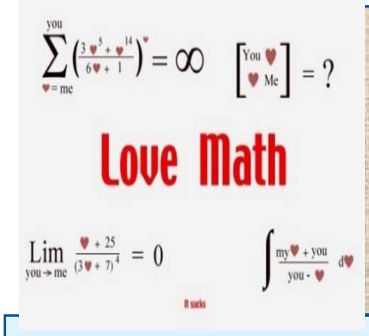


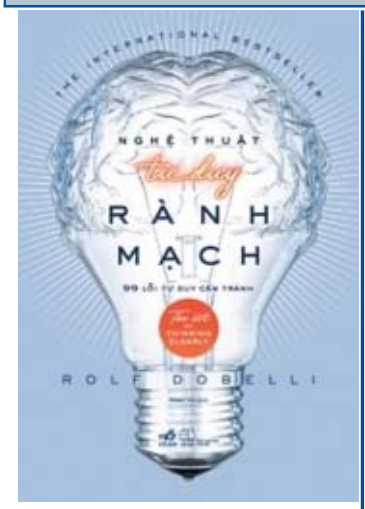
LỚP TOÁN THẦY TP HUẾ. SĐT: 0834 332133

CS1: P5. DÃY 11 TẬP THỂ XÃ TẮC. ĐƯỜNG NGÔ THỜI NHẬM

CS2: TRUNG TÂM CAO THẮNG (11 ĐỐNG ĐA)

Bài giảng toán 11

(Từ cơ bản đến nâng cao)





TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

I – ĐỊNH NGHĨA

1) Hàm số sin

Quy tắc đặt tương ứng với mỗi số thực x với số thực $\sin x$

$$\begin{aligned}\sin x:\ &\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto y=\sin x\end{aligned}$$

được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y=\sin x.$

Tập xác định của hàm số $\sin$ là $\mathbb{R}.$

2) Hàm số côsin

Quy tắc đặt tương ứng với mỗi số thực x với số thực $\cos x$

$$\begin{aligned}\cos x:\ &\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto y=\cos x\end{aligned}$$

được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y=\cos x.$

Tập xác định của hàm số $\cos\sin$ là $\mathbb{R}.$

3) Hàm số tang

Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}\ \ (\cos x\neq 0),$ kí hiệu là $y=\tan x.$

Tập xác định của hàm số $y=\tan x$ là $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

4) Hàm số côtang

Hàm số côtang là hàm số được xác định bởi công thức $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}\ \ (\sin x\neq 0),$ kí hiệu là $y=\cot x.$

Tập xác định của hàm số $y=\cot x$ là $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}.$

II – TÍNH TUẦN HOÀN VÀ CHU KÌ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1) Định nghĩa

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn, nếu tồn tại một số $T\neq 0$ sao cho với mọi $x\in\mathrm{D}$ ta có:

- $x-T\in\mathrm{D}$ và $x+T\in\mathrm{D}.$
- $f(x+T)=f(x).$

Số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

Người ta chứng minh được rằng hàm số $y=\sin x$ tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$; hàm số $y=\cos x$ tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$; hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kì $T=\pi$; hàm số $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kì $T=\pi.$

2) Chú ý

● Hàm số $y=\sin(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

● Hàm số $y=\cos(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

● Hàm số $y=\tan(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0=\dfrac{\pi}{|a|}$.

● Hàm số $y=\cot(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0=\dfrac{\pi}{|a|}$.

● Hàm số $y=f_1(x)$ tuần hoàn với chu kì T_1 và hàm số $y=f_2(x)$ tuần hoàn với chu kì T_2 thì hàm số $y=f_1(x)\pm f_2(x)$ tuần hoàn với chu kì T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

Lưu ý 2 số thực không xác đinh được bội chung nn, nên là $T_0=mT_1=nT_2$ với m,n là 2 số tự nhiên nguyên tố cùng nhau)

III – SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1) Hàm số $y=\sin x$

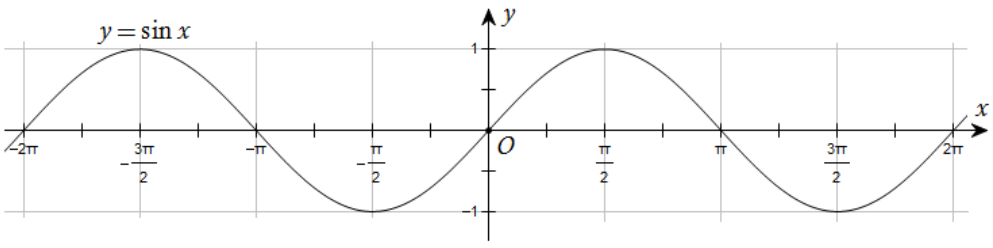
● Tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}$, có nghĩa và xác định với mọi $x\in\mathbb{R};$

● Tập giá trị $T=[-1;1]$, có nghĩa $-1\le\sin x\le 1;$

● Là hàm số tuần hoàn với chu kì $2\pi,$ có nghĩa $\sin(x+k2\pi)=\sin x$ với $k\in\mathbb{Z};$

● Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z};$

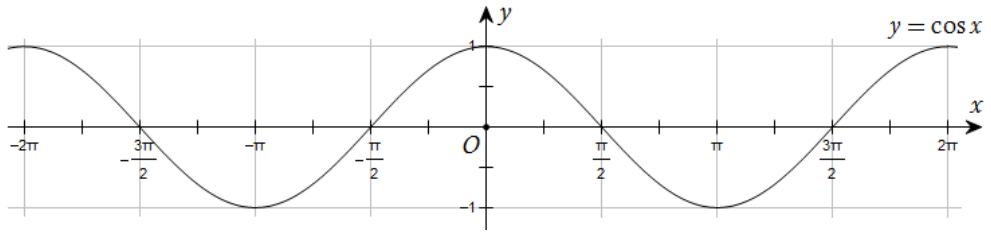
● Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



2) Hàm số $y=\cos x$

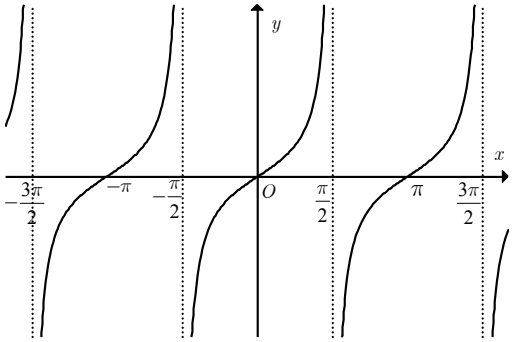
● Tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}$, có nghĩa và xác định với mọi $x\in\mathbb{R}.$

- Tập giá trị $T=[-1;1]$, có nghĩa $-1\le \cos x\le 1$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\cos(x+k2\pi)=\cos x$ với $k\in\mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$;
- Là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.



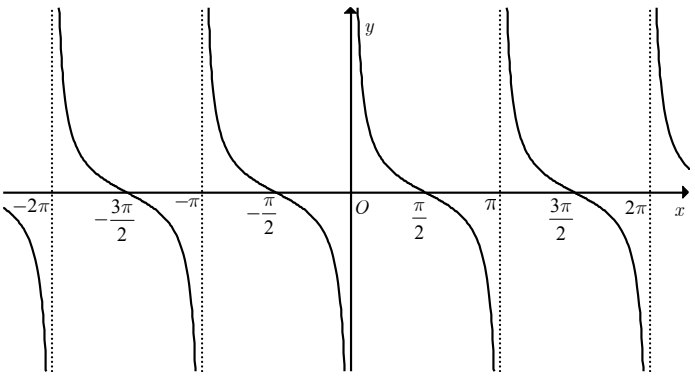
3) Hàm số $y=\tan x$

- Tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$;
- Tập giá trị $T=\mathbb{R}$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\tan(x+k\pi)=\tan x$ với $k\in\mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$;
- Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



4) Hàm số $y=\cot x$

- Tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$;
- Tập giá trị $T=\mathbb{R}$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\tan(x+k\pi)=\tan x$ với $k\in\mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(k\pi;\pi+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$;
- Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



B. PHÂN LOAIJVAF PHƯƠNG PHÁP GIẢI BAIF TẬP

Dạng 1: Tìm tập xác đinh của hàm số

1. Phương pháp

Để tìm tập xác định của hàm số ta cần lưu ý các điểm sau

- $y=\sqrt{u(x)}$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\ge 0$.
- $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x)\ne 0$.
- $y=\dfrac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x)>0$.
- Hàm số $y=\sin x, y=\cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và tập giá trị của nó là:
  $-1\le \sin x\le 1$; $-1\le \cos x\le 1$.

  Như vậy, $y=\sin\left[u(x)\right], y=\cos\left[u(x)\right]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.
- $y=\tan u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$
- $y=\cot u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $x\ne k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\sin\left(\dfrac{5x}{x^2-1}\right)$; b) $y=\cos\sqrt{4-x^2}$; c) $y=\sqrt{\sin x}$; d) $y=\sqrt{2-\sin x}$.

Giải

a) Hàm số $y=\sin\left(\dfrac{5x}{x^2-1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2-1\ne 0\Leftrightarrow x\ne\pm 1$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

b) Hàm số $y=\cos\sqrt{x^2-4}$ xác định $\Leftrightarrow$ $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le 4\Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

Vậy $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2\le x\le 2\right\}$.

c) Hàm số $y=\sqrt{\sin x}$ xác định $\Leftrightarrow \sin x\ge 0\Leftrightarrow k2\pi\le x\le \pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,k2\pi\le x\le \pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Ta có: $-1\le \sin x\le 1\Rightarrow 2-\sin x>0$.

Do đó, hàm số luôn luôn xác định hay $D=\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; b) $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; c) $y=\dfrac{\sin x}{\cos(x-\pi)}$; d) $y=\dfrac{1}{\tan x-1}$.

Giải

a) Hàm số $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{6}\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\ne\dfrac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{3}\ne k\pi\Leftrightarrow x\ne-\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) Hàm số $y=\dfrac{\sin x}{\cos(x-\pi)}$ xác định $\Leftrightarrow \cos\left(x-\pi\right)\ne 0\Leftrightarrow x-\pi\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\ne\dfrac{3\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $y=\dfrac{1}{\tan x-1}$ xác định $\tan x\ne 1\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\cos 2x+\dfrac{1}{\cos x}$; b) $y=\dfrac{3\cos 2x}{\sin 3x\cos 3x}$.

Giải

a) Hàm số $y=\cos 2x+\dfrac{1}{\cos x}$ xác định $\Leftrightarrow \cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y=\dfrac{3\cos 2x}{\sin 3x\cos 3x}$ xác định $\Leftrightarrow$

$\sin 3x\cos 3x\neq 0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 6x\neq 0\Leftrightarrow 6x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq \dfrac{k\pi}{6},k\in\mathbb{Z}.$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{6},k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Ví dụ 4. Tìm m để hàm số sau đây xác định trên $\mathbb{R}$: $y=\sqrt{2m-3\cos x}$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên R khi và chỉ khi $2m-3\cos x\geq 0\Leftrightarrow \cos x\leq \dfrac{2m}{3}$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi x khi $1\leq \dfrac{2m}{3}\Leftrightarrow m\geq \dfrac{3}{2}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{2021}{\sin x}.$

A. $D=\mathbb{R}.$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}.$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Vật tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}.$

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1+\sin x}{\cos x-1}.$

A. $D=\mathbb{R}.$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}.$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}.$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}.$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x-1\neq 0\Leftrightarrow \cos x\neq 1\Leftrightarrow x\neq k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi,k\in\mathbb{Z}\}.$

Câu 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}.$

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{(1+2k)\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{(1+2k)\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\neq 0\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{2}\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\frac{2021}{\sin x-\cos x}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x-\cos x\neq 0\Leftrightarrow \tan x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\cot\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin 2x$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathrm{D}=\varnothing$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 6. Tìm tập xác định D của hàm số $y=3\tan^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\Leftrightarrow\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{3\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 7. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\frac{3\tan x-5}{1-\sin^2 x}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1-\sin^2 x\neq 0$ và $\tan x$ xác định

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x\neq 1\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 8. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\sin x+2}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathrm{D}=[-2;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=[0;2\pi]$. **D.** $\mathrm{D}=\varnothing$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1\leq\sin x\leq 1\longrightarrow 1\leq\sin x+2\leq 3,\forall x\in\mathbb{R}.$

Do đó luôn tồn tại căn bậc hai của $\sin x+2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Câu 9. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\sin x-2}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$. **C.** $\mathrm{D}=[-1;1]$. **D.** $\mathrm{D}=\varnothing$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-1\leq\sin x\leq 1\longrightarrow -3\leq\sin x-2\leq -1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Do đó không tồn tại căn bậc hai của $\sin x-2$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\varnothing$.

Câu 10. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin x}}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\mathrm{D}=\varnothing$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1-\sin x>0\Leftrightarrow\sin x<1.\ (*)$

Mà $-1\le\sin x\le 1$ nên $(*)\Leftrightarrow\sin x\ne 1\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{1-\sin 2x}-\sqrt{1+\sin 2x}$.

A. $\mathrm{D}=\varnothing$.

B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

C. $\mathrm{D}=\left[\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right],k\in\mathbb{Z}$.

D. $\mathrm{D}=\left[\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{13\pi}{6}+k2\pi\right],k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1\le\sin 2x\le 1\Rightarrow\begin{cases}1+\sin 2x\ge 0\\1-\sin 2x\ge 0\end{cases},\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Câu 12. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

D. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\dfrac{\pi}{2}.\cos x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow\cos x\ne 1+2k$. $(*)$

Do $k\in\mathbb{Z}$ nên $(*)\Leftrightarrow\cos x\ne\pm 1\Leftrightarrow\sin x\ne 0\Leftrightarrow x\ne k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

1. Phương pháp:

Giả sử ta cần xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$

- Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số; kiểm chứng D là tập đối xứng qua số 0 tức là $\forall x, x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1)
- Bước 2: Tính $f(-x)$ và so sánh $f(-x)$ với $f(x)$
  - Nếu $f(-x) = f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn trên D (2)
  - Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ trên D (3)

Chú ý:

- Nếu điều kiện (1) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ trên D;
- Nếu điều kiện (2) và (3) không nghiệm đúng, thì $f(x)$ là hàm không chẵn và cũng không lẻ trên D.

Lúc đó, để kết luận $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0 \in D$ sao cho

$$\begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases}$$

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x$; b) $y = \tan|x|$; c) $y = \sin^4 x$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin^4(-x) = \sin^4 x = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \tan x + \cot x$; b) $y = \sin x.\cos x$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \sin(-x).\cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin x + 3$; b) $y = \sin x + \cos x$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) + 3 = 1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 5$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$; b) $y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$.

Giải

a) Hàm số xác định khi

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \sin x+\cot x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \sin^2 x+\cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$ Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x)=\frac{\sin(-x)-\tan(-x)}{\sin(-x)+\cot(-x)}=\frac{-\sin x+\tan x}{-\sin x-\cot x}=\frac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}=f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x)=\frac{\cos^3(-x)+1}{\sin^3(-x)}=\frac{\cos^3 x+1}{-\sin^3 x}=-\frac{\cos^3 x+1}{\sin^3 x}=-f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 5. Xác định tham số m để hàm số sau: $y=f(x)=3m\sin 4x+\cos 2x$ là hàm số chẵn.

Giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$$f(-x)=3m\sin(-4x)+\cos(-2x)=-3m\sin 4x+\cos 2x$$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì:

$$f(-x)=f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow 3m\sin 4x+\cos 2x=-3m\sin 4x+\cos 2x, \forall x \in D$$
$$\Leftrightarrow 6m\sin 4x=0 \Leftrightarrow m=0$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\sin x$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=\tan x$. **D.** $y=\cot x$.

Lời giải

Chọn B

Nhắc lại kiến thức cơ bản:

- Hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.
- Hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ.

● Hàm số $y=\cot x$ là hàm số lẻ.

Vậy B là đáp án đúng.

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=-\sin x.$ **B.** $y=\cos x-\sin x.$ **C.** $y=\cos x+\sin^2 x.$ **D.** $y=\cos x\sin x.$

Lời giải

Chọn C

Tất các các hàm số đều có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}.$

Bây giờ ta kiểm tra $f(-x)=f(x)$ hoặc $f(-x)=-f(x).$

● Với $y=f(x)=-\sin x$. Ta có $f(-x)=-\sin(-x)=\sin x=-(-\sin x)$

$\longrightarrow f(-x)=-f(x)$. Suy ra hàm số $y=-\sin x$ là hàm số lẻ.

● Với $y=f(x)=\cos x-\sin x.$ Ta có $f(-x)=\cos(-x)-\sin(-x)=\cos x+\sin x$

$\longrightarrow f(-x)\neq\{-f(x),f(x)\}$. Suy ra hàm số $y=\cos x-\sin x$ không chẵn không lẻ.

● Với $y=f(x)=\cos x+\sin^2 x$. Ta có $f(-x)=\cos(-x)+\sin^2(-x)$

$=\cos(-x)+[\sin(-x)]^2=\cos x+[-\sin x]^2=\cos x+\sin^2 x$

$\longrightarrow f(-x)=f(x)$. Suy ra hàm số $y=\cos x+\sin^2 x$ là hàm số chẵn.

● Với $y=f(x)=\cos x\sin x.$ Ta có $f(-x)=\cos(-x).\sin(-x)=-\cos x\sin x$

$\longrightarrow f(-x)=-f(x)$. Suy ra hàm số $y=\cos x\sin x$ là hàm số lẻ.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\sin 2x.$ **B.** $y=x\cos x.$ **C.** $y=\cos x.\cot x.$ **D.** $y=\dfrac{\tan x}{\sin x}.$

Lời giải

Chọn D

● Xét hàm số $y=f(x)=\sin 2x.$

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}.$

Ta có $f(-x)=\sin(-2x)=-\sin 2x=-f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y=f(x)=x\cos x.$

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}.$

Ta có $f(-x)=(-x).\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y=f(x)=\cos x\cot x.$

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\}.$ Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}.$

Ta có $f(-x)=\cos(-x).\cot(-x)=-\cos x\cot x=-f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{\tan x}{\sin x}$.

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$. Do đó $\forall x\in\mathrm{D}\Rightarrow -x\in\mathrm{D}$.

Ta có $f(-x)=\dfrac{\tan(-x)}{\sin(-x)}=\dfrac{-\tan x}{-\sin x}=\dfrac{\tan x}{\sin x}=f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=|\sin x|$. **B.** $y=x^2\sin x$. **C.** $y=\dfrac{x}{\cos x}$. **D.** $y=x+\sin x$.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được A là hàm số chẵn, các đáp án B, C, D là hàm số lẻ.

Câu 5: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

A. $y=\sin x\cos 2x$. **B.** $y=\sin^3 x.\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$. **C.** $y=\dfrac{\tan x}{\tan^2 x+1}$. **D.** $y=\cos x\sin^3 x$.

Lời giải

Chọn B

Ta dễ dàng kiểm tra được A, C, D là các hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O.

Xét đáp án B, ta có $y=f(x)=\sin^3 x.\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin^3 x.\sin x=\sin^4 x$. Kiểm tra được đây là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung.

Câu 6: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y=\cos x+\sin^2 x$. **B.** $y=\sin x+\cos x$.

C. $y=-\cos x$. **D.** $y=\sin x.\cos 3x$.

Lời giải

Chọn D

Ta kiểm tra được đáp án A và C là các hàm số chẵn. Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án D là hàm số lẻ.

Câu 7: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y=\cot 4x$. **B.** $y=\dfrac{\sin x+1}{\cos x}$. **C.** $y=\tan^2 x$. **D.** $y=|\cot x|$.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án C và D là các hàm số chẵn.

Câu 8: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. **B.** $y=\sin^2 x$. **C.** $y=\frac{\cot x}{\cos x}$. **D.** $y=\frac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải

Chọn C

Viết lại đáp án A là $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$.

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y=1-\sin^2 x$. **B.** $y=|\cot x|.\sin^2 x$.

C. $y=x^2\tan 2x-\cot x$. **D.** $y=1+|\cot x+\tan x|$.

Lời giải

Chọn C

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\sin 2x$ và $g(x)=\tan^2 x$. Chọn mệnh đề đúng

A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.

D. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn B

● Xét hàm số $f(x)=\sin 2x$.

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}$.

Ta có $f(-x)=\sin(-2x)=-\sin 2x=-f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $g(x)=\tan^2 x$.

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$. Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}$.

Ta có $g(-x)=\left[\tan(-x)\right]^2=(-\tan x)^2=\tan^2 x=g(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x)=\frac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}$ và $g(x)=\frac{|\sin 2x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn. **B.** $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

C. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ. **D.** $f(x)$ và $g(x)$ lẻ.

Lời giải

Chọn B

● Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}$.

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}$.

Ta có $f(-x)=\dfrac{\cos(-2x)}{1+\sin^2(-3x)}=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin^2 3x}=f(x)\longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

● Xét hàm số $g(x)=\dfrac{|\sin 2x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}$.

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$. Do đó $\forall x\in \mathrm{D}\Rightarrow -x\in \mathrm{D}$.

Ta có $g(-x)=\dfrac{|\sin(-2x)|-\cos(-3x)}{2+\tan^2(-x)}=\dfrac{|\sin 2x|-\cos 3x}{2+\tan^2 x}=g(x)\longrightarrow g(x)$ là hàm số chẵn.

Vậy $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

Câu 12: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y=\dfrac{1}{\sin^3 x}$. **B.** $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **C.** $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y=\sqrt{\sin 2x}$.

Lời giải

Chọn A

Viết lại đáp án B là $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$.

Viết lại đáp án C là $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$.

Kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Ta kiểm tra được đáp án B và C là các hàm số không chẵn, không lẻ.

Xét đáp án **D.**

● Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin 2x\ge 0\Leftrightarrow 2x\in[k2\pi;\pi+k2\pi]\Leftrightarrow x\in\left[k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]$

$\longrightarrow D=\left[k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right]\ (k\in\mathbb{Z})$.

● Chọn $x=\dfrac{\pi}{4}\in \mathrm{D}$ nhưng $-x=-\dfrac{\pi}{4}\notin \mathrm{D}$. Vậy $y=\sqrt{\sin 2x}$ không chẵn, không lẻ.

Câu 13: Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. Đồ thị hàm số $y=|\sin x|$ đối xứng qua gốc tọa độ O.

B. Đồ thị hàm số $y=\cos x$ đối xứng qua trục Oy.

C. Đồ thị hàm số $y=|\tan x|$ đối xứng qua trục Oy.

D. Đồ thị hàm số $y=\tan x$ đối xứng qua gốc tọa độ O.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được hàm số $y=|\sin x|$ là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục Oy.

Do đó đáp án A sai.

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

1. Phương pháp:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D

- $M=\max\limits_{D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=M \end{cases}$
- $m=\min\limits_{D} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D: f(x_0)=m \end{cases}$

Lưu ý:

- $-1\le \sin x\le 1;\ -1\le \cos x\le 1.$
- $0\le \sin^2 x\le 1;\ 0\le \cos^2 x\le 1.$
- $0\le \sqrt{\sin x}\le 1;\ 0\le \sqrt{\cos x}\le 1.$
- Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình cơ bản
  - Phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta\ge 0\\ a\ne 0\end{cases}$
  - Phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a^2+b^2\ge c^2$
  - Nếu hàm số có dạng: $y=\dfrac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}$

    Ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về phương trình $a\sin x+b\cos x=c$.

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$; b) $y=2\sqrt{\cos x+1}-3$.

Giải

a) Ta có:

$$-1 \le \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le 2 \Rightarrow -1 \le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1 \le 3$$

Hay $-1 \le y \le 3$. Suy ra:

$$\text{Max}y = 3 \text{ khi } \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -1 \text{ khi } \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có:

$$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 0 \le \cos x + 1 \le 2 \Rightarrow 0 \le \sqrt{\cos x + 1} \le \sqrt{2}$$
$$\Rightarrow 0 \le 2\sqrt{\cos x + 1} \le 2\sqrt{2} \Rightarrow -3 \le 2\sqrt{\cos x + 1} - 3 \le 2\sqrt{2} - 3$$

Hay $-3 \le y \le 2\sqrt{2} - 3$ Suy ra

$$\text{Max}y = 2\sqrt{2} - 3 \text{ khi } \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -3 \text{ khi } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin x + \cos x$; b) $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$.

Giải

a) Ta có: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$.

Suy ra:

$$\text{Max}y = \sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -\sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có: $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

Suy ra: $-2 \le y \le 2$. Do đó:

$$\text{Max}y = 2 \text{ khi } \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -2 \text{ khi } \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y=\cos^2 x+2\sin x+2$; b) $y=\sin^4 x-2\cos^2 x+1$.

Giải

a) Ta có:

$$y=\cos^2 x+2\sin x+2=\left(1-\sin^2 x\right)^2+2\sin x+2$$

$$=-\sin^2 x+2\sin x+3=-\left(\sin x-1\right)^2+4$$

Vì $-1\le \sin x\le 1\Rightarrow -2\le \sin x-1\le 0\Rightarrow 4\ge \left(\sin x-1\right)^2\ge 0$

$$\Rightarrow -4\le -\left(\sin x-1\right)^2\le 0\Rightarrow 0\le -\left(\sin x-1\right)^2+4\le 4$$

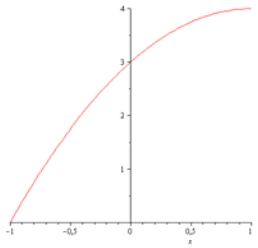
Hay $0\le y\le 4$

Do đó:

$\text{Max}y=4$ khi $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

$\text{Min}y=0$ khi $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Lưu ý:

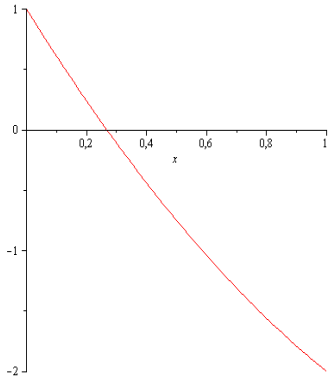


Nếu đặt $t=\sin x,t\in\left[-1;1\right]$. Ta có (P): $y=f\left(t\right)=-t^2+2t+3$ xác định với mọi $t\in\left[-1;1\right]$, (P) có hoành độ đỉnh $t=1$ và trên đoạn $\left[-1;1\right]$ hàm số đồng biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=-1$ hay $\sin x=-1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t=1$ hay $\sin x=1$.

b) Ta có

$$y=\sin^4 x-2\cos^2 x+1=\left(1-\cos^2 x\right)^2-2\cos^2 x+1$$

$$=\cos^4 x-4\cos^2 x+2=\left(\cos^2 x-2\right)^2-2$$



Vì $0\le \cos^2 x\le 1\Leftrightarrow -2\le \cos^2 x-2\le -1\Leftrightarrow 4\ge \left(\cos^2 x-2\right)^2\ge 1$

$$\Leftrightarrow 2\ge \left(\cos^2 x-2\right)^2-2\ge -1\Leftrightarrow 2\ge y\ge -1$$

Do đó:

$\text{Max}y=2$ khi

$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$\text{Min} y = -1$ khi

$\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lưu ý:

Nếu đặt $t = \cos^2 x, t \in [0;1]$. Ta có (P): $y = f(t) = t^2 - 4t + 2$ xác định với mọi $t \in [0;1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t = 2 \in [0;1]$ và trên đoạn $[0;1]$ hàm số nghịch biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = 1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t = 0$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$

Giải

Ta có: $\sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

Vì $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \le \sqrt{2} - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \ne 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó: $D = \mathbb{R}$

Biến đổi $y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$

$\Leftrightarrow y\sin x + y\cos x - 2y = 2\sin x - \cos x + 1$

$\Leftrightarrow (y-2)\sin x + (y+1)\cos x = 2y + 1 \quad (*)$

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ là $a^2 + b^2 \ge c^2$

$\Leftrightarrow (y-2)^2 + (y+1)^2 \ge (2y+1)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 6y - 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \le y \le \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$

Kết luận: $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \min_{\mathbb{R}} y = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 3\sin x - 2.$

A. $M = 1, m = -5.$ **B.** $M = 3, m = 1.$

C. $M = 2, m = -2.$ **D.** $M = 0, m = -2.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \le \sin x \le 1 \longrightarrow -3 \le 3\sin x \le 3 \longrightarrow -5 \le 3\sin x - 2 \le 1$

$\longrightarrow -5 \le y \le 1 \longrightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -5 \end{cases}.$

Câu 2: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 3\cos 2x + 5.$

A. $T = [-1;1].$ **B.** $T = [-1;11].$ **C.** $T = [2;8].$ **D.** $T = [5;8].$

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1 \le \cos 2x \le 1 \longrightarrow -3 \le 3\cos 2x \le 3 \longrightarrow 2 \le 3\cos 2x + 5 \le 8$

$\longrightarrow 2 \le y \le 8 \longrightarrow T = [2;8].$

Câu 3: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 5 - 3\sin x.$

A. $T = [-1;1].$ **B.** $T = [-3;3].$ **C.** $T = [2;8].$ **D.** $T = [5;8].$

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1 \le \sin x \le 1 \longrightarrow 1 \ge -\sin x \ge -1 \longrightarrow 3 \ge -3\sin x \ge -3$

$\longrightarrow 8 \ge 5 - 3\sin x \ge 2 \longrightarrow 2 \le y \le 8 \longrightarrow T = [2;8].$

Câu 4: Hàm số $y = 5 + 4\sin 2x\cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 5 + 4\sin 2x\cos 2x = 5 + 2\sin 4x$.

Mà $-1 \le \sin 4x \le 1 \longrightarrow -2 \le 2\sin 4x \le 2 \longrightarrow 3 \le 5 + 2\sin 4x \le 7$

$\longrightarrow 3 \le y \le 7 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{3;4;5;6;7\}$ nên y có 5 giá trị nguyên.

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = -\sqrt{2}\sin(2016x + 2017).$

A. $m = -2016\sqrt{2}.$ **B.** $m = -\sqrt{2}.$ **C.** $m = -1.$ **D.** $m = -2017\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \le \sin(2016x + 2017) \le 1 \longrightarrow \sqrt{2} \ge -\sqrt{2}\sin(2016x + 2017) \ge -\sqrt{2}.$

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\sqrt{2}.$

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \dfrac{1}{\cos x + 1}.$

A. $m = \dfrac{1}{2}.$ **B.** $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ **C.** $m = 1.$ **D.** $m = \sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \le \cos x \le 1$.

Ta có $\dfrac{1}{\cos x+1}$ nhỏ nhất khi và chỉ chi $\cos x$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos x = 1$.

Khi $\cos x = 1 \longrightarrow y = \dfrac{1}{\cos x+1} = \dfrac{1}{2}.$

Câu 7: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$. Tính $P = M - m.$

A. $P = 4.$ **B.** $P = 2\sqrt{2}.$ **C.** $P = \sqrt{2}.$ **D.** $P = 2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

Mà $-1 \le \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1 \longrightarrow -\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

$\longrightarrow \begin{cases} M = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow P = M - m = 2\sqrt{2}.$

Câu 8: Tập giá trị T của hàm số $y = \sin 2017x - \cos 2017x.$

A. $T = [-2;2].$ **B.** $T = [-4034;4034].$ **C.** $T = \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right].$ **D.** $T = \left[0;\sqrt{2}\right].$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \sin 2017x - \cos 2017x = \sqrt{2}\sin\left(2017x - \dfrac{\pi}{4}\right).$

Mà $-1 \le \sin\left(2017x - \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1 \longrightarrow -\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(2017x - \dfrac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

$\longrightarrow -\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2} \longrightarrow T = \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right].$

Câu 9: Hàm số $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$, ta có

$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\sin\dfrac{\pi}{6} = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right).$

Ta có $-1 \le \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \le 1 \longrightarrow -1 \le y \le 1 \xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y \in \{-1;0;1\}$.

Câu 10: Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

B. $x_0 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x_0 = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

D. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \sin^4 x - \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = -\cos 2x$.

Mà $-1 \le \cos 2x \le 1 \longrightarrow -1 \ge -\cos 2x \ge 1 \longrightarrow -1 \ge y \ge 1$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 11: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 1 - 2\left|\cos 3x\right|$.

A. $M = 3,\ m = -1$.

B. $M = 1,\ m = -1$.

C. $M = 2,\ m = -2$.

D. $M = 0,\ m = -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \le \cos 3x \le 1 \longrightarrow 0 \le \left|\cos 3x\right| \le 1 \longrightarrow 0 \ge -2\left|\cos 3x\right| \ge -2$

$\longrightarrow 1 \ge 1 - 2\left|\cos 3x\right| \ge -1 \longrightarrow 1 \ge y \ge -1 \longrightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $M = \sqrt{2}$.

B. $M = \sqrt{2} - 1$.

C. $M = \sqrt{2} + 1$.

D. $M = \sqrt{2} + 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x$

$= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$.

Mà $-1 \le \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \longrightarrow -\sqrt{2} + 2 \le \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \le \sqrt{2} + 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2 + \sqrt{2}$.

Câu 13: Tìm tập giá trị T của hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x.$

A. $T=[0;2].$ **B.** $T=\left[\frac{1}{2};1\right].$ **C.** $T=\left[\frac{1}{4};1\right].$ **D.** $T=\left[0;\frac{1}{4}\right].$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x.$

Mà $-1\le\cos 4x\le 1\longrightarrow\frac{1}{4}\le\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\le 1\longrightarrow\frac{1}{4}\le y\le 1.$

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y=\sin^2 x+2\cos^2 x.$

A. $M=3,\ m=0.$ **B.** $M=2,\ m=0.$ **C.** $M=2,\ m=1.$ **D.** $M=3,\ m=1.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\sin^2 x+2\cos^2 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\cos^2 x=1+\cos^2 x$

Do $-1\le\cos x\le 1\longrightarrow 0\le\cos^2 x\le 1\longrightarrow 1\le 1+\cos^2 x\le 2\longrightarrow\begin{cases}M=2\\m=1\end{cases}.$

Câu 15: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\frac{2}{1+\tan^2 x}.$

A. $M=\frac{1}{2}.$ **B.** $M=\frac{2}{3}.$ **C.** $M=1.$ **D.** $M=2.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\frac{2}{1+\tan^2 x}=\frac{2}{\frac{1}{\cos^2 x}}=2\cos^2 x$.

