy, hàm $v(t)=\dfrac{10}{1+2t}+20$.

Bài toán 4: Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. $\dfrac{4300}{3}$ m. **B.** 4300 m. **C.** 430 m. **D.** $\dfrac{430}{3}$ m.

Lời giải:

Chọn A.

Hàm vận tốc $v(t)=\int a(t)dt=\int(3t+t^2)dt=\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+C$

Lấy mốc thời gian lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0)=10\Rightarrow C=10$

Ta được: $v(t)=\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+10$.

Sau 10 giây, quãng đường vật đi được là: $s=\int_0^{10}\left(\dfrac{3t^2}{2}+\dfrac{t^3}{3}+10\right)dt=\left(\dfrac{t^3}{2}+\dfrac{t^4}{12}+10t\right)\Big|_0^{10}=\dfrac{4300}{3}$ m.

Bài toán 5: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có có biểu thức cường độ là $i(t)=I_0\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)$. Biết $i=q'$ với q là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc $t=0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian bằng $\dfrac{\pi}{\omega}$ là

A. $\dfrac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{2I_0}{\omega}$. **D.** $\dfrac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}$.

Lời giải:

Chọn C.

Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ 0 đến $\dfrac{\pi}{\omega}$ là:

$$Q=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)dt=\frac{I_0}{\omega}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{2I_0}{\omega}.$$

Bài toán 6: Gọi $h(t)$ (cm) là mức nước trong bồn chứa sau khi bơm được t giây. Biết rằng $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (chính xác đến $0,01\ cm$)

A. $2,67\ cm.$ **B.** $2,66\ cm.$ **C.** $2,65\ cm.$ **D.** $2,68\ cm.$

Lời giải:

Chọn B.

Hàm $h(t)=\int\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}dt=\frac{3}{20}(t+8)\sqrt[3]{t+8}+C$

Lúc $t=0$, bồn không chứa nước. Suy ra $h(0)=0\Rightarrow\frac{12}{5}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{12}{5}$

Vậy, hàm $h(t)=\frac{3}{20}(t+8)\sqrt[3]{t+8}-\frac{12}{5}$

Mức nước trong bồn sau 6 giây là $h(6)\approx 2,66\ cm.$

Bài toán7 : Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng gần với số nào sau đây nhất ?

A. 251000 con. **B.** 264334 con. **C.** 261000 con. **D.** 274334 con.

Lời giải:

Chọn B.

$N(t)=\int\frac{4000}{1+0,5t}dt=8000.\ln|1+0,5t|+C$

Lúc đầu có 250000 con, suy ra $N(0)=250000\Rightarrow C=250000$

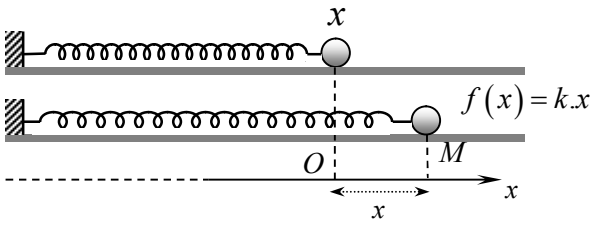
Vậy $N(t)=8000.\ln|1+0,5t|+250000\Rightarrow N(10)\approx 264334,0758$.

Bài toán 8: Để kéo căng một lò xo có độ dài tự nhiên từ $10cm$ đến $15cm$ cần lực $40N$. Tính công (A) sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ $15cm$ đến $18cm$.

A. $A=1,56\ (J)$. **B.** $A=1\ (J)$. **C.** $A=2,5\ (J)$. **D.** $A=2\ (J)$.

Lời giải:

Chọn A.



Theo Định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x)=kx$, với $k(N/m)$ là độ cứng của lò xo. Khi lò xo được kéo giãn từ độ dài $10cm$ đến $15cm$, lượng kéo giãn là $5\ cm=0.05\ m$. Điều này có nghĩa $f(0.05)=40$, do đó:

$$0,05k=40\Leftrightarrow k=\frac{40}{0,05}=800(N/m)$$

Vậy $f(x)=800x$ và công cần để kéo dãn lò xo từ $15cm$ đến $18cm$ là:

$$A=\int_{0,05}^{0,08}800x\,dx=400x^2\Big|_{0,05}^{0,08}=400\left[(0,08)^2-(0,05)^2\right]=1,56(J).$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH

Câu 1. Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên $[a\,;\,b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ là:

A. $S=\pi\int_a^b|f(x)-g(x)|.dx$.

B. $S=\int_a^b(f(x)-g(x))dx$.

C. $S=\int_a^b(f(x)-g(x))^2.dx$.

D. $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|.dx$.

Câu 2. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, liên tục trên $[a\,;\,b]$ trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$ cho bởi công thức:

A. $S=\int_a^b|f(x)|dx.$ **B.** $S=\int_a^b f(x)dx.$ **C.** $S=\pi\int_a^b|f(x)|dx.$ **D.** $S=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3+11x-6$, $y=6x^2$, $x=0$, $x=2$. (*Đơn vị diện tích*)

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{18}{23}$

Câu 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^3$, $y=4x$ là:

A. 8 **B.** 9 **C.** 12 **D.** 13

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\int_a^b f(x)dx.$ **B.** $S=-\int_a^b f(x)dx.$ **C.** $S=-\int_a^b f^2(x)dx.$ **D.** $S=\int_a^b f^2(x)dx.$

Câu 6. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức

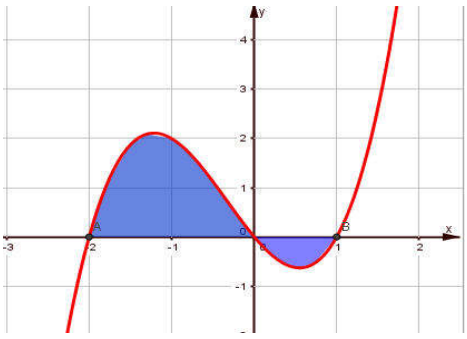
A. $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\,dx.$

B. $S=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx.$

C. $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx.$

D. $S=\pi\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\,dx.$

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình) là:



A. $S=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$ **B.** $S=\int_{-2}^{1}f(x)dx$

C. $S=\int_{0}^{-2}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$ **D.** $S=\int_{-2}^{0}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx$

Câu 8. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ là

A. 19 **B.** 18 **C.** 20 **D.** 21

Câu 9. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=4$ là

A. 4 **B.** $\frac{14}{5}$ **C.** $\frac{13}{3}$ **D.** $\frac{14}{3}$

Câu 10. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=8$ là

A. $\frac{45}{2}$ **B.** $\frac{45}{4}$ **C.** $\frac{45}{7}$ **D.** $\frac{45}{8}$

Câu 11. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=\pi$, $x=\frac{3\pi}{2}$ là

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 2 **D.** $\frac{3}{2}$

Câu 12. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\tan x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{4}$ là

A. $\ln\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\ln\frac{\sqrt{6}}{3}$ **C.** $-\ln\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $-\ln\frac{\sqrt{6}}{3}$

Câu 13. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^{2x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$ là

A. $\frac{e^6}{2}+\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{e^6}{2}-\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{e^6}{3}+\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{e^6}{3}-\frac{1}{3}$

Câu 14. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$, $x=4$ là

A. $\frac{53}{4}$ **B.** $\frac{51}{4}$ **C.** $\frac{49}{4}$ **D.** $\frac{25}{2}$

Câu 15. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$ là

A. $\frac{142}{5}$ **B.** $\frac{143}{5}$ **C.** $\frac{144}{5}$ **D.** $\frac{141}{5}$

Câu 16. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x=2$ là

A. $3+2\ln 2$ **B.** $3-\ln 2$ **C.** $3-2\ln 2$ **D.** $3+\ln 2$

Câu 17. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y=2-x^2$ và đường thẳng $y=-x$ là

A. $\frac{7}{2}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** 3 **D.** $\frac{9}{2}$

Câu 18. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}$ là

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Câu 19. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-4$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=3$ là

A. $\frac{71}{5}$ **B.** $\frac{73}{5}$ **C.** $\frac{72}{5}$ **D.** 14

Câu 20. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x+2}$, trục hoành và đường thẳng $x=2$ là

A. $3+2\ln 2$ **B.** $3-\ln 2$ **C.** $3-2\ln 2$ **D.** $3+\ln 2$

Câu 21. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y=2-x^2$ và đường thẳng $y=-x$ là

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** 3 **D.** $\frac{7}{2}$

Câu 22. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

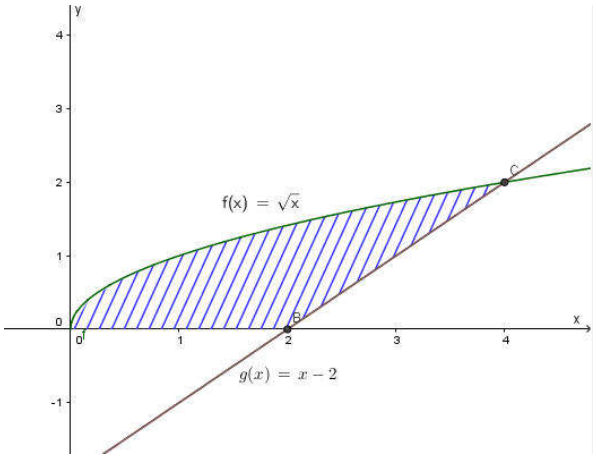
Câu 23. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ và $y=\sqrt[3]{x}$ là

A. $\frac{1}{12}$ **B.** $\frac{1}{13}$ **C.** $\frac{1}{14}$ **D.** $\frac{1}{15}$

Câu 24. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y^2-2y+x=0$, $x+y=0$ là

A. $\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** $\frac{7}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Câu 25. Diện tích hình phẳng trong hình vẽ sau là



A. $\frac{8}{3}$ **B.** $\frac{11}{3}$ **C.** $\frac{7}{3}$ **D.** $\frac{10}{3}$

Câu 26. Diện tích hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ nhất, giới hạn bởi các đường thẳng $y=8x, y=x$ và đồ thị hàm số $y=x^3$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 68 **B.** 67 **C.** 66 **D.** 65

Câu 27. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=1, y=x$ và đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{4}$ trong miền $x\ge 0, y\le 1$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $b-a$ bằng

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

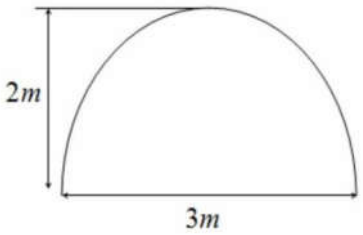
Câu 28. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=\begin{cases}-x, & \text{nếu } x\le 1\\ x-2, & \text{nếu } x>1\end{cases}$ và $y=\frac{10}{3}x-x^2$ là $\frac{a}{b}$. Khi đó $a+2b$ bằng

A. 16 **B.** 15 **C.** 17 **D.** 18

Câu 29. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\frac{-x^2+4x-4}{x-1}$, tiệm cận xiêm của (C) và hai đường thẳng $x=0, x=a$ $(a<0)$ có diện tích bằng 5 Khi đó a bằng

A. $1-e^5$ **B.** $1+e^5$ **C.** $1+2e^5$ **D.** $1-2e^5$

Câu 30. *(THPT QUẾ VÕ SỐ 3)* Ông **X** muốn xây một cổng hình Parapol có chiều dài chân đáy của cổng là $3m$ và chiều cao của cổng là $2m$ như hình vẽ ở dưới đây. Ông **X** muốn tính diện tích của cổng để đặt cửa gỗ cho vừa kích thước. Diện tích của cổng là.



A. $3,5\,m^2$. **B.** $4\,m^2$.

C. $5,5\,m^2$. **D.** $6\,m^2$.

Câu 31. Cổng trường ĐHBK Hà nội có hình dạng Parabol, chiều rộng $8m$, chiều cao $12,5m$. Diện tích của cổng là:

A. $100\,m^2$ **B.** $200\,m^2$ **C.** $\frac{100}{3}m^2$ **D.** $\frac{200}{3}m^2$

Câu 32. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\sin x, y=x, x=\frac{\pi}{2}$ bằng

A. $S=1$. **B.** $S=3$. **C.** $S=5$. **D.** $S=8$.

Câu 33. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=e^{-x}, x=-1, x=2$ bằng

A. $S=e^2+\frac{1}{e^2}+e-\frac{1}{e}-4$. **B.** $S=e^2-\frac{1}{e^2}+e+\frac{1}{e}-4$.

C. $S=e^2+\frac{1}{e^2}+e+\frac{1}{e}+4$. **D.** $S=e^2+\frac{1}{e^2}+e+\frac{1}{e}-4$.

Câu 34. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{\sin^2 x}, y=\frac{1}{\cos^2 x}, x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{\pi}{3}$ bằng

A. $S=\frac{2}{\sqrt{3}}-4$. **B.** $S=\frac{3}{\sqrt{2}}-4$. **C.** $S=\frac{8}{\sqrt{3}}-4$. **D.** $S=\frac{8}{\sqrt{3}}+4$.

Câu 35. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\ln x, y=x, x=1, x=e$ bằng

A. $S=\frac{3}{4}+\frac{e^2}{4}$. **B.** $S=\frac{e^2}{4}-\frac{4}{3}$. **C.** $S=\frac{3}{4}-\frac{e^2}{4}$. **D.** $S=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}$.

Câu 36. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=5^{x-2}, y=3-x, x=0, x=2$ bằng

A. $S=4-\dfrac{24}{25\ln 5}$. **B.** $S=4+\dfrac{24}{25\ln 5}$. **C.** $S=5-\dfrac{24}{25\ln 5}$. **D.** $S=5+\dfrac{24}{25\ln 5}$.

Câu 37. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=xe^x, y=0, x=-1, x=2$ bằng

A. $S=e^2+\dfrac{e}{2}$. **B.** $S=e^2-\dfrac{e}{2}$. **C.** $S=e^2+2-\dfrac{e}{2}$. **D.** $S=e^2+2+\dfrac{e}{2}$.

Câu 38. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{3}{2-x}, x=3, x=4$ và trục hoành bằng:

A. $S=\dfrac{406}{15}$. **B.** $S=\dfrac{22}{3}$. **C.** $S=\dfrac{23}{2}$. **D.** $S=\dfrac{32}{3}$.

Câu 39. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=\dfrac{3}{2-x}, x=3, x=4$ và trục hoành bằng ?

A. $\boldsymbol{S}=\ln 8$. **B.** $\boldsymbol{S}=\ln 9$. **C.** $\boldsymbol{S}=\ln 2$. **D.** $\boldsymbol{S}=\ln 5$.

Câu 40. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2, y=4x^2, x=1$ bằng ?

A. $S=1$. **B.** $S=3$. **C.** $S=12$. **D.** $S=8$.

Câu 41. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=x(e+1), y=x(1+e^x), x=1$ bằng ?

A. $S=\dfrac{3}{e}-1$. **B.** $S=\dfrac{3}{e}+1$. **C.** $S=\dfrac{e}{2}-1$. **D.** $S=\dfrac{2}{e}+1$.

Câu 42. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2e^x, y=0(Ox), x=1$ bằng ?

A. $S=e+2$. **B.** $S=e-2$. **C.** $S=e+3$. **D.** $S=e-3$.

Câu 43. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2-x+3, y=2x+1$ bằng ?

A. $S=\dfrac{2}{3}$. **B.** $S=\dfrac{1}{3}$. **C.** $S=\dfrac{1}{6}$. **D.** $S=\dfrac{5}{6}$.

Câu 44. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=\dfrac{1}{x}, y=-2x+3$ bằng ?

A. $S=\dfrac{4}{3}-\ln 2$. **B.** $S=\dfrac{4}{3}+\ln 2$. **C.** $S=\dfrac{3}{4}+\ln 2$. **D.** $S=\dfrac{3}{4}-\ln 2$.

Câu 45. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=\sqrt{1-x^2}, y=0$ bằng ?

A. $S=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $S=\pi-2$. **C.** $S=\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $S=\pi+2$.

Câu 46. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^3-4x^2+x+6, y=0$ bằng ?

A. $S=\dfrac{45}{4}$. **B.** $S=\dfrac{7}{12}$. **C.** $S=\dfrac{71}{6}$. **D.** $S=\dfrac{5}{4}$.

Câu 47. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=2-x^2, y=x, y=-x$ bằng ?

A. $S=\dfrac{15}{4}$. **B.** $S=\dfrac{3}{7}$. **C.** $S=\dfrac{13}{6}$. **D.** $S=\dfrac{7}{3}$.

Câu 48. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, y=2-x$ và trục hoành bằng.

A. $S=\int\limits_0^2\left(\sqrt{x}-2+x\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_0^2\left(2-x-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(2-x\right)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_0^2\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int\limits_0^2\left(2-x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 49. Để trang trí cho một phòng trong một tòa nhà, người ta vẽ lên tường một hình như sau: trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có cạnh bằng 2 dm một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh 3 dm và nằm phía ngoài hình lục giác, hai đầu mút của cạnh cũng là hai điểm giới hạn của đường parabol đó. Hãy tính diện tích của hình nói trên (kể cả hình lục giác đều) để mua sơn trang trí cho phù hợp.