Do $0\le\cos^2 x\le 1\longrightarrow 0\le y\le 2\longrightarrow M=2.$

Câu 16: Gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=8\sin^2 x+3\cos 2x$. Tính $P=2M-m^2.$

A. $P=1.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=112.$ **D.** $P=130.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=8\sin^2 x+3\cos 2x=8\sin^2 x+3\left(1-2\sin^2 x\right)=2\sin^2 x+3.$

Mà $-1\le\sin x\le 1\longrightarrow 0\le\sin^2 x\le 1\longrightarrow 3\le 2\sin^2 x+3\le 5$

$\longrightarrow 3 \le y \le 5 \longrightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \longrightarrow P = 2M - m^2 = 1.$

Câu 17: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$.

A. $m = 2 - \sqrt{3}.$ **B.** $m = -1.$ **C.** $m = 1.$ **D.** $m = -\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$

$= \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + 1$

$= 2\left(\sin 2x \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right) + 1 = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1.$

Mà $-1 \le \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \le 1 \longrightarrow -1 \le 1 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \le 3 \longrightarrow -1 \le y \le 3.$

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.

Câu 18: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 12\sin x - 5\cos x.$

A. $T = [-1;1].$ **B.** $T = [-7;7].$ **C.** $T = [-13;13].$ **D.** $T = [-17;17].$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 12\sin x - 5\cos x = 13\left(\frac{12}{13}\sin x - \frac{5}{13}\cos x\right).$

Đặt $\frac{12}{13} = \cos\alpha \longrightarrow \frac{5}{13} = \sin\alpha$. Khi đó $y = 13(\sin x\cos\alpha - \sin\alpha\cos x) = 13\sin(x - \alpha)$

$\longrightarrow -13 \le y \le 13 \longrightarrow T = [-13;13].$

Câu 19: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4\sin 2x - 3\cos 2x.$

A. $M = 3.$ **B.** $M = 1.$ **C.** $M = 5.$ **D.** $M = 4.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 4\sin 2x - 3\cos 2x = 5\left(\frac{4}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x\right).$

Đặt $\frac{4}{5} = \cos\alpha \longrightarrow \frac{3}{5} = \sin\alpha$. Khi đó $y = 5(\cos\alpha\sin 2x - \sin\alpha\cos 2x) = 5\sin(2x - \alpha)$

$\longrightarrow -5 \le y \le 5 \longrightarrow M = 5.$

Câu 20: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x + 5$. Tính $P = M - 2m^2.$

A. $P=1.$ **B.** $P=7.$ **C.** $P=8.$ **D.** $P=2.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\sin^2 x-4\sin x+5=(\sin x-2)^2+1.$

Do $-1\le \sin x\le 1\longrightarrow -3\le \sin x-2\le -1\longrightarrow 1\le (\sin x-2)^2\le 9$

$\longrightarrow 2\le (\sin x-2)^2+1\le 10\longrightarrow \begin{cases} M=10 \\ m=2 \end{cases} P=M-2m^2=2.$

Câu 21: Hàm số $y=\cos^2 x-\cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\cos^2 x-\cos x=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$

Mà $-1\le \cos x\le 1\longrightarrow -\frac{3}{2}\le \cos x-\frac{1}{2}\le \frac{1}{2}\longrightarrow 0\le \left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2\le \frac{9}{4}$

$\longrightarrow -\frac{1}{4}\le \left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\le 2\longrightarrow -\frac{1}{4}\le y\le 2\xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y\in\{0;1;2\}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 22: Hàm số $y=\cos^2 x+2\sin x+2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x_0=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

C. $x_0=\pi+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x_0=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\cos^2 x+2\sin x+2=1-\sin^2 x+2\sin x+2$

$=-\sin^2 x+2\sin x+3=-(\sin x-1)^2+4.$

Mà $-1\le \sin x\le 1\longrightarrow -2\le \sin x-1\le 0\longrightarrow 0\le (\sin x-1)^2\le 4$

$\longrightarrow 0\ge -(\sin x-1)^2\ge -4\longrightarrow 4\ge -(\sin x-1)^2+4\ge 0$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0 .

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

Câu 23: Tìm giá trị lớn nhất M và nhất m của hàm số $y=\sin^4 x-2\cos^2 x+1$

A. $M=2,\ m=-2.$ **B.** $M=1,\ m=0.$

C. $M=4,\ m=-1.$ **D.** $M=2,\ m=-1.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\sin^4 x-2\cos^2 x+1=\sin^4 x-2\left(1-\sin^2 x\right)+1=\left(\sin^2 x+1\right)^2-2.$

Do $0\le\sin^2 x\le 1\longrightarrow 1\le\sin^2 x+1\le 2\longrightarrow 1\le\left(\sin^2 x+1\right)^2\le 4$

$\longrightarrow -1\le\left(\sin^2 x+1\right)^2-2\le 2\longrightarrow\begin{cases}M=2\\ m=-1\end{cases}.$

Câu 24: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=4\sin^4 x-\cos 4x$.

A. $m=-3.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=3.$ **D.** $m=-5.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y=4\sin^4 x-\cos 4x=4.\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2-\left(2\cos^2 2x-1\right)$

$=-\cos^2 2x-2\cos 2x+2=-\left(\cos 2x+1\right)^2+3\le 3.$

Mà $-1\le\cos 2x\le 1\longrightarrow 0\le\cos 2x+1\le 2\longrightarrow 0\le\left(\cos 2x+1\right)^2\le 4$

$\longrightarrow -1\le-\left(\cos 2x+1\right)^2+3\le 3\longrightarrow m=-1.$

Câu 25: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=\sqrt{7-3\cos^2 x}.$

A. $M=\sqrt{10},\ m=2.$ **B.** $M=\sqrt{7},\ m=2.$ **C.** $M=\sqrt{10},\ m=\sqrt{7}.$ **D.** $M=0,\ m=1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1\le\cos x\le 1\longrightarrow 0\le\cos^2 x\le 1$

$\longrightarrow 4\le 7-3\cos^2 x\le 7\longrightarrow 2\le\sqrt{7-3\cos^2 x}\le\sqrt{7}$.

Câu 26: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y=4\sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right]+10$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $0<t\le 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

A. 28 tháng 5. **B.** 29 tháng 5. **C.** 30 tháng 5. **D.** 31 tháng 5.

Lời giải

Chọn B

Vì $\sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right]\le 1\longrightarrow y=4\sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right]+10\le 14.$

Ngày có ánh sáng mặt trời nhiều nhất $\Leftrightarrow y=14\Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right]=1$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{178}(t-60)=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow t=149+356k.$

Do $0<t\le 365\longrightarrow 0<149+356k\le 365\Leftrightarrow -\frac{149}{356}<k\le \frac{54}{89}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=0$.

Với $k=0\longrightarrow t=149$ rơi vào ngày 29 tháng 5 (vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày, riêng đối với năm 2017 thì không phải năm nhuận nên tháng 2 có 28 ngày hoặc dựa vào dữ kiện $0<t\le 365$ thì ta biết năm này tháng 2 chỉ có 28 ngày).

Câu 27: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+12$. Mực nước của kênh cao nhất khi:

A. $t=13$ (giờ). **B.** $t=14$ (giờ). **C.** $t=15$ (giờ). **D.** $t=16$ (giờ).

Lời giải

. **Chọn B**

Mực nước của kênh cao nhất khi h lớn nhất

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}=k2\pi \text{ với } 0<t\le 24 \text{ và } k\in\mathbb{Z}.$$

Lần lượt thay các đáp án, ta được đáp án B thỏa mãn

Vì với $t=14\longrightarrow \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8}+\frac{\pi}{4}=2\pi$ (đúng với $k=1\in\mathbb{Z}$).

Dạng 4. Chứng minh hàm số tuần hoàn và xác định chu kỳ của nó

1. Phương pháp

Muốn chứng minh hàm số tuần hoàn *f(x)* tuần hoàn ta thực hiện theo các bước sau:

- Xét hàm số $y=f(x)$, tập xác định là D
- Với mọi $x\in D$, ta có $x-T_0\in D$ và $x+T_0\in D$ (1). Chỉ ra $f(x+T_0)=f(x)$ (2)

Vậy hàm số $y=f(x)$ tuần hoàn

Chứng minh hàm tuần hoàn với chu kỳ T_0

Tiếp tục, ta đi chứng minh T_0 là chu kỳ của hàm số tức chứng minh T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (1) và (2). Giả sử có T sao cho $0<T<T_0$ thỏa mãn tính chất (2)$\Leftrightarrow ...\Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết $0<T<T_0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (2). Vậy hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

Một số nhận xét:

- Hàm số $y=\sin x, y=\cos x$ tuần hoàn chu kỳ 2π. Từ đó $y=\sin(ax+b), y=\cos(ax+b)$ có chu kỳ $T_0=\dfrac{2\pi}{|a|}$
- Hàm số $y=\tan x,\ y=\cot x$ tuần hoàn chu kỳ π. Từ đó $y=\tan(ax+b), y=\cot(ax+b)$ có chu kỳ $T_0=\dfrac{\pi}{|a|}$

Chú ý:

$y=f_1(x)$ có chu kỳ T_1; $y=f_2(x)$ có chu kỳ T_2

Thì hàm số $y=f_1(x)\pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

Các dấu hiệu nhận biết hàm số không tuần hoàn

Hàm số $y=f(x)$ không tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau vi phạm

- *Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn*
- *Tồn tại số* a *sao cho hàm số không xác định với* $x>a$ *hoặc* $x<a$
- *Phương trình* $f(x)=k$ *có vô số nghiệm hữu hạn*
- *Phương trình* $f(x)=k$ *có vô số nghiệm sắp thứ tự* $...<x_m<x_{m+1}<...$ *mà* $|x_m-x_{m+1}|\to 0$ *hay* ∞

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

a) $f(x)=\sin x,\ T_0=2\pi$; b) $f(x)=\tan 2x,\ T_0=\dfrac{\pi}{2}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $f(x+2\pi)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Giả sử có số thực dương $T<2\pi$ thỏa $f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow\sin(x+T)=\sin x\ ,\forall x\in\mathbb{R}$ (*)

Cho $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow VT(*)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right)=\cos T<1;$ $VP(*)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

$\Rightarrow$ (*) không xảy ra với mọi $x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0=2\pi$

b) Ta có : $f(x+\dfrac{\pi}{2})=f(x),\ \forall x\in D$.

Giả sử có số thực dương $T<\dfrac{\pi}{2}$ thỏa $f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow\tan(2x+2T)=\tan 2x\ ,\forall x\in D$ (**)

Cho $x=0\Rightarrow VT(**)=\tan 2T\neq 0;$ $VP(**)=0$

$B \Rightarrow (**)$ không xảy ra với mọi $x \in D$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x) = \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$; b) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$; c) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$; d) $y = \tan\sqrt{x}$.

Hướng dẫn giải

c) Hàm số $f(x) = \sin\left(x^2\right)$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0

$$\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \to 0 \text{ khi } k \to \infty$$

d) Hàm số $f(x) = \tan\sqrt{x}$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới $+\infty$

$$(k+1)^2\pi^2 - k^2\pi \to \infty \text{ khi } k \to \infty$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

C. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

D. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π.

Câu 2: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

A. $y = \sin x$ **B.** $y = x + \sin x$ **C.** $y = x\cos x$. **D** $y = \frac{\sin x}{x}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = x + \sin x$ không tuần hoàn. Thật vậy:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Giả sử $f(x+T) = f(x),\ \forall x \in D$

$\Leftrightarrow (x+T) + \sin(x+T) = x + \sin x,\ \forall x \in D$

$\Leftrightarrow T + \sin(x+T) = \sin x,\ \forall x \in D$. $(*)$

Cho $x=0$ và $x=\pi$, ta được $\begin{cases} T+\sin x=\sin 0=0 \\ T+\sin(\pi+T)=\sin\pi=0 \end{cases}$

$\longrightarrow 2T+\sin T+\sin(\pi+T)=0 \Leftrightarrow T=0$. Điều này trái với định nghĩa là $T>0$.

Vậy hàm số $y=x+\sin x$ không phải là hàm số tuần hoàn.

Tương tự chứng minh cho các hàm số $y=x\cos x$ và $y=\dfrac{\sin x}{x}$ không tuần hoàn.

Câu 3: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không tuần hoàn?

A. $y=\cos x.$ **B.** $y=\cos 2x.$ **C.** $y=x^2\cos x.$ **D.** $y=\dfrac{1}{\sin 2x}.$

Lời giải.

Chọn C

Câu 4: Tìm chu kì T của hàm số $y=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right).$

A. $T=\dfrac{2\pi}{5}.$ **B.** $T=\dfrac{5\pi}{2}.$ **C.** $T=\dfrac{\pi}{2}.$ **D.** $T=\dfrac{\pi}{8}.$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\sin(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y=\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{5}.$

Câu 5: Tìm chu kì T của hàm số $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+2016\right).$

A. $T=4\pi.$ **B.** $T=2\pi.$ **C.** $T=-2\pi.$ **D.** $T=\pi.$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\cos(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+2016\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi.$

Câu 6: Tìm chu kì T của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}\sin(100\pi x+50\pi).$

A. $T=\dfrac{1}{50}.$ **B.** $T=\dfrac{1}{100}.$ **C.** $T=\dfrac{\pi}{50}.$ **D.** $T=200\pi^2.$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=-\frac{1}{2}\sin\left(100\pi x+50\pi\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi}{100\pi}=\frac{1}{50}$.

Câu 7: Tìm chu kì T của hàm số $y=\cos 2x+\sin\frac{x}{2}$.

A. $T=4\pi$. **B.** $T=\pi$. **C.** $T=2\pi$. **D.** $T=\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Hàm số $y=\sin\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

Suy ra hàm số $y=\cos 2x+\sin\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi$.

Nhận xét. T là của T_1 và T_2.

Câu 8: Tìm chu kì T của hàm số $y=\cos 3x+\cos 5x$.

A. $T=\pi$. **B.** $T=3\pi$. **C.** $T=2\pi$. **D.** $T=5\pi$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=\cos 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{3}$.

Hàm số $y=\cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{2\pi}{5}$.

Suy ra hàm số $y=\cos 3x+\cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$.

Câu 9: Tìm chu kì T của hàm số $y=3\cos\left(2x+1\right)-2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$.

A. $T=2\pi$. **B.** $T=4\pi$ **C.** $T=6\pi$ **D.** $T=\pi$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=3\cos\left(2x+1\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Hàm số $y=-2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$. tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

Suy ra hàm số $y=3\cos\left(2x+1\right)-2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi$.

Câu 10: Tìm chu kì T của hàm số $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $T=2\pi$. **B.** $T=\pi$. **C.** $T=3\pi$. **D.** $T=4\pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Hàm số $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{2\pi}{3}$.

Suy ra hàm số $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$.

Câu 11: Tìm chu kì T của hàm số $y=\tan 3\pi x$.

A. $T=\frac{\pi}{3}$. **B.** $T=\frac{4}{3}$. **C.** $T=\frac{2\pi}{3}$. **D.** $T=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\tan(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\frac{\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y=\tan 3\pi x$ tuần hoàn với chu kì $T=\frac{1}{3}$.

Câu 12: Tìm chu kì T của hàm số $y=\tan 3x+\cot x$.

A. $T=4\pi$. **B.** $T=\pi$. **C.** $T=3\pi$. **D.** $T=\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\cot(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\frac{\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y=\tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\pi$.

Suy ra hàm số $y=\tan 3x+\cot x$ tuần hoàn với chu kì $T=\pi$.

Nhận xét. T là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

Câu 13: Tìm chu kì T của hàm số $y=\cot\frac{x}{3}+\sin 2x$.

A. $T=4\pi$. **B.** $T=\pi$. **C.** $T=3\pi$. **D.** $T=\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=\cot\frac{x}{3}$ tuần hoàn với chu kì $T_1=3\pi.$

Hàm số $y=\sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\pi.$

Suy ra hàm số $y=\cot\frac{x}{3}+\sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T=3\pi.$

Câu 14: Tìm chu kì T của hàm số $y=\sin\frac{x}{2}-\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$

A. $T=4\pi.$ **B.** $T=\pi.$ **C.** $T=3\pi.$ **D.** $T=2\pi.$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=\sin\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1=4\pi.$

Hàm số $y=-\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{\pi}{2}.$

Suy ra hàm số $y=\sin\frac{x}{2}-\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi.$

Câu 15: Tìm chu kì T của hàm số $y=2\cos^2 x+2017.$

A. $T=3\pi.$ **B.** $T=2\pi.$ **C.** $T=\pi.$ **D.** $T=4\pi.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=2\cos^2 x+2017=\cos 2x+2018.$

Suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\pi.$

Câu 16: Tìm chu kì T của hàm số $y=2\sin^2 x+3\cos^2 3x.$

A. $T=\pi.$ **B.** $T=2\pi.$ **C.** $T=3\pi.$ **D.** $T=\frac{\pi}{3}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=2.\frac{1-\cos 2x}{2}+3.\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}(3\cos 6x-2\cos 2x+5).$

Hàm số $y=3\cos 6x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.$

Hàm số $y=-2\cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\pi.$

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T=\pi.$

Câu 17: Tìm chu kì T của hàm số $y=\tan 3x-\cos^2 2x.$

A. $T=\pi.$ **B.** $T=\frac{\pi}{3}.$ **C.** $T=\frac{\pi}{2}.$ **D.** $T=2\pi.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\tan 3x-\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1}{2}(2\tan 3x-\cos 4x-1).$

Hàm số $y=2\tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{\pi}{3}.$

Hàm số $y=-\cos 4x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T=\pi.$

Câu 18: Hàm số nào sau đây có chu kì khác π ?

A. $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right).$ **B.** $y=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$ **C.** $y=\tan(-2x+1).$ **D.** $y=\cos x\sin x.$

Lời giải

Chọn C

Vì $y=\tan(-2x+1)$ có chu kì $T=\frac{\pi}{|-2|}=\frac{\pi}{2}.$

Nhận xét. Hàm số $y=\cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$ có chu kỳ là $\pi.$

Câu 19: Hàm số nào sau đây có chu kì khác 2π ?

A. $y=\cos^3 x.$. $y=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$

C. $y=\sin^2(x+2).$ **D.** $y=\cos^2\left(\frac{x}{2}+1\right).$

Lời giải.

Chọn C

Hàm số $y=\cos^3 x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)$ có chu kì là $2\pi.$

Hàm số $y=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin x$ có chu kì là $2\pi.$

Hàm số $y=\sin^2(x+2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x+4)$ có chu kì là $\pi.$

Hàm số $y=\cos^2\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(x+2)$ có chu kì là $2\pi.$

Câu 20: Hai hàm số nào sau đây có chu kì khác nhau?

A. $y=\cos x$ và $y=\cot\frac{x}{2}$.

B. $y=\sin x$ và $y=\tan 2x$.

C. $y=\sin\frac{x}{2}$ và $y=\cos\frac{x}{2}$.

D. $y=\tan 2x$ và $y=\cot 2x$.

Lời giải

Chọn B

Hai hàm số $y=\cos x$ và $y=\cot\frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 2π.

Hai hàm số $y=\sin x$ có chu kì là 2π, hàm số $y=\tan 2x$ có chu kì là $\frac{\pi}{2}$.

Hai hàm số $y=\sin\frac{x}{2}$ và $y=\cos\frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 4π.

Hai hàm số $y=\tan 2x$ và $y=\cot 2x$ có cùng chu kì là $\frac{\pi}{2}$.

Dạng 5. Đồ thị của hàm số lượng giác

1. Phương pháp

1/ Vẽ đồ thị hàm số lượng giác:

- Tìm tập xác định D.
- Tìm chu kỳ T_0 của hàm số.
- Xác định tính chẵn – lẻ (nếu cần).
- Lập bảng biến thiên trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ T_0 có thể chọn:

$$x\in\left[0,T_0\right] \text{ hoặc } \quad x\in\left[-\frac{T_0}{2},\frac{T_0}{2}\right].$$

- Vẽ đồ thị trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ.
- Rồi suy ra phần đồ thị còn lại bằng phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}=k.T_0.\vec{i}$ về bên trái và phải song song với trục hoành Ox (với $\vec{i}$ là véc tơ đơn vị trên trục Ox).

2/ Một số phép biến đổi đồ thị:

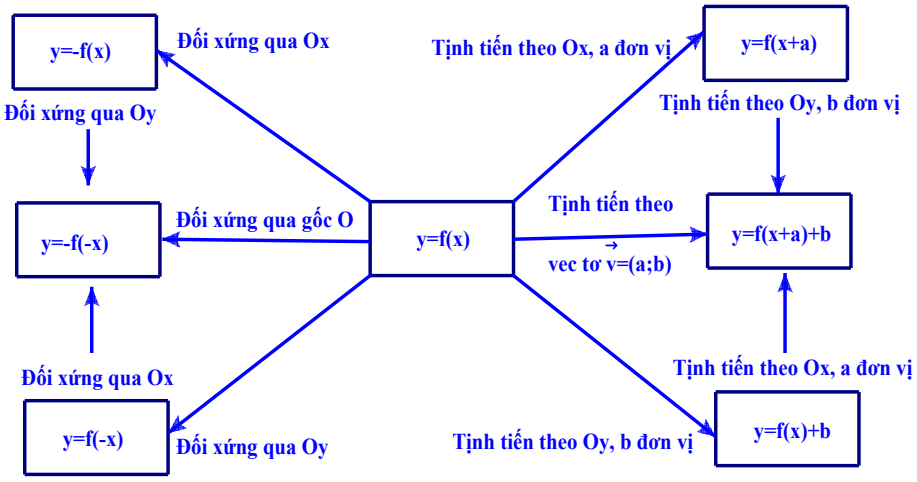
a) Từ đồ thị hàm số y = f(x), suy ra đồ thị hàm số y = f(x) + a bằng cách tịnh tiến đồ thị y = f(x) lên trên trục hoành a đơn vị nếu a > 0 và tịnh tiến xuống phía dưới trục hoành a đơn vị nếu a < 0.

b) Từ đồ thị hàm số y = f(x), suy ra đồ thị hàm số $y=f(x+a)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị y = f(x) sang phải trục hoành a đơn vị nếu a > 0 và tịnh tiến sang trái trục hoành a đơn vị nếu a < 0.

c) Từ đồ thị y = f(x), suy ra đồ thị y = –f(x) bằng cách lấy đối xứng đồ thị y = f(x) qua trục hoành.

d) Đồ thị $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x), \text{ nếu } f(x)\geq 0 \\ -f(x), \text{ nếu } f(x)<0 \end{cases}$ nên suy ra đồ thị y = f(x) bằng cách giữ nguyên hần đồ thị y = f(x) phía trên trục hoành và lấy đối xứng y = f(x) phía dưới trục hoành qua trục hoành

Mối liên hệ đồ thị giữa các hàm số



2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị các hàm số sau: y = sin 4x

Hướng dẫn giải

a) Hàm số y = sin 4x.

Miền xác định: D=ℝ.

Ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên miền $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

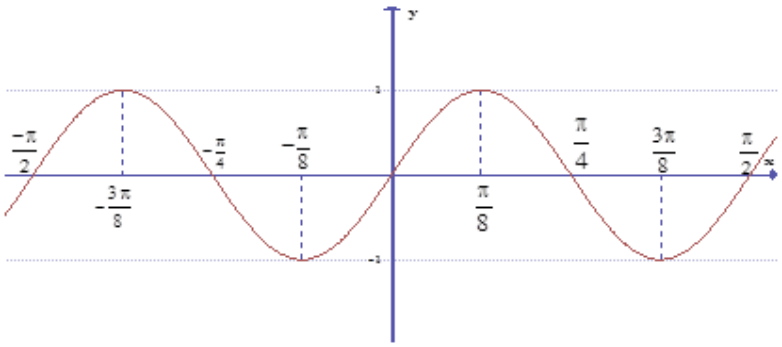
(Do chu kì tuần hoàn T=$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$)

Bảng giá trị của hàm số y =sin 4x trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

x	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Ta có đồ thị của hàm số y = sin4x trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và sau đó tịnh tiến cho các

đoạn: $...,\left[-\frac{\pi}{2},0\right],\left[\frac{\pi}{2},\pi\right],....$



Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos\frac{x}{3}$.

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = \cos\frac{x}{3}$.

Miền xác định: D=ℝ.

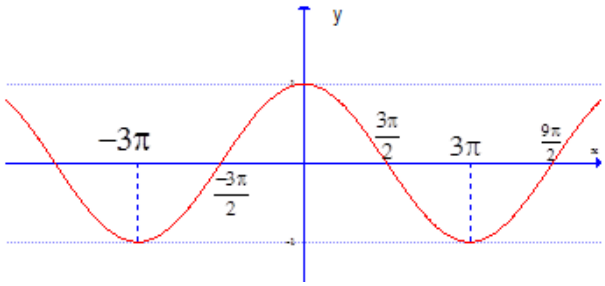
Ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên miền $[0;6\pi]$

(Do chu kì tuần hoàn $T=\frac{2\pi}{1/3}=6\pi$)

Bảng giá trị của hàm số $y = \cos\frac{x}{3}$ trên đoạn $[0;6\pi]$ là:

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{6}$	3π	$\frac{15\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{2}$	$\frac{33\pi}{6}$	6π
y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ta có đồ thị của hàm số $y=\cos\frac{x}{3}$ trên đoạn $[0;6\pi]$và sau đó tịnh tiến cho các đoạn: $...,[-6\pi,0],[6\pi,12\pi],....$

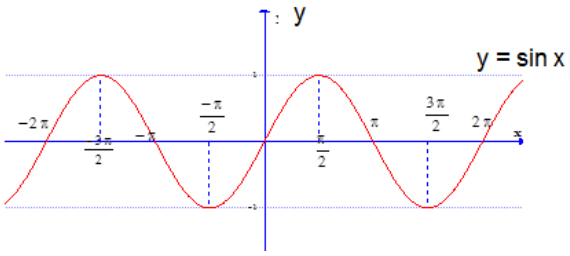


Ví dụ 3. Cho đồ thị của hàm số y =sinx, (C) . Hãy vẽ các đồ thị của các hàm số sau:

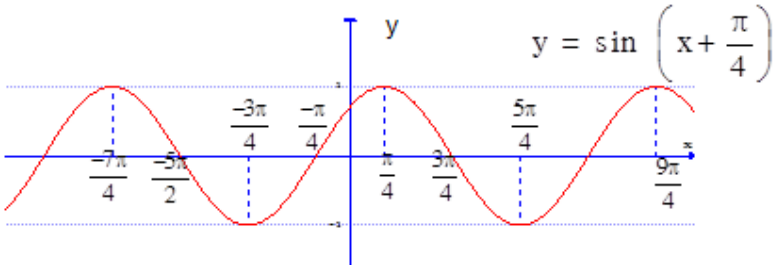
a) $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ b) $y= \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2.$

Hướng dẫn giải

Từ đồ thị của hàm số y = sinx, (C) như sau:

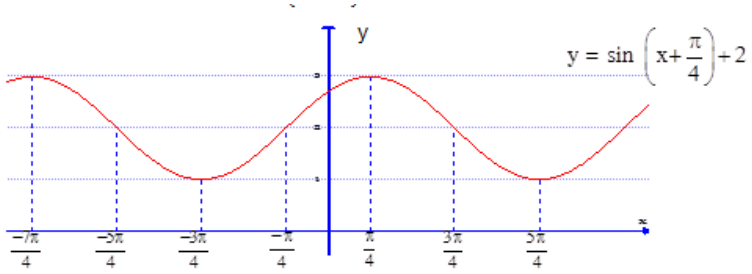


a) Từ đồ thị (C), ta có đồ thị $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ bằng cách tịnh tiến (C) sang trái một đoạn là $\frac{\pi}{4}$ đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, (C') như (hình 8) sau:



b) Từ đồ thị (C') của hàm số $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, ta có đồ thị hàm số $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$ bằng cách tịnh tiến (C') lên trên một đoạn là 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$, (C'') như sau:

y



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Đồ thị hàm số $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y=\cos x$ bằng cách:

A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Nhắc lại lý thuyết

Cho (C) là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $p>0$, ta có:

+ Tịnh tiến (C) lên trên p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y=f(x)+p$.

+ Tịnh tiến (C) xuống dưới p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y=f(x)-p$.

+ Tịnh tiến (C) sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y=f(x+p)$.

+ Tịnh tiến (C) sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y=f(x-p)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ được suy từ đồ thị hàm số $y=\cos x$ bằng cách tịnh tiến sang phải $\frac{\pi}{2}$ đơn vị.

Câu 2: Đồ thị hàm số $y=\sin x$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y=\cos x$ bằng cách:

A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=\sin x$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y=\cos x+1$ bằng cách:

A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.

B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.

C. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.

D. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.

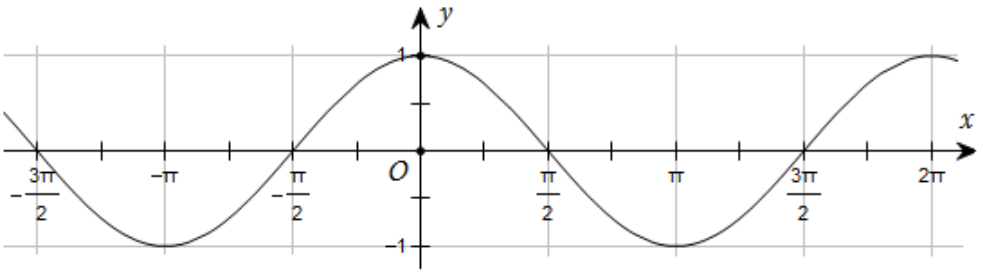
Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

- Tịnh tiến đồ thị $y=\cos x+1$ sang phải $\frac{\pi}{2}$ đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$.
- Tiếp theo tịnh tiến đồ thị $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1$ xuống dưới 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 4: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=1+\sin 2x$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=-\sin x$. **D.** $y=-\cos x$.

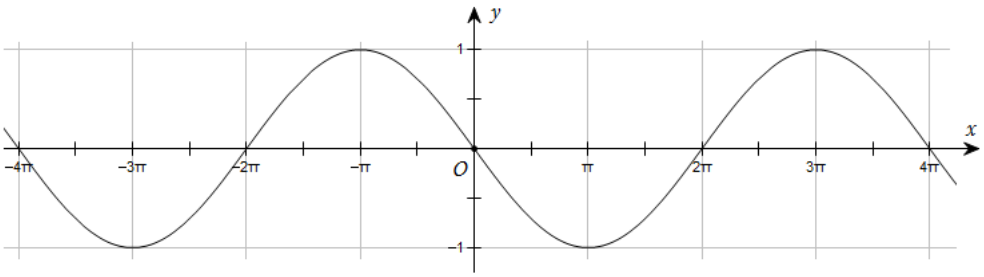
Lời giải

Chọn B

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=1$. Do đó loại đáp án C và D.

Tại $x=\frac{\pi}{2}$ thì $y=0$. Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 5: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\sin\frac{x}{2}$. **B.** $y=\cos\frac{x}{2}$. **C.** $y=-\cos\frac{x}{4}$. **D.** $y=\sin\left(-\frac{x}{2}\right)$.

Lời giải

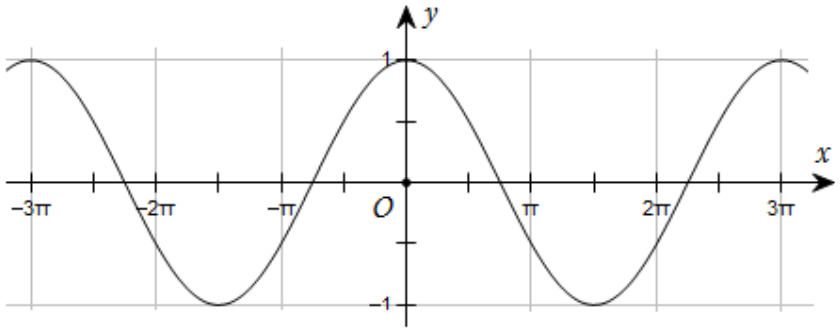
Chọn D

Ta thấy:

Tại $x=0$ thì $y=0$. Do đó loại B và C.

Tại $x=\pi$ thì $y=-1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có D thỏa.

Câu 6: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\cos\frac{2x}{3}$. **B.** $y=\sin\frac{2x}{3}$. **C.** $y=\cos\frac{3x}{2}$. **D.** $y=\sin\frac{3x}{2}$.

Lời giải

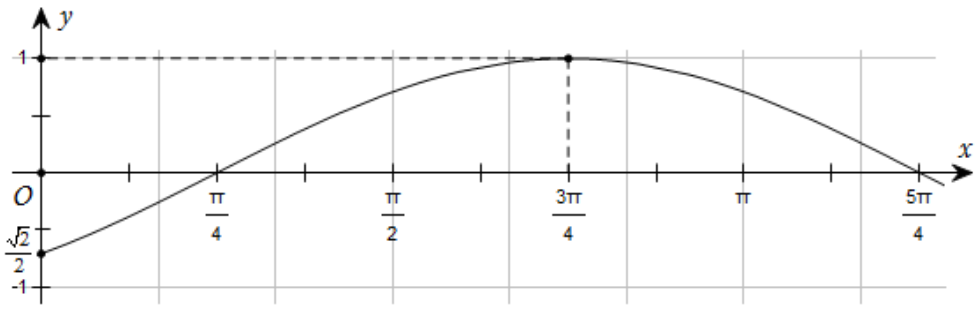
Chọn A

Ta thấy:

Tại $x=0$ thì $y=1$. Do đó ta loại đáp án B và D.

Tại $x=3\pi$ thì $y=1$. Thay vào hai đáp án A và C thì chit có A thỏa mãn.

Câu 7: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,**D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. **B.** $y=\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$. **C.** $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

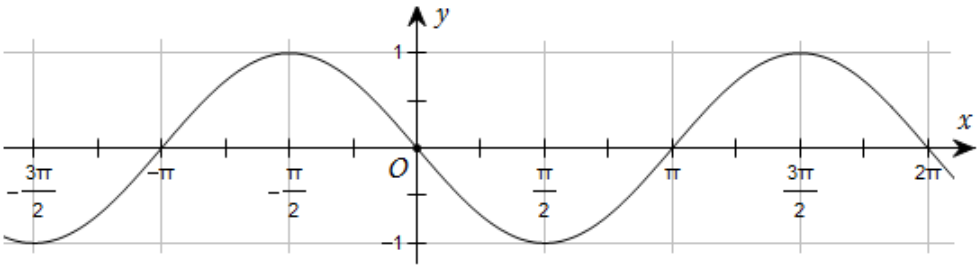
Chọn A

Ta thấy hàm số có GTLN bằng 1 và GTNN bằng -1. Do đó loại đáp án **C.**

Tại $x=0$ thì $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó loại đáp án **D.**

Tại $x=\frac{3\pi}{4}$ thì $y=1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn.