A. $43,39\left(dm^2\right)$ **B.** $34\left(dm^2\right)$ **C.** $34,39\left(dm^2\right)$ **D.** $38,39\left(dm^2\right)$

Câu 50. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 12750000 đồng. **C.** 6750000 đồng. **D.** 3750000 đồng.

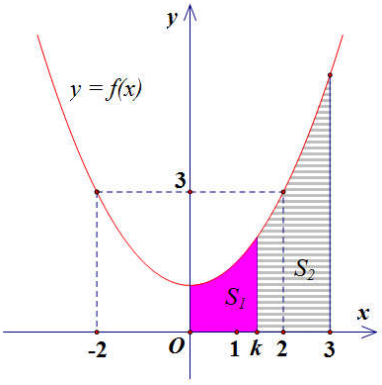
Câu 51. Tìm $m\in\mathbb{R}$ sao cho hàm số $y=x^4-\left(m^2+2\right)x^2+m^2+1$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi hàm số với trục hoành phần phía trên Ox có diện tích bằng $\dfrac{96}{15}$.

A. $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=\pm2$ **D.** $m=1$

Câu 52. Cho parabol $(P):y=3x^2$ và đường thẳng (d) đi qua $M(1;5)$ có hệ số góc là k. Tìm k để hình phẳng giới hạn bởi (P) và (d) có diện tích nhỏ nhất.

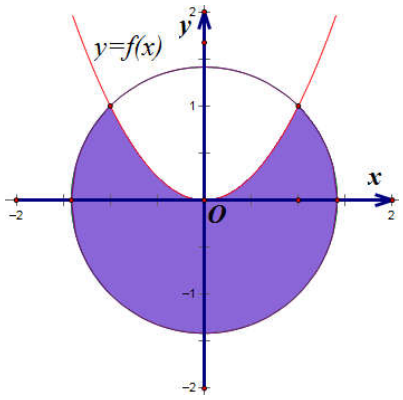
A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Câu 53. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$ là đường parabol bậc hai như hình vẽ. Hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$, trục Ox, đường $x=3$ có diện tích S. Đường thẳng $x=k$ với $k\in\left(0;3\right)$ chia S ra thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2. Nếu $S_1=2S_2$ thì phát biểu nào sau đây đúng ?



A. $k\in\left(2,2;2,3\right)$. **B.** $k\in\left(2,3;2,4\right)$. **C.** $k\in\left(2,4;2,5\right)$. **D.** $k\in\left(2,5;2,6\right)$.

Câu 54. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^2$ có đồ thị là đường parabol như hình bên. Biết đường tròn trong hình có tâm là gốc tọa độ và bán kính $\sqrt{2}$. Diện tích phần hình phẳng được tô màu là

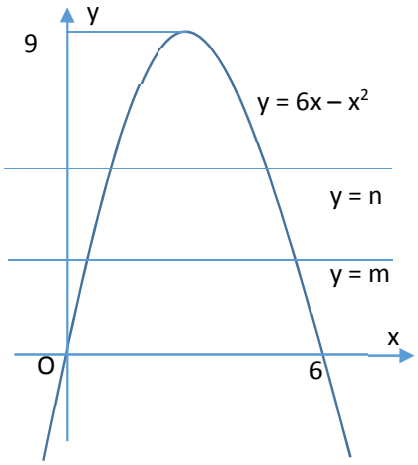


A. $\pi+\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\pi-\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$.

Câu 55. *(THPT TIÊN LÃNG)* Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

A. $k=-4$. **B.** $k=-8$. **C.** $k=-6$. **D.** $k=-2$.

Câu 56. *(THI THỬ CỤM 6 TP. HỒ CHÍ MINH)* Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) của hàm số $y=6x-x^2$ và trục hoành. Hai đường thẳng $y=m, y=n$ chia hình (H) thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tính $P=(9-m)^3+(9-n)^3$



A. $P=405$. **B.** $P=409$. **C.** $P=407$. **D.** $P=403$.

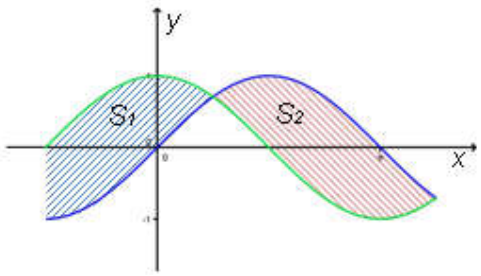
Câu 57. *(CỤM 2 TP.HCM)* Biết diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=|\ln x|$ và $y=1$ là $S=ae+\frac{b}{e}+c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=3$. **B.** $P=0$. **C.** $P=-2$. **D.** $P=4$.

Câu 58. *(THPT AN LÃO)* Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2$, $mx=y^2$ $(m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

Câu 59. *(SỞ GD VÀ ĐT TỈNH PHÚ THỌ)* Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x$, $y=\cos x$ và S_1, S_2 là diện tích của các phần được gạch chéo như hình vẽ. Tính $S_1^2+S_2^2$?.



A. $S_1^2+S_2^2=10-2\sqrt{2}$. **B.** $S_1^2+S_2^2=10+2\sqrt{2}$.

C. $S_1^2+S_2^2=1-12\sqrt{2}$. **D.** $S_1^2+S_2^2=11+2\sqrt{2}$.

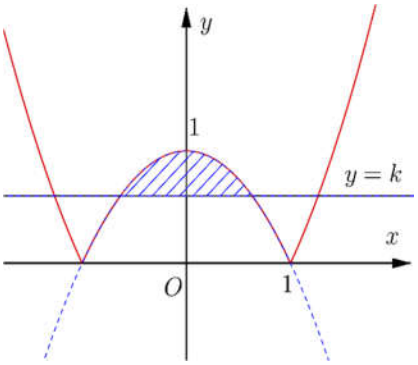
Câu 60. *(CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI)* Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn $x^2+y^2=2, y\ge 0$ và parabol $y=x^2$ bằng

A. $\frac{\pi}{2}-1$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 61. *(CHUYÊN SƠN LA)* Gọi S_1 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ và S_2 là diện tích của hình thoi có các đỉnh là đỉnh của elip đó. Tính tỉ số giữa S_1 và S_2.

A. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi}{3}$. **D.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi}{2}$.

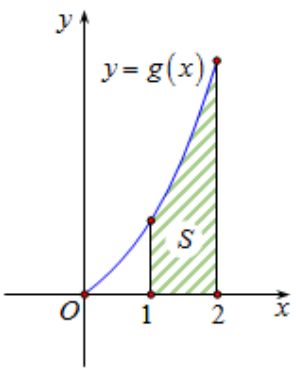
Câu 62. *(THPT PHAN ĐÌNH TÙNG)* Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=|x^2-1|$ và $y=k, 0<k<1$. Tìm k để diện tích của hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc trong hình vẽ bên.



A. $k=\sqrt[3]{4}$. **B.** $k=\sqrt[3]{2}-1$. **C.** $k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=\sqrt[3]{4}-1$.

Câu 63. *(CHUYÊN ĐH VINH – L4 - 2017)* Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=g(x)=xf(x^2)$ có đồ thị trên đoạn $[0;2]$ như hình vẽ bên.

Biết diện tích miền tô màu là $S=\frac{5}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.



A. $I=\frac{5}{4}$. **B.** $I=\frac{5}{2}$.

C. $I=5$. **D.** $I=10$.

Câu 64. *(THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN)* Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chéo là $A(-1;0)$ và $C\left(a;\sqrt{a}\right)$, với $a>0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a.

A. $a=9$. **B.** $a=4$. **C.** $a=\frac{1}{2}$. **D.** $a=3$.

2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍCH THỂ TÍCH

Câu 1. Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ quanh trục ox là:

A. 6π **B.** 6π **C.** 12π **D.** 6π

Câu 2. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, Ox, $x=a$, $x=b$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\pi^2\int_a^b f(x)dx.$ **B.** $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$ **C.** $V=\int_a^b \pi^2.f^2(x)dx.$ **D.** $V=\int_a^b f^2(x)dx.$

Câu 3. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$; trục Ox và đường thẳng $x=3$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{3}{2}\pi$ **B.** 3π **C.** 2π **D.** π

Câu 4. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3+1$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{79\pi}{63}$ **B.** $\frac{23\pi}{14}$ **C.** $\frac{5\pi}{4}$ **D.** 9π

Câu 5. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2=x$, $x=a$, $x=b$ $(0<a<b)$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\pi^2\int_a^b xdx.$ **B.** $V=\pi\int_a^b \sqrt{x}dx.$ **C.** $V=\pi\int_a^b xdx.$ **D.** $V=\pi^2\int_a^b \sqrt{x}dx.$

Câu 6. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=-x^2+2x$, $y=0$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{496\pi}{15}$ **B.** $\frac{4\pi}{3}$ **C.** $\frac{64\pi}{15}$ **D.** $\frac{16\pi}{15}$

Câu 7. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=0$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{3\pi}{2}$ **B.** $\frac{2\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** $\frac{4}{3}\pi$

Câu 8. Thể tích khối tròn xoay trong không gian $Oxyz$ giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0; x=\pi$ và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm $(x;0;0)$ bất kỳ là đường tròn bán kính $\sqrt{\sin x}$ là:

A. $V=2.$ **B.** $V=\pi.$ **C.** $V=4\pi.$ **D.** $V=2\pi.$

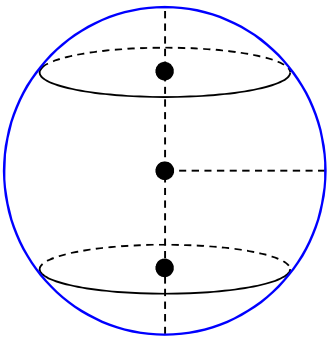
Câu 9. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x,\ y=0,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{3}$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\pi\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **B.** $V=\pi\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **C.** $V=\pi\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **D.** $V=\pi\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Câu 10. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1+\sqrt{x}, Ox, x=0, x=4$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\pi^2\dfrac{28}{3}$ **B.** $\pi.\dfrac{68}{3}$ **C.** $\pi\dfrac{28}{3}$ **D.** $\pi^2.\dfrac{68}{3}$

Câu 11. Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



A. $\dfrac{100}{3}\pi(dm^3)$ **B.** $\dfrac{43}{3}\pi(dm^3)$ **C.** $41\pi(dm^3)$ **D.** $132\pi(dm^3)$

Câu 12. Thể tích khối tròn xoay sinh ra do quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3$, trục Ox, $x=-1,\ x=1$ một vòng quanh trục Ox là:

A. π. **B.** 2π. **C.** $\dfrac{6\pi}{7}$. **D.** $\dfrac{2\pi}{7}$

Câu 13. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2; Ox$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng?

A. $\dfrac{16}{15}$. **B.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 14. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x; Ox; x=0; x=\dfrac{\pi}{4}$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng?

A. $1-\dfrac{\pi}{4}$. **B.** π^2. **C.** $\pi-\dfrac{\pi^2}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{4}-\pi$.

Câu 15. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2; Ox$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng?

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Câu 16. Cho hình (*H*) giới hạn bởi các đường $y=x^2; x=1$; trục hoành. Quay hình (*H*) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{2\pi}{5}$.

Câu 17. Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y=(2x+1)^{\frac{1}{3}}$, $x=0$, $y=3$, quay quanh trục *Oy* là:

A. $\frac{50\pi}{7}$. **B.** $\frac{480\pi}{9}$. **C.** $\frac{480\pi}{7}$. **D.** $\frac{48\pi}{7}$.

Câu 18. Thể tích của khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x.\cos x+\sin^2 x}$, $y=0, x=0, x=\frac{\pi}{2}$ khi quay quanh trục Ox là:

A. $\frac{\pi(3\pi-4)}{4}$. **B.** $\frac{\pi(5\pi+4)}{4}$. **C.** $\frac{\pi(3\pi+4)}{4}$. **D.** $\frac{\pi(3\pi+4)}{5}$

Câu 19. Cho hình phẳng (*H*) được giới hạn bởi đường cong $(C): y=\frac{2x+1}{x+1}$, trục *Ox* và trục *Oy*. Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình (*H*) quay quanh trục *Ox* là:

A. 3π. **B.** $4\pi\ln 2$. **C.** $(3-4\ln 2)\pi$. **D.** $(4-3\ln 2)\pi$.

Câu 20. Hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^2$ và đường thẳng $y=4$ quay một vòng quanh trục *Ox*. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra bằng:

A. $\frac{64\pi}{5}$. **B.** $\frac{128\pi}{5}$. **C.** $\frac{256\pi}{5}$. **D.** $\frac{152\pi}{5}$.

Câu 21. Cho hình phẳng (*H*) được giới hạn bởi đường cong $(C): y=\sin x$, trục *Ox* và các đường thẳng $x=0, x=\pi$. Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình (*H*) quay quanh trục *Ox* là :

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi^2}{2}$. **C.** π. **D.** π^2.

Câu 22. Gọi (*H*) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=3x-x^2; Ox$. Quay (*H*) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{81}{11}\pi$. **B.** $\frac{83}{11}\pi$. **C.** $\frac{83}{10}\pi$. **D.** $\frac{81}{10}\pi$.

Câu 23. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\sqrt{x}-1; Ox; x=4$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{7}{6}\pi$. **B.** $\frac{5}{6}\pi$. **C.** $\frac{7}{6}\pi^2$. **D.** $\frac{5}{6}\pi^2$.

Câu 24. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=3x; y=x; x=1$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** $\frac{8\pi^2}{3}$. **C.** $8\pi^2$. **D.** 8π.

Câu 25. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}; x=4$; trục hoành. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{14\pi}{3}$. **C.** 8π. **D.** $\frac{16\pi}{3}$.

Câu 26. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=x+1; y=\frac{6}{x}; x=1; x>0$. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{13\pi}{6}$. **B.** $\frac{125\pi}{6}$. **C.** $\frac{35\pi}{3}$. **D.** 18π.

Câu 27. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=\frac{4}{x}$ và $y=-x+5$. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{9\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}-4\ln 4$. **C.** $\frac{33}{2}-4\ln 4$. **D.** 9π.

Câu 28. Thể tích khối tròn xoay khi cho Elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ quay quanh trục Ox.

A. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. **B.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **C.** $\frac{2}{3}\pi a^2 b$. **D.** $-\frac{2}{3}\pi ab^2$.

Câu 29. Thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=\frac{1}{4}y^2\ (y\le 0)$, $x=-\frac{1}{2}y^2+3y\,(y\le 2); x=0$ quay quanh Ox:

A. 32π. **B.** 32. **C.** $32\pi^2$. **D.** 33π.

Câu 30. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $(C): y=\sqrt{x}; d: y=\frac{1}{2}x$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. 8π. **B.** $\frac{16\pi}{3}$. **C.** $\frac{8\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Câu 31. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $(C): y=x^3; d: y=-x+2; Ox$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{4\pi}{21}$. **B.** $\frac{10\pi}{21}$. **C.** $\frac{\pi}{7}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Câu 32. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $(C): y=-2\sqrt{x}; d: y=\frac{1}{2}x; x=4$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{80\pi}{3}$. **B.** $\frac{112\pi}{3}$. **D.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** 32π.

Câu 33. Hình (H) giới hạn bởi $y=x^2-4x+4, y=0, x=0, x=3$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. 33. **B.** $\frac{33}{5}$. **C.** $\frac{33\pi}{5}$. **D.** 33π.

Câu 34. Hình (S) giới hạn bởi $y=3x+2, Ox, Oy$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình (S) quanh trục Ox.

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** $\frac{4\pi}{3}$. **C.** $\frac{8\pi}{9}$. **D.** $\frac{16\pi}{3}$.

Câu 35. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên do quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(1-x)^2$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ bằng

A. $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2\pi}{5}$. **C.** $\frac{5\pi}{2}$. **D.** 2π.

Câu 36. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{\cos x}$, $x=0$ và $x=\frac{\pi}{4}$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** π. **D.** 2π.

Câu 37. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$ và $y=x$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành bằng:

A. $-\pi$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** π.

Câu 38. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0$, $x=1$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox, được cho bởi công thức:

A. $\left(\pi\int_0^1 e^x\mathrm{d}x\right)^2$. **B.** $\pi^2\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\left(\int_0^1 e^x\mathrm{d}x\right)^2$. **D.** $\pi\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 39. Thể tích khối tròn xoay sinh ra do quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3$, trục Ox, $x=-1$, $x=1$ một vòng quanh trục Ox là :

A. π. **B.** 2π. **C.** $\frac{6\pi}{7}$. **D.** $\frac{2\pi}{7}$.

Câu 40. Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi $y=\ln x, y=0, x=e$ quay quanh trục ox có kết quả là:

A. πe. **B.** $\pi(e-1)$. **C.** $\pi(e-2)$. **D.** $\pi(e+1)$.

Câu 41. Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi $y=\ln x, y=0, x=1, x=2$ quay quanh trục ox có kết quả là:

A. $2\pi(\ln 2-1)^2$. **B.** $2\pi(\ln 2+1)^2$. **C.** $\pi(2\ln 2+1)^2$. **D.** $\pi(2\ln 2-1)^2$.

Câu 42. Thể tích vật thể quay quanh trục Ox giới hạn bởi $y=x^3, y=8, x=3$ có kết quả là:

A. $\frac{\pi}{7}(3^7-9.2^5)$. **B.** $\frac{\pi}{7}(3^7-9.2^6)$. **C.** $\frac{\pi}{7}(3^7-9.2^7)$. **D.** $\frac{\pi}{7}(3^7-9.2^8)$.

Câu 43. Cho a,b là hai số thực dương. Gọi (K) là hình phẳng nằm trong góc phần tư thứ hai, giới hạn bởi parabol $y=ax^2$ và đường thẳng $y=-bx$. Biết thể tích khối tròn xoay tạo được khi quay (K) xung quanh trục hoành là một số không phụ thuộc vào giá trị của a và b. Khẳng định nào sao đây là đúng?

A. $b^4=2a^5$. **B.** $b^4=2a^2$. **C.** $b^3=2a^5$. **D.** $b^5=2a^3$.

Câu 44. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\cos x,\ y=0,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{4}$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\dfrac{\pi^2}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi(\pi+2)}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+1}{4}$. **D.** Kết quả khác.

Câu 45. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^{2x},\ y=0,\ x=0$ *và* $x=2$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\dfrac{\pi}{2}\left(e^8-1\right)$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}\left(e^8-1\right)$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}\left(e^8-1\right)$. **D.** $\dfrac{\pi}{9}\left(e^8-1\right)$.

Câu 46. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\sin^2 x,\ y=0,\ x=0,\ x=\pi$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\dfrac{\pi^2}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi^2}{2}$. **D.** $\dfrac{3\pi^2}{8}$.

Câu 47. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}},\ y=0,\ x=0,\ x=1$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** π. **D.** 2π.

Câu 48. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=xe^{\frac{x}{2}},\ y=0,\ x=0,\ x=1$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\mathrm{e}$. **B.** $\pi\left(e-2\right)$. **C.** $\pi\left(e+4\right)$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}(e+1)$.

Câu 49. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}},\ y=0,\ x=1,\ x=2$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\left(e^2+e\right)$. **B.** $\pi\left(e^2-e\right)$. **C.** πe^2. **D.** πe.

Câu 50. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\left(1-x\right)^2,\ y=0,\ x=0$ và $x=2$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. 2π. **B.** $\dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{5\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{2\pi}{5}$.

Câu 51. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2-4,\ y=2x-4,\ x=0,\ x=2$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $-\dfrac{32\pi}{5}$. **B.** 6π. **C.** -6π. **D.** $\dfrac{32\pi}{5}$.

Câu 52. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x\ln x,\ y=0,\ x=e.$ Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\dfrac{\pi\left(5e^3-2\right)}{25}$. **B.** $\dfrac{\pi\left(5e^3+2\right)}{27}$. **C.** $\dfrac{\pi\left(5e^3-2\right)}{27}$. **D.** $\dfrac{\pi\left(5e^3+2\right)}{25}$.

Câu 53. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{2x-1}{x-1}, y=0,\ x=-1$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\left(\dfrac{15}{2}-4\ln 2\right)$. **B.** $\pi\left(\dfrac{15}{2}-2\ln 2\right)$. **C.** $\pi\left(\dfrac{15}{4}-4\ln 2\right)$. **D.** $\pi\left(\dfrac{13}{2}-4\ln 2\right)$.

Câu 54. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\cos 4x, y=0, x=0, x=\dfrac{\pi}{8}$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\dfrac{\pi^2}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi^2}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{\pi}{3}$.

Câu 55. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{x}{x+1}, y=0, x=0, x=1$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\dfrac{\pi(3-4\ln 2)}{2}$. **B.** $\pi\left(\ln 2+1\right)$. **C.** $\pi\left(4-\ln 2\right)$. **D.** 2π.

Câu 56. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2, y=2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\dfrac{16\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{21\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{32\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{64\pi}{15}$.

Câu 57. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2; Ox$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng ?

A. $\dfrac{16}{15}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{3}$.

Câu 58. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2; x=1$; trục hoành; trục tung. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\dfrac{\pi}{5}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi}{5}$.

Câu 59. Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn

tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3)

A. $11{,}781\,m^3$. **B.** $12{,}637\,m^3$. **C.** $114{,}923\ m^3$. **D.** $8{,}307\ m^3$.

Câu 60. Một Bác thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là $2dm$ và $4dm$, khi đó thể tích của lọ là:

A. $8\pi\ dm^2$. **B.** $\frac{15}{2}\pi\ dm^3$. **C.** $\frac{14}{3}\pi\ dm^2$. **D.** $\frac{15}{2}\ dm^2$.

Câu 61. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=x+1;\ y=\frac{6}{x};\ x=1$. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{13\pi}{6}$. **B.** $\frac{125\pi}{6}$. **C.** $\frac{35\pi}{3}$. **D.** 18π.

Câu 62. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $(C):y=\sqrt{x};d:y=\frac{1}{2}x$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. 8π. **B.** $\frac{16\pi}{3}$. **C.** $\frac{8\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Câu 63. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $(C):y=x^3;\ d:y=-x+2;Ox$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{4\pi}{21}$. **B.** $\frac{10\pi}{21}$. **C.** $\frac{\pi}{7}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Câu 64. Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị $(C):y=\sqrt{(2x+1)\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x=2$. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành là

A. $\frac{3}{2}\pi$. **B.** $-\frac{5}{2}\pi+\ln 64\pi$. **C.** $(\ln 64-4)\pi$. **D.** $\frac{143}{9}$.

Câu 65. Một khối cầu có bán kính $5dm$, người ta cắt bỏ hai phần bằng hai mặt phẳng vuông góc bán kính và cách tâm $3dm$ để làm một chiếc lu đựng. Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

A. $132\pi\left(dm^3\right)$ **B.** $41\pi\left(dm^3\right)$ **C.** $\frac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **D.** $43\pi\left(dm^3\right)$

Câu 66. Hình phẳng S_1 giới hạn bởi $y=f(x),y=0,x=a,\ x=b\ (a<b)$ quay quanh Ox có thể tích V_1. Hình phẳng S_2 giới hạn bởi $y=-2f(x),y=0,x=a,\ x=b\ (a<b)$ quay quanh Ox có thể tích V_2. Lựa chọn phương án **đúng**:

A. $V_1=4V_2$. **B.** $V_2=8V_1$. **C.** $2V_1=V_2$. **D.** $4V_1=V_2$.

Câu 67. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt[3]{x},y=0,x=1,x=8$ xung quanh trục Ox

A. $V=\pi^2$. **B.** $V=\frac{9\pi}{4}$. **C.** $V=18{,}6$. **D.** $V=\frac{93\pi}{5}$.

Câu 68. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=\frac{1}{3}x^2$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\frac{28\pi\sqrt{2}}{5}$. **B.** $V=\frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$. **C.** $V=\frac{24\pi\sqrt{2}}{5}$. **D.** $V=\frac{24\pi\sqrt{3}}{5}$.

Câu 69. Thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng x và $2\sqrt{9-x^2}$, bằng:

A. $V=3$ **B.** $V=20.$ **C.** $V=22.$ **D.** $V=18.$

Câu 70. Kí hiệu V_1,V_2 lần lượt là thể tích hình cầu bán kính đơn vị và thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=-2x+2$ và đường cong $y=2\sqrt{1-x^2}$ xung quanh trục Ox. Hãy so sánh V_1,V_2.

A. $V_1<V_2$. **B.** $V_1=V_2$. **C.** $V_1>V_2$. **D.** $V_1=2V_2$.

3. ỨNG DỤNG KHÁC CỦA TÍCH PHÂN

Câu 1: Một tia lửa được bắn thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc 15 m/s. Hỏi sau 2,5 giây, tia lửa ấy cách mặt đất bao nhiêu mét, biết gia tốc là $9,8\ m/s^2$?

A. $30,625\ m.$ **B.** $37,5\ m.$ **C.** $68,125\ m.$ **D.** $6,875\ m.$

Câu 2: Trong mạch máy tính, cường độ dòng điện (đơn vị mA) là một hàm số theo thời gian t, với $I(t)=0,3-0,2t$. Hỏi tổng điện tích đi qua một điểm trong mạch trong 0,05 giây là bao nhiêu?

A. $0,29975\ mC.$ **B.** $0,29\ mC.$ **C.** $0,01525\ mC.$ **D.** $0,01475\ mC.$

Câu 3: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=1-2\sin 2t$ (m/s). Quãng đường mà vật chuyển động trong khoảng thời gian $t=0$ (s) đến thời điểm $t=\frac{3\pi}{4}$ (s) là

A. $\frac{3\pi}{4}-1$. **B.** $\frac{3\pi-1}{4}$. **C.** $\frac{3\pi+1}{4}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}+1$.

Câu 4: Hạt electron có điện tích âm là $1,6.10^{-19}C$. Nếu tách hai hạt eletron từ $1pm$ đến $4pm$ thì công W sinh ra là

A. $W=3,194.10^{-28}\ J.$ **B.** $W=1,728.10^{-16}\ J.$ **C.** $W=1,728.10^{-28}\ J.$ **D.** $W=3,194.10^{-16}\ J.$

Câu 5: Trong kinh tế học, thặng dư tiêu dùng của hàng hóa được tính bằng công thức

$$I=\int_0^a\left[p(x)-P\right].\mathrm{d}x.$$

Với $p(x)$ là hàm biểu thị biểu thị giá mà một công ty đưa ra để bán được x đơn vị hàng hóa ; a là số lượng sản phẩm đã bán ra ; $P=p(a)$ là mức giá bán ra ứng với số lượng sản phẩm là a.

Cho $p=1200-0,2x-0,0001x^2$, (đơn vị tính là USD). Tìm thặng dư tiêu dùng khi số lượng sản phẩm bán là 500.

A. 1108333,3 USD. **B.** 570833,3 USD. **C.** 33333,3 USD. **D.** Đáp án khác.

Câu 6: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)=1,5+\dfrac{t^2+2}{t+2}$ (m/s). Quãng đường vật đó đi được trong 4 giây đầu tiên bằng bao nhiêu? (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

A. 12,60 m. **B.** 12,59 m. **C.** 0,83 m. **D.** 6,59 m.

Câu 7: Một ôtô đang chạy với vận tốc 18 m/s thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-36t+18$ (m/s) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Quãng đường ôtô di chuyển được kể từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu mét ?

A. 5,5 m. **B.** 3,5 m. **C.** 6,5 m. **D.** 4,5 m.

Câu 8: Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t)=3t+2$, thời gian tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đi được tính theo đơn vị m. Biết tại thời điểm $t=2s$ thì vật đi được quãng đường là $10m$. Hỏi tại thời điểm $t=30s$ thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu?

A. $1410m$ **B.** $1140m$ **C.** $300m$ **D.** $240m$

Câu 9: Một ô tô đang chạy với vận tốc $20(m/s)$ thì người người đạp phanh (còn gọi là "thắng"). Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-40t+20(m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bằng đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $10(m)$ **B.** $5(m)$ **C.** $8(m)$ **D.** $15(m)$

Câu 10: Một vật đang chuyển động với vận tốc $10(m/s)$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. $\dfrac{4230}{3}(m)$ **B.** $\dfrac{4100}{6}(m)$ **C.** $1020(m)$ **D.** $\dfrac{4300}{3}(m)$

Câu 11: Một chất điểm A xuất phát từ vị trí O, chuyển động thẳng nhanh dần đều; 8 giây sau nó đạt đến vận tốc $6(m/s)$. Từ thời điểm đó nó chuyển động thẳng đều. Một chất điểm B xuất phát từ cùng vị trí O nhưng chậm hơn 12 giây so với A và chuyển động thẳng nhanh dần đều. Biết rằng B đuổi kịp A sau 8 giây (kể từ lúc B xuất phát). Tìm vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A.

A. $24(m/s)$ **B.** $34(m/s)$ **C.** $30(m/s)$ **D.** $40(m/s)$

Câu 12: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\dfrac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng là bao nhiêu

A. 624334 **B.** 334334 **C.** 264334 **D.** 269334

Câu 13: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc $v'(t)=\dfrac{3}{t+1}$ (m/s^2). Vận tốc ban đầu của vật là 6 (m/s). Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. $10(m/s)$ **B.** $11(m/s)$ **C.** $15(m/s)$ **D.** $13(m/s)$

Câu 14: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu $5m/s$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a=\dfrac{2}{t+1}$ (m/s^2). Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

A. $10m/s$ **B.** $9m/s$ **C.** $11m/s$ **D.** $12m/s$

Câu 15: Một vật di chuyển với gia tốc $a(t)=-20(1+2t)^{-2}$ (m^2/s). Khi $t=0$ thì vận tốc của vật là $30m/s$. Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây(làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

A. $S=106m.$ **B.** $S=107m.$ **C.** $S=108m.$ **D.** $S=109m.$

Câu 16: Tập đoàn dầu khí Việt Nam PVC dự định đầu tư một khu sản xuất, chế biến dầu thô tại TP.Quảng Ngãi. Giả sử sau t năm đầu tư, dự án đầu tư lần một sẽ phát sinhlợi nhuận với tốc độ $P_1(t)=50+t^2$ trăm đôla/năm, tiếp sau đó dự án lần hai sẽ phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P_2(t)=200+5t$ trăm đôla/năm. Biết sau thời gian t năm thì tốc độ lợi nhuận của dự án hai bằng một nửa với tốc độ lợi nhuận với dự án một. Tính lợi nhuận vượt thực tế cho khoảng thời gian trên

A. $6676,4$**đô** **B.** $6576,4$**đô** **C.** $5676,4$**đô** **D.** $6679,4$**đô**

Câu 17: Trong giờ thực hành môn Vật Lí. Một nhóm sinh viên đã nghiên cứu về sự chuyển động của các hạt. Trong quá trình thực hành thì nhóm sinh viên này đã phát hiện một hạt prôton di chuyển trong điện trường với biểu thức gia tốc (theo cm/s^2) là: $a=-20(1+2t)^{-2}$ .Với t của ta được tính bằng giây. Nhóm sinh viên đã tìm hàm vận tốc v theo t , biết rằng khi $t=0$ thì $v=30m/s^2$. Hỏi biểu thức đúng là?

A. $v=\left(\dfrac{10}{1+2t}+25\right)cm/s^2$ **B.** $v=\left(\dfrac{10}{1+t}+20\right)cm/s^2$

C. $v=\left(\dfrac{10}{1+2t}+10\right)cm/s^2$ **D.** $v=\left(\dfrac{10}{1+2t}+20\right)cm/s^2$

Câu 18: Người ta tổ chức thực hành nghiên cứu thí nghiệm bằng cách như sau. Họ tiến hành quan sát một tia lửa điện bắn từ mặt đất bắn lên với vận tốc $15m/s$. Hỏi biểu thức vận tốc của tia lửa điện là?

A. $v=-9,8t+15$. **B.** $v=-9,8t+13$ **C.** $v=9,8t+15$ **D.** $v=-9,8t-13$

Câu 19: Người ta tổ chức thực hành nghiên cứu thí nghiệm bằng cách như sau. Họ tiến hành quan sát một tia lửa điện bắn từ mặt đất bắn lên với vận tốc $15m/s$. Hỏi sau 2,5 giây thì tia lửa điện đấy có chiều cao là bao nhiêu?

A. $6.235(m)$ **B.** $5.635(m)$ **C.** $4.235(m)$ **D.** $6.875(m)$

Câu 20: Một vật chuyển động có phương trình $v=5+at\left(m/s\right)$ .Hỏi sau thời gian 5 giây thì vật chuyển động quảng đường là?

A. $147,5\left(m\right)$ **B.** $157,5\left(m\right)$ **C.** $137,5\left(m\right)$ **D.** $127,5\left(m\right)$

Câu 21: Gọi $h\left(t\right)$ $\left(cm\right)$ là mức nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'\left(t\right)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. $2,66\left(m\right)$ **B.** $0,55\left(cm\right)$ **C.** $3,14\left(cm\right)$ **D.** $2,66\left(cm\right)$

Câu 22: Vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ m với số lượng là F(m), biết nếu phát hiện sớm khi số lượng vi khuẩn không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'\left(m\right)=\frac{1000}{2t+1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không ?

A. 5433,99 và không cứu được **B.** 1499,45 và cứu được

C. 283,01 và cứu được **D.** 3716,99 và cứu được

Câu 23: Một ô tô xuất phát với vận tốc $v_1\left(t\right)=2t-10\left(m/s\right)$ sau khi đi được một khoảng thời gian t_1 thì bất ngờ gặp chướng ngại vật nên tài xế phanh gấp với vận tốc $v_2\left(t\right)=20-4t\left(m/s\right)$ và đi thêm một khoảng thời gian t_2 nữa thì dừng lại. Biết tổng thời gian từ lúc xuất phát đến lúc dừng lại là 4s. Hỏi xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét.

A. $57m$ **B.** $64m$ **C.** $50m$ **D.** $47m$

Câu 24: Một vật chuyển động với vận tốc $v\left(t\right)\left(m/s\right)$ có gia tốc $a\left(t\right)=3t^2+t\left(m/s^2\right)$. Vận tốc ban đầu của vật là $2\left(m/s\right)$. Hỏi vận tốc của vật sau $2s$

A. $10m/s$ **B.** $12m/s$ **C.** $16m/s$ **D.** $8m/s$

Câu 25: Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t=0\left(s\right)$ chuyển động thẳng với vận tốc $v\left(t\right)=3t\left(4-t\right)\left(m/s\right)$. Tìm quãng đường vật đi được cho tới khi nó dừng lại.