Câu 8: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,**D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\sin x$. **B.** $y=|\sin x|$. **C.** $y=\sin|x|$. **D.** $y=-\sin x$.

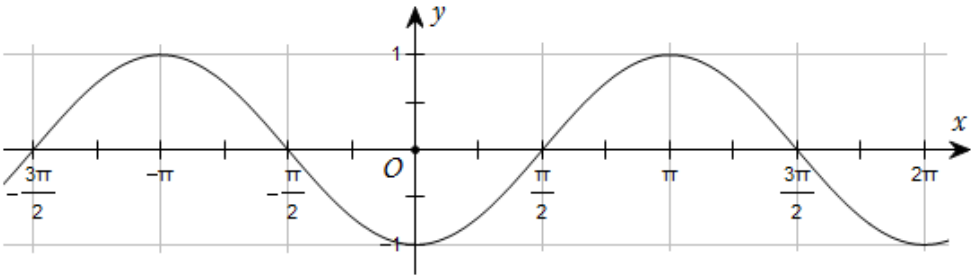
Lời giải

Chọn D

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=0$. Cả 4 đáp án đều thỏa.

Tại $x=\frac{\pi}{2}$ thì $y=-1$. Do đó chỉ có đáp án D thỏa mãn.

Câu 9: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, **D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

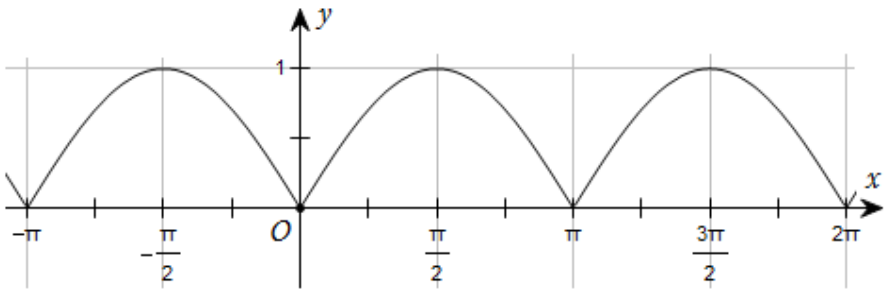
A. $y=\cos x.$ **B.** $y=-\cos x$ **C.** $y=\cos|x|.$ **D.** $y=|\cos x|.$

Lời giải

Chọn B

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=-1.$ Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 10: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B,C,**D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=|\sin x|.$ **B.** $y=\sin|x|.$ **C.** $y=\cos|x|.$ **D.** $y=|\cos x|.$

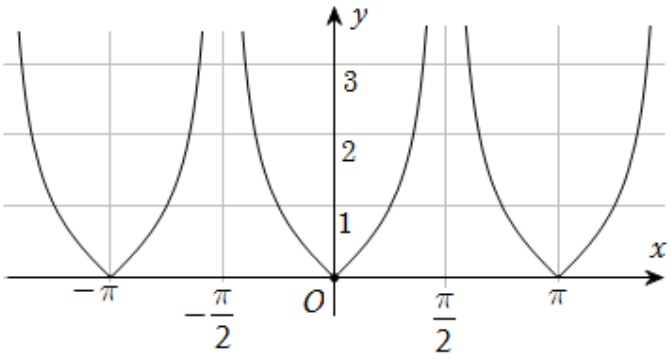
Lời giải

Chọn A

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó chỉ có A hoặc D thỏa mãn.

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=0$. Thay vào hai đáp án A và D chỉ có duy nhất A thỏa mãn.

Câu 11: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,**D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\tan x$. **B.** $y=\cot x$. **C.** $y=|\tan x|$. **D.** $y=|\cot x|$.

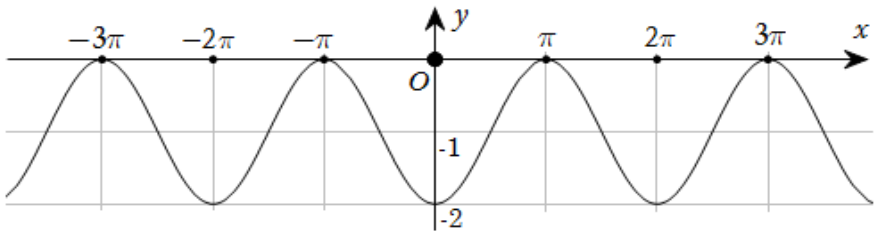
Lời giải

Chọn C

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó ta loại đáp án A và **B.**

Hàm số xác định tại $x=\pi$ và tại $x=\pi$ thì $y=0$. Do đó chỉ có C thỏa mãn.

Câu 12: .Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C,**D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$. **B.** $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. **C.** $y=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$. **D.** $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$.

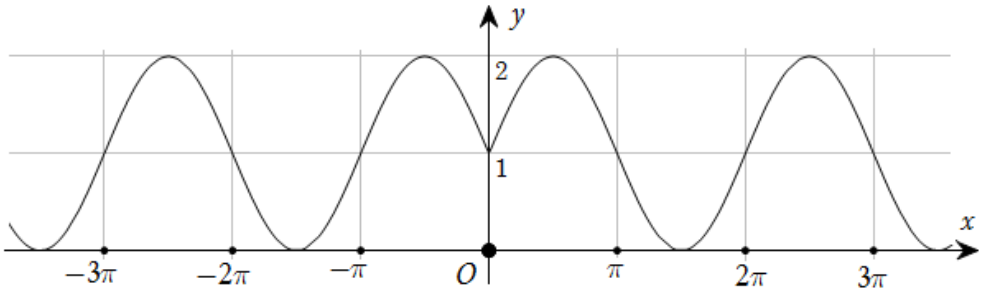
Lời giải

Chọn A

Ta thấy hàm số có GTLN bằng 0, GTNN bằng -2. Do đó ta loại đán án B vì $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\in[-2;2]$.

Tại $x=0$ thì $y=-2$. Thử vào các đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn.

Câu 13: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=1+\sin|x|$. **B.** $y=|\sin x|$. **C.** $y=1+|\cos x|$. **D.** $y=1+|\sin x|$.

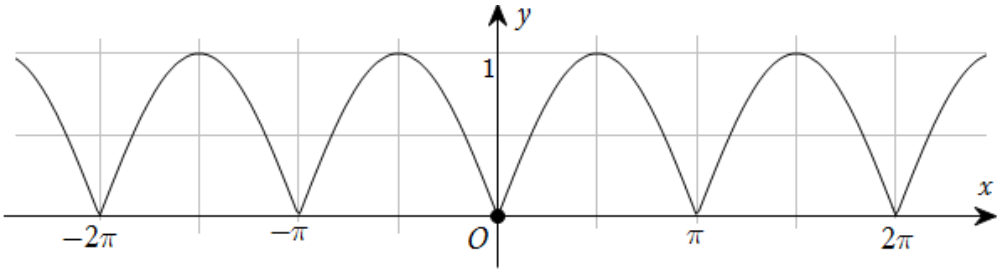
Lời giải

Chọn A

Ta có $y=1+|\cos x|\geq 1$ và $y=1+|\sin x|\geq 1$ nên loại C và **D.**

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=1$. Thay vào hai đáp án A và B thì chỉ có A thỏa mãn.

Câu 14: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, **D.**



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=1+\sin|x|$. **B.** $y=|\sin x|$. **C.** $y=1+|\cos x|$. **D.** $y=1+|\sin x|$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=1+|\cos x|\geq 1$ và $y=1+|\sin x|\geq 1$ nên loại C và **D.**

Ta thấy tại $x=\pi$ thì $y=0$. Thay vào hai đáp án A và B thì chỉ có B thỏa.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1) Phương trình $\sin x = a$

Trường hợp $|a|>1 \longrightarrow$ phương trình vô nghiệm, vì $-1 \le \sin x \le 1$ với mọi x.

Trường hợp $|a| \le 1 \longrightarrow$ phương trình có nghiệm, cụ thể:

▪ $a \in \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}.$$

▪ $a \notin \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó $\sin x = a \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}$.

2) Phương trình $\cos x = a$

Trường hợp $|a|>1 \longrightarrow$ phương trình vô nghiệm, vì $-1 \le \cos x \le 1$ với mọi x.

Trường hợp $|a| \le 1 \longrightarrow$ phương trình có nghiệm, cụ thể:

▪ $a \in \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}.$$

▪ $a \notin \left\{0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó $\cos x = a \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z}$.

3) Phương trình $\tan x = a$

Điều kiện: $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

● $a \in \left\{0; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

● $a \notin \left\{0; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4) Phương trình $\cot x = a$

Điều kiện: $x \ne \pi + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

● $a \in \left\{0; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\cot x = a \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

● $a \notin \left\{0; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$; b) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=1$; c) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-x\right)=-1$;

d) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ e) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1$; f) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=-1$;

Hướng Dẫn Giải

a) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

b) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow 4x-\frac{\pi}{3}=k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-x\right)=-1\Leftrightarrow\frac{\pi}{5}-x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{-4\pi}{5}-k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

d) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{3}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

e) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}+k4\pi,k\in\mathbb{Z}$

f) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=-1\Leftrightarrow\frac{\pi}{6}+2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải phương trình

a) $\sin 3x=\frac{1}{2}\ (1)$; b) $\cos 2x=-\frac{1}{2}\quad(2)$

c) $\tan\frac{x}{3}=2\ \ (3)$; d) $\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\ \ (4)$

Giải

a) Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\sin 3x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\3x=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\\x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3};x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}.$

b) Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là: $x = \pm\frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $(3) \Leftrightarrow x = 3\arctan 2 + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = 3\arctan 2 + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Ta có:

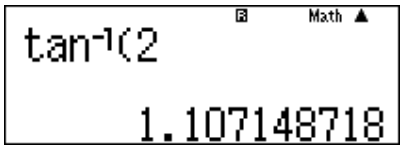
$$(4) \Leftrightarrow \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Lời bình: Những phương trình ch trên là nhưng phương trình lượng giác cơ bản. Sử dụng MTCT ta có thể tìm được các giá trị đặc biệt của hàm số lượng giác

- Ở câu a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$. Dùng MTCT (ở chế độ rad) ta ấn $\boxed{\text{SHIF}}\boxed{\sin}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}$ ta được kết quả là $\frac{\pi}{6}$. Do đó: $\sin 3x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$
- Hoàn toàn tương tự cho câu b) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Ta ấn:

  $\boxed{\text{SHIF}}\boxed{\cos}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}$ ta được kết quả là $\frac{2\pi}{3}$. Do đó: $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$
- Ở câu c) nếu ta dùng MTCT: Thử ấn $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\tan}\boxed{2}\boxed{=}$ ta được kết quả



  Do đó, phương trình $\tan\frac{x}{3} = 2$ ta chỉ có thể ghi $\frac{x}{3} = \arctan 2 + k\pi$
- Trên MTCT không có hàm cot, tuy nhiên ta thừa biết $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$. Do đó, đối với câu d) $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ ta ấn máy như sau:

  $\boxed{\text{SHIT}}\boxed{\tan}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{\sqrt{3}}\boxed{=}$ ta được kết quả là $\frac{\pi}{6}$. Do đó: $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} = \cot\frac{\pi}{6}$

Ví dụ 3. Giải phương trình

a) $\sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $\cot g\left(x + 30^0\right) = \cot g\frac{x}{2}$.

c) $\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$; d) $\sin 2x = \cos 3x$.

Giải

a) Ta có:

$$\sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x + 30^0 \neq k.180^0 \\ \frac{x}{2} \neq n.180^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -30^0 \\ x \neq n.360^0 \end{cases} (k, n \in \mathbb{Z})$

$$\cot g\left(x + 30^0\right) = \cot g\frac{x}{2} \Leftrightarrow x + 30^0 = \frac{x}{2} + k.180^0 \Leftrightarrow 2x + 60^0 = x + k.360^0$$
$$\Leftrightarrow x = -60^0 + k.360^0, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -60^0 + k.360^0, k \in \mathbb{Z}$

c) Ta có

$$\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \Leftrightarrow 2\left(1+\cos 2x\right) = \sqrt{3}+2$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nhận xét: Ngoài cách giải trên ta có thể giải theo cách sau:

$$\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}+2}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos\left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Tuy nhiên không nên giải theo cách này vì mất đi cái vẻ đẹp của toán học. Lời giải ban đầu sử dụng dụng công thức hạ bậc với các phép biến đổi hết sức đơn giản đưa về phương trình rất đẹp với đáp số.

d) Ta có

$$\sin 2x = \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (*) là $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nhận xét: Phương trình $\sin 2x = \cos 3x$ được chuyển thành $\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, ta cũng có thể chuyển thành dạng sau: $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$.

Ví dụ 4. Giải và biện luận phương trình $\sin x = 4m - 1 (*)$

Giải

- Trường hợp 1: $|4m - 1| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m - 1 > 1 \\ 4m - 1 < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{1}{2} \\ m < 0 \end{array}\right.$

Phương trình (*) vô nghiệm

- Trường hợp 2: $|4m - 1| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 4m - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{1}{2}$

Phương trình (*) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin(4m - 1) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(4m - 1) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Tóm lại:

- Nếu $\left[\begin{array}{l} m > \frac{1}{2} \\ m < 0 \end{array}\right.$ thì phương trình (*) vô nghiệm

Nếu $0 \le m \le \frac{1}{2}$ thì phương trình (*) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin(4m - 1) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(4m - 1) + k2\pi \end{array}\right.$

Ví dụ 5. Tìm m để phương trình $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Giải

Ta có: $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{\sqrt{2}} \le 1 \Leftrightarrow 1 < m \le \sqrt{2}$

Ví dụ 6. Giải phương trình

a) $\sin 2x - \sin 2x \cos x = 0 \quad (1)$; b) $\sin x \cos 2x = \sin 2x \cos 3x \quad (2)$.

Giải

a) Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sin 2x(1-\cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Lưu ý: Một số học sinh mắc sai lầm nghiệm trọng (lỗi rất cơ bản) là rút gọn phương trình ban đầu cho $\sin 2x$, dẫn đến thiếu nghiệm

b) **Định hướng:** Cả hai vế phương trình đều cho dưới dạng tích của hai hàm lượng giác. Thông thường ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

Ta nhắc lại: $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x) \Leftrightarrow \sin 5x = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = 3x + k2\pi \\ 5x = \pi - 3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k\pi; x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\sin\frac{x}{5} = -\frac{1}{2}$ là

A. $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{35\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{5\pi}{6} + 10k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{35\pi}{6} + 10k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x=-\frac{5\pi}{6}+k1800^{o}, k\in\mathbb{Z}$ và $x=\frac{35\pi}{6}+k1800^{o}, k\in\mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$$\sin\frac{x}{5}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{5}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \frac{x}{5}=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{5\pi}{6}+10k\pi\\ x=\frac{35\pi}{6}+10k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x=1$ là

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$ **B.** $x=\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$ **C.** $x=\pi+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$ **D.** $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

$\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\sin x=-1$ là

A. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$\sin x=-1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $\sin x=0$ là

A. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **D. B và C đúng**

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$\sin x=0\Leftrightarrow x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Câu 5. Nghiệm của phương trình $\cos x=1$ là

A. $x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ **B.** $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **C.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **D.** $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là

A. $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = -\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ là

A. $x = 180^o + k360^o,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = 90^o + k180^o,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = 90^o + k360^o,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = k90^o,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 90^o + k180^o,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $\tan x = 1$ là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8. Nghiệm của phương trình $\tan x = -1$ là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = (-1)^{2k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ **D.** B và C đúng

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi = (-1)^{2k+1}.\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 9. Phương trình $\tan x = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10. Phương trình $\cot x = 1$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 11. Phương trình $\cot x = -1$ có nghiệm là

A. $x = (-1)^{2k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D. tất cả đều đúng**

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} = (-1)^{2k+1}.\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 12. Phương trình $\cot x = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D**. tất cả đều đúng

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\cot x = \frac{1}{2}$ là

A. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ là

A. $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \pm\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

Ta có: $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\tan 2x = -\sqrt{3}$ là

A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

Ta có: $\tan 2x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\cot x = -\sqrt{3}$ là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

Ta có: $\cot x = -\sqrt{3} = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 17. Nghiệm của phương trình $\tan x = \tan 25^o$ là

A. $x = 25^o + k360^o$ **và** $x = 155^o + k360^o, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = 25^o + k180^o$ **và** $x = 155^o + k180^o, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = 25^o + k360^o$ **và** $x = -25^o + k360^o, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = 25^o + k180^o, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 5$ là

A. $x = 20^o + k180^o, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = 15^o + 5 + k180^o, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = 15^o + \arctan 5 + k180^o, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{\pi}{12} + \arctan 5 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

$\tan\left(x - 15^o\right) = 5 \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \arctan 5$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{12} = \arctan 5 + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \arctan 5 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 19: Giải phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

A. $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Chọn D

Phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 20: Số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x - 40^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^0 \le x \le 180^0$ là?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\sin\left(2x-40^0\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(2x-40^0\right)=\sin 60^0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-40^0=60^0+k360^0\\2x-40^0=180^0-60^0+k360^0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=100^0+k360^0\\2x=160^0+k360^0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=50^0+k180^0\\x=80^0+k180^0\end{array}\right.$.

- Xét nghiệm $x=50^0+k180^0$. Vì $-180^0\le x\le 180^0\longrightarrow -180^0\le 50^0+k180^0\le 180^0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{23}{18}\le k\le\dfrac{13}{18}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=-1\to x=-130^0\\k=0\to x=50^0\end{array}\right.$.

- Xét nghiệm $x=80^0+k180^0$. Vì $-180^0\le x\le 180^0\longrightarrow -180^0\le 80^0+k180^0\le 180^0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{13}{9}\le k\le\dfrac{5}{9}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=-1\to x=-100^0\\k=0\to x=80^0\end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Cách 2 (CASIO). Ta có $-180^0\le x\le 180^0\longrightarrow -360^0\le 2x\le 360^0$.

Chuyển máy về chế độ DEG, dùng chức năng TABLE nhập hàm $f(X)=\sin(2X-40)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với các thiết lập $\text{Start}=-360,\ \text{End}=360,\ \text{Step}=40$. Quan sát bảng giá trị của $f(X)$ ta suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 21: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

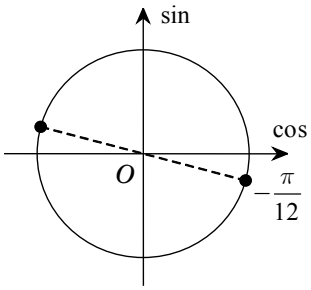
Lời giải

Chọn C

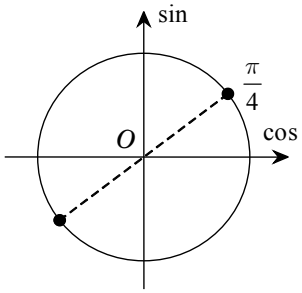
Phương trình $\Leftrightarrow\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\2x+\dfrac{\pi}{3}=\pi-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Biểu diễn nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 1).

Biểu diễn nghiệm $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 2).



Hình 1



Hình 2

Vậy có tất cả 4 vị trí biểu diễn các nghiệm các nghiệm của phương trình.

Cách trắc nghiệm. Ta đưa về dạng $x=\alpha+k\frac{2\pi}{n}\longrightarrow$ số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là n.

- Xét $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{2}\longrightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn.
- Xét $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{2}\longrightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn.

Nhận xét. Cách trắc nghiệm tuy nhanh nhưng cẩn thận các vị trí có thể trùng nhau.

Câu 22: Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y=\sin 3x$ và $y=\sin x$ bằng nhau?

A. $\begin{bmatrix}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z})$. **B.** $\begin{bmatrix}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=k\frac{\pi}{4}(k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\sin 3x=\sin x$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3x=x+k2\pi\\3x=\pi-x+k2\pi\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 23: Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\frac{2\cos 2x}{1-\sin 2x}=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$. **B.** $x_0\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. **C.** $x_0\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$. **D.** $x_0\in\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $1-\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow\sin 2x\neq 1$.

Phương trình $\frac{2\cos 2x}{1-\sin 2x}=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \xrightarrow{\sin^2 2x+\cos^2 2x=1} \begin{bmatrix}\sin 2x=1(\text{loại})\\ \sin 2x=-1(\text{thỏa mãn})\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \sin 2x=-1 \Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$

Cho $-\frac{\pi}{4}+k\pi>0 \longrightarrow k>\frac{1}{4}$.

Do đó nghiệm dương nhỏ nhất ứng với $k=1\to x=\frac{3\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$.

Câu 24: Hỏi trên đoạn $[-2017;2017]$, phương trình $(\sin x+1)\left(\sin x-\sqrt{2}\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 4034. **B.** 4035. **C.** 641. **D.** 642.

Lời giải.

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\sin x=-1\\ \sin x=\sqrt{2}(\text{vo nghiem})\end{bmatrix} \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$

Theo giả thiết $-2017\le -\frac{\pi}{2}+k2\pi\le 2017 \Leftrightarrow \frac{-2017+\frac{\pi}{2}}{2\pi}\le k\le \frac{2017+\frac{\pi}{2}}{2\pi}$

$\xrightarrow{\text{xap xi}} -320,765\le k\le 321,265 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{-320;-319;...;321\}.$

Vậy có tất cả 642 giá trị nguyên của k tương ứng với có 642 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25: Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bằng:

A. $\frac{\pi}{9}$. **B.** $-\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $-\frac{\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}3x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 3x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}3x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi\\ 3x=\frac{11\pi}{12}+k2\pi\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x=\frac{7\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\end{bmatrix} \ (k\in\mathbb{Z}).$

TH1. Với $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\xrightarrow{\text{Cho}}\begin{cases}x>0\Leftrightarrow k>-\frac{7}{24}\Rightarrow k_{\min}=0\rightarrow x=\frac{7\pi}{36}\\ x<0\Leftrightarrow k<-\frac{7}{24}\Rightarrow k_{\max}=-1\rightarrow x=-\frac{17\pi}{36}\end{cases}$.

TH2. Với $x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\xrightarrow{\text{Cho}}\begin{cases}x>0\Leftrightarrow k>-\frac{11}{24}\Rightarrow k_{\min}=0\rightarrow x=\frac{11\pi}{36}\\ x<0\Leftrightarrow k<-\frac{11}{24}\Rightarrow k_{\max}=-1\rightarrow x=-\frac{13\pi}{36}\end{cases}$.

So sánh bốn nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất là $x=-\frac{13\pi}{36}$ và nghiệm dương nhỏ nhất là $x=\frac{7\pi}{36}$. Khi đó tổng hai nghiệm này bằng $-\frac{13\pi}{36}+\frac{7\pi}{36}=-\frac{\pi}{6}$.

Câu 26: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan\left(2x-15^0\right)=1$ trên khoảng $\left(-90^0;90^0\right)$ bằng:

A. 0^0. **B.** -30^0. **C.** 30^0. **D.** -60^0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan\left(2x-15^0\right)=1\Leftrightarrow 2x-15^0=45^0+k180^0\Leftrightarrow x=30^0+k90^0\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Do $x\in\left(-90^0;90^0\right)\longrightarrow -90^0<30^0+k90^0<90^0\Leftrightarrow -\frac{4}{3}<k<\frac{2}{3}$

$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\begin{cases}k=-1\rightarrow x=-60^0\\ k=0\rightarrow x=30^0\end{cases}\longrightarrow -60^0+30^0=-30^0$.

Câu 27: Giải phương trình $\cot\left(3x-1\right)=-\sqrt{3}$.

A. $x=\frac{1}{3}+\frac{5\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\ \ (k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\ \ (k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{6}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cot\left(3x-1\right)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\cot\left(3x-1\right)=\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 3x-1=-\frac{\pi}{6}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}\ \ (k\in\mathbb{Z})\xrightarrow{k=1}x=\frac{1}{3}+\frac{5\pi}{18}$.

Câu 28: Số nghiệm của phương trình $\tan x=\tan\frac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};2\pi\right)$ là?

A. 1 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan x = \tan\dfrac{3\pi}{11} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{11} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Do $x \in \left(\dfrac{\pi}{4};2\pi\right) \to \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3\pi}{11} + k\pi < 2\pi \xrightarrow[\text{xap xi}]{\text{CASIO}} -0,027 < k < 1,72 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{0;1\}$.

Câu 29: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0;\pi)$ bằng:

A. π. **B.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** 2π. **D.** $\dfrac{5\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan 5x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in [0;\pi)$, suy ra $0 \le \dfrac{k\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 \le k < 4 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k = \{0;1;2;3\}$.

Suy ra các nghiệm của phương trình trên $[0;\pi)$ là $\left\{0;\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

Suy ra $0 + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{2}$.

Câu 30: Giải phương trình $\tan 3x.\cot 2x = 1$.

A. $x = k\dfrac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}\cos 3x \ne 0\\ \sin 2x \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ne \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}\\ x \ne k\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \tan 3x = \dfrac{1}{\cot 2x} \Leftrightarrow \tan 3x = \tan 2x \Leftrightarrow 3x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Đối chiếu điều kiện, ta thấy nghiệm $x = k\pi$ không thỏa mãn $x \ne k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 31: Giải phương trình $\cos 2x \tan x = 0$.

A. $x = k\dfrac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = k\pi\end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}\\ x = k\pi\end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$. **D.**

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\cos 2x \tan x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \tan x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (\text{thỏa mãn}) \\ x = k\pi (\text{thỏa mãn}) \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 32: Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

A. $m \leq 1$. **B.** $m \geq -1$. **C.** $-1 \leq m \leq 1$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn C

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Do đó, phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.

Câu 33: Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **B.** $m \in (1; +\infty)$.

C. $m \in [-1; 1]$. **D.** $m \in (-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

- Phương trình có nghiệm khi $|a| \leq 1$.
- Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$.

Do đó, phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow |m| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

- Phương trình có nghiệm khi $|a| \leq 1$.

● Phương trình vô nghiệm khi $|a|>1$.

Do đó, phương trình $\cos x = m+1$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m+1|\le 1$

$\Leftrightarrow -1\le m+1\le 1 \Leftrightarrow -2\le m\le 0 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 35: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-m=2$ có nghiệm. Tính tổng T của các phần tử trong S.

A. $T=6.$ **B.** $T=3.$ **C.** $T=-2.$ **D.** $T=-6.$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-m=2 \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=m+2.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le m+2\le 1 \Leftrightarrow -3\le m\le -1$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} S=\{-3;-2;-1\} \longrightarrow T=(-3)+(-2)+(-1)=-6.$

BÀI 3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A. KIẾN THỨC LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1) Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

Định nghĩa. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng

$$\boxed{at+b=0}$$

trong đó $a,\ b$ là các hằng số $(a\neq 0)$ và t là một hàm số lượng giác.

Cách giải. Chuyển vế rồi chia hai vế phương trình cho a, ta đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

2) Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Định nghĩa. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng

$$\boxed{a\sin x+b\cos x=c}$$

Cách giải. Điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2+b^2\geq c^2$.

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ nên đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha\longrightarrow\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha.$

Khi đó phương trình trở thành

$$\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\sin\left(x+\alpha\right)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3) Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Định nghĩa. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng

$$\boxed{at^2+bt+c=0}$$

trong đó $a,\ b,\ c$ là các hằng số $(a\neq 0)$ và t là một hàm số lượng giác.

Cách giải. Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này. Cuối cùng, ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

4) Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

Định nghĩa. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng

$$\boxed{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0}$$

Cách giải.

● Kiểm tra $\cos x=0$ có là nghiệm của phương trình.

● Khi $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta thu được phương trình

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai đối với $\tan x$ mà ta đã biết cách giải.

Đặc biệt. Phương trình dạng $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ ta làm như sau:

Phương trình $\Leftrightarrow a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d.1$

$\Leftrightarrow a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow (a-d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c-d)\cos^2 x = 0.$

5) Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x.\cos x$

Định nghĩa. Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x.\cos x$

$$\boxed{a\left(\sin x \pm \cos x\right) + b\sin x\cos x + c = 0}$$

Cách giải. Đặt $t = \sin x \pm \cos x$ (điều kiện $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$)

Biểu diễn $\sin x.\cos x$ theo t ta được phương trình cơ bản.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁO GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Giải phương trình $2\cos x - \sqrt{3} = 0$.

Lời giải

Ta có $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

Ví dụ 2: Giải phương trình $2\sin x - 1 = 0$

Lời giải

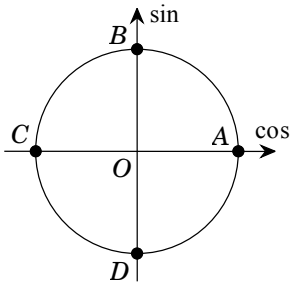
Ta có: $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 3: Giải phương trình $\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$

Lời giải

Ta có $\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z}).$



Quá dễ để nhận ra có 4 vị trí biểu diễn nghiệm của phương trình đã cho trên đường tròn lượng giác là A, B, C,D.

Cách trắc nghiệm. Ta có $x=\frac{k\pi}{2}=k\frac{2\pi}{4}\longrightarrow$ có 4 vị trí biểu diễn.

Ví dụ 4: Hỏi trên đoạn $[0;2018\pi]$, phương trình $\sqrt{3}\cot x-3=0$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải

Ta có $\cot x=\sqrt{3}\Leftrightarrow \cot x=\cot\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z}).$

Theo giả thiết, ta có $0\le\frac{\pi}{6}+k\pi\le 2018\pi\xrightarrow{\text{xap xi}}-\frac{1}{6}\le k\le 2017,833$

$3\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0;1;...;2017\}$. Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của k tương ứng với có 2018 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Phương trình $2\sin x+1=0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=-\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=-\frac{7\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2\sin x+1=0\Leftrightarrow\sin x=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

Câu 2: Giải phương trình $\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\sin\frac{x}{2}+2\right)=0$

A. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ **B.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

C. $x=\pm\frac{\pi}{3}+k4\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ **D.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k4\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Lời giải

Chọn D

Vì $-1\le\sin\frac{x}{2}\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\sin\frac{x}{2}+2>0$

Vậy phương trình tương đương

$$2\cos\frac{x}{2}-1=0\Leftrightarrow\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$$
$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k4\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Câu 3: Phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{\frac{\pi}{6}+k2\pi,\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

$$2\sin x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 4: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0.$

A. $x=\frac{\pi}{4}.$ **B.** $x=\frac{7\pi}{24}.$ **C.** $x=\frac{\pi}{8}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{12}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0\Leftrightarrow\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 4x-\dfrac{\pi}{3}=\pi-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ 4x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

TH1. Với $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\xrightarrow{\text{Cho}>0}\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}>0\Leftrightarrow k>-\dfrac{1}{4}\to k_{\min}=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{8}.$

TH2. Với $x=\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\xrightarrow{\text{Cho}>0}\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}>0\Leftrightarrow k>-\dfrac{7}{12}\to k_{\min}=0\Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{24}.$

So sánh hai nghiệm ta được $x=\dfrac{\pi}{8}$ là nghiệm dương nhỏ nhất.

Câu 5: Giải phương trình $4\sin^2 x=3$.

A. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}).$

B. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}).$

C. $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{3} \\ k\neq 3\ell \end{array}\right. (k,\ell\in\mathbb{Z}).$

D. $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{k\pi}{3} \\ k\neq 3\ell \end{array}\right. (k,\ell\in\mathbb{Z}).$

Lời giải

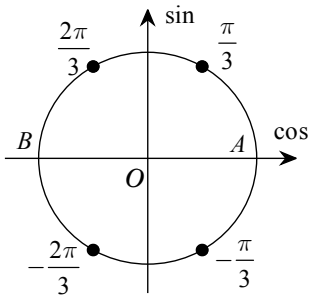
Chọn D

Ta có $4\sin^2 x=3\Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow \sin x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- Với $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

- Với $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$

Nhận thấy chưa có đáp án nào phù hợp. Ta biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác (hình vẽ).



Nếu tính luôn hai điểm A, B thì có tất cả 6 điểm cách đều nhau nên ta gộp được 6 điểm này thành một họ nghiệm, đó là $x = k\frac{\pi}{3}$.

Suy ra nghiệm của phương trình $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{3} \\ k\frac{\pi}{3} \neq l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ k \neq 3\ell \end{cases} (k, \ell \in \mathbb{Z}).$

Câu 6: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1-m}{\sqrt{3}}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le \frac{1-m}{\sqrt{3}} \le 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \le m \le 1 + \sqrt{3} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0;1;2\}.$

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2108;2018]$ để phương trình $m\cos x + 1 = 0$ có nghiệm?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 4036. **D.** 4038.

Lời giải

Chọn A

Ta có $m\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{m}.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le -\frac{1}{m} \le 1 \Leftrightarrow m \ge 1 \xrightarrow[m \in [-2018;2018]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1;2;3;...;2018\}$.

Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 8: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m-2)\sin 2x = m + 1$ nhận $x = \frac{\pi}{12}$ làm nghiệm.

A. $m \neq 2$. **B.** $m = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-2}.$ **C.** $m = -4.$ **D.** $m = -1.$

Lời giải

Chọn C

Vì $x = \frac{\pi}{12}$ là một nghiệm của phương trình $(m-2)\sin 2x = m + 1$ nên ta có:

$(m-2).\sin\frac{2\pi}{12} = m + 1 \Leftrightarrow \frac{m-2}{2} = m + 1 \Leftrightarrow m - 2 = 2m + 2 \Leftrightarrow m = -4$.

Vậy $m=-4$ là giá trị cần tìm.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+1)\sin x+2-m=0$ có nghiệm.

A. $m\le -1$. **B.** $m\ge \frac{1}{2}$. **C.** $-1<m\le \frac{1}{2}$. **D.** $m>-1$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $(m+1)\sin x+2-m=0\Leftrightarrow (m+1)\sin x=m-2\Leftrightarrow \sin x=\frac{m-2}{m+1}$.

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le \frac{m-2}{m+1}\le 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le 1+\frac{m-2}{m+1} \\ \frac{m-2}{m+1}-1\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-1}{m+1}\ge 0 \\ -\frac{3}{m+1}\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \frac{1}{2} \\ m<-1 \\ m>-1 \end{cases}\Leftrightarrow m\ge \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)\sin 2x=m+1$ vô nghiệm.