A. $130m$ **B.** $34m$ **C.** $32m$ **D.** $28m$

Câu 26: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu $5m/s$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a=\frac{2}{t+1}\left(m/s^2\right)$. Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là(làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

A. $10m/s$ **B.** $9m/s$ **C.** $11m/s$ **D.** $12m/s$

Câu 27: Một vật xuất phát từ A chuyển động thẳng và nhanh dần đều với vận tốc $v\left(t\right)=1+2t\left(m/s\right)$. Tính vận tốc tại thời điểm mà vật óó cách A 20cm? (Giả thiết thời điểm vật xuất phát từ A tương ứng với $t=0$)

A. $6m/s$ **B.** $7m/s$ **C.** $8m/s$ **D.** $9m/s$

Câu 28: *(THPT THUẬN THÀNH SỐ 2)* Một ô tô đang chạy đều với vận tốc a (m/s) thì người đạp phanh , từ thời điểm đó , ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + a$ (m/s) , trong đó t là thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn ô tô di chuyển được $40m$ thì vận tốc ban đầu a bằng bao nhiêu?

A. $a = 40$ **B.** $a = 80$ **C.** $a = 20$ **D.** $a = 25$

Câu 29: *(THPT LÝ THƯỜNG KIỆT)* Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc $a(t) = \dfrac{3}{t+1}$ (m/s) . Vận tốc ban đầu của vật là $6(m/s)$. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây là bao nhiêu?

A. $3\ln 11 + 6.$ **B.** $2\ln 11 + 6.$ **C.** $3\ln 11 - 6.$ **D.** $3\ln 6 + 6.$

Câu 30: Một ca nô đang chạy trên hồ Tây với vận tốc $20m/s$ thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn đi được bao nhiêu mét?

A. $10m$ **B.** $20m$ **C.** $30m$ **D.** $40m$

Câu 31: Một ô tô đang đi với vận tốc lớn hơn $72km/h$, phía trước là đoạn đường chỉ cho phép chạy với tốc độ tối đa là $72km/h$, vì thế người lái xe đạp phanh để ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 30 - 2t$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Từ lúc bắt đầu đạp phanh đến lúc đạt tốc độ $72km/h$ ô tô đã di chuyển quãng đường dài

A. $100m$ **B.** $125m$ **C.** $150m$ **D.** $175m$

Câu 32: Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{2t+1}$ và. Mức nước ở bồn sau khi bơm được $13s$ là

A. $\dfrac{243}{4}cm$ **B.** $\dfrac{243}{80cm}$ **C.** $30cm$ **D.** $60cm$

Câu 33: Tại thành phố Hà Tĩnh nhiệt độ (theo ${}^0F$) sau t giờ, tính từ $8h \to 20h$ được cho bởi công thức $f(t) = 50 + 14\sin\dfrac{\pi t}{12}$. Nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian trên là:

A. $50 - \dfrac{\pi}{14}$ **B.** $50 - \dfrac{14}{\pi}$ **C.** $50 + \dfrac{14}{\pi}$ **D.** $50 + \dfrac{\pi}{14}$

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH

1D	2A	3B	4A	5A	6C	7D	8C	9D	10B
11A	12D	13B	14B	15C	16C	17D	18B	19C	20C
21A	22A	23A	24B	25D	26B	27D	28C	29A	30B
31D	32A	33D	34C	35D	36A	37C	38B	39A	40A
41C	42B	43C	44D	45A	46C	47D	48C	49C	50C
51C	52C	53C	54A	55C	56A	57B	58A	59D	60C
61D	62D	63C	64D						

Câu 1. **Chọn D.**

Câu 2. **Chọn A.**

Câu 3. **Chọn B.**

Đặt $h(x)=(x^3+11x-6)-6x^2=x^3-6x^2+11x-6$

$h(x)=0\Leftrightarrow x=1\vee x=2\vee x=3$ (loại).

Bảng xét dấu:

x	0		1		2
$h(x)$		$-$	0	$+$	

$$S=-\int_0^1\left(x^3-6x^2+11x-6\right)dx+\int_1^2\left(x^3-6x^2+11x-6\right)dx$$

$$=-\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_1^2=\frac{5}{2}.$$

Câu 4. **Chọn A.**

Ta có $x^3=4x\Leftrightarrow x=-2\vee x=0\vee x=2$

$$\Rightarrow S=\left|\int_{-2}^0\left(x^3-4x\right)dx\right|+\left|\int_0^2\left(x^3-4x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Bigg|_{-2}^0\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Bigg|_0^2\right|=8.$$

Vậy $S=8$ (đvdt).

Chú ý:Nếu trong đoạn $[\alpha;\beta]$ phương trình $f(x)=g(x)$ không còn nghiệm nào nữa thì ta có thể dùng công thức $\int_\alpha^\beta\left|f(x)-g(x)\right|dx=\left|\int_\alpha^\beta\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|$.

Câu 5. **Chọn A.**

Theo công thức **(SGK cơ bản)** ta có $S=\int_a^b f(x)dx$.

Câu 6. **Chọn C.**

Theo công thức **(SGK cơ bản)** ta có $S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx.$

Câu 7. **Chọn D.**

Theo định nghĩa ta có $S=\int_{-2}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{1} f(x)dx$

Câu 8. **Chọn C.**

Ta có $x^3\geq 0$ trên đoạn $[1;3]$ nên $S=\int_1^3 \left|x^3\right|dx=\int_1^3 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3=20$

Câu 9. **Chọn D.**

Ta có $\sqrt{x}\geq 0$ trên đoạn $[1;4]$ nên $S=\int_1^4 \left|\sqrt{x}\right|dx=\int_1^4 \sqrt{x}dx=\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_1^4=\frac{14}{3}$

Câu 10. **Chọn B.**

Ta có $\sqrt[3]{x}\geq 0$ trên đoạn $[1;8]$ nên $S=\int_1^8 \left|\sqrt[3]{x}\right|dx=\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx=\left.\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right|_1^8=\frac{45}{4}$

Câu 11. **Chọn A.**

Ta có $\sin x\leq 0$ trên đoạn $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ nên $S=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\sin x\right|dx=-\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin xdx=\left.\cos x\right|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=1$

Câu 12. **Chọn D.**

Ta có $\tan x\geq 0$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ nên $S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left|\tan x\right|dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan xdx=\left.-\ln(\cos x)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\ln\frac{\sqrt{6}}{3}$

Câu 13. **Chọn B.**

Ta có $e^{2x}\geq 0$ trên đoạn $[0;3]$ nên $S=\int_0^3 \left|e^{2x}\right|dx=\int_0^3 e^{2x}dx=\left.\frac{1}{2}e^{2x}\right|_0^3=\frac{e^6}{2}-\frac{1}{2}$

Câu 14. **Chọn B.**

Ta có $x^3-3x^2=0\Leftrightarrow x=3\in[1;4]$

Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S=\int_1^4 \left|x^3-3x^2\right|dx=\left|\int_1^3 (x^3-3x^2)dx\right|+\left|\int_3^4 (x^3-3x^2)dx\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)\right|_1^3\Bigg|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)\right|_3^4\Bigg|=6+\frac{27}{4}=\frac{51}{4}$$

Câu 15. **Chọn C.**

Ta có $x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow x=2\in[0;3]$

Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S=\int_0^3 \left|x^4-3x^2-4\right|dx=\left|\int_0^2 (x^4-3x^2-4)dx\right|+\left|\int_2^3 (x^4-3x^2-4)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\right|_0^2\Bigg|+\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\right|_2^3\Bigg|=\frac{48}{5}+\frac{96}{5}=\frac{144}{5}$$

Câu 16. **Chọn C.**

Ta có $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ nên $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|\frac{x+1}{x+2}\right|dx=\left|\int\limits_{-1}^{2}\left(1-\frac{1}{x+2}\right)dx\right|=\left|\left(x-\ln|x+2|\right)\right|_{-1}^{2}\left|=3-2\ln 2\right.$

Câu 17. **Chọn D.**

Ta có $2-x^2=-x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$ và $2-x^2\geq -x,\forall x\in[-1;2]$

Nên $S=\int\limits_{-1}^{2}(2+x-x^2)dx=\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$

Câu 18. **Chọn B.**

Ta có $\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Nên $S=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos 2x\right|dx=\left|\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx\right|+\left|\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx\right|=\left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|=1$

Câu 19. **Chọn C.**

Ta có $x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow x=2\in[0;3]$

Khi đó diện tích hình phẳng là

$$S=\int\limits_{0}^{3}\left|x^4-3x^2-4\right|dx=\left|\int\limits_{0}^{2}(x^4-3x^2-4)dx\right|+\left|\int\limits_{2}^{3}(x^4-3x^2-4)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_{0}^{2}\right|+\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_{2}^{3}\right|=\frac{48}{5}+\frac{96}{5}=\frac{144}{5}$$

Câu 20. **Chọn C.**

Ta có $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ nên

$S=\int\limits_{-1}^{2}\left|\frac{x+1}{x+2}\right|dx=\left|\int\limits_{-1}^{2}\left(1-\frac{1}{x+2}\right)dx\right|=\left|\left(x-\ln|x+2|\right)\right|_{-1}^{2}\left|=3-2\ln 2\right.$

Câu 21. **Chọn A.**

Ta có $2-x^2=-x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$ và $2-x^2\geq -x,\forall x\in[-1;2]$

Nên $S=\int\limits_{-1}^{2}(2+x-x^2)dx=\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$

Câu 22. **Chọn A.**

Ta có $\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\in[0;\frac{\pi}{2}]$

Nên $S=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos 2x\right|dx=\left|\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx\right|+\left|\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx\right|=\left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|=1$

Câu 23. **Chọn A.**

Ta có $\sqrt{x}=\sqrt[3]{x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Nên $S=\int\limits_0^1\left|\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right|dx=\left|\int\limits_0^1(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})dx\right|=\left|\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right)\right|_0^1=\frac{1}{12}$

Câu 24. **Chọn B.**

Biến đổi về hàm số theo biến số y là $x=-y^2+2y,\ x=-y$

Xét pt tung độ giao điểm $(-y^2+2y)-(-y)=0$ có nghiệm $y=0,\ y=3$

Vậy $S=\int\limits_0^3\left|-y^2+3y\right|dy=\int\limits_0^3\left(-y^2+3y\right)dy=\frac{9}{2}$

Câu 25. **Chọn D.**

Ta có $y^2=y+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=2\end{array}\right.$, Nên $S=\int\limits_0^2(y+2-y^2)dy=\frac{10}{3}$

Câu 26. **Chọn B.**

Ta có $8x-x=0\Rightarrow x=0;8x-x^3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\sqrt{2}\end{array}\right.;x-x^3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Nên $S=\int\limits_0^1\left(8x-x\right)dx+\int\limits_1^{2\sqrt{2}}\left(8x-x^3\right)dx=\frac{63}{4}$

Câu 27. **Chọn D.**

Ta có $x-1=0\Rightarrow x=1;x-\frac{x^2}{4}=0\Rightarrow x=0;1-\frac{x^2}{4}=0\Rightarrow x=2$

Nên $S=\int\limits_0^1\left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx+\int\limits_1^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{5}{6}$

Câu 28. **Chọn C.**

Ta có: $\frac{10}{3}x-x^2=-x\Rightarrow x=0;\quad \frac{10}{3}x-x^2=x-2\Rightarrow x=3$

Nên $S=\int\limits_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)dx+\int\limits_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)dx=\frac{13}{2}$

Câu 29. **Chọn A.**

Ta có: $TCX: y=-x+3$

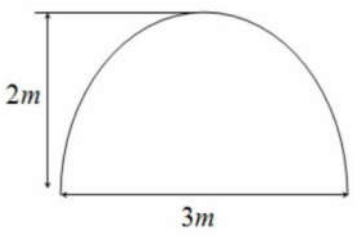
Nên $S(a)=\int\limits_a^0\left(-\frac{1}{x-1}\right)dx=\int\limits_0^a\left(\frac{1}{x-1}\right)dx=\ln\left|x-1\right|\Big|_0^a=\ln(1-a)$

Suy ra $\ln(1-a)=5\Leftrightarrow a=1-e^5$

Câu 30. **Chọn B.**

Giả sử parabol có phương trình $y=ax^2+bx+c\left(a\neq0\right)$

Đi qua $A\left(0;2\right),B\left(\frac{3}{2};0\right)$ nên ta có hệ phương trình :

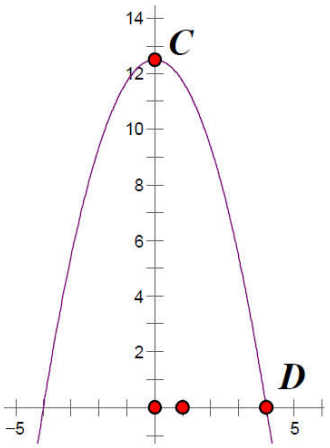


$$\begin{cases} c=2 \\ b=0 \\ \dfrac{9}{4}a+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=0 \\ a=-\dfrac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{8}{9}x^2+2 \qquad \Rightarrow S=2\int_0^{\frac{3}{2}}\left|-\frac{8}{9}x^2+2\right|dx=4m^2$$

Câu 31. **Chọn D.**

Giả sử parabol có phương trình $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$

Đi qua $C\left(0;\dfrac{25}{2}\right), D\left(4;0\right)$ nên ta có hệ phương trình:



$$\begin{cases} c=\dfrac{25}{2} \\ b=0 \\ 16a+\dfrac{25}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=0 \\ a=-\dfrac{25}{32} \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{25}{32}x^2+\frac{25}{2}$$

$$S=2\int_0^4\left|-\frac{25}{32}x^2+\frac{25}{2}\right|dx=\frac{200}{3}m^2$$

Câu 32. **Chọn A.**

Xét phương trình $x+\sin x=x, x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=\pi$.

$$\Rightarrow S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|x+\sin x-x\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\right|=\left|-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|=\left|-\left(\left(-1\right)-0\right)\right|=1 .$$

Câu 33. **Chọn D.**

Xét phương trình $e^x=e^{-x}, x\in\left[-1;2\right]\Leftrightarrow x=-x\Leftrightarrow x=0$.

$$\Rightarrow S=\int_{-1}^{0}\left|e^x-e^{-x}\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|e^x-e^{-x}\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{0}\left(e^x-e^{-x}\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{0}^{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\left(e^x+e^{-x}\right)\Big|_{-1}^{0}\right|+\left|\left(e^x+e^{-x}\right)\Big|_{0}^{2}\right|=\left|2-e-\frac{1}{e}\right|+\left|e^2+\frac{1}{e^2}-2\right|=-2+e+\frac{1}{e}+e^2+\frac{1}{e^2}-2=e^2+\frac{1}{e^2}+e+\frac{1}{e}-4$$

Câu 34. **Chọn C.**

Xét phương trình $\dfrac{1}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}, x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]\Leftrightarrow \sin x=\cos x\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$.

$$\Rightarrow S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left|\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right|\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left|\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right|\mathrm{d}x$$

$$=\left|\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\left(-\cot x-\tan x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|\left(-\cot x-\tan x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\right|=\left|\frac{4}{\sqrt{3}}-2\right|+\left|2-\frac{4}{\sqrt{3}}\right|=\frac{8}{\sqrt{3}}-4 .$$

Câu 35. **Chọn D.**

Xét phương trình $x\ln x = x, x \in [1;e] \Leftrightarrow x(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

$$\Rightarrow S = \int_1^e |x\ln x - x|\,dx = \left|\int_1^e (x\ln x - x)\,dx\right| = \left|\int_1^e x(\ln x - 1)\,dx\right|$$

Đặt $\begin{cases} \ln x - 1 = u \\ xdx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}dx = du \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_1^e x(\ln x - 1)\,dx = \frac{x^2}{2}(\ln x - 1)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{3}{4} - \frac{e^2}{4}$$

$$\Rightarrow S = \left|\frac{3}{4} - \frac{e^2}{4}\right| = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}.$$

Câu 36. **Chọn A.**

Xét phương trình $5^{x-2} = 3 - x, x \in [0;2]$.