A. $m\in\left[\frac{1}{2};2\right]$. **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $m\in\left(\frac{1}{2};2\right)\cup(2;+\infty)$. **D.** $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

TH1. Với $m=2$, phương trình $(m-2)\sin 2x=m+1\Leftrightarrow 0=3$: vô lý.

Suy ra $m=2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

TH2. Với $m\ne 2$, phương trình $(m-2)\sin 2x=m+1\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{m+1}{m-2}$.

Để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{m+1}{m-2}\notin[-1;1]\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{m+1}{m-2}>1 \\ \frac{m+1}{m-2}<-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ \frac{1}{2}<m<2 \end{array}\right.$.

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m>\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Dạng 2. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

1. Phương pháp

Cách 1

- Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- Đặt: $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(\alpha \in [0, 2\pi]\right)$ phương trình trở thành:

$$\sin\alpha.\sin x + \cos\alpha.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta$$
$$\Leftrightarrow x = \alpha \pm \beta + k2\pi \quad (k \in Z)$$

- Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge c^2.$$

Cách 2

- Xét $x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có là nghiệm hay không?

- Xét $x \ne \pi + k2\pi \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} \ne 0.$

Đặt: $t = \tan\frac{x}{2}$, thay $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta được phương trình bậc hai theo t:

$$(b+c)t^2 - 2at + c - b = 0 \quad (3)$$

Vì $x \ne \pi + k2\pi \Leftrightarrow b + c \ne 0,$ nên (3) có nghiệm khi:

$$\Delta' = a^2 - (c^2 - b^2) \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge c^2.$$

Giải (3), với mỗi nghiệm t_0, ta có phương trình: $\tan\frac{x}{2} = t_0.$

Ghi chú

1/ Cách 2 thường dùng để giải và biện luận.

2/ Cho dù cách 1 hay cách 2 thì điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2 + b^2 \ge c^2$.

3/ Bất đẳng thức B.C.S:

$$|y| = |a.\sin x + b.\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \min y = -\sqrt{a^2+b^2} \text{ và } \max y = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{a} = \frac{\cos x}{b} \Leftrightarrow \tan x = \frac{a}{b}$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình

a) $\sin x + 2\cos x = 5;$ b) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1;$ c) $5\cos x + 3\sin x = 4\sqrt{2}.$

Giải

a) Ta thấy $a^2+b^2=5<c^2=25\Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}=2$, ta được :

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

b) Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}=34$, ta được :

$$\frac{5}{\sqrt{34}}\cos x+\frac{3}{\sqrt{34}}\sin x=\frac{4}{\sqrt{17}}(*)$$

Đặt $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{34}},\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{34}},\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Lúc đó : $pt\Leftrightarrow\cos(x-\varphi)=\frac{4}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+\varphi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của phương trình $\cos7x-\sqrt{3}\sin7x=-\sqrt{2}(*)$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2\pi}{5}<x<\frac{6\pi}{7}$.

Giải

Ta có :

$$(*)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos7x-\frac{3}{2}\sin7x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{6}\cos7x-\cos\frac{\pi}{6}\sin7x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{6}-7x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\sin\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 7x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+m2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}\\ x=\frac{11\pi}{84}+\frac{m2\pi}{7}\end{array}\right.(k,m\in\mathbb{Z})$$

Do

$$\frac{2\pi}{5}<x<\frac{6\pi}{7}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{2\pi}{5}<\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}\\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\frac{2\pi}{5}<\frac{11\pi}{84}+\frac{m2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}\\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{5}-\frac{5}{84}<\frac{2k}{7}<\frac{6}{7}-\frac{5}{84}\\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\frac{2}{5}-\frac{11}{84}<\frac{2m}{7}<\frac{6}{7}-\frac{11}{84}\\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{7}{5}-\frac{5}{24}<k<3-\frac{5}{24}\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{7}{5}-\frac{11}{24}<m<3-\frac{11}{24}\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=2\\ m=1\\ m=2\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{52\pi}{84};x=\frac{35\pi}{84};x=\frac{59\pi}{84}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin 2x+1=6\sin x+\cos 2x$.

Định hướng: Chuyển cos2x sang vế trái, dùng công thức nhân đôi $1-\cos 2x=2\sin^2 x$. Lúc đó phương trình đưa về phương trình tích với sự xuất hiện của nhân tử chung là $\sin x$

Giải

Ta có:

$$\sin 2x+1=6\sin x+\cos 2x\Leftrightarrow\left(\sin 2x-6\sin x\right)+\left(1-\cos 2x\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x-3\right)+2\sin^2 x=0\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos x-3+\sin x\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x+\cos x=3\ \text{(VN)}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4$.

Định hướng: Chuyển toàn bộ vế phải của phương trình sang vế trái, nhóm $2\sin 2x-2\cos x=2\cos x\left(2\sin x-1\right)$, sử dụng công thức $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ để nhóm $2\sin^2 x-1-7\sin x+4=2\sin^2 x-7\sin x+3=\left(\sin x-3\right)\left(2\sin x-1\right)$

Chú ý rằng: nếu $f\left(x\right)=ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ với x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$

Giải

Ta có:

$$\text{PT}\Leftrightarrow 4\sin x.\cos x-2\cos x+2\sin^2 x-1-7\sin x+4=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\sin x-1\right)+2\sin^2 x-7\sin x+3=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\sin x-1\right)+\left(\sin x-3\right)\left(2\sin x-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(2\sin x-1\right)\left(\sin x+2\cos x-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin x+2\cos x-3=0\ \ (\text{VN vì } 1^2+2^2<3^2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trinh là: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sin x\left(2\sin x+1\right)=\cos x\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)$.

Định hướng: Khai triển cả hai vế phương trình ta thấy vế trái xuất hiện $2\sin^2 x$ và vế phải xuất hiện $2\cos^2 x$, như vậy nếu đặt 2 ra ngoài ta se được công thức nhân hai: $2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=2\cos 2x$.

Chuyển vế, phương trình đã cho trở thành:

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\cos 2x$.

Giải

Ta có:

$$PT\Leftrightarrow \sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\Leftrightarrow \sin x-\sqrt{3}\cos x=2\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\cos 2x\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2x+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3};\ x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình : $\cos 7x\cos 5x-\sqrt{3}\sin 2x=1-\sin 7x\sin 5x\left(*\right)$

Định hướng : Ở cả hai vế phương trình đều xuất hiện $7x,5x$. Chuyển vế ta được :

$\cos 7x\cos 5x+\sin 7x\sin 5x=\cos\left(7x-5x\right)=\cos 2x$

Giải

Ta có :

$$\left(*\right)\Leftrightarrow \cos 7x\cos 5x+\sin 7x\sin 5x-\sqrt{3}\sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(7x-5x\right)-\sqrt{3}\sin 2x=1\Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=1\left(1\right)$$

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$

Ta được: $\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=k\pi,x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 7. Xác định m để phương trình $\sqrt{2}\sin x+m\cos x=m-\sqrt{2}\left(*\right)$ có nghiệm.

Định hướng : Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \ge c^2$.

Giải

Ta có :

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{2^2} + m^2 \ge \left(m - \sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2 + m^2 \ge m^2 - 2\sqrt{2}m + 2 \Leftrightarrow m \ge 0$

Vậy $m \ge 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 8. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

$a)\sin x + m\cos x = 1 - m \qquad (1)$

$b)\left(2m + 1\right)\sin x + \left(2m - 1\right)\cos x = 2m^2 + \frac{3}{2} \qquad (2)$

Giải

a) **Cách 1.** Thay $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ hay $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ vào (1). Ta có :

$VT(1) = 0 - m = -m,$ nên (1) không có nghiệm $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$. Ta có (1) trở thành: $\frac{2t}{1+t^2} + m\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 1 - m$

$\Leftrightarrow 2t + m - mt^2 = 1 + t^2 - m - mt^2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 - 2m = 0(*)$

$\Delta' = 1 - \left(1 - 2m\right) = 2m$

- Nếu $m < 0$ thì $\Delta' < 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm $\Rightarrow (1)$ vô nghiệm
- Nếu $m = 0$ thì $\Delta' = 0 \Rightarrow (*)$ có nghiệm kép $t_1 = t_2 = -\frac{b'}{a} = 1$

  $\Rightarrow (1)$ có nghiệm $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Nếu $m > 0$ thì $\Delta' > 0 \Rightarrow (*)$ có nghiệm $t = 1 - \sqrt{2m}$ hoặc $t = 1 + \sqrt{2m}$

  $\Rightarrow (1)$ có nghiệm là $x = 2\arctan\left(1 \pm \sqrt{2m}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tóm lại :

Nếu $m < 0$ thì (1) vô nghiệm

Nếu $m = 0$ thì có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nếu $m > 0$ thì (1) có nghiệm là $x = 2\arctan\left(1 + \sqrt{2m}\right) + k2\pi, x = 2\arctan\left(1 - \sqrt{2m}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Cách 2

(1) có dạng $a\sin X + b\cos X = c$ với $a = 1, b = m, c = 1, X = x$

Ta có :

$A = a^2 + b^2 - c^2 = 1^1 + m^2 - (1-m)^2 = 2m$

Nếu $m < 0$ thì $A < 0 \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm

Nếu $m = 0 : (1) \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi . k \in \mathbb{Z}$

Nếu $m > 0$ thì $A > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow (1)$ có nghiệm

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\sqrt{m^2+1}$

Ta được: $\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \sin x + \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \cos x = \frac{1-m}{\sqrt{m^2+1}} (*)$

Đặt $\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} = \cos\varphi, \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} = \sin\varphi, \frac{1-m}{\sqrt{m^2+1}} = \cos\alpha .$

$(*) \Leftrightarrow \cos(x-\varphi) = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \varphi + \alpha + k2\pi$ hoặc $x = \varphi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) (1) có dạng $a\sin X + b\cos X = c$ với $a = 2m, b = 2m-1, c = 2m^2 + \frac{3}{2}, X = x$. Ta có

$a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2m-1)^2 = 8m^2 + 2$

$c^2 = \left(2m^2 + \frac{3}{2}\right)^2 = 4m^4 + 6m^2 + \frac{9}{4}$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 4m^4 - 2m^2 + \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(2m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

Với $m = \frac{1}{2} : (2) \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Với $m = -\frac{1}{2} : (2) \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi . k \in \mathbb{Z}$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\cos 2x - \sin 2x = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\pi}{4} \in S.$ **B.** $\frac{\pi}{2} \in S.$ **C.** $\frac{3\pi}{4} \in S.$ **D.** $\frac{5\pi}{4} \in S.$

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Xét nghiệm $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, với $k=1$ ta được $x=\frac{3\pi}{4}$.

Câu 2: Số nghiệm của phương trình $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

- $0<k\pi<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<k<\frac{1}{2}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}$ không có giá trị k thỏa mãn.
- $0<\frac{\pi}{6}+k\pi<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{3}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=0\to x=\frac{\pi}{6}$.

Câu 3: Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x-\sin 2x=\sqrt{2}+\sin^2 x$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

A. $T=\frac{7\pi}{8}$. **B.** $T=\frac{21\pi}{8}$. **C.** $T=\frac{11\pi}{4}$. **D.** $T=\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=\sqrt{2}\Leftrightarrow \cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Do $0<x<2\pi\longrightarrow 0<-\frac{\pi}{8}+k\pi<2\pi\Leftrightarrow\frac{1}{8}<k<\frac{17}{8}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l}k=1\to x=\frac{7\pi}{8}\\k=2\to x=\frac{15\pi}{8}\end{array}\right.$

$\longrightarrow T=\frac{7\pi}{8}+\frac{15\pi}{8}=\frac{11}{4}\pi$.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $\sin 5x+\sqrt{3}\cos 5x=2\sin 7x$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 5x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x=\sin 7x \Leftrightarrow \sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 7x$

$\Leftrightarrow \sin 7x=\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}7x=5x+\frac{\pi}{3}+k2\pi\\7x=\pi-\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)+k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{6}\end{cases}(k\in\mathbb{Z}).$

- $0<\frac{\pi}{6}+k\pi<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{3}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=0\to x=\frac{\pi}{6}.$
- $0<\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<k<\frac{8}{3}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\begin{cases}k=0\to x=\frac{\pi}{18}\\k=1\to x=\frac{2\pi}{9}\\k=2\to x=\frac{7\pi}{18}\end{cases}.$

Vậy có 4 nghiệm thỏa mãn.

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x.$

A. $\begin{cases}x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases}x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases}x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases}x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\\x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ và $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin 2x\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x+\cos x=-2\sin 2x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=-\sin 2x\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin 2x\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin(-2x)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{6}=-2x+k2\pi\\x+\frac{\pi}{6}=\pi+2x+k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\\x=-\frac{5\pi}{6}-k2\pi\end{cases}(k\in\mathbb{Z}).$

Xét nghiệm $x=-\frac{5\pi}{6}-k2\pi\xrightarrow[k\in\mathbb{Z},\,k'\in\mathbb{Z}]{k=-1-k'}x=\frac{7\pi}{6}+k'2\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3},\ x=\frac{7\pi}{6}+k'2\pi\ (k,k'\in\mathbb{Z}).$

Câu 6: Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của $\sin 9x+\sqrt{3}\cos 7x=\sin 7x+\sqrt{3}\cos 9x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0\in\left(-\frac{\pi}{12};0\right)$. **B.** $x_0\in\left[-\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{12}\right]$. **C.** $x_0\in\left[-\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{6}\right)$. **D.** $x_0\in\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 9x-\sqrt{3}\cos 9x=\sin 7x-\sqrt{3}\cos 7x$

$\Leftrightarrow \sin\left(9x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(7x-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9x-\frac{\pi}{3}=7x-\frac{\pi}{3}+k2\pi\\9x-\frac{\pi}{3}=\pi-\left(7x-\frac{\pi}{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{8}\end{array}\right.$

$\xrightarrow{\text{Cho x <0}}\left[\begin{array}{l}k\pi<0\Leftrightarrow k<0\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=-1\to x=-\pi\\\frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{8}<0\Leftrightarrow k<-\frac{5}{6}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=-1\to x=-\frac{\pi}{48}\end{array}\right.$. So sánh hai nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x=-\frac{\pi}{48}\in\left(-\frac{\pi}{12};0\right)$.

Câu 7: Biến đổi phương trình $\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)$ về dạng $\sin(ax+b)=\sin(cx+d)$ với b, d thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Tính $b+d$.

A. $b+d=\frac{\pi}{12}$. **B.** $b+d=\frac{\pi}{4}$. **C.** $b+d=-\frac{\pi}{3}$. **D.** $b+d=\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x+\frac{1}{2}\cos 3x=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\Leftrightarrow\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Suy ra $b+d=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$.

Câu 8: Giải phương trình $\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\sin x-\frac{1}{2}}=0$.

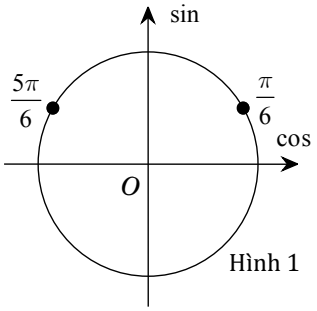
A. $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=\frac{7\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\sin x-\frac{1}{2}\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq \frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x\neq \sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x\neq \frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{cases} (k\in\mathbb{Z}).$

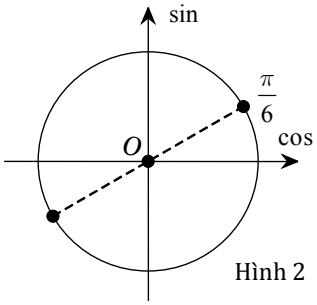


Hình 1

Điều kiện bài toán tương đương với bỏ đi vị trí hai điểm trên đường tròn lượng giác (Hình 1).

Phương trình $\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x=0\Leftrightarrow \cos x=\sqrt{3}\sin x$

$\Leftrightarrow \cot x=\sqrt{3}\Leftrightarrow \cot x=\cot\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+l\pi\ (l\in\mathbb{Z}).$



Hình 2

Biểu diễn nghiệm $x=\frac{\pi}{6}+l\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí như Hình 2.

Đối chiếu điều kiện, ta loại nghiệm $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$. Do đó phương trình có nghiệm $x=\frac{7\pi}{6}+2l\pi\ (l\in\mathbb{Z}).$

Câu 9: Hàm số $y=\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x+3}\Leftrightarrow (y-2)\sin 2x-(y+1)\cos 2x=-3y.$

Điều kiện để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (y-2)^2+(y+1)^2\geq(-3y)^2\Leftrightarrow 7y^2+2y-5\leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \le y \le \frac{5}{7} \xrightarrow{y\in\mathbb{Z}} y \in \{-1;0\}$ nên có 2 giá trị nguyên.

Câu 10: Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 \in \left(0;\frac{\pi}{12}\right).$ **B.** $x_0 \in \left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right].$ **C.** $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right].$ **D.** $x_0 \in \left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right].$

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right) + \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Đặt $t = x - \frac{\pi}{6} \longrightarrow x = t + \frac{\pi}{6} \to 2x = 2t + \frac{\pi}{3} \to 2x + \frac{\pi}{6} = 2t + \frac{\pi}{2}.$

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right) + \sin t = 1 \Leftrightarrow \cos 2t + \sin t = 1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t\left(2\sin t - 1\right) = 0.$

- $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{6} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \to x = \frac{\pi}{6}.$
- $\sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{6} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \to x = \frac{\pi}{3}. \\ t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \longrightarrow x = \pi + k2\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \to x = \pi. \end{cases}$

Suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}\right].$

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 2m$ vô nghiệm.

A. 21. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 < \left(2m\right)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m < -1 \\ m > 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-10;-9;-8;...;-2;2;...;8;9;10\} \longrightarrow$ có 18 giá trị.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(m^2+1\right)$ vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m \in [-1;1]$. **C.** $m \in (-\infty;+\infty)$ **D.** $m \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 1^2+1^2 < \left[\sqrt{2}\left(m^2+1\right)\right]^2$

$\Leftrightarrow m^4+2m^2>0 \Leftrightarrow m^2\left(m^2+2\right)>0 \Leftrightarrow m^2>0 \Leftrightarrow m\neq 0.$

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $(m+1)\sin x - m\cos x = 1-m$ có nghiệm.

A. 21. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (m+1)^2+m^2 \geq (1-m)^2 \Leftrightarrow m^2+4m\geq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m\geq 0 \\ m\leq -4 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-10;-9;-8;...;-4;0;1;2;...;8;9;10\} \longrightarrow$ có 18 giá trị.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm.

A. 4037. **B.** 4036. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow (m+1)\dfrac{1-\cos 2x}{2} - \sin 2x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x + (1-m)\cos 2x = -m-1.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (-2)^2+(1-m)^2 \geq (-m-1)^2 \Leftrightarrow 4m\leq 4 \Leftrightarrow m\leq 1$

$\xrightarrow[m\in[-2018;2018]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-2018;-2017;...;0;1\} \longrightarrow$ có 2020 giá trị.

Dạng 3. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

1. Phương pháp

Phương trình bậc hai đối với phương trình lương giác là phương trình có một trong 4 dạng sau:

1. $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$. Cách giải: $t = \sin x, -1\leq t\leq 1$
2. $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$. Cách giải: $t = \cos x, -1\leq t\leq 1$

3. $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$. Cách giải: $t = \tan x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4. $a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$. Cách giải: $t = \cot x,\ x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$; b) $\tan^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\tan x - \sqrt{3} = 0$

c) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$; d) $\cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0$

Hướng dẫn giải

a)

$$2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \cos^2 x\right) + 5\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$$\tan^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \sqrt{3} \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

a) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

Đặt $t = \tan^2 x$, phương trình đã cho trở thành

$$t + \frac{1}{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Điều kiện: $\sin x \neq 0$

$$\cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot 2x = 3 \\ \cot 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\cot 3 + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$; b) $\frac{1}{\cos^2 x} - \left(3 + \sqrt{3}\right)\tan x - 3 + \sqrt{3} = 0$

Hướng dẫn giải

a) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 9\cos x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$$\frac{1}{\cos^2 x}-\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+1+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \tan^2 x-\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+\sqrt{3}+2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\sqrt{3}+2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\left(\sqrt{3}+2\right)+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Ví dụ 3. Xác định m để phương trình $\cos x-2m\cos x+6m-9=0(*)$ có nghiệm $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\cos x$. Với $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<t\leq 1$

Ta có $t^2-2m+6m-9=0\Leftrightarrow t=2m-3$ hoặc $t=3>1$ (loại)

Phương trình (*) có nghiệm $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow 0<2m-3\leq 1\Leftrightarrow \frac{3}{2}<m\leq 2.$

Ví dụ 4. Xác định m để phương trình $2\cos^2 x-(m+2)\cos x+m=0(*)$ có đúng hai nghiệm $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\cos x,|t|\leq 1.$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]$

Ta có: $2t^2-(m+2)t+m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\in[0;1]\\ t=\frac{m}{2}\end{array}\right.$

Để (*) có đúng hai nghiệm $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thì $\frac{m}{2}\in[0;1)\Leftrightarrow m\in[0;2)$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hỏi trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, phương trình $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $2\sin^2 x-3\sin x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin x=1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{6}\\ \sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Theo giả thiết $0\le x<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le\dfrac{\pi}{6}+k2\pi<\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi<\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le\dfrac{\pi}{2}+k2\pi<\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{12}<k<\dfrac{1}{6}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=0\to x=\dfrac{\pi}{6}\\ -\dfrac{5}{12}<k<-\dfrac{1}{12}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\varnothing\\ -\dfrac{1}{4}<k<0\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\varnothing\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 2: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x+5\cos x+3=0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x+5\cos x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=-\dfrac{3}{2}(\text{loại})\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi(k\in\mathbb{Z}).$

Suy ra có duy nhất 1 vị trí biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

Câu 3: Cho phương trình $\cot^2 3x-3\cot 3x+2=0.$ Đặt $t=\cot 3x$, ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2-3t+2=0.$ **B.** $3t^2-9t+2=0.$ **C.** $t^2-9t+2=0.$ **D.** $t^2-6t+2=0.$

Lời giải

Chọn A

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $4\sin^2 2x-2\left(1+\sqrt{2}\right)\sin 2x+\sqrt{2}=0$ trên $(0;\pi)$ là?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $4\sin^2 2x-2\left(1+\sqrt{2}\right)\sin 2x+\sqrt{2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin 2x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

- $\sin 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\2x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{8}+k\pi\xrightarrow{(0;\pi)}x=\dfrac{\pi}{8}\\x=\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\xrightarrow{(0;\pi)}x=\dfrac{3\pi}{8}\end{array}\right.$.

- $\sin 2x=\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\2x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi\xrightarrow{(0;\pi)}x=\dfrac{\pi}{12}\\x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\xrightarrow{(0;\pi)}x=\dfrac{5\pi}{12}\end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $\sin^2 2x-\cos 2x+1=0$ trên đoạn $[-\pi;4\pi]$ là?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\sin^2 2x-\cos 2x+1=0\Leftrightarrow-\cos^2 2x-\cos 2x+2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\\cos 2x=-2(\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow\cos 2x=1\Leftrightarrow 2x=k2\pi\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Do $x\in[-\pi;4\pi]\longrightarrow-\pi\le k\pi\le 4\pi\Leftrightarrow-1\le k\le 4\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{-1;0;1;2;3;4\}.$

Vậy phương trình có 6 nghiệm thỏa mãn.

Câu 6: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2\sin^2\dfrac{x}{4}-3\cos\dfrac{x}{4}=0$ trên đoạn $[0;8\pi]$.

A. $T=0$. **B.** $T=8\pi$. **C.** $T=16\pi$. **D.** $T=4\pi$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $2\sin^2\dfrac{x}{4}-3\cos\dfrac{x}{4}=0\Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2\dfrac{x}{4}\right)-3\cos\dfrac{x}{4}=0$

$\Leftrightarrow-2\cos^2\dfrac{x}{4}-3\cos\dfrac{x}{4}+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{4}=\dfrac{1}{2}\\\cos\dfrac{x}{4}=-2(\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow\cos\dfrac{x}{4}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\dfrac{x}{4}=\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{4}=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\\dfrac{x}{4}=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{4\pi}{3}+k8\pi\xrightarrow{x\in[0;8\pi]}x=\dfrac{4\pi}{3}\\x=-\dfrac{4\pi}{3}+k8\pi\xrightarrow{x\in[0;8\pi]}x=\dfrac{20\pi}{3}\end{array}\right.\rightarrow T=\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{20\pi}{3}=8\pi.$

Câu 7: Số nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\left(\sqrt{3}-1\right)\cot x-\left(\sqrt{3}+1\right)=0$ trên $(0;\pi)$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \left(1+\cot^2 x\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)\cot x-\left(\sqrt{3}+1\right)=0 \Leftrightarrow \cot^2 x-\left(\sqrt{3}-1\right)\cot x-\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x=-1\\ \cot x=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x=\cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \cot x=\cot\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \xrightarrow{x\in(0;\pi)} x=\dfrac{3\pi}{4}\left(\text{thỏa mãn}\right)\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \xrightarrow{x\in(0;\pi)} x=\dfrac{\pi}{6}\left(\text{thỏa mãn}\right)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thỏa mãn.

Câu 8: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2\cos 2x+2\cos x-\sqrt{2}=0$ trên đoạn $[0;3\pi]$.

A. $T=\dfrac{17\pi}{4}$. **B.** $T=2\pi$. **C.** $T=4\pi$. **D.** $T=6\pi$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $2\cos 2x+2\cos x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 x-1\right)+2\cos x-\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x+2\cos x-2-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\left(\text{loại}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \xrightarrow{x\in[0;3\pi]} x=\dfrac{\pi}{4}; x=\dfrac{9\pi}{4}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \xrightarrow{x\in[0;3\pi]} x=\dfrac{7\pi}{4}\end{array}\right. \longrightarrow T=\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=\frac{17\pi}{4}.$$

Câu 9: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos 2x+3\sin x+4=0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow \left(1-2\sin^2 x\right)+3\sin x+4=0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x+3\sin x+5=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\dfrac{5}{2}\left(\text{loại}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$$

Suy ra có duy nhất 1 vị trí đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm.

Câu 10: Cho phương trình $\cos x+\cos\dfrac{x}{2}+1=0$. Nếu đặt $t=\cos\dfrac{x}{2}$, ta được phương trình nào sau đây?

A. $2t^2+t=0$. **B.** $-2t^2+t+1=0$. **C.** $2t^2+t-1=0$. **D.** $-2t^2+t=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1.$

Do đó phương trình $\Leftrightarrow \left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right) + \cos\frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0.$

Đặt $t = \cos\frac{x}{2}$, phương trình trở thành $2t^2 + t = 0.$

Câu 11: Số nghiệm của phương trình $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$ thuộc $[0;2\pi]$ là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$

Do đó phương trình $\Leftrightarrow -2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{3}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{3}{2}(\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \xrightarrow{x\in[0;2\pi]} x = \frac{11\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \xrightarrow{x\in[0;2\pi]} x = \frac{\pi}{2}.$

Vậy có hai nghiệm thỏa mãn.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\tan x + m\cot x = 8$ có nghiệm.

A. $m > 16.$ **B.** $m < 16.$ **C.** $m \geq 16.$ **D.** $m \leq 16.$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\tan x + m\cot x = 8 \Leftrightarrow \tan x + \frac{m}{\tan x} = 8 \Leftrightarrow \tan^2 x - 8\tan x + m = 0.$

Để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = (-4)^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 16.$

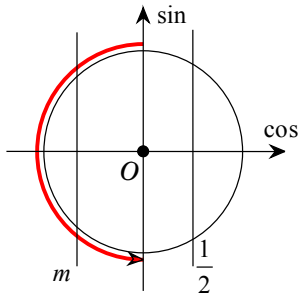
Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right).$

A. $-1 \leq m \leq 0.$ **B.** $-1 \leq m < 0.$ **C.** $-1 < m < 0.$ **D.** $-1 \leq m < \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=m\end{array}\right.$.



Nhận thấy phương trình $\cos x=\dfrac{1}{2}$ không có nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ (Hình vẽ). Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos x=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -1\le m<0$.

Câu 14: Biết rằng khi $m=m_0$ thì phương trình $2\sin^2 x-(5m+1)\sin x+2m^2+2m=0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};3\pi\right)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

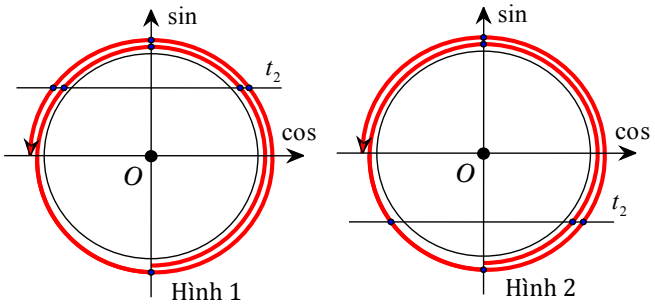
A. $m=-3$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m_0\in\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{7}{10}\right]$. **D.** $m_0\in\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x\ (-1\le t\le 1)$.

Phương trình trở thành $2t^2-(5m+1)t+2m^2+2m=0.\ (*)$



Yêu cầu bài toán tương đương với:

● **TH1:** Phương trình $(*)$ có một nghiệm $t_1=-1$ (có một nghiệm x) và một nghiệm $0<t_2<1$ (có bốn nghiệm x) (Hình 1).

✔ Do $t_1=-1\longrightarrow t_2=-\dfrac{c}{a}=-m^2-m$.

✔ Thay $t_1=-1$ vào phương trình $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l} m=-3\longrightarrow t_2=-6\notin(0;1)(\text{loại}) \\ m=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow t_2=\dfrac{1}{4}\in(0;1)(\text{thỏa}) \end{array}\right.$.

● **TH2:** Phương trình $(*)$ có một nghiệm $t_1=1$ (có hai nghiệm x) và một nghiệm $-1<t_2\le 0$ (có ba nghiệm x) (Hình 2).

✔ Do $t_1=1\longrightarrow t_2=\dfrac{c}{a}=m^2+m$.

✔ Thay $t_1=1$ vào phương trình $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l} m=1\longrightarrow t_2=2\notin(-1;0](\text{loại}) \\ m=\dfrac{1}{2}\longrightarrow t_2=\dfrac{3}{4}\notin(-1;0](\text{loại}) \end{array}\right.$.

Vậy $m=-\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do $m=-\dfrac{1}{2}\in\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2\cos^2 3x+(3-2m)\cos 3x+m-2=0$ có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$.

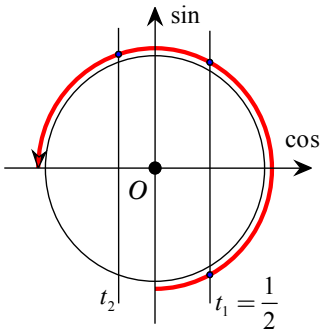
A. $-1\le m\le 1$. **B.** $1<m\le 2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $1\le m<2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\cos x\ (-1\le t\le 1)$. Phương trình trở thành $2t^2+(3-2m)t+m-2=0$.

Ta có $\Delta=(2m-5)^2$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{1}{2} \\ t_2=m-2 \end{array}\right.$.



Ta thấy ứng với một nghiệm $t_1=\dfrac{1}{2}$ thì cho ta hai nghiệm x thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$. Do đó yêu cầu bài toán $-1<t_2\le 0\Leftrightarrow -1<m-2\le 0\Leftrightarrow 1<m\le 2$.

Cách 2. Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $2t^2+(3-2m)t+m-2=0$ có hai nghiệm $t_1,\ t_2$ thỏa mãn $-1<t_2\le 0<t_1<1\Leftrightarrow\begin{cases} P\le 0 \\ a.f(1)>0 \\ a.f(-1)>0 \end{cases}$.

Dạng 4. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

1. Phương pháp

Cách 1:

- Kiểm tra cosx = 0 có thoả mãn hay không?

  Lưu ý: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1.$

- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

  $$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

- Đặt: t = tanx, đưa về phương trình bậc hai theo t:

  $$(a - d)t^2 + b.t + c - d = 0$$

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc

$$(1) \Leftrightarrow a.\frac{1-\cos 2x}{2} + b.\frac{\sin 2x}{2} + c.\frac{1+\cos 2x}{2} = d$$

$$\Leftrightarrow b.\sin 2x + (c - a).\cos 2x = 2d - a - c$$

(đây là phương trình bậc nhất đối với sin2x và cos2x)

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0 (*).$

Giải

Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$

Ta có $VT(*) = 1 \neq VP \Rightarrow (*)$ không có nghiệm trên $\Rightarrow \cos^2 x \neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$, ta được: $\tan^2 x + 3\tan x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4} \\ \tan x = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-4) + k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (*) là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan(-4) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải phương trình $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2 (*)$

Giải

Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$

Ta có: $VT(*)=2=VP(*)\Rightarrow(*)$ có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Khi $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}:\cos^2 x\neq 0$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$

$\Leftrightarrow\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z};x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Ví dụ 3. Giải phương trình $\cos^3 x+2\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x=0(*).$

Giải

Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=1\end{cases}$

Ta có: $VT(*)=\pm3\neq VP(*)$ không có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\cos^3 x\neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$, ta được:

$1+2\tan x-3\tan^3 x=0\Leftrightarrow(\tan x-1)\underbrace{\left(3\tan^2 x+3\tan x+1\right)}_{\Delta<0}=0$

$\Leftrightarrow\tan x=1=\tan\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 4. Giải phương trình $\cos^3 x+\sin x-3\sin^2 x\cos x=0(*).$

Giải

Khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin^2 x=1\end{cases}$

Ta có: $VT(*)=\pm1\neq VP\Rightarrow(*)$ không có nghiệm trên $\Rightarrow\cos^3 x\neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$, ta được $1+\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-3\tan^2 x=0$

$\Leftrightarrow\tan^3 x-2\tan^2 x+\tan+1=0\Leftrightarrow(\tan x-1)\left(\tan^2 x-2\tan x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x-1=0\\ \tan^2 x-2\tan x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}\\ x=\arctan\left(1\pm\sqrt{2}\right)+k\pi\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của (*) là $x=\frac{\pi}{4};x=\arctan\left(1\pm\sqrt{2}\right)+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Ví dụ 5. Xác định a để $a\sin^2 x + 2\sin 2x + 3a\cos^2 x = 2(*)$ có nghiệm.

Giải

$$(*) \Leftrightarrow a\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + 2\sin 2x + 3a\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = 2$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 2x + a\cos 2x = 2 - 2a(1)$$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 2^2 + a^2 \geq (2-2a)^2$

$$\Leftrightarrow 4 + a^2 \geq 4 - 8a + 4a^2 \Leftrightarrow 3a^2 - 8a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{8}{3}$$

Vậy với $0 \leq a \leq \frac{8}{3}$ thì phương trình đã cho có nhiệm.

Ví dụ 6. Cho phương trình:

$$\sin^3 x + (2m+1)\sin^2 x\cos x + (3m-1)\sin x\cos^3 x = 0(*).$$

Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Giải

Khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$

Ta có: $VT(*) = \pm 1 \neq VP \Rightarrow (*)$ không có nghiệm trên $\Rightarrow \cos^3 x \neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$, ta được:

$$\tan^3 x + (2m+1)\tan^2 x + (3m-1)\tan x + m - 1 = 0$$

Đặt $t = \tan x$. với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right] \Rightarrow t \in (-\infty; 0]$

Ta có: $t^3 + (2m+1)t^2 + (3m-1)t + m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+1)\left(t^2 + 2mt + m - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ f(t) = t^2 + 2mt + m - 1 = 0(1) \end{cases}$$

Để (*) có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$$t_1, t_2 : \begin{cases} t_1 < t_2 \leq 0 \\ t_1, t_2 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P \geq 0 \\ S < 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 1 > 0, \forall m \\ m - 1 \geq 0 \\ -m < 0 \\ 1 - 2m + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

Vậy $m \geq 1$ thỏa mãn đề bài.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giải phương trình $\sin^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0.$

A. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

B. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

D. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow \tan^2 x-\left(\sqrt{3}+1\right)\tan x+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\\tan x=\sqrt{3}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Câu 2: Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x+\sqrt{3}\ \sin x\cos x=1$?

A. $\cos x\left(\cot^2 x-3\right)=0.$

B. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2-\sqrt{3}\right]=0.$

C. $\left[\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1\right].\left(\tan x-\sqrt{3}\right)=0.$

D. $\left(\sin x-1\right)\left(\cot x-\sqrt{3}\right)=0.$

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x+\sqrt{3}\ \sin x\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\ \sin x\cos x-\cos^2 x=0\Leftrightarrow\cos x\left(\sqrt{3}\ \sin x-\cos x\right)=0.$

- $\cos x=0\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0.$
- $\sqrt{3}\ \sin x-\cos x=0\Leftrightarrow\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Ta có $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x.\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}.1}=2+\sqrt{3}\Leftrightarrow\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2-\sqrt{3}=0.$

Vậy phương trình đã cho tương đương với $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).\left[\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2-\sqrt{3}\right]=0.$

Câu 3: Cho phương trình $\cos^2 x-3\sin x\cos x+1=0$. Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. $x=k\pi$ không là nghiệm của phương trình.

B. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x-3\tan x+2=0$.

C. Nếu chia 2 vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $2\cot^2 x+3\cot x+1=0$.

D. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x-3\sin 2x+3=0$.

Lời giải

Chọn C

● Với $x=k\pi\longrightarrow\begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=\pm 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=0\\ \cos^2 x=1\end{cases}$. Thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy A đúng. (vì thay x = $k\pi$ không thỏa mãn pt)

● Phương trình $\Leftrightarrow\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0\Leftrightarrow\tan^2 x-3\tan x+2=0$. Vậy B đúng.

● Phương trình $\Leftrightarrow\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sin^2 x=0\Leftrightarrow 2\cot^2 x-3\cot x+1=0$. Vậy C sai.

● Phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{1+\cos 2x}{2}-3\dfrac{\sin 2x}{2}+1=0\Leftrightarrow\cos 2x-3\sin 2x+3=0.$ Vậy D đúng.

Câu 4: Số vị trí biểu diễn các nghiệm phương trình $\sin^2 x-4\sin x\cos x+4\cos^2 x=5$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow\sin^2 x-4\sin x\cos x+4\cos^2 x=5\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow -4\sin^2 x-4\sin x\cos x-\cos^2 x=0\Leftrightarrow\left(2\sin x+\cos x\right)^2=0\Leftrightarrow 2\sin x+\cos x=0$

$\Leftrightarrow\tan x=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng gác.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x-3\sin x\cos x+2\sin^2 x=0$ trên $(-2\pi;2\pi)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow 1-3\tan x+2\tan^2 x=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\tan x=1\\ \tan x=\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\dfrac{1}{2}+k\pi\end{bmatrix}$.

● Vì $x \in (-2\pi;2\pi) \longrightarrow -2\pi < \frac{\pi}{4} + k\pi < 2\pi \rightarrow -\frac{9}{4} < k < \frac{7}{4} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{-2;-1;0;1\}$.

● Vì $x \in (-2\pi;2\pi) \longrightarrow -2\pi < \arctan\frac{1}{2} + k\pi < 2\pi$

$\xrightarrow[\text{xapxi}]{\text{CASIO}} -28,565 < k < -24,565 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{-28;-27;-26;-25\}$.

Vậy có tất cả 8 nghiệm.

Câu 6: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$ là:

A. $\frac{\pi}{12}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow 4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\sin 2x - 6\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 6\cos x\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right. \xrightarrow{\text{Cho}>0} \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{2} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{6} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{6} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}\end{array}\right.$.

So sánh hai nghiệm ta được $x = \frac{\pi}{6}$ là nghiệm dương nhỏ nhất.

Câu 7: Cho phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)\sin^2 x + \sin 2x + \left(\sqrt{2}+1\right)\cos^2 x - \sqrt{2} = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $x = \frac{7\pi}{8}$ là một nghiệm của phương trình.

B. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0$.

C. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $\cot^2 x + 2\cot x - 1 = 0$.

D. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - \sin 2x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Câu 8: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $2\sin^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x + \left(1-\sqrt{3}\right)\cos^2 x = 1.$

A. $-\frac{\pi}{6}$. **B.** $-\frac{\pi}{4}$. **C.** $-\frac{2\pi}{3}$. **D.** $-\frac{\pi}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x+\left(1-\sqrt{3}\right)\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \tan^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\tan x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.$

$\xrightarrow{\text{Cho } x<0}\left[\begin{array}{l}-\frac{\pi}{4}+k\pi<0\Leftrightarrow k<\frac{1}{4}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=0\to x=-\frac{\pi}{4}\\ \frac{\pi}{3}+k\pi<0\Leftrightarrow k<-\frac{1}{3}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=-1\to x=-\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.$.

So sánh hai nghiệm ta được $x=-\frac{\pi}{4}$ là nghiệm âm lớn nhất.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $11\sin^2 x+(m-2)\sin 2x+3\cos^2 x=2$ có nghiệm?

A. 16. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow 9\sin^2 x+(m-2)\sin 2x+\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow 9.\frac{1-\cos 2x}{2}+(m-2)\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}=0\Leftrightarrow(m-2)\sin 2x-4\cos 2x=-5.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (m-2)^2+16\geq 25\Leftrightarrow (m-2)^2\geq 9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 5\\ m\leq -1\end{array}\right.$

$\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-10;-9;...;-1;5;6;...;10\}\longrightarrow$ có 16 giá trị nguyên.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc để phương trình $\sin^2 x-2(m-1)\sin x\cos x-(m-1)\cos^2 x=m$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $\Leftrightarrow (1-m)\sin^2 x-2(m-1)\sin x\cos x-(2m-1)\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow (1-m).\frac{1-\cos 2x}{2}-(m-1)\sin 2x-(2m-1).\frac{1+\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2(m-1)\sin 2x+m\cos 2x=2-3m.$

Phương trình có nghiệm $4(m-1)^2+m^2\geq(2-3m)^2\Leftrightarrow 4m^2-4m\leq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq 1$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{0;1\}\longrightarrow$ có 2 giá trị nguyên.

Câu 11: Tìm điều kiện để phương trình $a\sin^2 x + a\sin x\cos x + b\cos^2 x = 0$ với $a \neq 0$ có nghiệm.

A. $a \geq 4b$. **B.** $a \leq -4b$. **C.** $\frac{4b}{a} \leq 1$. **D.** $\left|\frac{4b}{a}\right| \leq 1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $a\tan^2 x + a\tan x + b = 0$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow a(a-4b) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(4b-a) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4b-a}{a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4b}{a} \leq 1.$

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\sin^2 x + m\sin 2x = 2m$ vô nghiệm.

A. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$. **B.** $m < 0$, $m > \frac{4}{3}$. **C.** $0 < m < \frac{4}{3}$. **D.** $m < -\frac{4}{3}$, $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow 2.\frac{1-\cos 2x}{2} + m\sin 2x = 2m \Leftrightarrow m\sin 2x - \cos 2x = 2m - 1.$

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 1 < (2m-1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \frac{4}{3} \end{array}\right.$.

Câu 13: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3;3]$ để phương trình $(m^2+2)\cos^2 x - 2m\sin 2x + 1 = 0$ có nghiệm.

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow (m^2+2).\frac{1+\cos 2x}{2} - 2m\sin 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4m\sin 2x - (m^2+2)\cos 2x = m^2 + 4$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 16m^2 + (m^2+2)^2 \geq (m^2+4)^2 \Leftrightarrow 12m^2 \geq 12 \Leftrightarrow m^2 \geq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 1$

$\xrightarrow[m\in[-3;3]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-3;-2;-1;1;2;3\} \longrightarrow$ có 6 giá trị nguyên.

Dạng 5. Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x \cos x$.

1. Phương pháp

Bài toán 1: a.(sinx ± cosx) + b.sinx.cosx + c = 0

- Đặt: $t = \cos x \pm \sin x = \sqrt{2}.\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$; $|t| \le \sqrt{2}$.

$\Rightarrow t^2 = 1 \pm 2\sin x.\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x = \pm\frac{1}{2}(t^2 - 1).$

- Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình bậc hai theo t. Giải phương trình này tìm t thỏa $|t| \le \sqrt{2}$. Suy ra x.

Lưu ý dấu

- $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Bài toán 2: a.|sinx ± cosx| + b.sinx.cosx + c = 0

- Đặt: $t = \left|\cos x \pm \sin x\right| = \sqrt{2}.\left|\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)\right|$; Đk : $0 \le t \le \sqrt{2}$.

$\Rightarrow \sin x.\cos x = \pm\frac{1}{2}(t^2 - 1).$

  - Tương tự dạng trên. Khi tìm x cần lưu ý phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $\sin x + \cos x + 2\sin x\cos x - 1 = 0\ (1)$

b) $6(\sin x - \cos x) - \sin x\cos x - 6 = 0 (2)$

Giải

a) Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Phương trình (1) trở thành: $t + 2\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 < -\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Phương trình (2) trở thành: $6t - \left(\frac{1-t^2}{2}\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 12t - 13 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -13 < -\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sin 2x - 2\sqrt{2}\left(\sin x + \cos x\right) = 5$.

Giải

Đặt $\sin x + \cos x = t \ \left(|t| \le \sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

PT $\Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -\sqrt{2}$ (thỏa mãn)

Giải phương trình

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = 2\left(\sin x + \cos x\right) - 1 (*)$

Định hướng: Ta sử dụng hằng đẳng thức

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \left(\sin x + \cos x\right)\left(1 - \sin x \cos x\right)$$

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sin x + \cos x\right)\left(1 - \sin x \cos x\right) = 2\left(\sin x + \cos x\right) - 1 (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

Phương trình (1) trở thành: $t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 2t - 1$

$\Leftrightarrow t\left(3-t^2\right)=4t-2\Leftrightarrow t^3+t-2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+2\right)=0\Leftrightarrow t=1\left(\text{do } t^2+t+2>0,\forall t\in\mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=k2\pi;x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\cos3x+3\cos x+4\cos^2x+8\sin x-8=0$.

Định hướng: Ta sử dụng công thức nhân 3 cho cos3x để triệt tiêu phần 3cosx phía liền kề sau đó. Như vậy, phương trình viết thành: $4\cos^3x+4\cos^2x+8\sin x-8=0$, nhóm các cụm $4\cos^3x+4\cos^2x=4\cos^2x\left(\cos x+1\right)$, $8\sin x-8=-8\left(1-\sin x\right)$. Sử dụng hằng đẳng thức $\cos^2x=1-\sin^2x=\left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)$. Đưa phương trình đã cho về phương trình tích với nhân tử chung là $1-\sin x$.

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}PT&\Leftrightarrow 4\cos^3x-3\cos x+3\cos x+4\cos^2x+8\sin x-8=0\\&\Leftrightarrow\cos^2x\left(\cos x+1\right)=2\left(1-\sin x\right)\\&\Leftrightarrow\left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)\left(\cos x+1\right)=2\left(1-\sin x\right)\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\\left(1+\sin x\right)\left(\cos x+1\right)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\\sin x+\cos x+\sin x.\cos x=1\left(*\right)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Đặt $\sin x+\cos x=t\ \left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow\sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

$(*)$ trở thành $t+\frac{t^2-1}{2}=1\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\ (\text{loại})\end{array}\right.$

$t=1\Rightarrow\sin2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có một họ nghiệm là: $x=\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 5. Giải phương trình : $2\cos^3x+\sin x+1=2\sin^2x\left(*\right)$

Định hướng : Biến đổi $\sin^2x=1-\cos^2x$, chuyển vế phương trình ta được $2\cos^3x+2\cos^2x+\sin x-1=0$, đến đây hoàn toàn tương tự ví dụ 4.

Giải

Ta có :

$(*) \Leftrightarrow 2\cos^3 x - 2\left(1-\cos^2 x\right) + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^3 x + 2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x(\cos x + 1) - (1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x + 1) - (1-\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)\left[2(1+\sin x)(\cos x + 1) - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)\left[2(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x + 1\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 1 - \sin x = 0 & (1) \\ 2(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Ta có : $(1) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Giải (2), ta đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \le \sqrt{2}$

(2) trở thành : $2t + \left(t^2 - 1\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow t(t+2) = 0 \Rightarrow t = 0$

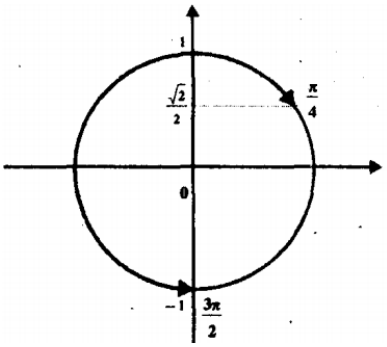
$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 6. Cho $\sin 2x - \left(2m + \sqrt{2}\right)(\sin x + \cos x) + 2m\sqrt{2} + 1 = 0 (*)$. Xác định m để phương trình (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left(0; \frac{5\pi}{4}\right)$

Giải

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



Với $0 < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$

Phương trình (*) trở thành

$t^2 - 1 - \left(2m + \sqrt{2}\right)t + 2m\sqrt{2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - \left(2m + \sqrt{2}\right)t + 2m\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hoặc $t = 2m$

Với $t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Mà $0 < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{\pi}{4} + k2\pi < \frac{5\pi}{4} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{8} < k < \frac{1}{2} \Rightarrow k = 0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Do đó $x=\frac{\pi}{4}$ là một nghiệm của (*)

Để (*) có đúng hai nghiệm $x\in\left(0;\frac{5\pi}{4}\right)$ khi $-1<\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2}<2m\le 1\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<m\le\frac{1}{2}$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giải phương trình $\sin x\cos x+2(\sin x+\cos x)=2$.

A. $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=k2\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k\pi\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Vì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có $t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $\frac{t^2-1}{2}+2t=2\Leftrightarrow t^2+4t-5=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t=1\\ t=-5(\text{loại})\end{bmatrix}$.

Với $t=1$, ta được $\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$.

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{bmatrix},k\in\mathbb{Z}$.

Câu 2: Cho phương trình $3\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+2\sin 2x+4=0$. Đặt $t=\sin x+\cos x$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2+3\sqrt{2}t+2=0.$

B. $4t^2+3\sqrt{2}t+4=0.$

C. $2t^2+3\sqrt{2}t-2=0.$

D. $4t^2+3\sqrt{2}t-4=0.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sin x+\cos x\longrightarrow\sin 2x=t^2-1.$

Phương trình đã cho trở thành $3\sqrt{2}t+2(t^2-1)+4=0\Leftrightarrow 2t^2+3\sqrt{2}t+2=0.$

Câu 3: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin x+\cos x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$ là:

A. $-\frac{\pi}{2}$. **B.** $-\pi$. **C.** $-\frac{3\pi}{2}$. **D.** -2π.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Ta có $t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$.

Phương trình đã cho trở thành $t=1-\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3(\text{loại})\end{array}\right.$.

Với $t=1$, ta được $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$.

TH1. Với $x=k2\pi<0\Leftrightarrow k<0\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=-1\to x=-2\pi$.

TH2. Với $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi<0\Leftrightarrow k<-\frac{1}{4}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k_{\max}=-1\to x=-\frac{3\pi}{2}$.

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x=-\frac{3\pi}{2}$.

Câu 4: Từ phương trình $\left(1+\sqrt{3}\right)(\cos x+\sin x)-2\sin x\cos x-\sqrt{3}-1=0$, nếu ta đặt $t=\cos x+\sin x$ thì giá trị của t nhận được là:

A. $t=1$ hoặc $t=\sqrt{2}$. **B.** $t=1$ hoặc $t=\sqrt{3}$.

C. $t=1$. **D.** $t=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x-\cos x\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\longrightarrow\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình trở thành $\left(1+\sqrt{3}\right)t-\left(t^2-1\right)-\sqrt{3}-1=0$

$\Leftrightarrow t^2-\left(1+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\sqrt{3}(\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow t=1$.

Câu 5: Cho x thỏa mãn $2\sin 2x-3\sqrt{6}|\sin x+\cos x|+8=0$. Tính $\sin 2x$.

A. $\sin 2x=-\frac{1}{2}$. **B.** $\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sin 2x=\frac{1}{2}$. **D.** $\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\left|\sin x+\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. Vì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có $t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$.

Phương trình đã cho trở thành $2\left(t^2-1\right)-3\sqrt{6}\,t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt{6}}{2}\\ t=\sqrt{6}\,(\text{loại})\end{array}\right.$

$\sin 2x=t^2-1=\frac{1}{2}$.

Câu 6: Hỏi trên đoạn $[0;2018\pi]$, phương trình $\left|\sin x-\cos x\right|+4\sin 2x=1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4037. **B.** 4036. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\left|\sin x-\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$. Vì $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có $t^2=\left(\sin x-\cos x\right)^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2x=1-t^2$.

Phương trình đã cho trở thành $t+4\left(1-t^2\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\frac{3}{4}(\text{loại})\end{array}\right.$.

Với $t=1$, ta được $\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Theo giả thiết $x\in[0;2018\pi]\longrightarrow 0\le\frac{k\pi}{2}\le 2018\pi\Leftrightarrow 0\le k\le 4046$

$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{0;1;2;3;...;4036\}\longrightarrow$ có 4037 giá trị của k nê có 4037 nghiệm.

Câu 7: Từ phương trình $\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=\tan x+\cot x$, ta tìm được $\cos x$ có giá trị bằng:

A. 1. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\sin 2x\ne 0$.

Ta có $\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=\tan x+\cot x\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\Leftrightarrow 2\sin x\cos x.\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=2$.

Đặt $t=\sin x+\cos x\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\longrightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}.$

Phương trình trở thành $\Leftrightarrow \sqrt{2}\,t\left(t^2-1\right)=2\Leftrightarrow t^3-t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin x+\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin x=\sqrt{2}-\cos x.$

Mà $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x+\left(\sqrt{2}-\cos x\right)^2=1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-2\sqrt{2}\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\cos x-1\right)^2=0\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x\cos x-\sin x-\cos x+m=0$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x+\cos x\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)\longrightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}.$

Phương trình trở thành $\dfrac{t^2-1}{2}-t+m=0\Leftrightarrow -2m=t^2-2t-1\Leftrightarrow \left(t-1\right)^2=-2m+2$.

Do $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\longrightarrow -\sqrt{2}-1\le t-1\le\sqrt{2}-1\longrightarrow 0\le\left(t-1\right)^2\le 3+2\sqrt{2}$.

Vậy để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 0\le -2m+2\le 3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow -\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}\le m\le 1$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-1;0;1\}.$

BÀI 3. CẤP SỐ CỘNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d, ta có công thức truy hồi $\boxed{u_{n+1} = u_n + d \text{ với}}\ n \in \mathbb{N}^*$.

Đặc biệt khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

II – SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Định lí 1

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d \boxed{\text{với } n \geq 2.}$$

III – TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ CỘNG

Định lí 2

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \boxed{\text{với}}\ k \geq 2.$$

IV – TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

Định lí 3

Cho cấp số cộng (u_n). Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$. Khi đó $\boxed{S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.}$

Chú ý: Vì $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên công thức trên có thể viết lại là $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định cấp số cộng, công sai và số hạng của cấp số cộng

1. Phương pháp

- Xác định một cấp số cộng là xác định số hạng đầu u_1 và công sai d
- Từ những giải thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và d rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $1;-3;-7;-11;-15;\cdots$ **B.** $1;-3;-6;-9;-12;\cdots$

C. $1;-2;-4;-6;-8;\cdots$ **D.** $1;-3;-5;-7;-9;\cdots$

Lời giải

Chọn A

Ta lần lượt kiểm tra: $u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=\cdots$?

Xét đáp án A: $1;-3;-7;-11;-15;\cdots\longrightarrow u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=\cdots$

Xét đáp án B: $1;-3;-6;-9;-12;\cdots\longrightarrow u_2-u_1=-4\neq -3=u_3-u_2\longrightarrow$ loại

Xét đáp án C: $1;-2;-4;-6;-8;\cdots\longrightarrow u_2-u_1=-3\neq -2=u_3-u_2\longrightarrow$ loại

Xét đáp án D: $1;-3;-5;-7;-9;\cdots\longrightarrow u_2-u_1=-4\neq -2=u_3-u_2\longrightarrow$ loại

Ví dụ 2: Cho dãy số $\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2};-1;-\frac{3}{2};.....$ là cấp số cộng với:

A. Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $\frac{1}{2}$.

B. Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $-\frac{1}{2}$.

C. Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $\frac{1}{2}$.

D. Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $-\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn B

Nếu dãy số (u_n) là một cấp số cộng thị công sai d của nó là hiệu của một cặp số hạng liên tiếp bất kì (số hạng sau trừ cho số hạng trước) của dãy số đó.

Ta có $\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2};-1;-\frac{3}{2};.....$ là cấp số cộng $\longrightarrow\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\ u_2-u_1=-\frac{1}{2}=d\end{cases}$

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-5$ và $d=3.$ Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?

A. Thứ $15.$ **B.** Thứ $20.$ **C.** Thứ $35.$ **D.** Thứ $36.$

Lời giải.

Chọn D

Ví dụ 5: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3=15$ và $d=-2$. Tìm $u_n.$

A. $u_n=-2n+21.$ **B.** $u_n=-\frac{3}{2}n+12.$ **C.** $u_n=-3n-17.$ **D.** $u_n=\frac{3}{2}n^2-4.$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $\begin{cases}15=u_3=u_1+2d\\ d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=19\\ d=-2\end{cases}\to u_n=u_1+(n-1)d=-2n+21.$

Ví dụ 6: Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

A. $d=4.$ **B.** $d=5.$ **C.** $d=6.$ **D.** $d=7.$

Lời giải.

Chọn B

$\begin{cases}u_1=5\\ 40=u_8=u_1+7d\end{cases}\longrightarrow d=5$

Dạng 2. Tính tổng các số hạng trong một cấp số cộng

1. Phương pháp

Tính tổng n số hạng đầu tiên nhờ công thức: $S_n=\dfrac{n(u_1+u_n)}{2}=\dfrac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Số hạng tổng quát của một cấp số cộng là $u_n=3n+4$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\dfrac{3^n-1}{2}.$ **B.** $S_n=\dfrac{7(3^n-1)}{2}.$ **C.** $S_n=\dfrac{3n^2+5n}{2}.$ **D.** $S_n=\dfrac{3n^2+11n}{2}.$

Lời giải.

Chọn D

Cấp số cộng $u_n=an+b\longrightarrow\begin{cases}u_1=a+b\\ d=a\end{cases}.$

$u_n=3n+4\to\begin{cases}u_1=7\\ d=3\end{cases}\to S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=7n+\dfrac{3(n^2-n)}{2}=\dfrac{3n^2+11n}{2}.$

Ví dụ 2: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=4$ và $d=-5.$ Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

A. $S_{100}=24350.$ **B.** $S_{100}=-24350.$ **C.** $S_{100}=-24600.$ **D.** $S_{100}=24600.$

Lời giải.

Chọn B

$S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d\longrightarrow S_{100}=100u_1+\dfrac{100.99}{2}d=-24350$

Ví dụ 3: Xét các số nguyên dương chia hết cho $3.$ Tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên đó bằng:

A. 7650. **B.** 7500. **C.** 3900. **D.** 3825.

Lời giải.

Chọn D

Số nguyên dương chia hết cho 3 có dạng $3n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ nên chúng lập thành cấp số cộng

$$u_n=3n\longrightarrow\begin{cases}u_1=3\\u_{50}=150\end{cases}\longrightarrow S_{50}=\frac{50}{2}(u_1+u_{50})=3825$$

Chú ý: $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$

Ví dụ 4: Tính tổng $S=1-2+3-4+5+...+(2n-1)-2n$ với $n\geq 1$ và $n\in\mathbb{N}.$

A. $S=0.$ **B.** $S=-1.$ **C.** $S=n.$ **D.** $S=-n.$

Lời giải.

Chọn D

Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ thì $(2n-1)-2n=-1$.

Ta có $S=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+\left((2n-1)-2n\right)$. Do đó ta xem S là tổng của n số hạng, mà mỗi số hạng đều bằng -1 nên $S=-n.$

Nhận xét: Ta có $1;3;5;\cdots;2n-1$ và $2;4;6;\cdots;2n$ là các cấp số cộng có n số hạng nên

$$S=(1+3+5+\cdots+2n-1)-(2+4+6+\cdots+2n)$$

$$=\frac{n}{2}(1+2n-1)-\frac{n}{2}(2+2n)=n^2-\left(n^2+n\right)=-n.$$

Ví dụ 5: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2+u_8+u_9+u_{15}=100.$ Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{16}=100.$ **B.** $S_{16}=200.$ **C.** $S_{16}=300.$ **D.** $S_{16}=400.$

Lời giải.

Chọn D

Ta có $u_2+u_8+u_9+u_{15}=100\Leftrightarrow 4u_1+30d=100\Leftrightarrow 2u_1+15d=50.$

Khi đó $S_{16}=\frac{16}{2}(u_1+u_{16})=8(2u_1+15d)=8.50=400$

Dạng 3. Chứng minh một hệ thức trong cấp số cộng:

1. Phương pháp

Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Nếu $a;\ b;\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

A. $2b^2;\ a^2;\ c^2.$ **B.** $-2b;-2a;-2c.$ **C.** $2b;\ a;\ c.$ **D.** $2b;\ -a;\ -c.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $c+a=2b\Rightarrow -2(c+a)=-2(2b)\Leftrightarrow (-2c)+(-2a)=2(-2b).$

Ví dụ 2: Nếu $\frac{1}{b+c};\ \frac{1}{c+a};\ \frac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

A. $b^2;\ a^2;\ c^2.$ **B.** $c^2;\ a^2;\ b^2.$ **C.** $a^2;\ b^2;\ c^2.$ **D.** $a^2;\ c^2;\ b^2.$

Lời giải.

Chọn C

Theo giả thiết ta có $\frac{2}{c+a}=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\Leftrightarrow \frac{c+a}{2}=\frac{(b+c)(b+a)}{2b+a+c}$

$\Leftrightarrow (a+c)^2+2b(c+a)=2\left(b^2+ab+bc+ac\right)$

$\Leftrightarrow a^2+c^2+2ac+2bc+2bc=2\left(b^2+ab+bc+ac\right)\Leftrightarrow a^2+c^2=2b^2.$

Ví dụ 3: Cho $a;\ b;\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2+c^2+2ac=4b^2.$ **B.** $a^2+c^2=2ab-2bc.$

C. $a^2-c^2=ab-bc.$ **D.** $a^2-c^2=2ab-2bc.$

Lời giải.

Chọn A

Ta có: $a+c=2b\Rightarrow (a+c)^2=4b^2\Leftrightarrow a^2+c^2+2ac=4b^2$

Dạng 4. Giải phương trình (tìm x trong cấp số cộng)

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các số $-4;\ 1;\ 6;\ x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm $x.$

A. $x=7.$ **B.** $x=10.$ **C.** $x=11.$ **D.** $x=12.$

Lời giải.

Chọn C

Vì các số $-4;\ 1;\ 6;\ x$ theo thứ tự $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$ lập thành cấp số cộng nên

$u_4-u_3=u_3-u_2\longrightarrow x-6=6-1\Leftrightarrow x=11$

Ví dụ 2: Nếu các số $5+m;\ 7+2m;\ 17+m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

A. $m=2.$ **B.** $m=3.$ **C.** $m=4.$ **D.** $m=5.$

Lời giải.

Chọn C

Ba số $5+m;\ 7+2m;\ 17+m$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng nên

$u_1+u_3=2u_2 \Leftrightarrow (5+m)+(17+m)=2(7+2m) \Leftrightarrow m=4$

Nhận xét: Ta có thể dùng tính chất $u_3-u_2=u_2=u_1.$

Ví dụ 3: Với giá trị nào của x và y thì các số $-7;\ x;\ 11;\ y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số công?

A. $x=1; y=21.$ **B.** $x=2; y=20.$ **C.** $x=3; y-19.$ **D.** $x=4; y=18.$

Lời giải.

Chọn B

Bốn số $-7;\ x;\ 11;\ y$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3, u_4 lập thành cấp số cộng nên

$$\begin{cases} u_4-u_3=u_3-u_2 \\ u_4-u_3=u_2-u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-11=11-x \\ y-11=x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=22 \\ x-y=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=20 \end{cases}$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

A. $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3}....$ **B.** $15\sqrt{2};12\sqrt{2};9\sqrt{2};6\sqrt{2};....$

C. $\frac{4}{5};1;\frac{7}{5};\frac{9}{5};\frac{11}{5};....$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{5}{\sqrt{3}};...$

Lời giải.

Chọn C

Chỉ cần tồn tại hai cặp số hạng liên tiếp của dãy số có hiệu khác nhau: $u_{m+1}-u_m \neq u_{k+1}-u_k$ thì ta kết luận ngay dãy số đó không phải là cấp số cộng.

Xét đáp án A: $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3}....\longrightarrow \frac{1}{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=\cdots\longrightarrow$ loại **A**

Xét đáp án B:

$$15\sqrt{2};12\sqrt{2};9\sqrt{2};6\sqrt{2};....\longrightarrow -3\sqrt{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=\cdots\longrightarrow \text{loại}$$ **B**

Xét đáp án C: $\frac{4}{5};1;\frac{7}{5};\frac{9}{5};\frac{11}{5};....\longrightarrow \frac{1}{5}=u_2-u_1\neq u_3-u_2=\frac{2}{5}\longrightarrow$ **Chọn C**

Xét đáp án D: $\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{5}{\sqrt{3}};...\longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3\longrightarrow$ loại **D**

Câu 2: Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=-\frac{1}{2},$ công sai $d=\frac{1}{2}.$ Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A. $-\frac{1}{2};0;1;\frac{1}{2};1.$ **B.** $-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}.$ **C.** $\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};2;\frac{5}{2}.$ **D.** $-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}.$

Lời giải:

Chọn D

Ta dùng công thức tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d = -\frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = -1 + \frac{n}{2}$, hoặc $u_{n+1} = u_n + d = u_n + \frac{1}{2}$ để tính các số hạng của một cấp số cộng.

Ta có $u_1 = -\frac{1}{2};\ d = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 + d = 0 \\ u_3 - u_2 + d = \frac{1}{2} \\ u_4 = u_3 + d = 1 \\ u_5 = u_4 + d = \frac{3}{2} \end{cases}$

Nhận xét: Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:

Nhập: $X = X + \frac{1}{2}$ (nhập $X = X + d$).

Bấm CALC: nhập $-\frac{1}{2}$ (nhập u_1).

Để tính 5 số hạng đầu ta bấm dấu "=" liên tiếp để ra kết quả 4 lần nữa!

Câu 3: Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

A. 7; 12; 17, **B.** 6; 10; 14. **C.** 8; 13; 18. **D.** 6; 12; 18.

Lời giải.

Chọn A

Giữa 2 và 22 có thêm ba số hạng nữa lập thành cấp số cộng, xem như ta có một cấp số cộng có 5 số hạng với $u_1 = 2; u_5 = 22;$ ta cần tìm $u_2, u_3, u_4.$

Ta có $u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow d = \frac{u_5 - u_1}{4} = \frac{22-2}{4} = 5 \longrightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 + d = 7 \\ u_3 = u_1 + 2d = 12 \\ u_4 = u_1 + 3d = 17 \end{cases}$

Câu 4: Cho hai số -3 và $23.$ Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2.$ Tìm $n.$

A. $n = 12.$ **B.** $n = 13.$ **C.** $n = 14.$ **D.** $n = 15.$

Lời giải.

Chọn A

Theo giả thiết thì ta được một cấp số cộng có $n+2$ số hạng với $u_1 = -3, u_{n+2} = 23.$

Khi đó $u_{n+2} = u_1 + (n+1)d \Leftrightarrow n+1 = \frac{u_{n+2} - u_1}{d} = \frac{23-(-3)}{2} = 13 \Leftrightarrow n = 12 \longrightarrow A$

Câu 5: Biết các số $C_n^1;\ C_n^2;\ C_n^3$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3.$ Tìm $n.$

A. $n=5.$ **B.** $n=7.$ **C.** $n=9.$ **D.** $n=11.$

Lời giải.

Chọn B

Ba số $C_n^1;\ C_n^2;\ C_n^3$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng nên

$$u_1+u_3=2u_2 \Leftrightarrow C_n^1+C_n^3=2C_n^2\ (n\ge 3) \Leftrightarrow n+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}=2.\frac{(n-1)n}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{n^2-3n+2}{6}=n-1 \Leftrightarrow n^2-9n+14 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow n=7(n\ge 3).$$

Nhận xét: Nếu u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì ta có $u_{k-1}+u_{k+1}=2u_k.$

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là $5;\ 9;\ 13;\ 17;\ \cdots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

A. $u_n=5n+1.$ **B.** $u_n=5n-1.$ **C.** $u_n=4n+1.$ **D.** $u_n=4n-1.$

Lời giải.