Bấm Casio, ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

$$\Rightarrow S = \int_0^2 |5^{x-2} - (3-x)|\,dx = \left|\int_0^2 (5^{x-2} - (3-x))\,dx\right|$$

Ta có: $\int_0^2 (5^{x-2} - (3-x))\,dx = \frac{5^{x-2}}{\ln 5}\Big|_0^2 - 3x\Big|_0^\pi + \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{24}{25\ln 5} - 4.$

Vậy $S = \left|\frac{24}{25\ln 5} - 4\right| = 4 - \frac{24}{25\ln 5}$

Câu 37. **Chọn C.**

Xét phương trình $xe^x = 0, x \in [-1;2] \Leftrightarrow x = 0$.

$$\Rightarrow S = \int_{-1}^0 |xe^x - 0|\,dx + \int_0^2 |xe^x - 0|\,dx = \left|\int_{-1}^0 xe^x dx\right| + \left|\int_0^2 xe^x dx\right|$$

Đặt $\begin{cases} x = u \\ e^x dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ e^x = v \end{cases}$

Suy ra $\int_{-1}^0 xe^x dx = xe^x\Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x dx = \frac{1}{e} - e^x\Big|_{-1}^0 = \frac{2}{e} - 1$

$$\int_0^2 xe^x dx = xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - e^x\Big|_0^2 = e^2 + 1$$

$$\Rightarrow S = \left|\frac{2}{e} - 1\right| + |e^2 + 1| = 1 - \frac{2}{e} + e^2 + 1 = e^2 - \frac{2}{e} + 2$$

Câu 38. **Chọn B.**

Xét phương trình $x^2 - 4 = 0, x \in [-1;1] \Leftrightarrow x = -2, x = 2$.

$$\Rightarrow S=\int_{-1}^{1}\left|x^2-4\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{1}\left(x^2-4\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_{-1}^{1}\right|=\left|-\frac{22}{3}\right|=\frac{22}{3}.$$

Câu 39. **Chọn A.**

Phương trình $\frac{3}{2-x}=0$ vô nghiệm trên đoạn $[3;4]$

$$\Rightarrow s=\int_{3}^{4}\left|\frac{3}{2-x}\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{3}^{4}\frac{3}{2-x}\mathrm{d}x\right|=\left|-3\int_{3}^{4}\frac{\mathrm{d}(2-x)}{2-x}\right|=\left|3ln\left|2-x\right|\right|_{3}^{4}=\ln 8$$

Câu 40. **Chọn A.**

Xét phương trình $x^2=4x^2\Leftrightarrow 3x^2=0\Leftrightarrow x=0$

$$\Rightarrow S=\int_{0}^{1}\left|4x^2-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}3x^2\mathrm{d}x=x^3\Big|_{0}^{1}=1$$

Câu 41. **Chọn C.**

$$\Rightarrow \mathrm{S}=\int_{0}^{1}\left|\mathrm{x}\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\right)-\mathrm{x}\left(\mathrm{e}+1\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left|\mathrm{xe}^{\mathrm{x}}-\mathrm{xe}\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{0}^{1}(\mathrm{xe}^{\mathrm{x}}-\mathrm{xe})\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{0}^{1}\mathrm{xe}^{\mathrm{x}}\mathrm{d}x-\mathrm{e}\int_{0}^{1}\mathrm{x}\mathrm{d}x\right|$$

Ta có: $\mathrm{e}\int_{0}^{1}\mathrm{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}\frac{\mathrm{x}^2}{2}\Big|_{0}^{1}=\frac{\mathrm{e}}{2};\int_{0}^{1}\mathrm{xe}^{\mathrm{x}}\mathrm{d}x=1$ (Bấm Casio hoặc tính trực tiếp bằng phương pháp tích phân từng phần)

$$\Rightarrow \mathrm{S}=\left|\frac{\mathrm{e}}{2}-1\right|=\frac{\mathrm{e}}{2}-1.$$

Câu 42. **Chọn B.**

Xét phương trình $x^2e^x=0\Leftrightarrow x=0$

$$\Rightarrow S=\int_{0}^{1}\left|x^2e^x-0\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left|x^2e^x\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x^2e^x\mathrm{d}x$$

Tính $\int_{0}^{1}x^2e^x\mathrm{d}x$ bằng phương pháp tích phân từng phần hai lần ta có kết quả $\int_{0}^{1}x^2e^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2$

Câu 43. **Chọn C.**

Xét phương trình $x^2-x+3=2x+1\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1,x=2$

$$\Rightarrow S=\int_{1}^{2}\left|\ x^2-x+3-\left(2x+1\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\left|x^2-3x+2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{1}^{2}\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x\right|$$

Bấm Casio, ta được $\int_{1}^{2}\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\Big|_{1}^{2}=-\frac{1}{6}$.

Câu 44. **Chọn D.**

Xét phương trình $\frac{1}{x}=-2x+3,x\neq 0\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x=1,x=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{1}{x}-\left(-2x+3\right)\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}+2x-3\right)\mathrm{d}x\right|$$

Ta có $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}+2x-3\right)\mathrm{d}x=\left(\ln x+x^2-3x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}+\ln 2$

$\Rightarrow S=\left|-\frac{3}{4}+\ln 2\right|=\frac{3}{4}-\ln 2$

Câu 45. **Chọn A.**

Xét phương trình $\sqrt{1-x^2}=0\left(-1\le x\le 1\right)\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

$\Rightarrow s=\int\limits_{-1}^{1}\left|\sqrt{1-x^2}-0\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left|\sqrt{1-x^2}\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

Bấm Casio ta được $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$ (Nếu tính tay thì đặt $x=\sin t$).

Câu 46. **Chọn C.**

Xét phương trình $x^3-4x^2+x+6=0$; Bấm Casio ta được $x=-1,x=2,x=3$

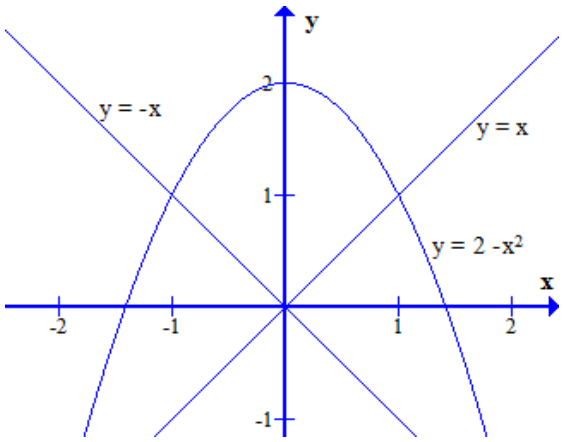
$\Rightarrow S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^3-4x^2+x+6\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{3}\left|x^3-4x^2+x+6\right|\mathrm{d}x$

$=\left|\int\limits_{-1}^{2}\left(x^3-4x^2+x+6\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{2}^{3}\left(x^3-4x^2+x+6\right)\mathrm{d}x\right|$

Bấm Casio ta được $\int\limits_{-1}^{2}\left(x^3-4x^2+x+6\right)\mathrm{d}x=\frac{45}{4},\int\limits_{2}^{3}\left(x^3-4x^2+x+6\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{12}$

$\Rightarrow S=\frac{45}{4}+\frac{7}{12}=\frac{71}{6}$

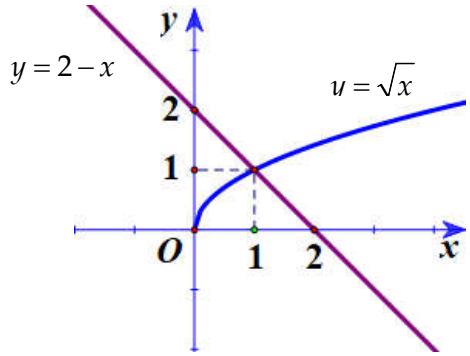
Câu 47. **Chọn D.**



Trước tiên, ta vẽ đồ thị của ba hàm số $y=2-x^2,y=x,y=-x$ trên cùng một hệ tọa độ. Miền cần tính diện tích là miền gạch sọc ngang trong hình vẽ, nó có diện tích gấp đôi diện tích hình sọc ngang bên phải Oy, tức gấp đôi diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường $y=2-x^2,y=x,,x=0,x=1$

$\Rightarrow S=2\int\limits_{0}^{1}\left|2-x^2-x\right|\mathrm{d}x=2\left|\int\limits_{0}^{1}\left(2-x^2-x\right)\mathrm{d}x\right|=2.\frac{7}{6}=\frac{7}{3}$

Câu 48. **Chọn C.**



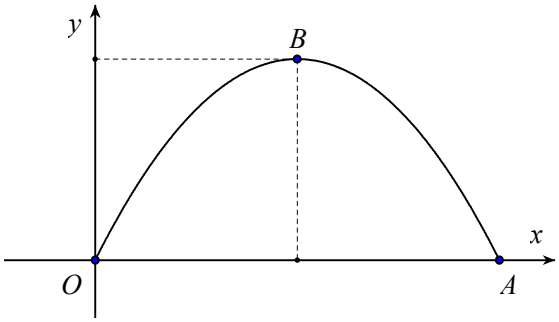
$$S=\int_0^1\left|\sqrt{x}-0\right|\mathrm{d}x+\int_1^2\left|2-x-0\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x+\int_1^2\left|2-x\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_1^2\left(2-x\right)\mathrm{d}x$$

Câu 49. **Chọn C.**

Giả sử $ABCDEF$ là hình lục giác đều có cạnh bằng 2 dm, ta tính diện tích một cánh hoa: Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm của cạnh AB , $A\left(1;0\right),B\left(-1;0\right),I\left(0;3\right)$ và đỉnh I của parabol. Phương trình của parabol có dạng: $y=ax^2+b\left(a\neq 0\right)$, Do I,A,B thuộc $\left(P\right)$ nên ta có: $y=-3x^2+3$. Do đó: diện tích mỗi cánh hoa là: $S_1=\int_{-1}^{1}\left(-3x^2+3\right)dx=4\left(dm^2\right)$

Vậy : Diện tích của hình là: $A=6\left(\frac{2^2\sqrt{3}}{4}+4\right)=6\sqrt{3}+24\approx 34,39\left(dm^2\right)$

Câu 50. **Chọn C.**



• Gắn parabol $\left(P\right)$ và hệ trục tọa độ sao cho $\left(P\right)$ đi qua $O(0;0)$

• Gọi phương trình của parbol là (P):$\left(P\right)$: $y=ax^2+bx+c$

Theo đề ra, $\left(P\right)$ đi qua ba điểm $O(0;0),A(3;0),B(1,5;2,25)$.

Từ đó, suy ra $\left(P\right)$: $y=-x^2+3x$

• Diện tích phần Bác Năm xây dựng: $S=\int_0^3\left|-x^2+3x\right|dx=\frac{9}{2}$

• Vậy số tiền bác Năm phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000=6750000$ (đồng)

Câu 51. **Chọn C.**

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow x^4-(m^2+2)x^2+m^2+1=0\Leftrightarrow(x^2-1)(x^2-m^2-1)=0$ có 4 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{m^2+1} \end{array}\right.$ với $m\neq 0$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số và trục hoành phần phía trên trục hoành là

$S=2\int\limits_0^1\left[x^4-\left(m^2+2\right)x^2+m^2+1\right]dx=\dfrac{96}{15}$

$\Rightarrow m=\pm 2$

Câu 52. **Chọn C.**

Phương trình $(d): y=kx-k+5$

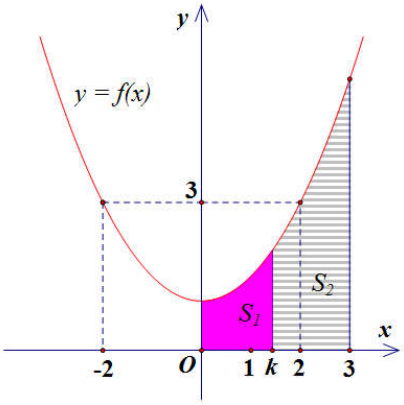
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $(d): 3x^3-kx+k-5=0$ (1)

Ta có $\Delta_{(1)}=k^2-12k+60>0\Rightarrow (d)$ luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A,B có hoành độ là

$\left[\begin{array}{l} x_A=\dfrac{k+\sqrt{\Delta}}{6} \\ x_B=\dfrac{k-\sqrt{\Delta}}{6} \end{array}\right.$

$\Rightarrow S=\int\limits_{x_A}^{x_B}\left[kx-k+5-3x^2\right]dx=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{54}(k^2-12k+60)$

$\Rightarrow \min S\Leftrightarrow k=6$



Câu 53. **Chọn C.**

$(C): y=f(x)=ax^2+bx+c(c\neq 0)$ qua $(0;1),(2;3),(-2;3)$

nên $(C): y=\dfrac{1}{2}x^2+1$

Khi đó

$S_1=2S_2\Leftrightarrow\int\limits_0^k\left(\dfrac{1}{2}x^2+1\right)dx=2\int\limits_k^3\left(\dfrac{1}{2}x^2+1\right)dx\Leftrightarrow\left(\dfrac{x^3}{6}+x\right)\Big|_0^k=2\left(\dfrac{x^3}{6}+x\right)\Big|_k^3$

$\Leftrightarrow\dfrac{k^3}{6}+k=15-2\left(\dfrac{k^3}{6}+k\right)\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}k^3+3k-15=0\Leftrightarrow k\approx 2,47$

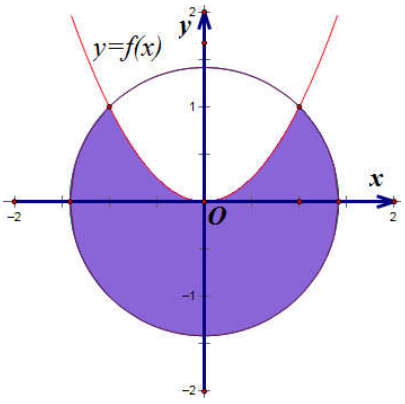
Câu 54. **Chọn A.**

Phương trình đường tròn: $x^2+y^2=2$.

Phương trình nửa trên trục hoành của đường tròn:

$y=\sqrt{2-x^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường tròn: $\sqrt{2-x^2}=x^2\Leftrightarrow x^4+x^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^2=-2\,(l) \\ x^2=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm 1$.



Diện tích phần hình phẳng **không** được tô đậm bên trong hình tròn là

$S_1=2\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx=2\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx-2\int\limits_0^{\sqrt{2}}x^2dx=I-J$

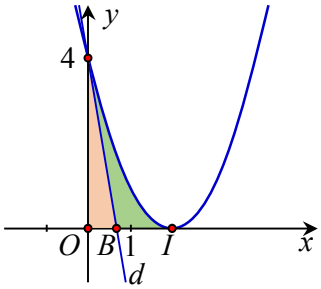
$$I=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2 t}.\sqrt{2}\cos t dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

$$J=2\int_0^{\sqrt{2}}x^2dx=2\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$S_1=I-J=\pi-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Diện tích cần tìm là $S_{hp}=S_{htron}-S_1=2\pi-\pi+\frac{4\sqrt{2}}{3}=\pi+\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Câu 55. **Chọn C.**



Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$ và trục hoành là: $x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2$.

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y=x^2-4x+4$, trục tung và trục hoành là:

$$S=\int_0^2\left|x^2-4x+4\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc k có dạng: $y=kx+4$.

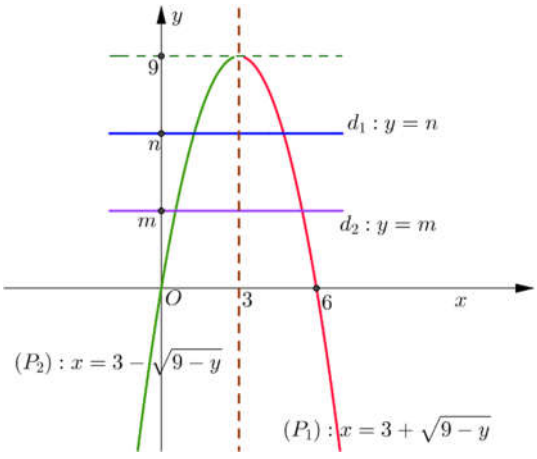
Gọi B là giao điểm của (d) và trục hoành. Khi đó $B\left(\frac{-4}{k};0\right)$.

Đường thẳng (d) chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau khi $B\in OI$ và $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}S=\frac{4}{3}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<\frac{-4}{k}<2\\ S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.4.\frac{-4}{k}=\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k<-2\\ k=-6\end{cases}\Leftrightarrow k=-6.$$

Câu 56. **Chọn A.**

Cách 1: (Dùng công thức diện tích theo biến y)



+ Gọi $(H):\begin{cases}(P):y=6x-x^2\\ Ox:y=0\\ x=0,x=6\end{cases}$. Suy ra:

$$S=S_H=\int_0^6\left(6x-x^2\right)dx=36$$

Ta có:

$$y=6x-x^2\Leftrightarrow(x-3)^2=9-y\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=3+\sqrt{9-y} & (P_1)\\ x=3-\sqrt{9-y} & (P_2)\end{bmatrix}$$

+ Gọi $(H_1):\begin{cases}(P_1):x=3+\sqrt{9-y}\\(P_2):x=3-\sqrt{9-y}\\y=n,y=9\end{cases}$.

Suy ra: $S_1=S_{H_1}=\int\limits_n^9\left(3+\sqrt{9-y}-3+\sqrt{9-y}\right)dy=2\int\limits_n^9\sqrt{9-y}\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\left(\sqrt{9-n}\right)^3$

Mà $S_1=\frac{S}{3}=12$ nên $\frac{4}{3}\left(\sqrt{9-n}\right)^3=12\Leftrightarrow\left(9-n\right)^3=81$

+ Gọi $(H_2):\begin{cases}(P_1):x=3+\sqrt{9-y}\\(P_2):x=3-+\sqrt{9-y}\\y=m,y=9\end{cases}$.

Suy ra: $S_2=S_{H_2}=2\int\limits_m^9\sqrt{9-y}\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\left(\sqrt{9-m}\right)^3$

Mà $S_2=\frac{2S}{3}=24$ nên $\frac{4}{3}\left(\sqrt{9-n}\right)^3=24\Leftrightarrow\left(9-n\right)^3=324$

Vậy $P=81+324=405$.

Cách 2: (Dùng công thức diện tích theo biến x)

Từ điều kiện bài toán ta có : $0<m,n<9$.