Chọn C

Các số $5;\ 9;\ 13;\ 17;\ \cdots$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) nên

$$\left\{\begin{array}{l} u_1=5 \\ d=u_2-u_1=4 \end{array}\right. \xrightarrow{CTTQ} u_n=u_1+(n-1)d=5+4(n-1)=4n+1$$

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-3$ và $d=\frac{1}{2}.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_n=-3+\frac{1}{2}(n+1).$ **B.** $u_n=-3+\frac{1}{2}n-1.$

C. $u_n=-3+\frac{1}{2}(n-1).$ **D.** $u_n=-3+\frac{1}{4}(n-1).$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\left\{\begin{array}{l} u_1=-3 \\ d=\frac{1}{2} \end{array}\right. \xrightarrow{CTTQ} u_n=u_1+(n-1)d=-3+\frac{1}{2}(n-1)$

Câu 8: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=7-3n.$ **B.** $u_n=7-3^n.$ **C.** $u_n=\frac{7}{3n}.$ **D.** $u_n=7.3^n.$

Lời giải.

Chọn A

Dãy (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n=an+b$ (a,b là hằng số).

Câu 9: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=(-1)^n(2n+1).$ **B.** $u_n=\sin\dfrac{\pi}{n}.$ **C.** $\begin{cases}u_1=1\\u_n=u_{n-1}-1\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}u_1=1\\u_n=2u_{n-1}\end{cases}.$

Lời giải.

Chọn C

Dãy (u_n) là một cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n=u_{n-1}+d$ (d là hằng số).

Câu 10: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

A. $u_n=-4n+9.$ **B.** $u_n=-2n+19.$ **C.** $u_n=-2n-21.$ **D.** $u_n=-2^n+15.$

Lời giải.

Chọn D

Dãy số $u_n=-2^n+15$ không có dạng $an+b$ nên có không phải là cấp số cộng.

Câu 11: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-5$ và $d=3.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{15}=34.$ **B.** $u_{15}=45.$ **C.** $u_{13}=31.$ **D.** $u_{10}=35.$

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{cases}u_1=-5\\d=3\end{cases}\longrightarrow u_n=3n-8\longrightarrow\begin{cases}u_{15}=37\\u_{13}=31\\u_{10}=22\end{cases}$$

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=\dfrac{1}{4}$ và $d=-\dfrac{1}{4}.$ Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_5=-\dfrac{5}{4}.$ **B.** $S_5=\dfrac{4}{5}.$ **C.** $S_5=\dfrac{5}{4}.$ **D.** $S_5=-\dfrac{4}{5}.$

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{4}\\d=-\dfrac{1}{5}\end{cases}\longrightarrow S_5=5u_1+\frac{5.4}{2}d=5.\frac{1}{4}+10.\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{4}$$

Câu 13: Cho cấp số cộng (u_n) có $d=-2$ và $S_8=72.$ Tìm số hạng đầu tiên $u_1.$

A. $u_1=16.$ **B.** $u_1=-16.$ **C.** $u_1=\dfrac{1}{16}.$ **D.** $u_1=-\dfrac{1}{16}.$

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} d=-2 \\ 72=S_8=8u_1+\dfrac{8.7}{2}d \end{cases} \longrightarrow 72=8u_1+28.(-2) \Leftrightarrow u_1=16$$

Câu 14: Một cấp số cộng có số hạng đầu là 1, công sai là 4, tổng của n số hạng đầu là 561. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng đó là u_n có giá trị là bao nhiêu?

A. $u_n=57.$ **B.** $u_n=61.$ **C.** $u_n=65.$ **D.** $u_n=69.$

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{cases} u_1=1,\ d=4 \\ 561=S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d \end{cases} \longrightarrow 561=n+\frac{n^2-n}{2}.4 \Leftrightarrow 2n^2-n-561=0 \Leftrightarrow n=17.$$

$u_n=u_{17}=u_1+16d=1+16.4=65 \longrightarrow C$

Câu 15: Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

A. $d=2.$ **B.** $d=3.$ **C.** $d=4.$ **D.** $d=5.$

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} u_{12}=23 \\ S_{12}=144 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1+11d=23 \\ \dfrac{12}{2}(u_1+u_{12})=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ d=\dfrac{23-u_1}{11}=2 \end{cases}$$

Câu 16: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n=\dfrac{3n^2-19n}{4}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1=2;\ d=-\dfrac{1}{2}.$ **B.** $u_1=-4;\ d=\dfrac{3}{2}.$ **C.** $u_1=-\dfrac{3}{2};\ d=-2.$ **D.** $u_1=\dfrac{5}{2};\ d=\dfrac{1}{2}.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\dfrac{3n^2-19n}{4}=\dfrac{3}{4}n^2-\dfrac{19}{4}n=S_n=nu_1+\dfrac{n^2-n}{2}d=\dfrac{d}{2}n^2+\left(u_1-\dfrac{d}{2}\right)n$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{2}=\dfrac{3}{4} \\ u_1-\dfrac{d}{2}=-\dfrac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-4 \\ d=\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Câu 17: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n=n^2+4n$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đã cho.

A. $u_n = 2n+3.$ **B.** $u_n = 3n+2.$ **C.** $u_n = 5.3^{n-1}.$ **D.** $u_n = 5.\left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}.$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $n^2+4n = S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(u_1 - \frac{d}{2}\right)n \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} = 1 \\ u_1 - \frac{d}{2} = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 2 \end{cases} \longrightarrow u_n = 2n+3$

Câu 18: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

A. $u_{1001} = 4005.$ **B.** $u_{1001} = 4003.$ **C.** $u_{1001} = 3.$ **D.** $u_{1001} = 1.$

Lời giải.

Chọn C

$\begin{cases} 2001 = u_2 = u_1 + d \\ 1995 = u_5 = u_1 + 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2003 \\ d = -2 \end{cases} \longrightarrow u_{1001} = u_1 + 1000d = 3$

Câu 19: Cho cấp số cộng (u_n), biết: $u_n = -1, u_{n+1} = 8$. Tính công sai d cảu cấp số cộng đó.

A. $d = -9.$ **B.** $d = 7.$ **C.** $d = -7.$ **D.** $d = 9.$

Lời giải.

Chọn D

$d = u_{n+1} - u_n = 8 - (-1) = 9$

Câu 20: Cho cấp số cộng $(u_n).$ Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $\frac{u_{10}+u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}.$ **B.** $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}.$ **C.** $u_{10}.u_{30} = u_{20}.$ **D.** $\frac{u_{10}.u_{30}}{2} = u_{20}.$

Lời giải.

Chọn B

Xét đáp án A: $\begin{cases} \frac{u_{10}+u_{30}}{2} = \frac{u_1+9d+u_1+29d}{2} = u_1+19d \\ u_5+u_{10} = u_1+4d+u_1+9d = 2u_2+13d \end{cases} \longrightarrow$ loại

Xét đáp án B: $\begin{cases} u_{90}+u_{210} = 2u_2+298d = 2(u_1+149d) \\ 2u_{150} = 2(u_1+159d) \end{cases}$

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số cộng cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n = n\ (n \in \mathbb{N}^*).$

Câu 21: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_{23} = 60.$ Tính tổng S_{24} của 24 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{24}=60.$ **B.** $S_{24}=120.$ **C.** $S_{24}=720.$ **D.** $S_{24}=1440.$

Lời giải.

Chọn C

$u_2+u_{23}=60\Leftrightarrow(u_1+d)+(u_1+22d)=60\Leftrightarrow 2u_1+23d=60.$

Khi đó $S_{24}=\dfrac{24}{2}(u_1+u_{24})=12\left(u_1+(u_1+23d)\right)=12(2u_1+23d)=12.60=720.$

Câu 22: Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d=2.$ **B.** $d=-3.$ **C.** $d=4.$ **D.** $d=5.$

Lời giải.

Chọn B

$\begin{cases}u_1+u_6=17\\u_2+u_4=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+5d=17\\2u_1+6d=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=16\\d=-3\end{cases}$

Câu 23: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_7-u_3=8\\u_2u_7=75\end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d=\dfrac{1}{2}.$ **B.** $d=\dfrac{1}{3}.$ **C.** $d=2.$ **D.** $d=3.$

Lời giải.

Chọn C

$\begin{cases}u_7-u_3=8\\u_2u_7=75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u_1+6d)-(u_1+2d)=8\\(u_1+d)(u_1+6d)=75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=2\\(u_1+2)(u_1+12)=75\end{cases}$

Câu 24: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1+u_7=26\\u_2{}^2+u_6{}^2=466\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases}u_1=13\\d=-3\end{cases}.$ **B.** $\begin{cases}u_1=10\\d=-3\end{cases}.$ **C.** $\begin{cases}u_1=1\\d=4\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}u_1=13\\d=-4\end{cases}.$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\begin{cases}u_1+u_7=26\\u_2{}^2+u_6{}^2=466\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+6d=26\\(u_1+d)^2+(u_1+5d)^2=466\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=13-3d & (1)\\(u_1+d)^2+(u_1+5d)^2=466 & (2)\end{cases}.$

Thay (1) và (2) ta được: $(13-2d)^2+(13+2d)^2=466\Leftrightarrow 8d^2+338=466$

$\Leftrightarrow\begin{cases}d=4\Rightarrow u_1=1\\d=-4\Rightarrow u_1=25\end{cases}$

Câu 25: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 3 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 18 \\ d = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 4 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 15 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 15 \\ 2u_1 + 5d = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$.

Câu 26: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $d < 10$.

A. $d = 3$. **B.** $d = 4$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 6$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 36 \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 12 & (1) \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 & (2) \end{cases}$. Từ (1) suy ra $u_1 = 12 - 3d$. Thay vào (2), ta được $(12 - 2d)(12 - d) = 54 \Leftrightarrow d^2 - 18d + 45 = 0 \Leftrightarrow d = 3$ hoặc $d = 15$.

Câu 27: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2 = 3$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 9$. **D.** $u_2 = 12$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 27 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 9 & (1) \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275 & (2) \end{cases}$.

Từ (1) suy ra $d = 9 - u_1$. Thay vào (2), ta được

$u_1^2 + (u_1 + 9 - u_1)^2 + [u_1 + 2(9 - u_1)]^2 = 275 \Leftrightarrow u_1^2 - 18u_1 + 65 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 13$ hoặc $u_1 = 5$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 4 \end{cases} \longrightarrow u_2 = u_1 + d = 9$

Câu 28: Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + ... + 7515$.

A. $T=5651265.$ **B.** $T=5651256.$ **C.** $T=5651625.$ **D.** $T=5651526.$

Lời giải.

Chọn A

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1=15$ và công sai $d=5.$

Giả sử tổng trên có n số hạng thì $u_n=7515$

$\Leftrightarrow u_1+(n-1)d=7515\Leftrightarrow 15+(n-1)5=7515\Leftrightarrow n=1501$.

Vậy $T=S_{1501}=\dfrac{(2u_1+1500d).1501}{2}=\dfrac{(2.15+1500.5).1501}{2}=5651265$

Câu 29: Tính tổng $T=1000^2-999^2+998^2-997^2+...+2^2-1^2.$

A. $T=500500.$ **B.** $T=500005.$ **C.** $T=505000.$ **D.** $T=500050.$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $T=1.(1000+999)+1.(998+997)+...+1.(2+1)=1999+1995+...+3.$

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1=1999$ và công sai $d=-4.$

Giả sử tổng trên có n số hạng thì

$u_n=3\Leftrightarrow u_1+(n-1)d=3\Leftrightarrow 1999+(n-1)(-4)=3\Leftrightarrow n=500.$

Vậy $T=S_{500}=\dfrac{(u_1+u_{500}).500}{2}=\dfrac{(1999+3).500}{2}=500500$

Câu 30: Cho cấp số cộng $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \cdots;\ u_n$ có công sai $d,$ các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác $0.$ Với giá trị nào của d thì dãy số $\dfrac{1}{u_1};\ \dfrac{1}{u_2};\ \dfrac{1}{u_3};\ \cdots;\ \dfrac{1}{u_n}$ là một cấp số cộng?

A. $d=-1.$ **B.** $d=0.$ **C.** $d=1.$ **D.** $d=2.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases}u_2-u_1=d\\u_3-u_2=d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{u_2}-\dfrac{1}{u_1}=-\dfrac{d}{u_1u_2}\\\dfrac{1}{u_3}-\dfrac{1}{u_2}=-\dfrac{d}{u_2u_3}\end{cases}.$

Theo yêu cầu bài toán thì ta phải có $\dfrac{1}{u_2}-\dfrac{1}{u_1}=\dfrac{1}{u_3}-\dfrac{1}{u_2}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=0\\\dfrac{1}{u_1}=\dfrac{1}{u_3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=0\\u_1=u_3=u_1+2d\end{array}\right.\Leftrightarrow d=0$

Câu 31: Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

A. $20°$ và $70°$. **B.** $45°$ và $45°$. **C.** $20°$ và $45°$. **D.** $30°$ và $60°$.

Lời giải.

Chọn D

Ba góc A, B, C của một tam giác vuông theo thứ tự đó ($A<B<C$) lập thánh cấp số cộng nên $C=90,\ C+A=2B$.

Ta có $\begin{cases} A+B+C=180 \\ A+C=2B \\ C=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B=180 \\ A+C=2B \\ C=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=60 \\ A=30 \\ C=90 \end{cases}$

Câu 32: Ba góc $A, B, C\ (A<B<C)$ của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:

A. $40°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $80°$.

Lời giải.

Chọn A

Ba góc A, B, C của một tam giác theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, thì $C=2A,\ C+A=2B$. Ta có

$$\begin{cases} A+B+C=180^0 \\ A+C=2B \\ C=2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B=180^0 \\ A+C=2B \\ C=2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=60^0 \\ A+C=120^0 \\ C=2A \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=40^0 \\ B=60^0 \\ C=80^0 \end{cases} \longrightarrow C-A=40^0.$$

Câu 33: Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

A. $\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{3};\ 1;\ \frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{4};\ 1;\ \frac{5}{4}$. **D.** $\frac{1}{4};\ 1;\ \frac{7}{4}$.

Lời giải.

Chọn C

Ba cạnh $a, b, c\ (a<b<c)$ của một tam giác theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng thỏa yêu cầu thì $\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ a+b+c=3 \\ a+c=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ 3b=3 \\ a+c=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ b=1 \\ a=2b-c-2-c \end{cases}$.

Ta có $a^2+b^2=c^2 \xrightarrow[a=2-c]{b=1} (2-c)^2+1=c^2 \Leftrightarrow -4c+5=0 \Leftrightarrow c=\frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=1 \\ c=\frac{5}{4} \end{cases}$.

Câu 34: Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 1635. **B.** 1792. **C.** 2055. **D.** 3125.

Lời giải.

Chọn C

Số ghế của mỗi dãy (bắt đầu từ dãy đầu tiên) theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có 30 số hạng có công sai $d=3$ và $u_1=25.$

Tổng số ghế là $S_{30}=u_1+u_2+\cdots+u_{30}=30u_1+\frac{30.29}{2}d=2055$

Câu 35: Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,.Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 73. **B.** 75. **C.** 77. **D.** 79.

Lời giải.

Chọn C

Số cây mỗi hàng (bắt đầu từ hàng thứ nhất) lập thành một cấp số cộng (u_n) có $u_1=1,\ d=1.$ Giả sử có n hàng cây thì $u_1+u_2+\cdots+u_n=3003=S_n.$

Ta có $3003=S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d\Leftrightarrow n^2+n-6006=0\Leftrightarrow n=77$

Câu 36: Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

A. 78. **B.** 156. **C.** 300. **D.** 48.

Lời giải.

Chọn C

Kể từ lúc 1 (giờ) đến 24 (giời) số tiếng chuông được đánh lập thành cấp số cộng có 24 số hạng với $u_1=1,$ công sai $d=1.$ Vậy số tiếng chuông được đánh trong 1 ngày là:

$S=S_{24}=\frac{24}{2}(u_1+u_{24})=12(1+24)=300$

Câu 37: Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,… và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

A. 98. **B.** 100. **C.** 102. **D.** 104.

Lời giải.

Chọn B

Số hạt dẻ trên mỗi ô (bắt đầu từ ô thứ nhất) theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 7,\ d = 5.$ Gọi n là số ô trên bàn cờ thì $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 25450 = S_n.$ Ta có

$$25450 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 7n + \frac{n^2 - n}{2}.5$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 + 9n - 50900 = 0 \Leftrightarrow n = 100$$

Câu 38: Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

A. 5.2500.000 đồng. **B.** 10.125.000 đồng. **C.** 4.000.000 đồng. **D.** 4.245.000 đồng.

Lời giải.

Chọn B

Giá tiền khoang mỗi mét (bắt đầu từ mét đầu tiên) lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 80000,\ d = 5000.$ Do cần khoang 50 mét nên tổng số tiền cần trả là

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{50} = S_{50} = 50u_1 + \frac{50.49}{2}d = 50.80000 + 1225.5000 = 10125000$$

CHƯƠNG 2. TỔ HỢP XÁC SUẤT

BÀI 1. QUY TẮC ĐẾM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. QUI TẮC CỘNG

Một công việc nào đó có thể được thực hiện theo một trong hai phương án A hoặc B. Nếu phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện và không trùng với bất kì cách nào trong phương án A thì công việc đó có m + n cách thực hiện.

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là cách đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau, được phát biểu như sau:

Nếu A và B là các tập hữu hạn không giao nhau thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Chú ý: Quy tắc công có thể mở rộng cho nhiều hành động

Ví dụ 1: Từ thành phố A đến thành phố B có 3 đường bộ và 2 đường thuỷ. Cần chọn một đường để đi từ A đến B. Hỏi có mấy cách chọn?

Giải

Chọn đường bộ thì có 3 cách; chọn đường thủy có 2 cách.

Vậy có : $3+2=5$ cách chọn.

Ví dụ 2: Một nhà hàng có 3 loại rượu, 4 loại bia và 6 loại nước ngọt. Thực khách cần chọn đúng 1 loại thức uống. Hỏi có mấy cách chọn ?

Giải

Chọn rượi có 3 cách, chọn bia có 4 cách, chọn nước ngọt có 6 cách

Vậy có : $3+4+6=13$ cách chọn.

II. QUI TẮC NHÂN

Một công việc được hoàn thành bao gồm hai công đoạn A và B (hai hành động liên tiếp). Nếu công đoạn A có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn B thì công việc đó có m.n cách thực hiện.

Ví dụ 1: Giữa thành phố Hồ Chí Minh và Hà Nội có 3 loại phương tiện giao thông: đường bộ, đường sắt và đường hàng không. Hỏi có mấy cách chọn phương tiện giao thông để đi từ thành phố Hồ Chí Minh đến Hà Nội rồi quay về?

Giải

Đi từ Hồ Chí Minh đến Hà Nội có 3 cách chọn phương tiện.

Khi đi về từ Hà Nội đến HCM có 3 cách.

Vậy có : $3\times 3=9$ cách chọn.

Ví dụ 2: Một hội đồng nhân dân có 15 người, cần bầu ra 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch, 1 uỷ viên thư ký và không được bầu 1 người vào 2 hay 3 chức vụ. Hỏi có mấy cách bầu?

Giải

Có 15 cách chọn chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch, có 14 cách chọn phó chủ tịch. Với mỗi cách chọn chủ tịch và phó chủ tịch, có 13 cách chọn thư ký.

Vậy có : $15 \times 14 \times 3 = 2730$ cách chọn.

3. Các dấu hiệu chia hết {kiến thức bổ sung}

- *Chia hết cho 2:* số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.
- *Chia hết cho 3:* tổng các chữ số chia hết cho 3 (ví dụ: 276).
- *Chia hết cho 4:* số tận cùng là 00 hay hai chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 4 (ví dụ : 1300, 2512, 708).
- *Chia hết cho 5*: số tận cùng là 0, 5.
- *Chia hết cho 6:* số chia hết cho 2 và chia hết cho 3.
- *Chia hết cho 8*: số tận cùng là 000 hay ba chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 8 (ví dụ : 15000, 2016, 13824).
- *Chia hết cho 9*: tổng các chữ số chia hết cho 9 (ví dụ : 2835).
- *Chia hết cho 25*: số tận cùng là 00, 25, 50, 75.
- *Chia hết cho 10*: số tận cùng là 0.

Ví dụ. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau không chia hết cho 9.

Giải

Gọi $n = \overline{abc}$ là số cần lập.

$m = \overline{a'b'c'}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau.

$m' = \overline{a_1b_1c_1}$ là số gồm 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 9.

Ta có : Tập các số n Tập các số m Tập các số

* Tìm m : có 5 cách chọn a' (vì $a' \neq 0$), có 5 cách chọn b' (vì $b' \neq a'$), có 4 cách chọn c' (vì $c' \neq a'$ và $c' \neq b'$). Vậy có : $5.5.4 = 100$ số m.

* Tìm m' : trong các chữ số đã cho, 3 chữ số có tổng chia hết cho 9 là {0,4,5}, {1,3,5}, {2,3,4}

  – Với {0,4,5}: có 2 cách chọn a_1, 2 cách chọn b_1, 1 cách chọn c_1, được $2.2.1 = 4$ số m'
  – Với {1,3,5}: có 3! = 6 số m'
  – Với {2,3,4}: có 3! = 6 số m'
  – Vậy có : 4 + 6 + 6 = 16 số m'

Suy ra có : 100 – 16 = 84 số n.

Chú ý: Qua ví dụ trên, ta thấy nếu số cách chọn thỏa tính chất p nào đó quá nhiều, ta có thể làm như sau: Số cách chọn thỏa p bằng số cách chọn tuỳ ý trừ số cách chọn không thỏa p. Người ta còn gọi cách làm này là dùng "phần bù".

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Quy tắc cộng

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một bó hoa gồm có: 5 bông hồng trắng, 6 bông hồng đỏ và 7 bông hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy 1 bông hoa?

Hướng dẫn giải

* TH 1: Chọn bông hồng trắng có 5 cách chọn

* TH 2: Chọn bông hồng đỏ có 6 cách chọn

* TH 3: Chọn bông hồng vàng có 7 cách chọn

Vậy có $5+6+7=18$ cách.

Ví dụ 2: Trong một hộp có 10 quả cầu trắng và 5 quả cầu đen. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

Hướng dẫn giải

Có 10 cách chọn một quả cầu trắng và 5 cách chọn một quả cầu đen.

Vậy cách chọn một trong các quả cầu ấy là: $10+5=15$ (cách).

Ví dụ 3: Lớp 11A có 30 học sinh và lớp 11B có 32 học sinh, có bao nhiêu cách chọn 1 học sinh từ 2 lớp trên để tham gia đội công tác xã hội?

Hướng dẫn giải

Có 30 cách chọn một học sinh lớp 11A và 32 cách chọn một học sinh lớp 11B.Vậy số cách chọn một học sinh từ 2 lớp trên là: $30+32=62$ (cách).

Ví dụ 4: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm một chữ số?

A. 36. **B.** 720.

C. 6. **D.** 120.

Hướng dẫn giải

Nếu gọi $\overline{x}$ là số tự nhiên gồm một chữ số thì $\overline{x}=1$ hoặc $\overline{x}=2$ hoặc $\overline{x}=3$ hoặc $\overline{x}=4$ hoặc $\overline{x}=5$ hoặc $\overline{x}=6$.

Vậy có 6 số tự nhiên gồm một chữ số.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

A. 9. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

- Nếu chọn cỡ áo 39 thì sẽ có 5 cách.
- Nếu chọn cỡ áo 40 thì sẽ có 4 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $5+4=9$ cách chọn mua áo.

Câu 2. Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn khác nhau là:

A. 13. **B.** 72. **C.** 12. **D.** 30.

Lời giải

Chọn A

- Nếu chọn một cái quần thì sẽ có 4 cách.
- Nếu chọn một cái áo thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cái cà vạt thì sẽ có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $4+6+3=13$ cách chọn.

Câu 3. Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là:

A. 480. **B.** 24. **C.** 48. **D.** 60.

Lời giải

Chọn B

- Nếu chọn một cây bút chì thì sẽ có 8 cách.
- Nếu chọn một cây bút bi thì sẽ có 6 cách.
- Nếu chọn một cuốn tập thì sẽ có 10 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8+6+10=24$ cách chọn.

Câu 4. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 45. **B.** 280. **C.** 325. **D.** 605.

Lời giải

Chọn D

- Nếu chọn một học sinh nam có 280 cách.
- Nếu chọn một học sinh nữ có 325 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $280+325=605$ cách chọn.

Câu 5. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp $11A$ hoặc lớp $12B$. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp $11A$ có 31 học sinh tiên tiến và lớp $12B$ có 22 học sinh tiên tiến?

A. 31. **B.** 9. **C.** 53. **D.** 682.

Lời giải

Chọn C

- Nếu chọn một học sinh lớp $11A$ có 31 cách.
- Nếu chọn một học sinh lớp $12B$ có 22 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $31+22=53$ cách chọn.

Câu 6. Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số $7, 8, 9$. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

A. 27. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Vì các quả cầu trắng hoặc đen đều được đánh số phân biệt nên mỗi lần lấy ra một quả cầu bất kì là một lần chọn.

- Nếu chọn một quả trắng có 6 cách.
- Nếu chọn một quả đen có 3 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $6+3=9$ cách chọn.

Câu 7. Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa, 3 chuyến tàu thủy và 2 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh B ?

A. 20. **B.** 300. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

6月họn A

- Nếu đi bằng ô tô có 10 cách.
- Nếu đi bằng tàu hỏa có 5 cách.
- Nếu đi bằng tàu thủy có 3 cách.
- Nếu đi bằng máy bay có 2 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $10+5+3+2=20$ cách chọn.

Câu 8. Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

A. 20. **B.** 3360. **C.** 31. **D.** 30.

Lời giải

Chọn C

- Nếu chọn đề tài về lịch sử có 8 cách.
- Nếu chọn đề tài về thiên nhiên có 7 cách.
- Nếu chọn đề tài về con người có 10 cách.
- Nếu chọn đề tài về văn hóa có 6 cách.

Theo qui tắc cộng, ta có $8+7+10+6=31$ cách chọn.

Dạng 2. Quy tắc nhân

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một đội văn nghệ chuẩn bị được 2 vở kịch, 3 điệu múa và 6 bài hát. Tại hội diễn, mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát. Hỏi đội văn nghệ trên có bao nhiêu cách chọn chương trình biểu diễn, biết rằng chất lượng các vở kịch, điệu múa, các bài hát là như nhau?

Hướng dẫn giải

Mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát (gồm 3 tiết mục thuộc ba thể loại khác nhau)

- Chọn 1 vở kịch có: 2 cách chọn
- Chọn 1 điệu múa có: 3 cách chọn
- Chọn 1 bài hát có: 6 cách

Vậy có: $2\times3\times6=36$ cách.

Ví dụ 2: Dãy x_1, x_2, x_3, x_4 với mỗi kí tự x_i chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1. Hỏi có bao nhiêu dãy như vậy?

Hướng dẫn giải

Mỗi kí tự x_i có hai cách chọn (0 hoặc 1).

Vậy có tất cả: $2\times2\times2\times2=16$ dãy x_1, x_2, x_3, x_4.

Ví dụ 3: Trong một lớp học có 20 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn hai học sinh: 1 nam và 1 nữ tham gia đội cờ đỏ. Hỏi giáo viên chủ nhiệm đó có bao nhiêu cách chọn?

Hướng dẫn giải

Có 20 cách chọn một học sinh nam và 24 cách chọn một học sinh nữ.

Vì vậy có $20\times24=480$ cách chọn hai học sinh (1 nam, 1 nữ).

Ví dụ 4: Số các số chẵn có hai chữ số là:

Hướng dẫn giải

Số chẵn có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $a \neq 0,$ b chẵn.

+ Chọn $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, có 9 cách chọn.

+ Chọn $b \in \{0,2,4,6,8\}$, có 5 cách chọn.

Vậy có tất cả $9 \times 5 = 45$ số.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

A. 4. **B.** 7. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Để chọn một chiếc đồng hồ, ta có:

- Có 3 cách chọn mặt.
- Có 4 cách chọn dây.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $3 \times 4 = 12$ cách.

Câu 2: Một người có 4 cái quần, 6 cái áo, 3 chiếc cà vạt. Để chọn mỗi thứ một món thì có bao nhiêu cách chọn bộ "quần-áo-cà vạt" khác nhau?

A. 13. **B.** 72. **C.** 12. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

Để chọn một bộ "quần-áo-cà vạt", ta có:

- Có 4 cách chọn quần.
- Có 6 cách chọn áo.
- Có 3 cách chọn cà vạt.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 6 \times 3 = 72$ cách.

Câu 3: Một thùng trong đó có 12 hộp đựng bút màu đỏ, 18 hộp đựng bút màu xanh. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một hộp màu đỏ, một hộp màu xanh là?

A. 13. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 216.

Lời giải

Chọn D

Để chọn một hộp màu đỏ và một hộp màu xanh, ta có:

- Có 12 cách chọn hộp màu đỏ.
- Có 18 cách chọn hộp màu xanh.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12 \times 18 = 216$ cách.

Câu 4: Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Số cách khác nhau để chọn được đồng thời một cây bút chì, một cây bút bi và một cuốn tập.

A. 24. **B.** 48. **C.** 480. **D.** 60.

Lời giải

Chọn C

Để chọn "một cây bút chì - một cây bút bi - một cuốn tập", ta có:

- Có 8 cách chọn bút chì.
- Có 6 cách chọn bút bi.
- Có 10 cách chọn cuốn tập.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $8\times6\times10=480$ cách.

Câu 5: Một bó hoa có 5 hoa hồng trắng, 6 hoa hồng đỏ và 7 hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu.

A. 240. **B.** 210. **C.** 18. **D.** 120.

Lời giải

Chọn B

Để chọn ba bông hoa có đủ cả ba màu (nghĩa là chọn một bông hoa hồng trắng- một bông hoa hồng đỏ- hoa hồng vàng), ta có:

- Có 5 cách chọn hoa hồng trắng.
- Có 6 cách chọn hoa hồng đỏ.
- Có 7 cách chọn hoa hồng vàng.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5\times6\times7=210$ cách.

Câu 6: Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm một món ăn trong năm món, một loại quả tráng miệng trong năm loại quả tráng miệng và một nước uống trong ba loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn.

A. 25. **B.** 75. **C.** 100. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Để chọn thực đơn, ta có:

- Có 5 cách chọn món ăn.
- Có 5 cách chọn quả tráng miệng.
- Có 3 cách chọn nước uống.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5\times5\times3=75$ cách.

Câu 7: Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

A. 910000. **B.** 91000. **C.** 910. **D.** 625.

Lời giải

Chọn B

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 280 cách chọn học sinh nam.
- Có 325 cách chọn học sinh nữ.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $280\times 325=91000$ cách.

Câu 8: Một đội học sinh giỏi của trường THPT, gồm 5 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 3 học sinh khối 10. Số cách chọn ba học sinh trong đó mỗi khối có một em?

A. 12. **B.** 220. **C.** 60. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Để chọn một nam và một nữ đi dự trại hè, ta có:

- Có 5 cách chọn học sinh khối 12.
- Có 4 cách chọn học sinh khối 11.
- Có 3 cách chọn học sinh khối 10.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $5\times 4\times 3=60$ cách.

Câu 9: Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng?

A. 100. **B.** 91. **C.** 10. **D.** 90.

Lời giải

Chọn D

Để chọn một người đàn ông và một người đàn bà không là vợ chồng, ta có

- Có 10 cách chọn người đàn ông.
- Có 9 cách chọn người đàn bà.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $9\times 10=90$ cách.

Câu 10: An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường?

A. 6. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 24.

Lời giải

Chọn D

- Từ An $\longrightarrow$ Bình có 4 cách.
- Từ Bình $\longrightarrow$ Cường có 6 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4\times 6=24$ cách.

Câu 11: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?



A. 9. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 24.

Lời giải

Chọn D

- Từ $\text{A}\longrightarrow\text{B}$ có 4 cách.
- Từ $\text{B}\longrightarrow\text{C}$ có 2 cách.
- Từ $\text{C}\longrightarrow\text{D}$ có 2 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4\times 2\times 3=24$ cách.

Câu 12: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A?



A. 1296. **B.** 784. **C.** 576. **D.** 324.

Lời giải

Chọn C

Từ kết quả câu trên, ta có:

- Từ $\text{A}\longrightarrow\text{D}$ có 24 cách.
- Tương tự, từ $\text{D}\longrightarrow\text{A}$ có 24 cách.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24\times 24=576$ cách.

Câu 13: Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần)?

A. 3991680. **B.** $12!$. **C.** 35831808. **D.** $7!$.

Lời giải

Chọn A

Một tuần có bảy ngày và mỗi ngày thăm một bạn.

- Có 12 cách chọn bạn vào ngày thứ nhất.
- Có 11 cách chọn bạn vào ngày thứ hai.
- Có 10 cách chọn bạn vào ngày thứ ba.
- Có 9 cách chọn bạn vào ngày thứ tư.
- Có 8 cách chọn bạn vào ngày thứ năm.
- Có 7 cách chọn bạn vào ngày thứ sáu.
- Có 6 cách chọn bạn vào ngày thứ bảy.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $12\times11\times10\times9\times8\times7\times6=3991680$ cách.

Câu 14: Nhãn mỗi chiếc ghế trong hội trường gồm hai phần: phần đầu là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái tiếng Việt), phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau?

A. 624. **B.** 48. **C.** 600. **D.** 26.

Lời giải

Chọn C

Một chiếc nhãn gồm phần đầu và phần thứ hai $\in\{1;2;...;25\}$.

- Có 24 cách chọn phần đầu.
- Có 25 cách chọn phần thứ hai.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $24\times25=600$ cách.

Câu 15: Biển số xe máy của tỉnh A (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập $\{1;2;...;9\}$, mỗi kí tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập $\{0;1;2;...;9\}$. Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh A có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?

A. 2340000. **B.** 234000. **C.** 75. **D.** 2600000.

Lời giải

Chọn A

Giả sử biển số xe là $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$.

- Có 26 cách chọn a_1
- Có 9 cách chọn a_2
- Có 10 cách chọn a_3
- Có 10 cách chọn a_4
- Có 10 cách chọn a_5
- Có 10 cách chọn a_6

Vậy theo qui tắc nhân ta có $26\times9\times10\times10\times10\times10=2340000$ biển số xe.

Câu 16: Số 253125000 có bao nhiêu ước số tự nhiên?

A. 160. **B.** 240. **C.** 180. **D.** 120.

Lời giải

Chọn C

Ta có $253125000 = 2^3.3^4.5^8$ nên mỗi ước số tự nhiên của số đã cho đều có dạng $2^m \times 3^n \times 5^p$ trong đó $m, n, p \in \mathbb{N}$ sao cho $0 \le m \le 3;\ 0 \le n \le 4;\ 0 \le p \le 8.$

- Có 4 cách chọn m.
- Có 5 cách chọn n.
- Có 9 cách chọn p.

Vậy theo qui tắc nhân ta có $4 \times 5 \times 9 = 180$ ước số tự nhiên.

Câu 17: Từ các chữ số $1,\ 5,\ 6,\ 7$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số (không nhất thiết phải khác nhau)?

A. 324. **B.** 256. **C.** 248. **D.** 124.

Lời giải

Chọn B

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d) \in A = \{1,\ 5,\ 6,\ 7\}.$

Vì số cần tìm có 4 chữ số không nhất thiết khác nhau nên:

- a được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- b được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- d được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.

Như vậy, ta có $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ số cần tìm.

Câu 18: Từ các chữ số $1,\ 5,\ 6,\ 7$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

A. 36. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d) \in A = \{1,5,6,7\}.$

Vì số cần tìm có 4 chữ số khác nhau nên:

- a được chọn từ tập A (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- b được chọn từ tập $A \setminus \{a\}$ (có 3 phần tử) nên có 3 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A \setminus \{a, b\}$ (có 2 phần tử) nên có 2 cách chọn.
- d được chọn từ tập $A \setminus \{a, b, c\}$ (có 1 phần tử) nên có 1 cách chọn.

Như vậy, ta có $4\times3\times2\times1=24$ số cần tìm.

Câu 19: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đều chẵn?

A. 99. **B.** 50. **C.** 20. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{ab}$ với $(a,b)\in A=\{0,2,4,6,8\}$ và $a\neq 0$.

Trong đó:

- a được chọn từ tập $A\setminus\{0\}$ (có 4 phần tử) nên có 4 cách chọn.
- b được chọn từ tập A (có 5 phần tử) nên có 5 cách chọn.

Như vậy, ta có $4\times5=20$ số cần tìm.

Câu 20: Từ các chữ số $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ có thể lập được bao nhiêu chữ số tự nhiên bé hơn 100 ?

A. 36. **B.** 62. **C.** 54. **D.** 42.

Lời giải

Chọn D

Các số bé hơn 100 chính là các số có một chữ số và hai chữ số được hình thành từ tập $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Từ tập A có thể lập được 6 số có một chữ số.

Gọi số có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$ với $(a,b)\in A$.

Trong đó:

- a được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.
- b được chọn từ tập A (có 6 phần tử) nên có 6 cách chọn.

Như vậy, ta có $6\times6=36$ số có hai chữ số.

Vậy, từ A có thể lập được $36+6=42$ số tự nhiên bé hơn 100.

Câu 21: Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ có thể lập được bao nhiêu số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 154. **B.** 145. **C.** 144. **D.** 155.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d)\in A=\{0,1,2,3,4,5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số lẻ $\Rightarrow d=\{1,3,5\}\Rightarrow d:$ có 3 cách chọn.

Khi đó $a:$ có 4 cách chọn (khác 0 và d), $b:$ có 4 cách chọn và $c:$ có 3 cách chọn.

Vậy có tất cả $3\times4\times4\times3=144$ số cần tìm.

Câu 22: Từ các chữ số $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

A. 156. **B.** 144. **C.** 96. **D.** 134.

Lời giải

Chọn A

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcd}$ với $(a,b,c,d) \in A = \{0,1,2,3,4,5\}$.

Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn $\Rightarrow d = \{0,2,4\}$.

TH1. Nếu $d = 0,$ số cần tìm là $\overline{abc0}.$ Khi đó:

- a được chọn từ tập $A \setminus \{0\}$ nên có 5 cách chọn.
- b được chọn từ tập $A \setminus \{0, a\}$ nên có 4 cách chọn.
- c được chọn từ tập $A \setminus \{0, a, b\}$ nên có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $5 \times 4 \times 3 = 60$ số có dạng $\overline{abc0}.$

TH2. Nếu $d = \{2,4\} \Rightarrow d:$ có 2 cách chọn.

Khi đó $a:$ có 4 cách chọn (khác 0 và d), $b:$ có 4 cách chọn và $c:$ có 3 cách chọn.

Như vậy, ta có $2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$ số cần tìm như trên.

Vậy có tất cả $60 + 96 = 156$ số cần tìm.

BÀI 2. HOÁN VỊ- CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. HOÁN VỊ

1. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

Nhận xét:

Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp.

Chẳng hạn, hai hoán vị abc và acb của ba phân tử a, b, c là khác nhau.

2. Số hoán vị

Kí hiệu P_n là số hoán vị của n phần tử. Ta có công thức sau:

Ví dụ 1. Sắp xếp 5 người vào một băng ghế có 5 chỗ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Giải

Mỗi cách đổi chỗ 1 trong 5 người trên băng ghế là 1 hoán vị.

Vậy có $P_5 = 5! = 120$ cách sắp.

Ví dụ 2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được mấy số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

Giải

Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với $a_1 \neq 0$ và a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 phân biệt là số cần lập.

- *Bước 1:* chữ số $a_1 \neq 0$ nên có 4 cách chọn a_1.
- *Bước 2:* sắp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí có $4! = 24$ cách.

Vậy có $4 \times 24 = 96$ số.

II. CHỈNH HỢP

1. Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A.

2. Số các chỉnh hợp

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, 1 \leq k \leq n$$

Công thức trên cũng đúng cho trường hợp $k = 0$ hoặc $k = n$.

Khi $k = n$ thì $A_n^n = P_n = n!$.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu số điện thoại bắt đầu bằng 2 chữ cái khác nhau lấy từ 26 chữ cái A, B, C, …, Z và tiếp theo là 5 chữ số khác nhau không có số 0.

Giải

Chọn 2 chữ cái trong 26 chữ cái, xếp vào hai vị trí đầu tiên, đây là chỉnh hợp chập 2 của 26 phần tử. Tiếp theo, chọn 5 chữ số trong 9 chữ số khác 0, xếp vào 5 vị trí, đây là chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử.

Vậy có : $A_{26}^2.A_9^5 = 9828000$ số.

Ví dụ 4: Một đội bóng đá có 18 cầu thủ. Cần chọn ra 11 cầu thủ phân vào 11 vị trí trên sân để thi đấu chính thức. Hỏi có mấy cách chọn nếu:

a) Ai cũng có thể chơi ở bất cứ vị trí nào?

b) Chỉ có cầu thủ A làm thủ môn được, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được?

c) Có 3 cầu thủ chỉ có thể làm thủ môn được, các cầu thủ khác chơi ở vị trí nào cũng được?

Giải

a) Chọn 11 người trong 18 người, xếp vào 11 vị trí. Đây là chỉnh hợp chập 11 của 18 phần tử. Có : $A_{18}^{11} = 1270312243$ cách.

b) Chọn A làm thủ môn. Tiếp đến, chọn 10 người trong 17 người còn lại, xếp vào 10 vị trí.

Vậy có : $A_{17}^{10} = 705729024$ cách.

c) Chọn 1 trong 3 người làm thủ môn, có 3 cách. Tiếp đến, chọn 10 người trong 15 người kia, xếp vào 10 vị trí, có A_{15}^{10} cách.

Vậy, có: $3A_{15}^{10} = 326918592$ cách.

III. TỔ HỢP

1. Định nghĩa

Cho tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Chú ý:

Số k trong định nghĩa cần thỏa điều kiện $1 \leq k \leq n$.

Tuy vậy, tập hợp không có phần tử nào là tập rỗng nên ta quy ước gọi tập rỗng là tổ hợp chập 0 của n phần tử.

2. Số các tổ hợp

Số các tổ hợp chập k của n phần tử: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ví dụ: Một nhóm có 5 nam và 3 nữ. Chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Giải

Cách 1: Ta có các trường hợp sau

- 3 người được chọn gồm 1 nữ và 2 nam.

chọn ra 1 trong 3 nữ ta có 3 cách.

chọn ra 2 trong 5 nam ta có C_5^2 cách

Suy ra có $3C_5^2$ cách chọn

- 3 người được chọn gồm 2 nữ và 1 nam.

chọn ra 2 trong 3 nữ có C_3^2 cách.

chọn ra 1 trong 5 nam có 5 cách.

Suy ra có $5C_3^2$ cách chọn.

- 3 người chọn ra gồm 3 nữ có 1 cách.

Vậy có $3C_5^2 + 5C_3^2 + 1 = 46$ cách chọn.

Cách 2: Số cách chọn 3 người bất kì là: C_8^3

Số cách chọn 3 người nam cả là: C_5^3

Vậy số cách chọn 3 người thỏa yêu cầu bài toán là:

$$C_8^3 - C_5^3 = 46 \text{ cách.}$$

3. Tính chất của các số C_n^k

a) Tính chất 1: $C_n^k = C_n^{n-k}$

b) Tính chất 2: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Hoán vị

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Số các số có năm chữ số khác nhau lập nên từ năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là:

Hướng dẫn giải

Một số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập nên từ năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5 là một hoán vị của năm chữ số đó. Vậy có tất cả $5! = 120$ (số).

Ví dụ 2: Người ta xếp 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Hóa và 3 quyển sách Lý lên một giá sách theo từng môn. Số cách sắp xếp sẽ là:

Hướng dẫn giải

Có 3 môn học nên có $3!$ cách xếp sách theo môn.

Trong đó có $5!$ cách xếp sách Toán, $4!$ cách xếp sách Hóa, và $3!$ cách xếp sách Lý. Vậy số cách xếp tất cả là: $3!\times 4!\times 5!\times 3!$.

Ví dụ 3: Một nhóm học sinh gồm 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng ngang. Số cách xếp để cho học sinh nam và nữ xen kẽ nhau là:

A. $5!$. **B.** $10!$.

C. $2.(5!)^2$. **D.** $(5!)^2$.

Hướng dẫn giải

Ví dụ 4: Số cách sắp xếp chỗ cho 10 khách ngồi quanh một bàn tròn (hai cách xếp được coi là như nhau nếu cách này nhận được từ cách kia bằng cách xoay bàn đi một góc nào đó) là:

Hướng dẫn giải

Ví dụ 5: Long và Hưng cùng 8 bạn rủ nhau đi xem bóng đá. Số cách xếp nhóm bạn trên vào 10 chỗ ngồi sắp hàng ngang sao cho Long và Hưng ngồi cạnh nhau là:

Hướng dẫn giải

Ví dụ 6: Có bao nhiêu cách dán 5 con tem khác nhau vào 5 phong bì khác nhau và mỗi phong bì một tem?

Hướng dẫn giải

Số cách dán 5 con tem vào 5 phong bì theo đề bài là số cách xếp có thứ tự 5 con tem vào 5 vị trí. Đó chính là số hoán vị của 5 phần tử.

Do đó đáp số là P_5.

Ví dụ 7: Có bao nhiêu cách xếp 5 nam và 3 nữ ngồi trên một băng ghế dài sao cho nam ngồi kề nhau và nữ ngồi kề nhau?

Hướng dẫn giải

- Xem 5 nam và 3 nữ lần lượt như 2 phần tử α và β.
- Số cách sắp xếp α và β vào 2 vị trí là: $P_2 = 2$ (cách).
- Mỗi cách hoán vị 5 nam và 3 nữ cho nhau trong cùng một vị trí ta luôn thêm $5!\times 3!$ cách xếp khác nhau.

Vậy số cách xếp theo yêu cầu bài toán là: $2\times 5!\times 3! = 1440$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng có 5 đội bóng? (giả sử rằng không có hai đội nào có điểm trùng nhau)

A. 120. **B.** 100. **C.** 80. **D.** 60.

Lời giải

Chọn A

Số các khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng có 5 đội bóng là một hoán vị của 5 phần tử nên có $5! = 120$ cách.

Câu 2: Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 5 người ngồi vào một bàn dài?

A. 120 **B.** 5 **C.** 20 **D.** 25

Lời giải

Chọn A

Số cách sắp xếp khác nhau cho 5 người ngồi vào một bàn dài là một hoán vị của 5 phần tử nên có $5!=120$ cách.

Câu 3: Số cách sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ ngồi là:

A. $6!4!$. **B.** $10!$. **C.** $6!-4!$. **D.** $6!+4!$.

Lời giải

Chọn B

Số cách sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ là một hoán vị của 10 phần tử nên có $10!$ cách.

Câu 4: Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp sao cho bạn Chi luôn ngồi chính giữa là

A. 24. **B.** 120. **C.** 60. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

Xếp bạn Chi ngồi giữa có 1 cách. Số cách xếp 4 bạn sinh An, Bình, Dũng, Lệ vào 4 chỗ còn lại là một hoán vị của 4 phần tử nên có có $4!$ cách. Vậy có 24 cách xếp.

Câu 5: Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng luôn ngồi ở hai đầu ghế?

A. 120. **B.** 16 **C.** 12. **D.** 24.

Lời giải

Chọn C

Xếp An và Dũng ngồi hai đầu ghế có $2!$ cách xếp. Số cách xếp 3 bạn Bình, Chi, Lệ vào 3 ghế còn lại là một hoán vị của 3 phần tử nên có có $3!$ cách. Vậy có $2!.3!=12$ cách.

Câu 6: Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng không ngồi cạnh nhau?

A. 24. **B.** 48. **C.** 72. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Số cách xếp 5 bạn vào 5 chỗ trên ghế dài là một hoán vị của 5 phần tử nên có $5!=120$ cách.

Số cách xếp sao cho bạn An và bạn Dũng luôn ngồi cạnh nhau là $2.4!=48$ cách (An và Dũng ngồi cạnh nhau xem như 1 bạn; xếp 4 bạn vào 4 chỗ có $4!$ cách; cách xếp An và Dũng ngồi cạnh nhau là $2!=2$)

Vậy số cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng không ngồi cạnh nhau là $120-48=72$ cách.

Câu 7: Có 3 viên bi đen khác nhau, 4 viên bi đỏ khác nhau, 5 viên bi xanh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?

A. 345600. **B.** 725760. **C.** 103680. **D.** 518400.

Lời giải

Chọn C

Số các hoán vị về màu bi khi xếp thành dãy là $3!$

Số cách xếp 3 viên bi đen khác nhau thành dãy là $3!$

Số cách xếp 4 viên bi đỏ khác nhau thành dãy là $4!$

Số cách xếp 5 viên bi xanh khác nhau thành dãy là $5!$

$\Rightarrow$ Số cách xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau là $3!.3!.4!.5! = 103680$ cách.

Câu 8: Cô dâu và chú rể mời 6 người ra chụp ảnh kỉ niệm, người thợ chụp hình có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho cô dâu, chú rể đứng cạnh nhau.

A. $8! - 7!$. **B.** $2.7!$. **C.** $6.7!$. **D.** $2! + 6!$.

Lời giải

Chọn B

Khi cô dâu, chú rể đứng cạnh nhau (có thể thay đổi vị trí cho nhau), ta coi đó là một phần tử và đứng với 6 vị khách mời để chụp ảnh nên có $2.7!$ cách sắp xếp.

Câu 9: Trên giá sách muốn xếp 20 cuốn sách khác nhau. Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho tập 1 và tập 2 đặt cạnh nhau.

A. $20! - 18!$. **B.** $20! - 19!$. **C.** $20! - 18!.2!$. **D.** $19!.18$.

Lời giải

Chọn D

Sắp xếp 20 cuốn sách trên giá là một hoán vị của 20 phần tử nên ta có $20!$ cách sắp xếp.

Khi hai cuốn tập 1 và tập 2 đặt cạnh nhau (thay đổi vị trí cho nhau), ta coi đó là một phần tử và cùng sắp xếp với 18 cuốn sách còn lại trên giá nên có $2.19!$ cách sắp xếp.

Vậy có tất cả $20! - 2.19! = 19!.18$ cách sắp xếp theo yêu cầu bài toán.

Câu 10: Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người vào 4 ghế ngồi được bố trí quanh một bàn tròn?

A. 12. **B.** 24. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Chọn 1 người ngồi vào 1 vị trí bất kì. Xếp 3 người còn lại vào 3 ghế trống của bàn là một hoán vị của 3 phần tử nên có có $3! = 6$ cách.

Câu 11: Có 4 nữ sinh tên là Huệ, Hồng, Lan, Hương và 4 nam sinh tên là An, Bình, Hùng, Dũng cùng ngồi quanh một bàn tròn có 8 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp biết nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?

A. 576. **B.** 144. **C.** 2880. **D.** 1152.

Lời giải

Chọn B

Giả sử các ghế ngồi đánh số từ 1 đến 8.

Chọn 1 bạn bất kì ngồi vào 1 vị trí ngẫu nhiên trên bàn tròn có 1 cách. (Nếu chọn 8 cách thì tức là nhầm với bàn dài). Xếp 3 bạn cùng giới tính còn lại vào 3 ghế (có số ghế cùng tính chẵn hoặc lẻ với bạn đầu) có $3!$ cách.

Xếp 4 bạn còn lại ngồi xen kẽ 4 bạn đã xếp ở trên có $4!$ cách.

Vậy có $3!.4! = 144$ cách.

Câu 12: Từ các số tự nhiên 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau:

A. 4^4. **B.** 24. **C.** 1. **D.** 42.

Lời giải

Chọn B

Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được tạo thành là một hoán vị của 4 phần tử bằng $4! = 24$.

Dạng 2. Chỉnh hợp

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Từ 10 bông hoa có chủng loại khác nhau và 4 cái lọ khác nhau, có bao nhiêu cách cắm 4 bông hoa vào 4 lọ và mỗi lọ 1 bông hoa?

A. $P_{10.}$

Hướng dẫn giải

Số cách cắm 4 bông hoa từ 10 bông hoa khác nhau vào 4 lọ khác nhau là một bộ 4 bông hoa có thứ tự.

Ví dụ: Gọi 4 bông hoa được chọn là A, B, C, D và 4 lọ hoa là $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Hai cách cắm sau đây là khác nhau:

α	β	γ	δ
A	B	C	D

α	β	γ	δ
B	A	C	D

Do đó số cách cắm bông theo yêu cầu bài toán là A_{10}^4.

Ví dụ 2: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau và trong đó phải có chữ số 1?

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đem chữ số 1 xếp trước

- Số cách xếp chữ số 1 vào 1 trong 4 vị trí là: 4 (cách)
- Số cách xếp 4 chữ số còn lại vào 3 vị trí còn lại là A_4^3 (cách)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $4 \times A_4^3 = 96$ (số).

Cách 2: Dùng phần bù:

– Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau (không cần biết có hay không có chữ số 1) lấy từ $\{1,2,3,4,5\}$ là $A_5^4 = 120$ (số)

– Phần bù của tập các số phải có chữ số 1 là tập các số không có chữ số 1.

Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau (và không có chữ số 1) lấy từ $\{2,3,4,5\}$ là $P_4 = 24$ (số)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $120 - 24 = 96$ (số).

Ví dụ 3: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập thành bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau đôi một?

Hướng dẫn giải

Do đó số cách thành lập các số tự nhiên theo yêu cầu bài toán là số các chỉnh hợp chập 3 của 6 (chữ số): A_6^3.

Ví dụ 4: Từ 10 điểm phân biệt và không có ba điểm nào thẳng hàng, có thể lập được bao nhiêu vectơ?

Hướng dẫn giải

Để có một vectơ ta cần có 2 điểm phân biệt và để ý hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$ là khác nhau. Do vậy số cách thành lập các vectơ là số cách chọn 2 điểm có thứ tự từ 10 điểm của đề bài.

Nghĩa là số cách thành lập các vectơ là số các chỉnh hợp chập 2 của 10 (điểm): A_{10}^2.

Ví dụ 5: Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 2 học sinh nam thi toán, lý và 2 học sinh nữ thi hóa, sinh? (Mỗi học sinh thi một môn).

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 2 trong 20 nam thi toán, lý là A_{20}^2 (cách)

Số cách chọn 2 trong 10 nữ thi hóa, sinh là A_{10}^2 (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $A_{20}^2 \times A_{10}^2$ (cách).

Ví dụ 6: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số trong đó phải có chữ số lẻ?

Hướng dẫn giải

- Số các số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau (không cần biết có hay không có chữ số lẻ) lấy từ các chữ số $\{1,2,3,4,5,6\}$ là $A_6^3 = 120$ (số).
- Số các số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau (cả 3 chữ số đều chẵn) lấy từ $\{2,4,6\}$ là $P_3 = 6$ (số)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $120 - 16 = 114$ (số).

Ví dụ 7: Có bao nhiêu số có hai chữ số, mà các chữ số đều là số lẻ và khác nhau?

Hướng dẫn giải

Xét tập $A = \{1,3,5,7,9\}$; có 5 phần tử.

Số $n = \overline{ab};\ a,b \in A, a \neq b$. Vậy có $A_5^2 = 20$.

Ví dụ 8: Có thể có tối đa là bao nhiêu số điện thoại gồm 7 chữ số và các chữ số đều khác nhau?

Hướng dẫn giải

Xét tập $A = \{0,1,2,...,9\}$.

Số điện thoại $x = abcdefg$. Số $a \in A$ có 10 cách chọn. Vì $b \neq a$ và $b \in A$ nên có 9 cách chọn. Vậy có: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604800$ cách.

Cách giải khác: Các số a, b, c, d, e, f khác nhau từng đôi một nên ta có số cách chọn là $A_{10}^7 = 604800$.

Nhận xét: Các bài toán dùng quy tắc nhân, bạn cũng nên dùng công thức tính số chỉnh hợp chập k của n, A_n^k cho nhanh.

Ví dụ 9: Có 10 môn học và một ngày học 5 tiết. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các môn học trong ngày đó?

Hướng dẫn giải

Chọn 5 môn trong 10 môn cho ngày hôm đó, sau đó thay đổi thứ tự 5 môn học, ta có: $A_{10}^5 = 30240$.

Ví dụ 10: Cho tập $A = \{1,2,3,...,9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau và các chữ số 2; 4; 5 đồng thời có mặt?

A. 1800. **B.** 3600.

C. 10800. **D.** 4320.

Hướng dẫn giải

Xét ba vị trí trong 5 vị trí của số có 5 chữ số cần tìm để cho các chữ số 2, 4, 5. Ta có A_5^3 cách chọn.

Còn lại hai vị trí cho các số khác trong $A \setminus \{2,4,5\}$. Ta còn 6 chữ số. Vậy có A_6^2 cách chọn.

Cuối cùng, ta được: $A_5^3.A_6^2 = 1800$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 6 người ngồi vào 4 chỗ trên một bàn dài?

A. 15. **B.** 720. **C.** 30. **D.** 360.

Lời giải

Chọn D

Số cách xếp khác nhau cho 6 người ngồi vào 4 chỗ trên một bàn dài là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Suy ra có $A_6^4 = 360$ cách.

Câu 2: Giả sử có bảy bông hoa khác nhau và ba lọ hoa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba lọ đã cho (mội lọ cắm một bông)?

A. 35. **B.** 30240. **C.** 210. **D.** 21.

Lời giải

Chọn C

Số cách xếp bảy bông hoa khác nhau vào ba lọ hoa khác nhau là một chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử. Suy ra có $A_7^3 = 210$ cách.

Câu 3: Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 lọ khác nhau (mội lọ cắm không quá một một bông)?

A. 60. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 720.

Lời giải

Chọn A

Số cách cắm 3 bông hoa vào ba lọ hoa khác nhau là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử. Suy ra có $A_5^3 = 60$ cách.

Câu 4: Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

A. 15. **B.** 360. **C.** 24. **D.** 17280.

Lời giải

Chọn B

Số cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử. Suy ra có $A_6^4 = 360$ cách.

Câu 5: Trong mặt phẳng cho một tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp điểm này?

A. 15. **B.** 12. **C.** 1440. **D.** 30.

Lời giải

Chọn D

Mỗi cặp sắp thứ tự gồm hai điểm (A,B) cho ta một vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B và ngược lại. Như vậy, mỗi vectơ có thể xem là một chỉnh hợp chập 2 của tập hợp 6 điểm đã cho. Suy ra có $A_6^2 = 30$ cách.

Câu 6: Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong số 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả 11 mét. Hãy tính xem huấn luyện viên của mỗi đội có bao nhiêu cách lập danh sách gồm 5 cầu thủ.

A. 462. **B.** 55. **C.** 55440. **D.** 11!.5!

Lời giải

Chọn C

Số cách lập danh sách gồm 5 cầu thủ đá 5 quả 11 mét là số các chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử. Vậy có $A_{11}^5 = 55440$.

Câu 7: Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất, nhì, ba?

A. 336. **B.** 56. **C.** 24. **D.** 120.

Lời giải

Chọn A

Số kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí nhất, nhì, ba là số các chỉnh hợp chập 3 của 8 phần tử. Vậy có $A_8^3 = 336$.

Câu 8: Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn ra 3 người vào ban thường vụ. Nếu cần chọn ban thường vụ gồm ba chức vụ Bí thư, Phó bí thư, Ủy viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

A. 210. **B.** 200. **C.** 180. **D.** 150.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn ban thường vụ gồm ba chức vụ Bí thư, Phó bí thư, Ủy viên thường vụ từ 7 người là số các chỉnh hợp chập ba của bảy phần tử. Vậy có $A_7^3 = 210$.

Câu 9: Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau. Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả có thể?

A. 2730. **B.** 2703. **C.** 2073. **D.** 2370.

Lời giải

Chọn A

Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập ba của 15 phần tử, do đó ta có: $A_{15}^3 = 2730$ kết quả.

Câu 10: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể?

A. 94109040. **B.** 94109400. **C.** 94104900. **D.** 94410900.

Lời giải

Chọn B

Mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 4 của 100 phần tử, do đó ta có: $A_{100}^4 = 94109400$ kết quả.

Câu 11: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 được giải nhất?

A. 944109. **B.** 941409. **C.** 941094. **D.** 941049.

Lời giải

Chọn C

Vì người giữ vé số 47 trúng giải nhất nên mỗi kết quả ứng với một chỉnh hợp chập 3 của 99 phần tử, do đó ta có: $A_{99}^3 = 941094$ kết quả.

Câu 12: Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải?

A. 3766437. **B.** 3764637. **C.** 3764367. **D.** 3764376.

Lời giải

Chọn D

Nếu người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải thì:

- Người giữ vé số 47 có 4 cách chọn giải.
- Ba giải còn lại ứng với một chỉnh hợp chấp 3 của 99 phần tử, do đó ta có $A_{99}^3 = 941094$ cách.

Vậy số kết quả bằng $4 \times A_{99}^3 = 4 \times 941094 = 3764376$ kết quả.

Câu 13: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số $1, 2, \ldots, 9$?

A. 15120. **B.** 9^5. **C.** 5^9. **D.** 126.

Lời giải

Chọn A

Mỗi cách xếp số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau từ các số $1, 2, \ldots, 9$ là một chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử. Vậy có $A_9^5 = 15120$.

Câu 14: Cho tập $A = \{0,1, 2, \ldots, 9\}$. Số các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau lấy ra từ tập A là?

A. 30420. **B.** 27162. **C.** 27216. **D.** 30240.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}, a \neq 0$.

- Chọn a có 9 cách.
- Chọn b,c,d,e từ 9 số còn lại có $A_9^4 = 3024$ cách.

Vậy có $9 \times 3024 = 27216$.

Câu 15: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3?

A. 249. **B.** 7440. **C.** 3204. **D.** 2942.

Lời giải

Chọn B

Ta chia thành các trường hợp sau:

- TH1: Nếu số 123 đứng đầu thì có A_7^4 số.
- TH2: Nếu số 321 đứng đầu thì có A_7^4 số.
- TH3: Nếu số $123;321$ không đứng đầu

Khi đó có 6 cách chọn số đứng đầu (khác $0;1;2;3$), khi đó còn 6 vị trí có 4 cách xếp 3 số 321 hoặc 123, còn lại 3 vị trí có A_6^3 cách chọn các số còn lại. Do đó trường hợp này có $6.2.4.A_6^3 = 5760$

Suy ra tổng các số thoả mãn yêu cầu là $2A_7^4+5760=7440$.

Dạng 3. Tổ hợp

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tập M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là:

Hướng dẫn giải

Số tập con gồm 2 phần tử của M là số cách chọn 2 phần tử bất kì trong 10 phần tử của M. Do đó số tập con gồm hai phần tử của M là C_{10}^2.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu cách phân công hai bạn từ một tổ có 10 bạn để làm trực nhật?

Hướng dẫn giải

Kết quả của sự phân công một nhóm gồm 2 bạn là một tổ hợp chập 2 của 10. Vậy số cách phân công là: $C_{10}^2=\frac{10!}{2!.8!}=45.$

Ví dụ 3: Số đường chéo của một đa giác lồi 15 cạnh là:

Hướng dẫn giải

Số đoạn thẳng có hai đầu mút là hai đỉnh của đa giác đã cho là C_{15}^2, trong đó số cạnh của đa giác là 15.

Vậy số các đường chéo là: $C_{15}^2-15=105-15=90.$

Ví dụ 4: Có bao nhiêu cách phân công 8 bạn học sinh thành hai nhóm: một nhóm có 5 bạn, nhóm kia có 3 bạn?

Hướng dẫn giải

Số cách phân nhóm 5 bạn trong số 8 bạn học sinh là C_8^5.

Sau khi phân nhóm 5 bạn sẽ còn lại 3 bạn được phân công vào nhóm còn lại.

Vì vậy sẽ có $C_8^5=56$ cách.

Ví dụ 5: Lớp 11 của một trường THPT có 45 học sinh. Cần chọn 4 bạn vào Đội Cờ đỏ và 3 bạn vào Ban Chấp hành Đoàn. Số cách chọn là:

Hướng dẫn giải

Chon 4 bạn trong số 45 bạn vào Đội Cờ đỏ nên có C_{45}^4 cách chọn. Sau khi chọn 4 bạn rồi, chọn 3 bạn trong số $45-4=41$ bạn còn lại vào Ban Chấp hành Đoàn nên có C_{41}^3 cách chọn. Từ đó, theo quy tắc nhân có $C_{45}^4\times C_{41}^3$ cách chọn.

Ví dụ 6: Từ 10 điểm phân biệt trong mặt phẳng và không có ba điểm nào thẳng hàng, có thể vẽ được bao nhiêu tam giác?

Hướng dẫn giải

Từ 3 điểm không thẳng hàng ta có một tam giác và để ý các tam giác ABC, BCA, CAB,… là giống nhau.

Do đó số tam giác có thể vẽ được là số cách chọn 3 điểm không có thứ tự từ 10 điểm của đề bài.

Vậy đáp số là C_{10}^3.

Ví dụ 7: Số đường chéo của một đa giác có 10 cạnh là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Một đa giác có 10 cạnh thì có 10 đỉnh.

Số đoạn thẳng được thành lập từ 10 đỉnh của đa giác là C_{10}^2

Số đường chéo của đa giác là số đoạn thẳng vừa tìm ở trên và bỏ đi số cạnh của đa giác.

Vậy số đường chéo cần tìm là: $C_{10}^2 - 10 = 35$ (đường chéo).

Ví dụ 8: Một người nông dân có 10 cây giống khác nhau gồm 6 cây xoài và 4 cây mít. Người ấy muốn chọn 4 cây để trồng sao cho phải có đủ 2 loại xoài và mít. Hỏi người ấy có mấy cách để chọn?

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Phải có xoài và mít là phải có không cụ thể. Phải có cây mít nào? Và phải có cây xoài nào? Do đó ta dùng cách chia trường hợp như sau:

TH1: 1 cây xoài và 3 cây mít.

Số cách chọn 1 trong 6 cây xoài là 6 (cách)

Số cách chọn 3 trong 4 cây mít là $C_4^3 = 4$ (cách)

Suy ra TH1 có $6 \times 4 = 24$ (cách).

TH2: 2 cây xoài và 2 cây mít.

Tương tự, ta có: $C_6^2 \times C_4^2 = 90$ (cách)

TH3: 3 cây xoài và 1 cây mít.

Tương tự ta có: $C_6^3 \times 4 = 80$ (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là: $24 + 90 + 8 = 194$ (cách).

Ví dụ 9: Từ 3 bông hồng vàng, 4 bông hồng trắng và 5 bông hồng đỏ (các bông xem như đôi một khác nhau), có bao nhiêu cách chọn một bó hoa gồm 5 bông trong đó có đúng 1 bông hồng đỏ?

A. 175. **B.** 4200.

C. 1650. **D.** 787.

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 1 trong 5 bông hồng đỏ là 5 (cách).

Số cách chọn 4 trong 7 bông hồng (vàng và trắng) là: $C_7^4 = 35$ (cách)

Vậy số cách chọn một bó bông theo yêu cầu bài toán là: $5 \times 35 = 175$ (cách).

Ví dụ 10: Một lớp có 20 học sinh trong đó có 15 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đội gồm 4 học sinh trong đó có ít nhất một nữ?

Hướng dẫn giải

Cách 1: Chia trường hợp

TH1: 1 nữ và 3 nam.

Số cách chọn 1 trong 5 nữ là 5 (cách)

Số cách chọn 3 trong 15 nam là $C_{15}^3 = 455$ (cách)

Suy ra TH1 có $5 \times 455 = 2275$ (cách).

TH2: 2 nữ và 2 nam.

Tương tự ta có: $C_5^2 \times C_{15}^2 = 1050$ (cách).

TH3: 3 nữ và 1 nam.

Tương tự ta có: $C_5^3 \times 15 = 150$ (cách).

TH4: 4 nữ.

Tương tự ta có: $C_5^4 = 5$ (cách).

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là:

$2275 + 1050 + 150 + 5 = 3480$ (cách).

Cách 2: Dùng phần bù

- Số cách chọn 4 học sinh không phân biệt nam, nữ từ 20 học sinh là: $C_{20}^4 = 4845$ (cách)

- Số cách chọn 4 học sinh nam từ 15 học sinh nam là: $C_{15}^4 1365$ (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là: $4845 - 1365 = 3480$ (cách).