Xét các phương trình hoành độ giao điểm : $6x-x^2=0$

$$6x-x^2=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{9-m}\\x=3+\sqrt{9-m}\end{array}\right.\text{ và }\ 6x-x^2=n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{9-n}\\x=3+\sqrt{9-n}\end{array}\right.$$

Gọi $D\begin{cases}y=6x-x^2\\Ox\\x=0;x=6\end{cases};D_M\begin{cases}y=6x-x^2\\y=m\\x=3-\sqrt{9-m};x=3+\sqrt{9+m}\end{cases};\ D_N\begin{cases}y=6x-x^2\\y=n\\x=3-\sqrt{9-n};x=3+\sqrt{9+n}\end{cases}$

Khi đó ta có :

$S_D=\int\limits_0^6\left(6x-x^2\right)\mathrm{d}x=36$.

$$S_{D_M}=\int\limits_{3-\sqrt{9-m}}^{3+\sqrt{9-m}}\left(6x-x^2-m\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{3-\sqrt{9-m}}^{3+\sqrt{9-m}}\left(\left(9-m\right)-\left(x-3\right)^2\right)\mathrm{d}x=\left(\left(9-m\right)x-\frac{\left(x-3\right)^3}{3}\right)\Bigg|_{3-\sqrt{9-m}}^{3+\sqrt{9-m}}$$

$$==\frac{4}{3}.\left(\sqrt{9-m}\right)^3$$

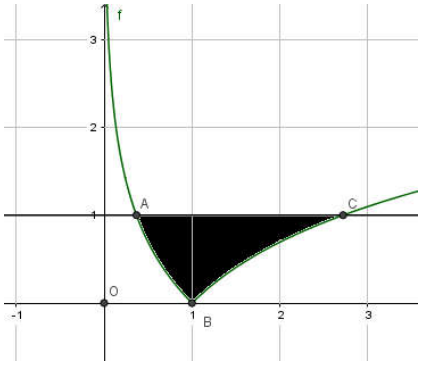
Chứng minh tương tự ta có : $S_{D_N}=\frac{4}{3}.\left(\sqrt{9-n}\right)^3$

Theo bài ra ta có : $S_{D_M}=\frac{2}{3}.36=24$ và $S_{D_N}=\frac{1}{3}.36=12$

Do đó $\left(9-m\right)^3=324$ và $\left(9-n\right)^3=81$.

Vậy $P=324+81=405$.

Câu 57. **Chọn B.**



Ta có phương trình hoành độ giao điểm:.

$$|\ln x|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln x=1\\ \ln x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=e\\ x=\dfrac{1}{e}\end{array}\right.\cdot$$

$$S=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1-|\ln x|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}\left(1+\ln x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{e}\left(1-\ln x\right)\mathrm{d}x=I_1+I_2\,.$$

Tính $I_1=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}\left(1+\ln x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\left\{\begin{array}{l}u=1+\ln x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=x\end{array}\right.$.

$$\Rightarrow I_1=x\left(1+\ln x\right)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}-\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}\mathrm{d}x=1-x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}=1-\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}..$$

Tính $I_2=\int\limits_{1}^{e}\left(1-\ln x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $\left\{\begin{array}{l}u=1-\ln x\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=x\end{array}\right.$.

$$\Rightarrow I_2=x\left(1-\ln x\right)\Big|_{1}^{e}+\int\limits_{1}^{e}\mathrm{d}x=-1+x\Big|_{1}^{e}=-1+\left(e-1\right)=e-2..$$

Suy ra $S=e+\dfrac{1}{e}-2=ae+\dfrac{b}{e}+c\Rightarrow a=1,\ b=1,\ c=-2..$

Vậy, $P=a+b+c=0$.

Câu 58. **Chọn A.**

- Toạ độ giao điểm $(x;y)$ thoả hệ PT $\left\{\begin{array}{l}my=x^2\\ mx=y^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{x^2}{m}\\ mx=\left(\dfrac{x^2}{m}\right)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{x^2}{m}\\ m^3x=x^4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{x^2}{m}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=m\end{array}\right.\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right.\vee\left\{\begin{array}{l}x=m\\ y=m\end{array}\right..$$

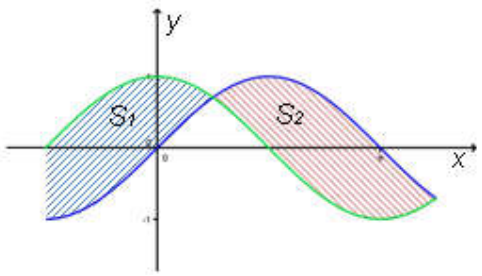
- Với $x\in[0;m],(m>0)$ thì đường $mx=y^2\Rightarrow y=\sqrt{mx}$. Do đó diện tích hình phẳng

$$S=\left|\int\limits_{0}^{m}\left(\frac{x^2}{m}-\sqrt{mx}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{x^3}{3m}-\frac{2\sqrt{m}}{3}\sqrt{x^3}\Big|_{0}^{m}\right|=\frac{1}{3}m^2\,.$$

- Yêu cầu $S=3\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}m^2=3\Leftrightarrow m=1$ (do $m>0$).

Câu 59. **Chọn D.**

Ta có: $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$



$\sin x=\cos x \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$

Dựa vào hình vẽ ta có S_1, S_2 giới hạn bởi các giá trị $x=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{5\pi}{4}$.

Vậy $S_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x=1+\sqrt{2}$; $S_2=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=2\sqrt{2}$

Suy ra: $S_1^2+S_2^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=11+2\sqrt{2}$.

Câu 60. **Chọn C.**

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ y=x^2\end{cases}\Rightarrow x^4+x^2-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\ x^2=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm1$.

Ta có $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ y\ge0\end{cases}\Rightarrow y=\sqrt{2-x^2}$.

Diện tích hình phẳng

$S=\int\limits_{-1}^{1}\left|x^2-\sqrt{2-x^2}\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-\sqrt{2-x^2}\right)\mathrm{d}x\right|=2\left|\int\limits_{0}^{1}\left(x^2-\sqrt{2-x^2}\right)\mathrm{d}x\right|=2|I-J|$.

Tính $I=\int\limits_0^1x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$.

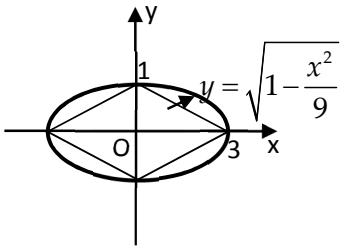
Tính $J=\int\limits_0^1\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $x=\sqrt{2}\sin t\Rightarrow\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$ và

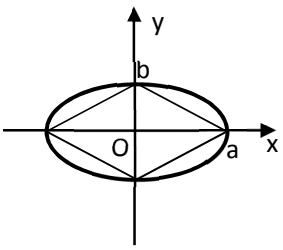
$x=0\Rightarrow t=0;x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

Khi đó $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2\sin^2t}.\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2t\mathrm{d}t=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\cos2t}{2}\mathrm{d}x=\left(t+\dfrac{1}{2}\sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.

Vậy $S=2\left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{3}$.

Câu 61. **Chọn D.**





Cách 1: Gọi T là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi elip và hai trục tọa độ bên góc phần tư thứ nhất. Khi đó $T=\int\limits_0^3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow S_1=4T=3\pi$.

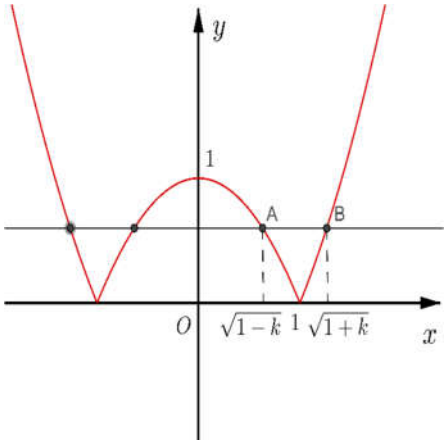
Hơn nữa $S_2=\frac{1}{2}.6.2=6$. Khi đó $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$.

Cách 2(tổng quát): Diện tích của elip ứng với hai bán trục a và b là $S_1=\pi ab$. Hình thoi có các đỉnh là đỉnh của elip có bán trục a và b có độ dài hai đường chéo là $2a$ và $2b$ nên có diện tích là $S_2=\frac{1}{2}.2a.2b=2ab$. Khi đó $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi ab}{2ab}=\frac{\pi}{2}$.

Câu 62. **Chọn D.**

Do đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng nên yêu cầu bài toán trở thành:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=1-x^2, y=k, x=0$ bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y=1-x^2, y=x^2-1, y=k, x>0.$



$$\int_0^{\sqrt{1-k}}\left(1-x^2-k\right)\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{1-k}}^{1}\left(k-1+x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{1+k}}\left(k-x^2+1\right)\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow\left(1-k\right)\sqrt{1-k}-\frac{1}{3}\left(1-k\right)\sqrt{1-k}$$

$$=\frac{1}{3}-\left(1-k\right)-\frac{1}{3}\left(1-k\right)\sqrt{1-k}+\left(1-k\right)\sqrt{1-k}+\left(1+k\right)\sqrt{1+k}-\frac{1}{3}\left(1+k\right)\sqrt{1+k}-\left(1+k\right)+\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}\left(1+k\right)\sqrt{1+k}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+k}\right)^3=2\Leftrightarrow k=\sqrt[3]{4}-1.$$

Câu 63. **Chọn C.**

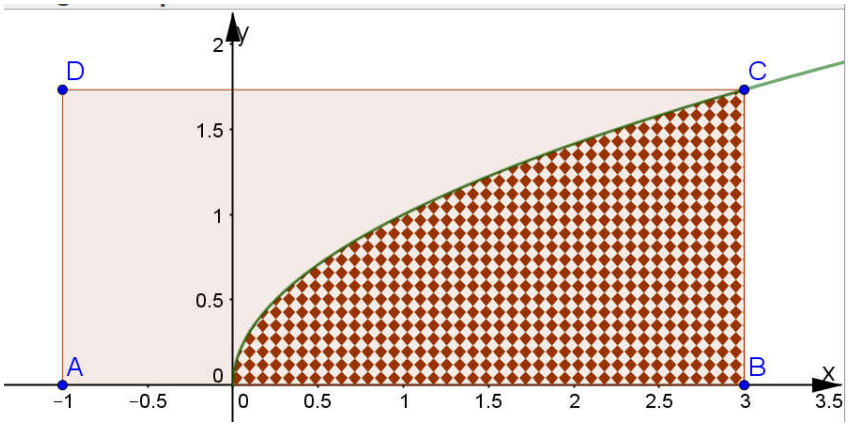
Ta có $S=\int_1^2 xf\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $x^2=t\Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=1,\ x=2\Rightarrow t=4$.

Khi đó $S=\int_1^4\frac{1}{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}I\Rightarrow I=2S=5$.

Câu 64. **Chọn D.**



Gọi $ABCD$ là hình chữ nhật với AB nằm trên trục Ox, $A(-1;0)$ và $C\left(a;\sqrt{a}\right)$

Nhận thấy đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và đi qua $C\left(a;\sqrt{a}\right)$. Do đó nó chia hình chữ nhật $ABCD$ ra làm 2 phần là có diện tích lần lượt là S_1, S_2. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$ và trục Ox, $x=0, x=a$ và S_2 là diện tích phần còn lại. Ta lần lượt tính S_1, S_2.

Tính diện tích $S_1=\int\limits_0^a \sqrt{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow t^2=x\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$; Khi $x=0\Rightarrow t=0; x=a\Rightarrow t=\sqrt{a}$.

Do đó $S_1=\int\limits_0^{\sqrt{a}} 2t^2\mathrm{d}t=\left(\frac{2t^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{a}}=\frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a+1; AD=\sqrt{a}$ nên

$$S_2=S_{ABCD}-S_1=\sqrt{a}(a+1)-\frac{2a\sqrt{a}}{3}=\frac{1}{3}a\sqrt{a}+\sqrt{a}$$

Do đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau nên

$$S_1=S_2\Leftrightarrow\frac{2a\sqrt{a}}{3}=\frac{1}{3}a\sqrt{a}+\sqrt{a}\Leftrightarrow a\sqrt{a}=3\sqrt{a}\Leftrightarrow a=3\ (\text{Do } a>0).$$

2. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍCH THỂ TÍCH

1C	2B	3C	4B	5C	6D	7D	8D	9D	10B
11D	12D	13D	14C	15B	16A	17C	18A	19C	20C
21B	22D	23A	24A	25C	26C	27D	28B	29A	30C
31B	32A	33C	34C	35B	36C	37C	38D	39D	40C
41A	42B	43D	44B	45B	46D	47C	48B	49C	50D
51D	52C	53A	54B	55A	56D	57B	58A	59B	60B
61C	62C	63B	64B	65A	66D	67D	68B	69D	70B

Câu 1. **Chọn C.**

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\int\limits_1^4 \pi.(\frac{4}{x})^2 dx=12\pi.$

Câu 2. **Chọn B.**

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$

Câu 3. **Chọn C.**

Giao điểm của hai đường $y=\sqrt{x-1}$ và $y=0$ là $A(1;0)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int\limits_1^3 (x-1)dx=2\pi.$

Câu 4. **Chọn B.**

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int\limits_0^1 (x^3+1)^2 dx=\frac{23\pi}{14}.$

Câu 5. **Chọn C.**

Với $x\in[a;b]$ thì $y^2=x\Leftrightarrow y=\sqrt{x}$.

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int_a^b xdx.$

Câu 6. **Chọn D.**

Giao điểm của hai đường $y^2=-x^2+2x$ và $y=0$ là $O(0;0)$ và $A(2;0)$. Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int\limits_0^2 (-x^2+2x)^2 dx=\frac{16\pi}{15}.$

Câu 7. **Chọn D.**

Giao điểm của hai đường $y=\sqrt{1-x^2}$ và $y=0$ là $B(-1;0)$ và $A(1;0)$. Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int\limits_{-1}^1 (1-x^2)dx=\frac{4\pi}{3}.$

Câu 8. **Chọn D.**

Khối tròn xoay trong đề bài có được bằng cách quay hình phẳng tạo bởi các đường $x=0;\ x=\pi;\ y=\sqrt{\sin x};\ Ox$ quay trục Ox.

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int\limits_0^{\pi}\sin x dx=2\pi.$

Câu 9. **Chọn D.**

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x dx=\pi\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$

Câu 10. **Chọn B.**

Theo công thức ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\int\limits_0^4\pi.(1+\sqrt{x})^2dx=\frac{68\pi}{3}.$

Câu 11. **Chọn D.**

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C):(x-5)^2+y^2=25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

Ta có $(x-5)^2+y^2=25\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25-(x-5)^2}$

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y=\sqrt{25-(x-5)^2}=\sqrt{10x-x^2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int\limits_0^2\left(10x-x^2\right)dx=\pi\left(5x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=\frac{52\pi}{3}$$

Thể tích khối cầu là: $V_2=\frac{4}{3}\pi.5^3=\frac{500\pi}{3}$

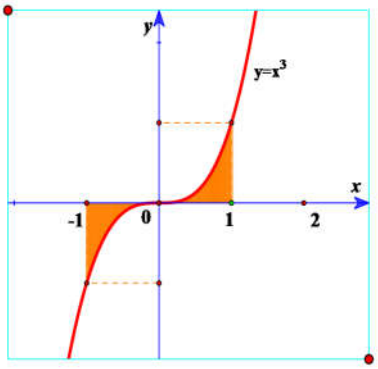
Thể tích cần tìm: $V=V_2-2V_1=\frac{500\pi}{3}-2.\frac{52\pi}{3}=132\pi\left(dm^3\right)$

Cách 2: Hai phần cắt đi có thể tích bằng nhau, mỗi phần là một chỏm cầu có thể tích

$$V_1=\pi\int\limits_d^R\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\int\limits_3^5\left(25-x^2\right)dx=\frac{52\pi}{3}$$

Vậy thể tích của chiếc lu là $V=V_c-2V_1=\frac{4}{3}\pi.5^3-2\frac{52}{3}\pi=132\pi$

Câu 12. **Chọn D.**



Thể tích khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y=x^3$, trục Ox, $x=-1$, $x=1$ một vòng quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int\limits_{-1}^1\left(x^3\right)^2dx=\pi\int\limits_{-1}^1\left(x^6\right)dx=\pi\frac{x^7}{7}\Big|_{-1}^1=\frac{2}{7}\pi.$$

Câu 13. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Suy ra $V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(4x^2-4x^3-x^4\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4x^3}{3}-\frac{4x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{16}{15}\pi$

Câu 14. **Chọn C.**

Thể tích khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y=\tan x;\ Ox;\ x=0;\ x=\frac{\pi}{4}$ là:

$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2 x+1\right)\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\pi\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\pi x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-\frac{\pi^2}{4}$

Câu 15. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $1-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$

Suy ra $V=\pi\int\limits_{-1}^1\left(1-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-1}^1\left(1-2x^2+x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^1=\frac{16}{15}\pi$

Câu 16. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=0\Leftrightarrow x=0$

Suy ra $V=\pi\int\limits_0^1\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1x^4\mathrm{d}x=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$

Câu 17. **Chọn C.**

$y=\left(2x+1\right)^3\Rightarrow y^3=2x+1\Rightarrow x=\frac{y^3-1}{2}$

Phương trình tung độ giao điểm: $\frac{y^3-1}{2}=0\Leftrightarrow y=1$

Suy ra $V=\pi\int\limits_1^3\left(\frac{y^3-1}{2}\right)^2\mathrm{d}y=\pi\int\limits_1^3\left(\frac{y^6-2y^3+1}{4}\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\left(\frac{y^7}{7}-\frac{2y^4}{4}+y\right)\Big|_1^3=\frac{480}{7}\pi$

Câu 18. **Chọn A.**

$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{x.\cos x+\sin^2 x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x\cos x+\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi\left(3\pi-4\right)}{4}$

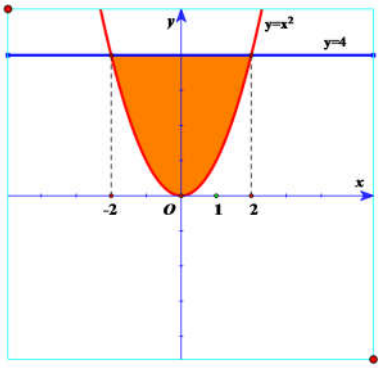
Câu 19. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x+1}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Suy ra $V=\pi\int\limits_{-\frac{1}{2}}^0\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-\frac{1}{2}}^0\left(2-\frac{1}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-\frac{1}{2}}^0\left(4-\frac{4}{x+1}+\frac{1}{\left(x+1\right)^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\pi\left(4x-4\ln\left(x+1\right)-\frac{1}{x+1}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^0=\pi\left(-1+2-4\ln 2+2\right)=\left(3-4\ln 2\right)\pi$

Câu 20. **Chọn C.**



Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$

Suy ra:

$$V=\pi\int_{-2}^{2}\left[4^2-\left(x^2\right)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int_{-2}^{2}\left(16-x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(16x-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-2}^{2}$$

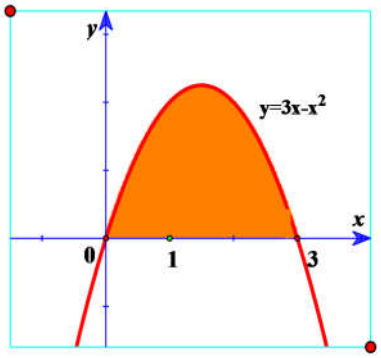
$$=\frac{256}{5}\pi$$

Câu 21. **Chọn B.**

Thể tích khối tròn xoay được giới hạn bởi các đường $y=\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=\pi$ là: $V=\pi\int_0^{\pi}\left(\sin x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}.$$

Câu 22. **Chọn D.**



Phương trình hoành độ giao điểm: $3x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

Suy ra: $V=\pi\int_0^{3}\left(3x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{3}\left(9x^2-6x^3+x^4\right)\mathrm{d}x$

$$=\pi\left(\frac{9x^3}{3}-\frac{6x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{3}=\pi\left(\frac{81}{10}-0\right)=\frac{81\pi}{10}$$

Câu 23. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Suy ra: $V=\pi\int_1^{4}\left(\sqrt{x}-1\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^{4}\left(x-2\sqrt{x}+1\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x\right)\Big|_1^{4}=\frac{7\pi}{6}.$

Câu 24. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x=x\Leftrightarrow x=0$.

Suy ra: $V=\pi\left|\int_0^{1}\left[\left(3x\right)^2-x^2\right]\mathrm{d}x\right|=\pi\int_1^{1}8x^2\mathrm{d}x=\frac{8\pi}{3}x^3\Big|_0^{1}=\frac{8\pi}{3}.$

Câu 25. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$.

Suy ra: $V=\pi\int_0^{4}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}x^2\Big|_0^{4}=8\pi$.

Câu 26. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x+1=\frac{6}{x}\Leftrightarrow x^2+x-6=0\Rightarrow x=2$.

Suy ra: $V=\pi\left|\int_1^2\left[(x+1)^2-\left(\frac{6}{x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\right|=\frac{35\pi}{3}$.

Câu 27. **Chọn D.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x+5=\frac{4}{x}\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Suy ra: $V=\pi\left|\int_1^2\left[(-x+5)^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\right|=9\pi$.

Câu 28. **Chọn B.**

Ta có: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $y=0\Leftrightarrow x=\pm a$.

Suy ra: $V=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}ab^2\pi$.

Câu 29. **Chọn A.**

Ta có: $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{4}y^2\ \left(y\le 0\right)\Rightarrow \mathrm{y}=-2\sqrt{x}\le 0;x\ge 0\\x=-\frac{1}{2}y^2+3y\left(y\le 2\right)\Rightarrow y=3-\sqrt{9-2x}\ge 0;0\le x\le 4\end{array}\right.$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $-2\sqrt{x}=3-\sqrt{9-2x}\Leftrightarrow x=0$.

Ta có: $V_1=\pi\int_0^4 4x\mathrm{d}x=32\pi;V_2=\pi\int_0^4\left(3-\sqrt{9-2x}\right)^2\mathrm{d}x=4\pi$

Suy ra: $V=\max\left\{V_1,V_2\right\}=32\pi$.

Câu 30. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{x}=\frac{1}{2}x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Suy ra: $V=\pi\left|\int_0^4\left(x-\frac{1}{4}x^2\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{8\pi}{3}$.

Câu 31. **Chọn B.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\left|\begin{array}{l}x^3=-x+2\Leftrightarrow x=1\\x^3=0\Leftrightarrow x=0\\-x+2=0\Leftrightarrow x=2\end{array}\right.$.

Ta có: $V_1=\pi\int_0^1 x^6\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\pi;V_2=\pi\int_1^2\left(2-x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi$

Suy ra: $V=V_1+V_2=\frac{10\pi}{21}$.

Câu 32. **Chọn A.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $-2\sqrt{x}=\frac{1}{2}x\Leftrightarrow x=0$.

Ta có: $-2\sqrt{x} \le 0; \forall x \in [0;4]; \frac{1}{2}x \ge 0; \forall x \in [0;4]$

$V_1 = \pi \int_0^4 4x\mathrm{d}x = 32\pi; V_2 = \pi \int_0^4 \frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x = \frac{16}{3}\pi$

Suy ra: $V = \max\{V_1, V_2\} = 32\pi$.

Câu 33. **Chọn C.**

Ta có: $V = \pi \int_0^3 (x-2)^4 \mathrm{d}x = \frac{33\pi}{5}$.

Câu 34. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x+2=0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.

Suy ra: $V = \pi \int_{-\frac{2}{3}}^0 (3x+2)^2 \mathrm{d}x = \frac{8\pi}{9}$.

Câu 35. **Chọn B.**

Ta có: $V = \pi \int_0^2 (1-x)^4 \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{5}$.

Câu 36. **Chọn C.**

Ta có: $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \pi$.

Câu 37. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Suy ra: $V = \pi \left| \int_0^1 (x-x^2)\mathrm{d}x \right| = \frac{\pi}{6}$.

Câu 38. **Chọn D.**

Ta có $f(x) = e^x \Rightarrow V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (e^x)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

Câu 39. **Chọn D.**

$V = \pi \int_{-1}^1 (x^3)^2 \mathrm{d}x = \pi \frac{x^7}{7}\Big|_{-1}^1 = \frac{2\pi}{7}$.

Câu 40. **Chọn C.**

Xét phương trình $\ln x = 0, x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2 \mathrm{d}x$

Đặt $u = \ln^2 x \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x; \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \Rightarrow v = x$

$$V=\pi x\ln^2 x\Big|_1^e-2\pi\int_1^e\ln x\mathrm{d}x$$

$$=e\pi-2\pi\left(x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\mathrm{d}x\right)=e\pi-2\pi\left(e-e+1\right)=\left(e-2\right)\pi$$

Câu 41. **Chọn A.**

$$V=\pi\int_1^2\left(\ln x\right)^2\mathrm{d}x$$

$$V=\pi x\ln^2 x\Big|_1^2-2\pi\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\ln^2 2-2\pi\left(x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\mathrm{d}x\right)=2\pi\ln^2 2-2\pi\left(2\ln 2-1\right)=2\pi\left(\ln 2-1\right)^2$$

Câu 42. **Chọn B.**

Xét phương trình $x^3=8\Leftrightarrow x=2$

$$V=\pi\int_2^3\left|x^6-64\right|\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^7}{7}-64x\right)\Big|_2^3=\frac{\pi}{7}\left(3^7-9.2^6\right)$$

Câu 43. **Chọn D.**

• Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi các đường $y=-bx$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,\ x=-\frac{b}{a}$. Khi đó, $V_1=\pi\int_{-\frac{b}{a}}^0\left(-bx\right)^2\mathrm{d}x=\pi b^2.\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{b}{a}}^0=\frac{\pi b^5}{3a^3}$

• Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi các đường $y=ax^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,\ x=-\frac{b}{a}$. Khi đó, $V_2=\pi\int_{-\frac{b}{a}}^0\left(ax^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi a^2.\frac{x^5}{5}\Big|_{-\frac{b}{a}}^0=\frac{\pi b^5}{5a^3}$

• Suy ra, thể tích khối tròn xoay khi quay hình $\left(K\right)$ quanh trục Ox là :

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi b^5}{3a^3}-\frac{\pi b^5}{5a^3}=\frac{2\pi}{15}\frac{b^5}{a^3}$$

• Để thể tích không phụ thuộc vào a và b thì tỉ số $\frac{b^5}{a^3}$ cố định.

Câu 44. **Chọn B.**

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi(\pi+2)}{8}$.

Câu 45. **Chọn B.**

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int_0^2\left(e^{2x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\left(e^8-1\right)$.

Câu 46. **Chọn D.**

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int_0^{\pi}\left(\sin^2 x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{3\pi^2}{8}$.

Câu 47. **Chọn C.**

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi$.

Câu 48. **Chọn B.**

Thể tích cần tìm là

$$V=\pi\int\limits_0^1\left(xe^{\frac{x}{2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1xe^x\mathrm{d}x=\pi\left(x^2e^x\Big|_0^1-2\int\limits_0^1xe^x\mathrm{d}x\right)=\pi\left[x^2e^x\Big|_0^1-2\left(xe^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1e^x\mathrm{d}x\right)\right]=\pi\left(e-2\right)$$

Câu 49. **Chọn C.**

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_1^2\left(x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{2}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi e^2$. (*gợi ý: Tích phân từng phần*)

Câu 50. **Chọn D.**

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^2\left[\left(1-x\right)^2\right]^2\mathrm{d}x=\dfrac{2\pi}{5}$.

Câu 51. **Chọn D.**

Vẽ hình

Suy ra thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2-4\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2\left(2x-4\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{32\pi}{5}$.

Câu 52. **Chọn C.**

Giải phương trình $x\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_1^e\left(x\ln x\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{\pi\left(5e^3-2\right)}{27}$. (*gợi ý: tích phân từng phần hai lần*)

Câu 53. **Chọn A.**

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ với $y=0$ là nghiệm của phương trình:

$$\frac{2x-1}{x-1}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay $\left(H\right)$ xung quanh trục Ox bằng

$$V=\pi\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}\left[4+\frac{4}{x-1}+\frac{1}{\left(x-1\right)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left(4x+4\ln\left|x-1\right|-\frac{1}{x-1}\right)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}=\pi\left(\frac{15}{2}-4\ln2\right)$$

Câu 54. **Chọn B.**

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\cos4x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\dfrac{1+\cos8x}{2}\mathrm{d}x=\pi\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{16}\sin8x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}=\dfrac{\pi^2}{16}$.

Câu 55. **Chọn A.**

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^1\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1\left[1-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$$=\pi\left(x-2\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi(3-4\ln 2)}{2}.$$

Câu 56. **Chọn D.**

Hoành độ giao điểm của đồ thị 2 hàm số $y=x^2$ và $y=2x$ là nghiệm của phương trình

$$x^2=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là

$$V=\pi\int\limits_0^2(2x)^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x\ =\pi\left(\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2-\pi\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{64\pi}{15}$$

Câu 57. **Chọn B.**

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=1-x^2$ với trục Ox là nghiệm của phương trình: $1-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

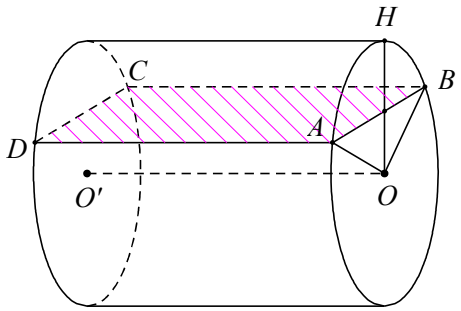
Thể tích khối tròn xoay tạo thành là:

$$V=\pi\int\limits_{-1}^1\left(1-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-1}^1\left(1-2x^2+x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^1=\frac{16\pi}{15}$$

Câu 58. **Chọn A.**

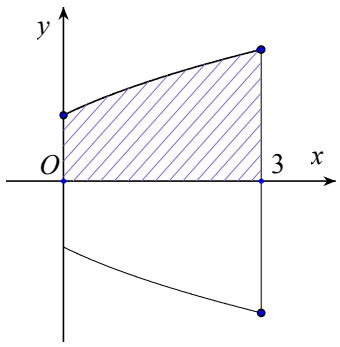
Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là $V=\pi\int\limits_0^1\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^1x^4\mathrm{d}x=\pi\dfrac{x^5}{5}\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{5}$.

Câu 59. **Chọn B.**



- Thể tích của bồn (hình trụ) đựng dầu là: $V=\pi r^2h=\pi.1^2.5=5\pi\ (m^3)$
- Thể tích phần đã rút dầu ra (*phần trên mặt (ABCD)*) là: $V_1=\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).5\approx 3{,}070\ (m^3)$
- Vậy thể tích cần tìm là: $V_2=V-V_1=5\pi-3{,}07\approx 12{,}637\ (m^3)$.

Câu 60. **Chọn B.**



- $r_1 = y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$
- $r_2 = y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 3$

Suy ra: $V = \pi \int\limits_0^3 y^2 \mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^3 (x+1)\mathrm{d}x = \pi \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^3 = \frac{15}{2}\pi$

Câu 61. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x+1 = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 (x \neq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 (l) \end{array} \right.$$

Vì $\frac{6}{x} > x+1 > 0$ với $x \in (1;2)$ nên thể tích cần tính là $V = \pi \int_1^2 \left(\frac{6}{x} \right)^2 \mathrm{d}x - \pi \int_1^2 (x+1)^2 \mathrm{d}x = \frac{35\pi}{3}$.

Câu 62. **Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x \in \{0;4\}$.

Vẽ hình

Suy ra thể tích cần tìm là $V = \pi \int\limits_0^4 \left(\sqrt{x} \right)^2 dx - \pi \int\limits_0^4 \left(\frac{1}{2}x \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{8\pi}{3}$.

Câu 63. **Chọn B.**

Giải phương trình $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0; -x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x^3 = -x+2 \Leftrightarrow x = 1$

Vẽ hình

Suy ra thể tích cần tìm là $V = \pi \int\limits_0^1 x^6 \mathrm{d}x + \pi \int\limits_1^2 (-x+2)^2 \mathrm{d}x = \frac{10\pi}{21}$.

Câu 64. **Chọn B.**

Giải phương trình $\sqrt{(2x+1)\ln x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thể tích cần tìm là $V = \pi \int\limits_1^2 \left(\sqrt{(2x+1)\ln x} \right)^2 \mathrm{d}x = -\frac{5}{2}\pi + \ln 64\pi$

Câu 65. **Chọn A.**

Đặt hệ trúc với tâm O , là tâm của mặt cầu ; đường thẳng đứng là Ox , đường ngang là Oy ; đường tròn lớn có phương trình $x^2 + y^2 = 25$

Thể tích là do hình giới hạn bởi Ox, đường cong $y = \sqrt{25 - x^2}, x = 3, x = -3$ quay quanh Ox là $V = \pi \int\limits_{-3}^3 \left(25 - x^2 \right) dx = 132\pi$.

Câu 66. **Chọn D.**

Ta có $V_2 = \pi \int\limits_a^b \left(-2f(x) \right)^2 \mathrm{d}x = 4\pi \int\limits_a^b \left(f(x) \right)^2 \mathrm{d}x = 4V_1$.

Câu 67. **Chọn D.**

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_{1}^{8}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\mathrm{d}x=18,6\pi$.

Câu 68. **Chọn B.**

Giải phương trình $\sqrt{4-x^2}=\frac{1}{3}x^2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$.

Câu 69. **Chọn D.**

Diện tích thiết diện là $S(x)=x.\left|2\sqrt{9-x^2}\right|=2x\sqrt{9-x^2}$

Thể tích cần tìm là $V=\int\limits_{0}^{3}S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{3}\left(2x\sqrt{9-x^2}\right)\mathrm{d}x=18$

Câu 70. **Chọn B.**

Giải phương trình $2\sqrt{1-x^2}=-2x+2\Leftrightarrow x\in\{0;1\}$

$V_1=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}$

$V_2=\pi\int\limits_{0}^{1}\left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{0}^{1}\left(-2x+2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{3}$.

3. ỨNG DỤNG KHÁC CỦA TÍCH PHÂN

1C	**2D**	**3A**	**4B**	**5C**	**6B**	**7D**	**8A**	**9B**	**10D**
11A	**12C**	**13D**	**14A**	**15C**	**16A**	**17D**	**18A**	**19D**	**20A**
21D	**22D**	**23A**	**24B**	**25C**	**26A**	**27D**	**28C**	**29A**	**30D**
31B	**32C**	**33B**							

Câu 1: **Chọn C.**

• Hàm vận tốc $v(t)=v_0+at=15+9,8t$

• Quãng đường tia lửa đi được sau 2,5 giây là:

$s=\int\limits_{0}^{2,5}\left(15+9,8t\right)\mathrm{d}t=\left(15t+4,9t^2\right)\Big|_0^{2,5}=68,125\ m.$

Câu 2: **Chọn D.**

$q=\int\limits_{0}^{0,05}I\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{0}^{0,05}\left(0,3-0,2t\right)\mathrm{d}t=\left(0,3t-\frac{t^2}{10}\right)\Big|_0^{0,05}=0,01475\ mC.$

Câu 3: **Chọn A.**

Quãng đường cần tìm $s=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{4}}\left(1-2\sin 2t\right)\mathrm{d}t=\left(t+\cos 2t\right)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{3\pi}{4}-1$.

Câu 4: **Chọn B.**

• Áp dụng công thức $A=\int_a^b \frac{kq_1q_2}{x^2}\mathrm{d}x$.

Trong đó: $k=9.10^9;\ a=1\ pm=10^{-12}\ m;\ b=4\ pm=4.10^{-12}\ m;\ q_1=q_2=1,6.10^{-19}C$

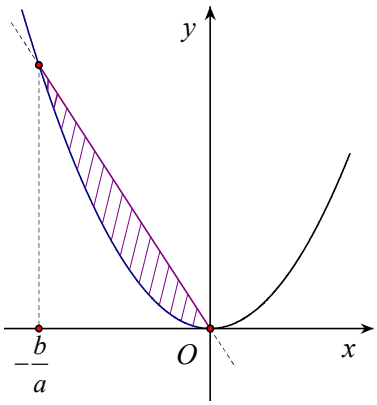
• Suy ra: $A=\int_{10^{-12}}^{4.10^{-12}} \frac{9.10^9.\left(1,6.10^{-19}\right)^2}{x^2}\mathrm{d}x=2,304.10^{-28}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{10^{-12}}^{4.10^{-12}}=1,728.10^{-16}\ J$.

Câu 5: **Chọn C.**

Áp dụng công thức trên với

$a=500;\ P=p(a)=p(500)=1075$.

Suy ra



$$I=\int_0^{500}\left(1200-0,2x-0,0001x^2-1075\right)\mathrm{d}x=\left(125x-\frac{x^2}{10}-\frac{x^3}{30000}\right)\Big|_0^{500}\approx 33333,3\ \text{USD}.$$

Câu 6: **Chọn B.**

• Quãng đường trong 4 giây đầu tiên (*từ* $t=0$ *đến* $t=4$) là

$$s=\int_0^4\left(1,5+\frac{t^2+2}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^4\left(1,5+t-2+\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left(1,5t+\frac{t^2}{2}-2t+6\ln|t+2|\right)\Big|_0^4\approx 12,59\ m.$$

Câu 7: **Chọn D.**

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu hãm phanh. Gọi T là thời điểm ô tô dừng. Ta có $v(T)=0$. Suy ra $-36T+18=0\Rightarrow T=0,5$ (s)

Khoảng thời gian từ lúc hãm phanh đến lúc dừng hẳn ô tô là 0,5 s. Trong khoảng thời gian đó, ô tô di chuyển được quãng đường là

$$s=\int_0^{0,5}\left(-36t+18\right)dt=\left(-18t^2+18t\right)\Big|_0^{0,5}=4,5(m).$$

Câu 8: **Chọn A.**

Quãng đường tại thời gian $t: S(t)=\int(3t+2)dt=\frac{3}{2}t^3+2t+c$

Mà $S(2)=10\Rightarrow c=0\Rightarrow S(t)=\frac{3}{2}t^2+2t$

Tại thời điểm $t=30s: S(30)=1410$

Câu 9: **Chọn B.**

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu được đạp phanh. Gọi T là thời điểm ô tô dừng. Ta có $v(T)=0$ suy ra $20=40T\Leftrightarrow T=0,5$ Như vậy, khoảng thời gian từ lúc đạp phanh đến

khi dừng hẳn của ô tô là 0,5 giây. Trong khoảng thời gian 0,5 giây đó, ô tô di chuyển được quãng đường là $L=\int_0^{0,5}\left(20-40t\right)dt=\left(20t-20t^2\right)\Big|_0^{0,5}=5(m)$

Câu 10: **Chọn D.**

Gọi $v\left(t\right)$ là vận tốc của vật. Ta có $v'\left(t\right)=a\left(t\right)=3t+t^2$ .Suy ra $v\left(t\right)=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+C$

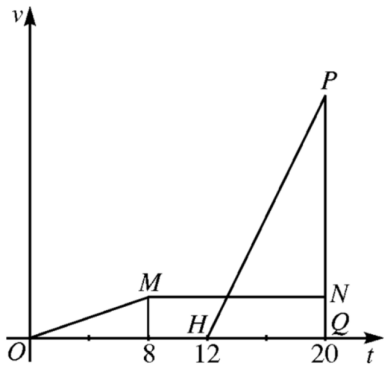
Vì $v\left(0\right)=10$ nên suy ra $C=10$. Vậy $v\left(t\right)=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+10$

Thành thử quãng đường vật đi được là $S=\int_0^{10}\left(\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+10\right)dt=\frac{4300}{3}(m)$

Câu 11: **Chọn A.**

Thời điểm A và B gặp nhau là 20 giây kể từ lúc A xuất phát.

Đồ thị vận tốc của A là đường gấp khúc OMN. Quãng đường A đã đi được là diện tích hình thang $OMNQ$.



Diện tích của nó là $\left(20+12\right)\frac{6}{2}=96$, do đó lúc gặp B,A đi được $96\left(m\right)$. Đồ thị vận tốc của B là đường thẳng HP .

Vì B xuất phát cùng vị trí với A nên quãng đường B đi được là $96\left(m\right)$.

Mặt khác, quãng đường B đã đi được bằng diện tích hình tam giác HPQ với $HQ=8$ và PQ chính là vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A . Suy ra $96=\frac{8PQ}{2}=4PQ$ nên $PQ=24$. Vậy vận tốc của B tại thời điểm nó đuổi kịp A là $24\left(m/s\right)$.

Câu 12: **Chọn C.**

Ta có: $N\left(t\right)=\int\frac{4000}{1+0,5t}dt=8000\ln\left(1+0,5t\right)+C$

Ta có : $N\left(0\right)=250000\Rightarrow C=250000\ \Rightarrow N\left(t\right)=8000\ln\left(1+0,5t\right)+250000$

$N\left(10\right)=8000\ln 6+250000\approx 264334$. Kết quả : ≈ 264334

Câu 13: **Chọn D.**

Ta có: $v\left(t\right)=\int\frac{3}{t+1}dt=3\ln\left(t+1\right)+c$ mà

$v\left(0\right)=6\Rightarrow c=6\Rightarrow v\left(t\right)=3\ln\left(t+1\right)+6$

$v\left(10\right)=3\ln 11+6\approx 13\left(m/s\right)$. Kết quả: $\approx 13\left(m/s\right)$

Câu 14: **Chọn A.**

Ta có $v\left(t\right)=\int\frac{2}{t+1}dt=2\ln\left(t+1\right)+c$

Mà vận tốc ban đầu 5m/s tức là : $v(0)=5\Leftrightarrow 2\ln(0+1)+c=5\Leftrightarrow c=5$.

Nên $v(t)=2\ln(t+1)+5$

Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là : $v(10)=2\ln(11)+5\approx 9,8$

Câu 15: **Chọn C.**

Ta có $v(t)=\int a(t)dt=\frac{10}{1+2t}+C.$

Theo đề ta có $v(0)=30\Leftrightarrow C=20$

Vậy quãng đường vật đó đi được sau 2 giây là : $S=\int_0^2\left(\frac{10}{2t+1}+20\right)dt=5\ln 5+100\approx 108m.$

Câu 16: **Chọn A.**

Khoảng thời gian để tốc độ sinh lợi nhuận để dự án hai bằng một nửa dự án lần một khi:

$P_1(t)=2P_2(t)\Leftrightarrow 50+t^2=400+10t\Leftrightarrow t^2-10t-350=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5+5\sqrt{15}\\t=5-5\sqrt{15}\end{array}\right.\Rightarrow t=5+5\sqrt{15}$ năm.

Lợi nhuận vượt trong khoảng thời gian $0\le t\le 5+5\sqrt{15}$ sẽ xác định bằng tích phân sau:

$$L=\int_0^{5+5\sqrt{15}}\left[P_2(t)-P_1(t)\right]dt=\int_0^{5+5\sqrt{15}}\left[(400+10t)-(50+t^2)\right]dt$$

$$=\int_0^{5+5\sqrt{15}}(350+10t-t^2)dt=\left(350t+5t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^{5+5\sqrt{15}}=6674,6$$

Câu 17: **Chọn D.**

Trước hết để giải bài toán này ta cũng chú ý. Biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là: $v=\int a.dt$

Áp dụng công thức trên , ta có : $v=\int adt=\int\frac{-20}{(1+2t)^2}dt$

Đến đây ta đặt : $u=1+2t\Rightarrow du=2dt\Rightarrow dt=\frac{du}{2}$

$$v=\int\frac{-10}{u}du=\int-10u^{-2}du=\frac{10}{u}+K=\frac{10}{1+2t}+K$$

Với $t=0,v=30\Rightarrow K=20$

Vậy biểu thức vận tốc theo thời gian là : $v=\left(\frac{10}{1+2t}+20\right)cm/s^2.$

Nhận xét: dựa trên nội dung công thức trên ta có thể tính toán, trả lời các câu hỏi trong Vật Lí ứng dụng và trong đời sống. Ta theo dõi các ví dụ tiếp theo.

Câu 18: **Chọn A.**

Tia lửa chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc $a=-9,8\left(m/s^2\right)$

Ta có biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là :

$v=\int adt=\int -9,8dt=-9,8t+C$

Ở đây, với : $t=0,v=15m/s\Rightarrow C=15$

Vậy ta được biểu thức vận tốc có dạng : $v=-9,8t+15$

Câu 19: **Chọn D.**

Tia lửa chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc $a=-9,8\left(m/s^2\right)$

Ta có biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là :

$v=\int adt=\int -9,8dt=-9,8t+C$

Ở đây, với $t=0,v=15m/s\Rightarrow C=15$

Vậy ta được biểu thức vận tốc có dạng:

$v=-9,8t+15$

Lấy tích phân biểu thức vận tốc, ta sẽ có được bểu thức quãng đường:

$s=\int vdt=\int\left(-9,8t+15\right)dt=-4,9\,t^2+15t+K$

Theo đề bài, ta được khi $t=0\Rightarrow s=0\Rightarrow K=0.$

Vậy biểu thức tọa độ của quảng đường là : $s=-4,9t^2+15t.$

Khi $t=2,5\left(s\right)$, ta sẽ được $s=6,875\left(m\right)$

Câu 20: **Chọn A.**

Muốn tìm quãng đường, ta lấy tích phân hàm vận tốc, ta được:

$s=\int vdt=\int\left(v_0+at\right)dt=\int\left(5+at\right)dt$

Do đó, quãng đường có biểu thức là : $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2+C.\ \ (1)$.

Khi $t=0\Rightarrow s=0\Rightarrow C=0$

Theo đề bài : $t=5\left(s\right),a=9,8\left(m/s^2\right).$ Thay vào phương trình của (1) ta được :

$s=5.5+\frac{1}{2}9,8.5^2=147.5\left(m\right)$

Câu 21: **Chọn D.**

Thời gian bơm nước được 6 giây.

Mức nước cần tìm là : $h\left(t\right)=\int_0^6 h'\left(t\right)dt=\int_0^6\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}dt=\frac{3}{20}\left(t+8\right)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^6=\frac{3}{20}\cdot14^{\frac{4}{3}}-\frac{12}{5}\approx2,66\left(cm\right)$

Câu 22: **Chọn D.**

Vi khuẩn HP gây đau dạ dày tại ngày thứ m với số lượng là:

$F\left(m\right)=\int\frac{1000}{2t+1}dt=500\ln\left|2t+1\right|$

Suy ra số vi khuẩn trong dạ dày bệnh nhân sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh là: $F\left(15\right)=500\ln31+2000=3716,99<4000$

Câu 23: **Chọn A.**

Đến lúc phanh vận tốc của xe là : $2t_1+10$ đó cũng là vận tốc khởi điểm cho quãng đường đạp phanh ; sau khi đi thêm t_2 thì vận tốc là 0 nên $2t_1+10=20-4t_2 \Leftrightarrow t_1+2t_2=5$

Lại có $t_1+t_2=4$ lập hệ được $\begin{cases} t_1=3s \\ t_2=1s \end{cases}$

Tổng quãng đường đi được là: $S=\int_0^2 (2t+10)dt+\int_0^1 (20-4t)dt=57m$

Câu 24: **Chọn B.**

Ta có $v(t)=\int a(t)dt=\int (3t^2+t)dt=t^3+\frac{t^2}{2}+C$

Vận tốc ban đầu của vật là $2m/s \Rightarrow v(0)=2 \Rightarrow C=2$

Vậy vận tốc của vận sau $2s$ là: $v(2)=12$

Câu 25: **Chọn C.**

Thời điểm vật dừng lại khi đó ta có vận tốc: $v(t)=0 \Leftrightarrow 3t(4-t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=4 \end{array}\right.$

Chúng ta nhận giá trị $t=4$. Vậy vật chuyển động sau $4s$ thì dừng.

Quãng đường vật đi trong $4s$ là : $S=\int_0^4 3t(4-t)dt=32$

Câu 26: **Chọn A.**

Ta có $v(t)=\int \frac{2}{t+1}dt=2\ln(t+1)+c$

Mà vận tốc ban đầu 5m/s tức là: $v(0)=5 \Leftrightarrow 2\ln(0+1)+c=5 \Leftrightarrow c=5.$

Nên $v(t)=2\ln(t+1)+5.$

Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là: $v(10)=2\ln(11)+5 \approx 9,8$

Câu 27: **Chọn D.**

Ta có $S(t)=\int (1+2t)dt=t+t^2+c$

Vật xuất phát từ A tương ứng với thời gian $t=0$ nên $S(0)=0 \Leftrightarrow 0+0^2+c=0 \Leftrightarrow c=0$

Suy ra : $S(t)=t+t^2$

Vật cách A 20cm ta có : $t^2+t=20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-5 \end{array}\right.$ (nhận $t=4$).

Vậy sau 4s thì vật cách A 20m và vận tốc tại thời điểm đó là : $v(4)=9$

Câu 28: **Chọn C.**

Thời điểm vật dừng lại khi vận tốc bằng 0: $v(t)=0 \Leftrightarrow -5t+a=0 \Leftrightarrow t=\frac{a}{5}$

Ô tô di chuyển được 40 mét: $\int_0^{\frac{a}{5}}(-5t+a)dt=\left(-\frac{5}{2}t^2+at\right)\Big|_0^{\frac{a}{5}}=-\frac{a^2}{10}+\frac{a^2}{5}=\frac{a^2}{10}=40$.

Câu 29: **Chọn A.**

Ta có hàm vận tốc là nguyên hàm của gia tốc: $v(t)=\int\frac{3}{t+1}dt=3\ln|t+1|+C.$

Điều kiện vận tốc ban đầu 6(m/s): $v(0)=6\Leftrightarrow 3\ln|0+1|+C=6\Leftrightarrow C=6$

Vậy hàm vận tốc là: $v(t)=3\ln|t+1|+6$

Vận tốc của vật sau 10 giây là : $v(10)=3\ln 11+6$

Câu 30: **Chọn D.**

Khi ca nô dừng thì $v(t)=0\Leftrightarrow -5t+20=0\Leftrightarrow t=4$

Khi đó quãng đường đi được từ khi hết xăng là

Ta có $s=\int_0^4(-5t+20)dt=\left(\frac{-5}{2}t^2+20t\right)\Big|_0^4=40m$

Câu 31: **Chọn B.**

Theo đề : $v=72km/h=20m/s,$

Ta có : $30-2t=20\Leftrightarrow t=5\Rightarrow S=\int_0^5(30-2t)dt=125$

Câu 32: **Chọn C.**

Ta có $h(t)=\int\sqrt[3]{2t+1}dt=\frac{3}{8}(2t+1)\sqrt[3]{2t+1}+C$

Lúc đầu $(t=0)$ bể không có nước $(h(0)=0)\Rightarrow C=-\frac{3}{8}\Rightarrow h(13)=30$.

Câu 33: **Chọn B.**

Nhiệt độ TB được tính theo công thức sau: $\frac{1}{20-8}\int_8^{20}\left(50+14.\sin\frac{\pi t}{12}\right)dt=50-\frac{14}{\pi}$.

Xem thêm các chuyên đề của thầy tại toanhocplus.blogspot.com