Ví dụ 11: Có 20 quyển sách khác nhau gồm 15 quyển sách toán và 5 quyển sách lý. Có bao nhiêu cách chọn 5 quyển sách toán và 2 quyển sách lý để xếp có thứ tự lên 1 kệ sách dài?

Hướng dẫn giải

- Số cách chọn 5 trong 15 quyển sách toán là $C_{15}^5 = 3003$ (cách)
- Số cách chọn 2 trong 5 quyển sách lý là $C_5^2 = 10$ (cách)
- Số cách xếp 7 quyển sách toán, lý vừa chọn lên kệ sách dài là: $P_7 = 5040$ (cách). Vậy số cách xếp theo yêu cầu bài toán là:

$3003 \times 10 \times 5040 = 151351200$ (cách).

Ví dụ 12: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể thành lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau trong đó có 3 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn?

Hướng dẫn giải

- Số cách chọn 3 trong 5 chữ số lẻ $\{1,3,5,7,9\}$ là: $C_5^3 = 10$ (cách)
- Số cách chọn 2 trong 4 chữ số chẵn $\{2,4,6,8\}$ là: $C_4^2 = 6$ (cách)
- Số cách xếp 5 chữ số vừa chọn vào 5 vị trí là: $P_5 = 120$ (cách)

Vậy số các số tự nhiên cần tìm là: $10 \times 6 \times 20 = 7200$ (số)

Ví dụ 13: Một học sinh có 10 cây viết khác nhau. Học sinh đó có bao nhiêu cách chọn 3 trong 10 cây viết đó để đi học?

Hướng dẫn giải

Gọi 3 cây viết được chọn là A, B, C không có thứ tự, nghĩa là A, B, C hoặc B, C, A hoặc C, A, B,… là giống nhau.

Do đó đáp số là C_{10}^3.

Ví dụ 14: Một lớp có 30 học sinh. Giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp?

Hướng dẫn giải

Đề bài chỉ yêu cầu chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp mà không phân công cụ thể công việc của 3 học sinh đó.

Do vậy 3 học sinh được chọn không có thứ tự. Nghĩa là số cách chọn theo yêu cầu bài toán là C_{30}^3 (cách).

Ví dụ 15: Một hộp đựng 10 quả cầu khác nhau gồm 5 quả cầu trắng và 5 quả cầu đen. Có bao nhiêu cách chọn 2 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen từ hộp đó?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 2 trong 5 quả cầu trắng là C_5^2 (cách).

Số cách chọn 2 trong 5 quả cầu đen là C_5^2 (cách).

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_5^2 \times C_5^2$ (cách).

Ví dụ 16: Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 6 học sinh nam thi bóng chuyền và 2 học sinh nữ thi cầu lông?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 6 trong 20 học sinh nam thi bóng chuyền là C_{20}^6 (cách).

Số cách chọn 2 trong 10 học sinh nữ thi cầu lông là C_{10}^2 (cách).

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_{20}^{6} \times C_{10}^{2}$ (cách).

Câu 17: Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh nam thi toán và 2 học sinh nữ thi lý, hóa? (Mỗi học sinh thi một môn).

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 20 học sinh nam thi toán là C_{20}^{3} (cách)

Số cách chọn 2 trong 10 học sinh nữ thi lý, hóa là A_{10}^{2} (cách)

Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_{20}^{3} \times A_{10}^{2}$ (cách).

Câu 18: Một lớp có 30 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh tham gia văn nghệ và 2 học sinh tham gia phong trào thể thao của nhà trường?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 30 học sinh tham gia văn nghệ là C_{30}^{3} (cách)

Như vậy đã chọn được 3 học sinh và chỉ còn lại 27 học sinh.

Số cách chọn 2 trong 27 học sinh còn lại để tham gia phong trào thể thao là C_{27}^{2} (cách). Vậy số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_{30}^{3} \times C_{27}^{2}$ (cách).

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn như trên?

A. 9880. **B.** 59280. **C.** 2300. **D.** 455.

Lời giải

Chọn A

Nhóm học sinh 3 người được chọn (không phân biệt nam, nữ - công việc) là một tổ hợp chập 3 của 40 (học sinh).

Vì vậy, số cách chọn nhóm học sinh là $C_{40}^{3} = \frac{40!}{37!.3!} = 9880.$

Câu 2: Một tổ có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Cần lập một đoàn đại biểu gồm 5 người, hỏi có bao nhiêu cách lập?

A. 25. **B.** 252. **C.** 50. **D.** 455.

Lời giải

Chọn D

Mỗi đoàn được lập là một tổ hợp chập 5 của 10 (người). Vì vậy, số đoàn đại biểu có thể có là $C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!.5!} = 252.$

Câu 3: Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người trong ban thường vụ. Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu các chọn?

A. 25. **B.** 42. **C.** 50. **D.** 35.

Lời giải

Chọn D

Vì không xét đến sự phân biệt chức vụ của 3 người trong ban thường vụ nên mỗi cách chọn ứng với một tổ hợp chập 3 của 7 phần tử.

Như vậy, ta có $C_7^5 = \dfrac{7!}{2!.5!} = 35$ cách chọn ban thường vụ.

Câu 4: Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau. Nếu kết quả cuộc thi và việc chọn ra 4 người có điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

A. 1635. **B.** 1536. **C.** 1356. **D.** 1365.

Lời giải

Chọn D

Nếu kết quả cuộc thi là việc chọn ra 4 người có điểm cao nhất thì mỗi kết quả ứng với một tổ hợp chập 4 của 15 phần tử.

Như vậy, ta có $C_{15}^4 = 1365$ kết quả.

Câu 5: Một hộp đựng 5 viên bi màu xanh, 7 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi bất kỳ?

A. 665280. **B.** 924. **C.** 7. **D.** 942.

Lời giải

Chọn B

Số cách lấy 6 viên bi bất kỳ (không phân biệt màu) trong 12 viên bi là một tổ hợp chập 6 của 12 (viên bi). Vậy ta có $C_{12}^6 = 924$ cách lấy.

Câu 6: Có bao nhiêu cách lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 con?

A. 104. **B.** 450. **C.** 1326. **D.** 2652.

Lời giải

Chọn C

Mỗi cách lấy 2 con bài từ 52 con là một tổ hợp chập 2 của 52 phần tử.

Vậy số cách lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con là $C_{52}^2 = 1326$.

Câu 7: Có 15 đội bóng đá thi đấu theo thể thức vòng tròn tính điểm. Hỏi cần phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?

A. 100. **B.** 105. **C.** 210. **D.** 200.

Lời giải

Chọn B

Lấy hai đội bất kỳ trong 15 đội bóng tham gia thi đấu ta được một trận đấu.

Vậy số trận đấu chính là một tổ hợp chập 2 của 15 phần tử (đội bóng đá).

Như vậy, ta có $C_{15}^2 = \dfrac{15!}{13!.2!} = 105$ trận đấu.

Câu 8: Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa giống nhau vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông)?

A. 10. **B.** 30. **C.** 6. **D.** 60.

Lời giải

Chọn A

Cắm 3 bông hoa giống nhau, mỗi bông vào 1 lọ nên ta sẽ lấy 3 lọ bất kỳ trong 5 lọ khác nhau để cắm bông. Vậy số cách cắm bông chính là một tổ hợp chập 3 của 5 phần tử (lọ hoa). Như vậy, ta có $C_5^3 = \dfrac{5!}{2!.3!} = 10$ cách.

Câu 9: Trong mặt phẳng cho tập hợp P gồm 2018 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P ?

A. $\dfrac{2018!}{2016!}$. **B.** $\dfrac{2016!}{2!}$. **C.** $\dfrac{2018!}{2!}$. **D.** $\dfrac{2018!}{2016!.2!}$.

Lời giải

Chọn D

Với hai điểm bất kỳ trong n điểm ta luôn được một đoạn thẳng.

Vậy số đoạn thẳng cần tìm chính là một tổ hợp chập 2 của 2018 phần tử (điểm).

Như vậy, ta có $C_{2018}^2 = \dfrac{2018!}{2016!.2!}$ đoạn thẳng.

Câu 10: Cho 10 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng khác nhau tạo bởi 2 trong 10 điểm nói trên?

A. 90. **B.** 20. **C.** 45. **D.** Một số khác.

Lời giải

Chọn C

Với hai điểm bất kỳ trong n điểm ta luôn được một đoạn thẳng.

Vậy số đoạn thẳng cần tìm chính là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử (điểm).

Như vậy, ta có $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{8!.2!} = 45$ đường thẳng.

Câu 11: Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

A. 15. **B.** 20. **C.** 60. **D.** Một số khác.

Lời giải

Chọn B

Cứ 3 điểm phân biệt không thẳng hàng tạo thành một tam giác.

Lấy 3 điểm bất kỳ trong 6 điểm phân biệt thì số tam giác cần tìm chính là một tổ hợp chập 3 của 6 phần tử (điểm). Như vậy, ta có $C_6^3 = 20$ tam giác.

Câu 12: Cho 10 điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_{10}$ trong đó có 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh được lấy trong 10 điểm trên?

A. 96 tam giác. **B.** 60 tam giác. **C.** 116 tam giác. **D.** 80 tam giác.

Lời giải

Chọn C

Số cách lấy 3 điểm từ 10 điểm phân biệt là $C_{10}^3 = 120.$

Số cách lấy 3 điểm bất kì trong 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 là $C_4^3 = 4.$

Khi lấy 3 điểm bất kì trong 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thì sẽ không tạo thành tam giác.

Như vậy, số tam giác tạo thành $120 - 4 = 116$ tam giác.

Câu 13: Cho mặt phẳng chứa đa giác đều (H) có 20 cạnh. Xét tam giác có 3 đỉnh được lấy từ các đỉnh của (H). Hỏi có bao nhiêu tam giác có đúng 1 cạnh là cạnh của (H).

A. $1440.$ **B.** $360.$ **C.** $1120.$ **D.** $816.$

Lời giải

Chọn B

Lấy một cạnh bất kỳ của (H) làm cạnh của một tam giác có 20 cách.

Lấy một điểm bất kỳ trong 18 đỉnh còn lại của (H) (trừ đi hai đỉnh của một cạnh) có 18 cách. Vậy số tam giác cần tìm là $20.18 = 360$.

Câu 14: Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lầy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 37 điểm này.

A. $5690.$ **B.** $5960.$ **C.** $5950.$ **D.** $5590.$

Lời giải

Chọn C

Một tam giác được tạo bởi ba điểm phân biệt nên ta xét:

TH1. Chọn 1 điểm thuộc d_1 và 2 điểm thuộc $d_2 \longrightarrow$ có $C_{17}^1.C_{20}^2$ tam giác.

TH2. Chọn 2 điểm thuộc d_1 và 1 điểm thuộc $d_2 \longrightarrow$ có $C_{17}^2.C_{20}^1$ tam giác.

Như vậy, ta có $C_{17}^1.C_{20}^2 + C_{17}^2.C_{20}^1 = 5950$ tam giác cần tìm.

Câu 15: Số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là:

A. $10.$ **B.** $20.$ **C.** $18.$ **D.** $22.$

Lời giải

Chọn B

Hai đường tròn cho tối đa hai giao điểm. Và 5 đường tròn phân biệt cho số giao điểm tối đa khi 2 đường tròn bất kỳ trong 5 đường tròn đôi một cắt nhau.

Vậy số giao điểm tối đa của 5 đường tròn phân biệt là $2.C_5^2 = 20.$

Câu 16: Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt là:

A. $50.$ **B.** $100.$ **C.** $120.$ **D.** $45.$

Lời giải

Chọn D

Số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt khi không có ba đường thẳng nào đồng quy và không có hai đường thẳng nào song song.

Và cứ hai đường thẳng ta có một giao điểm suy ra số giao điểm chính là số cặp đường thẳng bất kỳ được lấy từ 10 đường thẳng phân biệt. Như vậy, ta có $C_{10}^2 = 45$ giao điểm.

Câu 17: Với đa giác lồi 10 cạnh thì số đường chéo là

A. $90.$ **B.** $45.$ **C.** $35.$ **D.** Một số khác.

Lời giải

Chọn C

Đa giác lồi 10 cạnh thì có 10 đỉnh. Lấy hai điểm bất kỳ trong 10 đỉnh của đa giác lồi ta được số đoạn thẳng gồm cạnh và đường chéo của đa giác lồi.

Vậy số đường chéo cần tìm là $C_{10}^2 - 10 = \dfrac{10!}{8!.2!} - 10 = 35.$

Câu 18: Cho đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3.$ Tìm n biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.

A. $n = 15.$ **B.** $n = 27.$ **C.** $n = 8.$ **D.** $n = 18.$

Lời giải

Chọn D

Đa giác lồi n đỉnh thì có n cạnh. Nếu vẽ tất cả các đoạn thẳng nối từng cặp trong n đỉnh này thì có một bộ gồm các cạnh và các đường chéo.

Vậy để tính số đường chéo thì lấy tổng số đoạn thẳng dựng được trừ đi số cạnh, với

- Tất cả đoạn thẳng dựng được là bằng cách lấy ra 2 điểm bất kỳ trong n điểm, tức là số đoạn thẳng chính là số tổ hợp chập 2 của n phần tử.

  Như vậy, tổng số đoạn thẳng là $C_n^2.$

- Số cạnh của đa giác lồi là $n.$

Suy ra số đường chéo của đa giác đều n đỉnh là $C_n^2 - n = \dfrac{n(n-3)}{2}.$

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} n \geq 3 \\ \dfrac{n(n-3)}{2} = 135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3 \\ n^2 - 3n - 270 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow n = 18.$

Câu 19: Trong mặt phẳng có bao nhiêu hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường thẳng phân biệt song song với nhau và năm đường thẳng phân biệt vuông góc với bốn đường thẳng song song đó.

A. 60. **B.** 48. **C.** 20. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B

Cứ 2 đường thẳng song song với 2 đường thẳng vuông góc với chúng cắt nhau tại bốn điểm là 4 đỉnh của hình chữ nhật.

Vậy lấy 2 đường thẳng trong 4 đường thẳng song song và lấy 2 đường thẳng trong 5 đường thẳng vuông góc với 4 đường đó ta được số hình chữ nhật là $C_4^2.C_5^2 = 60.$

Câu 20: Một lớp có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn học sinh sao cho trong đó có đúng 3 học sinh nữ?

A. 110790. **B.** 119700. **C.** 117900. **D.** 110970.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn 3 học sinh nữ là: $C_{20}^3 = 1140$ cách.

Số cách chọn 2 bạn học sinh nam là: $C_{15}^2 = 105$ cách.

Số cách chọn 5 bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $1140 \times 105 = 119700.$

Câu 21: Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và khác 0 mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ?

A. $4!C_4^1C_5^1.$ **B.** $3!C_3^2C_5^2.$ **C.** $4!C_4^2C_5^2.$ **D.** $3!C_4^2C_5^2.$

Lời giải

Chọn C

Số cách chọn 2 số chẵn trong tập hợp $\{2;4;6;8\}$ là: C_4^2 cách.

Số cách chọn 2 số lẻ trong tập hợp $\{1;3;5;7;9\}$ là: C_5^2 cách.

Số cách hoán vị 4 chữ số đã chọn lập thành 1 số tự nhiên là: $4!$ cách.

Vậy có $4! \times C_4^2 \times C_5^2$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Một túi đựng 6 bi trắng, 5 bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi đó. Hỏi có bao nhiêu cách lấy mà 4 viên bi lấy ra có đủ hai màu.

A. 300. **B.** 310. **C.** 320. **D.** 330.

Lời giải

Chọn B

Các viên bi lấy ra có đủ cả 2 màu nên ta có các trường hợp:

Số bi trắng	Số bi xanh	Số cách chọn
1	3	$C_6^1 \times C_5^3$
2	2	$C_6^2 \times C_5^2$
3	1	$C_6^3 \times C_5^1$

Vậy có tất cả $C_6^1 \times C_5^3 + C_6^2 \times C_5^2 + C_6^3 \times C_5^1 = 310$ cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Dùng phần bù. Số cách chọn 4 viên bi tùy ý từ 11 viên bi là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 4 viên bi màu trắng là: C_6^4 cách.

Số cách chọn 4 viên bi là màu xanh là: C_5^4 cách.

Vậy có $C_{11}^5 - \left(C_6^4 + C_5^4\right) = 310$ cách chọn 4 viên bi trong đó có cả 2 màu.

Câu 23: Một nhóm học sinh có 6 bạn nam và 5 bạn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh trong đó có cả nam và nữ?

A. 455. **B.** 7. **C.** 456. **D.** 462.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn 5 học sinh tùy ý là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh nam là: C_6^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh nữ là: C_5^5 cách.

Vậy có $C_{11}^5 - C_6^5 - C_5^5 = 455$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Do trong 5 học sinh được chọn có cả nam cả nữ nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh nam	Số học sinh nữ	Số cách chọn
1	4	$C_6^1 \times C_5^4$
2	3	$C_6^2 \times C_5^3$
3	2	$C_6^3 \times C_5^2$
4	1	$C_6^4 \times C_5^1$

Vậy có $C_6^1 \times C_5^4 + C_6^2 \times C_5^3 + C_6^3 \times C_5^2 + C_6^4 \times C_5^1 = 455$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24: Để chào mừng kỉ niệm ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, nhà trường tổ chức cho học sinh cắm trại. Lớp 10A có 19 học sinh nam và 16 học sinh nữ. Giáo viên cần chọn 5 học sinh để trang trí trại. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất 1 học sinh nữ? Biết rằng học sinh nào trong lớp cũng có khả năng trang trí trại.

A. C_{19}^5. **B.** $C_{35}^5 - C_{19}^5$. **C.** $C_{35}^5 - C_{16}^5$. **D.** C_{16}^5.

Lời giải

Chọn B

Tổng số học sinh lớp 10A là 35.

Có C_{35}^5 cách chọn 5 học sinh từ 35 học sinh lớp 10**A.**

Có C_{19}^5 cách chọn 5 học sinh từ 19 học sinh nam của lớp 10**A.**

Do đó có $C_{35}^5 - C_{19}^5$ cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất một học sinh nữ.

Câu 25: Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 25 nam và 15 nữ. Giáo viên cần chọn 3 học sinh tham gia vệ sinh công cộng toàn trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh trong đó có nhiều nhất 1 học sinh nam?

A. 2625. **B.** 455. **C.** 2300. **D.** 3080.

Lời giải

Chọn D

Do trong 3 học sinh được chọn có nhiều nhất 1 học sinh nam nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh nam	Số học sinh nữ	Số cách chọn
1	2	$C_{25}^1 \times C_{15}^2$
0	3	$C_{25}^0 \times C_{15}^3$

Vậy có $C_{25}^1 \times C_{15}^2 + C_{25}^0 \times C_{15}^3 = 3080$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Số cách chọn 3 học sinh bất kì trong lớp là: C_{40}^3 cách.

Số cách chọn 3 học sinh trong đó có 2 học sinh nam, 1 học sinh nữ là: $C_{25}^2 \times C_{15}^1$ cách.

Số cách chọn 3 học sinh nam là: $C_{25}^3 \times C_{15}^0$ cách.

Vậy có $C_{40}^3 - \left(C_{25}^2 \times C_{15}^1 + C_{25}^3 \times C_{15}^0\right) = 3080$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Từ 20 người cần chọn ra một đoàn đại biểu gồm 1 trưởng đoàn, 1 phó đoàn, 1 thư kí và 3 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đoàn đại biểu?

A. 4651200. **B.** 4651300. **C.** 4651400. **D.** 4651500.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn 1 người trong 20 người làm trưởng đoàn là: C_{20}^1 cách.

Số cách chọn 1 người trong 19 người còn lại làm phó đoàn là: C_{19}^1 cách.

Số cách chọn 1 người trong 18 người còn lại làm thư kí là: C_{18}^1 cách.

Số cách chọn 3 người trong 17 người còn lại làm ủy viên là: C_{17}^3 cách.

Vậy số cách chọn đoàn đại biểu là $C_{20}^1 \times C_{19}^1 \times C_{18}^1 \times C_{17}^3 = 4651200$.

Câu 27: Một tổ gồm 10 học sinh. Cần chia tổ đó thành ba nhóm có 5 học sinh, 3 học sinh và 2 học sinh. Số các chia nhóm là:

A. 2880. **B.** 2520. **C.** 2515. **D.** 2510.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn ra nhóm có 5 học sinh từ 10 học sinh là: C_{10}^5 cách.

Số cách chọn ra nhóm 3 học sinh từ 5 học sinh còn lại là: C_5^3 cách.

Số cách chọn ra nhóm 2 học sinh từ 2 học sinh còn lại là: C_2^2 cách.

Vậy có $C_{10}^5 \times C_5^3 \times C_2^2 = 2520$ cách chia nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: Một nhóm đoàn viên thanh niên tình nguyện về sinh hoạt tại một xã nông thôn gồm có 21 đoàn viên nam và 15 đoàn viên nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân chia 3 nhóm về 3 ấp để hoạt động sao cho mỗi ấp có 7 đoàn viên nam và 5 đoàn viên nữ?

A. $3C_{36}^{12}$. **B.** C_{36}^{12}. **C.** $3C_{21}^7 C_{15}^5$. **D.** $C_{21}^7 C_{15}^5 C_{14}^7 C_{10}^5$.

Lời giải

Chọn D

Số cách chọn nhóm thứ nhất là: $C_{21}^7 \times C_{15}^5$ cách.

Số cách chọn nhóm thứ hai là: $C_{14}^7 \times C_{10}^5$ cách.

Số cách chọn nhóm thứ ba là: $C_7^7 \times C_5^5$ cách.

Vậy có $\left(C_{21}^7 \times C_{15}^5\right) \times \left(C_{14}^7 \times C_{10}^5\right) \times \left(C_7^7 \times C_5^5\right) = C_{21}^7 C_{15}^5 C_{14}^7 C_{10}^5$ cách chia nhóm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 29: Trong một giỏ hoa có 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa coi như đôi một khác nhau). Người ta muốn làm một bó hoa gồm 7 bông được lấy từ giỏ hoa đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hoa biết bó hoa có đúng 1 bông hồng đỏ?

A. 56. **B.** 112. **C.** 224. **D.** 448.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn 1 bông hồng đỏ từ giỏ hoa là: C_4^1.

Bó hoa gồm 7 bông hồng mà có đúng 1 bông hồng đỏ nên tổng số bông hồng vàng và bông hồng trắng là 6. Ta có các trường hợp sau:

Số bông hồng vàng	Số bông hồng trắng	Số cách chọn
5	1	$C_5^5 \times C_3^1$
4	2	$C_5^4 \times C_3^2$
3	3	$C_5^3 \times C_3^3$

Vậy có $C_4^1\left(C_5^5 \times C_3^1 + C_5^4 \times C_3^2 + C_5^3 \times C_3^3\right) = 112$ cách chọn bó hoa thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 30: Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là:

A. 2163. **B.** 3843. **C.** 3003. **D.** 840.

Lời giải

Chọn A

Số cách chọn 5 viên bi bất kì trong hộp là: C_{15}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu vàng là: C_{11}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu đỏ là: C_{10}^5 cách.

Số cách chọn 5 viên bi mà trong đó không có viên bi nào màu xanh là: C_9^5 cách.

Vậy có $C_{15}^5 - \left(C_{11}^5 + C_{10}^5 + C_9^5\right) = 2163$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12**C.** Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn?

A. 126. **B.** 102. **C.** 98. **D.** 100.

Lời giải

Chọn C

Do trong 5 học sinh có đủ học sinh ở các lớp 12A, 12B, 12C nên ta có các trường hợp sau:

Số học sinh lớp 12A	Số học sinh lớp 12B	Số học sinh lớp 12C	Số cách chọn
2	1	2	$C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2$
1	2	2	$C_4^1 \times C_3^2 \times C_2^2$
2	2	1	$C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1$

3	1	1	$C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1$
1	3	1	$C_4^1 \times C_3^3 \times C_2^1$

Vậy có $C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2 + C_4^1 \times C_3^2 \times C_2^2 + C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1 + C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1 + C_4^1 \times C_3^3 \times C_2^1 = 98$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Tổng số học sinh trong đội văn nghệ của nhà trường là 9 học sinh.

Số cách chọn 5 học sinh bất kì trong 9 học sinh là: C_9^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12A là: C_5^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12B là: C_6^5 cách.

Số cách chọn 5 học sinh mà trong đó không có học sinh lớp 12C là: C_7^5 cách.

Vậy có $C_9^5 - \left(C_5^5 + C_6^5 + C_7^5\right) = 98$ cách thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh trong số học sinh giỏi đó sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh?

A. 85. **B.** 58. **C.** 508. **D.** 805.

Lời giải

Chọn D

Số cách chọn 6 học sinh bất kì trong 12 học sinh là: C_{12}^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 10 là: C_7^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 11 là: C_8^6 cách.

Số cách chọn 6 học sinh mà trong đó không có học sinh khối 12 là: C_9^6 cách.

Vậy có $C_{12}^6 - \left(C_7^6 + C_8^6 + C_9^6\right) = 805$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 33: Đội học sinh giỏi cấp trường môn Tiếng Anh của trường THPT X theo từng khối như sau: khối 10 có 5 học sinh, khối 11 có 5 học sinh và khối 12 có 5 học sinh. Nhà trường cần chọn một đội tuyển gồm 10 học sinh tham gia IOE cấp tỉnh. Tính số cách lập đội tuyển sao cho có học sinh cả ba khối và có nhiều nhất 2 học sinh khối 10.

A. 50. **B.** 500. **C.** 502. **D.** 501.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra có 2 khả năng xảy ra như sau:

TH1: Có đúng 1 học sinh khối 10.

Số cách chọn 1 học sinh khối 10 là: C_5^1 cách.

Số cách chọn 9 học sinh còn lại khối 11 và 12 là: C_{10}^{9} cách.

TH2: Có đúng 2 học sinh khối 10.

Số cách chọn 2 học sinh khối 10 là: C_5^2 cách.

Số cách chọn 8 học sinh còn lại từ khối 11 và 12 là: C_{10}^{8} cách.

Vậy có $C_5^1 \times C_{10}^9 + C_5^2 \times C_{10}^8 = 500$ cách lập đội thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34: Đội văn nghệ của một nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12**C.** Cần chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ đó để biểu diễn trong lễ bế giảng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A?

A. 80. **B.** 78. **C.** 76. **D.** 98.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra có 3 khả năng xảy ra như sau:

Số học sinh lớp 12A	Số học sinh lớp 12B	Số học sinh lớp 12C	Số cách chọn
2	2	1	$C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1$
2	1	2	$C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2$
3	1	1	$C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1$

Vậy có $C_4^2 \times C_3^2 \times C_2^1 + C_4^2 \times C_3^1 \times C_2^2 + C_4^3 \times C_3^1 \times C_2^1 = 78$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Một hộp đựng 8 viên bi màu xanh, 5 viên bi đỏ, 3 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách chọn từ hộp đó ra 4 viên bi sao cho số bi xanh bằng số bi đỏ?

A. 280. **B.** 400. **C.** 40. **D.** 1160.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra có 2 trường hợp xảy ra như sau:

Số viên bi xanh	Số viên bi đỏ	Số viến bi vàng	Số cách chọn
1	1	2	$C_8^1 \times C_5^1 \times C_3^2$
2	2	0	$C_8^2 \times C_5^2 \times C_3^0$

Vậy có $C_8^1 \times C_5^1 \times C_3^2 + C_8^2 \times C_5^2 \times C_3^0 = 400$ cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36: Một hộp bi có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 viên bi trong đó số viên bi đỏ lớn hơn số viên bi vàng.

A. 654. **B.** 275. **C.** 462. **D.** 357.

Lời giải

Chọn B

Tổng số bi lấy ra có 4 viên mà bi đỏ nhiều hơn bi vàng nên có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: Không có bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 1 viên trở lên.

Số cách lấy 4 viên bi bất kì trong tổng số 9 viên bi (gồm 5 đỏ và 4 xanh) là: C_9^4 cách.

Số cách lấy 4 viên bi xanh là: C_4^4 cách.

$\Rightarrow$ Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là: $C_9^4 - C_4^4 = 125$ cách.

TH2: Có 1 viên bi vàng, khi đó số bi đỏ phải từ 2 viên trở lên. Số cách lấy 1 viên bi vàng: C_3^1 cách.

Số cách lấy 3 viên bi còn lại trong đó có 2 bi đỏ và 1 bi xanh là: $C_5^2 \times C_4^1$ cách.

Số cách lấy 3 viên bi còn lại đều là bi đỏ là: $C_5^3 \times C_4^0$ cách.

$\Rightarrow$ Số cách lấy thỏa mãn trong trường hợp này là: $C_3^1 \times \left(C_5^2 \times C_4^1 + C_5^3 \times C_4^0\right) = 150$ cách.

Vậy có $125 + 150 = 275$ cách lấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37: Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Từ đó người ta muốn chọn ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư ấy lên 3 bì đã chọn. Hỏi có bao nhiêu cách làm như thế?

A. 1000. **B.** 1200. **C.** 2000. **D.** 2200.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn 3 tem thư trong 5 tem thư khác nhau là: C_5^3 cách.

Số cách chọn 3 bì thư trong 6 bì thư khác nhau là: C_6^3 cách.

Số cách dán tem thư thứ nhất vào 3 bì thư là: C_3^1 cách.

Số cách dán tem thư thứ hai vào 2 bì thư còn lại là: C_2^1 cách.

Số cách dán tem thư thứ hai vào bì thư cuối cùng là: C_1^1 cách.

Vậy có $\left(C_5^3 \times C_6^3\right) \times \left(C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1\right) = 1200$ cách làm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: Cho 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 câu bài tập, người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong đề thi phải gồm 3 câu hỏi trong đó có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 câu hỏi bài tập. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đề như trên?

A. 69. **B.** 88. **C.** 96. **D.** 100.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra, một đề thi gồm 3 câu hỏi vừa có câu hỏi lý thuyết vừa có câu hỏi bài tập nên ta xét:

TH1: Đề thi gồm 1 câu lý thuyết, 2 câu bài tập. Lấy 1 câu lý thuyết trong 4 câu lý thuyết có C_4^1 cách, tương ứng lấy 2 câu bài tập trong 6 câu bài tập có C_6^2 cách. Vậy có $C_4^1.C_6^2$ đề.

TH2: Đề thi gồm 2 câu lý thuyết, 1 câu bài tập. Lập luận tương tự **TH1**, ta sẽ tạo được $C_4^2.C_6^1$ đề.

Vậy có thể tạo được $C_4^1 \times C_6^2 + C_4^2 \times C_6^1 = 96$ đề thi thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 4. Phương Trình – Bất Phương Trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm n biết $n! = 2!(n-2)!$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$.

Khi đó $n! = 2!(n-2)! \Leftrightarrow (n-2)!(n-1)n = 2(n-2)! \Leftrightarrow (n-1)n = 2$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \\ n = 2. \end{array}\right.$$

Ví dụ 2: Tìm n thỏa mãn phương trình $\frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$. Ta có: $\frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{n! - (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$

$$\frac{(n-1)!n - (n-1)!}{(n-1)!n(n-1)!} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow n^2 - 5n + 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = 3. \end{array}\right.$$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình $A_x^3 + 5A_x^2 \leq 12x$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \geq 3$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$A_x^3 + 5A_x^5 \leq 21x \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-1)!} + 5.\frac{x!}{(x-2)!} \leq 21x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)!(x-2)(x-1)x}{(x-3)!} + 5.\frac{(x-2)!(x-1)x}{(x-2)!} \leq 21x$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) + 5(x-1) \leq 21 \quad (\text{vì } x \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4 \quad (\text{vì } x \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow x = 3, x = 4. \quad (\text{vì } x \in \mathbb{N})$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $C_n^5 = 17C_n^4$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \geq 5$ và $n \in \mathbb{N}$. Ta có: $C_n^5 = 17C_n^4 \Leftrightarrow \frac{n!}{5!(n-5)!} = 17.\frac{n!}{4!(n-4)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4!5(n-5)!}=17.\frac{1}{4!(n-5)!(n-4)} \Leftrightarrow \frac{1}{5}=\frac{17}{n-4} \Leftrightarrow n=89.$$

Ví dụ 6: Giải phương trình $C_n^1+C_n^2+C_n^3=\frac{7n}{2}$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n\geq 3$ và $n\in\mathbb{N}$. Ta có: $C_n^1+C_n^2+C_n^3=\frac{7n}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{7n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!n}{(n-1)!}+\frac{(n-2)!n(n-1)}{2(n-2)!}+\frac{(n-3)!n(n-1)(n-2)}{6(n-3)!}=\frac{7n}{2}$$

$$\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{7n}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{n-1}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{6}=\frac{7}{2} \text{ (Vì } n\geq 3) \Leftrightarrow n^2=16.$$

$\Leftrightarrow n=4$ (Vì $n\geq 3$).

Ví dụ 7: Giải bất phương trình $C_{13}^m<C_{13}^{m+2}$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $0\leq m\leq 11$ và $m\in\mathbb{N}$.

Ta có: $C_{13}^m<C_{13}^{m+2} \Leftrightarrow \frac{13!}{m!(13-m)!}<\frac{13!}{(m+2)!(11-m)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m!(11-m)!(12-m)(13-m)}<\frac{1}{m!(m+1)(m+2)(11-m)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(12-m)(13-m)}<\frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m+2)<(12-m)(13-m) \text{ (vì } 0\leq m\leq 11 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow m^2+3m+2<m^2-25m+156 \Leftrightarrow m<\frac{11}{2} \Leftrightarrow 0\leq m\leq 5$$

$\Leftrightarrow m\in\{0,1,2,3,4,\}$.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases}C_n^k-C_n^{k+1}=0\\4C_n^k-5C_n^{k-1}=0\end{cases}$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n\geq k+1, k\geq 1$ và $n,k\in\mathbb{N}$

Ta có: $\begin{cases}C_n^k-C_n^{k+1}=0 & (1)\\4C_n^k-5C_n^{k-1}=0 & (2)\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow C_n^k=C_n^{k+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k=k+1\\k+k+1=n\end{array}\right. \Leftrightarrow n=2k+1 \text{ (vì } k=k+1 \text{ loại)}$$

$$(2)\Leftrightarrow 4C_n^k=5C_n^{k-1} \Leftrightarrow 4C_{2k+1}^k=5C_{2k+1}^{k-1} \Leftrightarrow 4.\frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!}=5\frac{(2k+1)!}{(k-1)!(k+2)!}$$

$$\Leftrightarrow 4.\frac{1}{k!k(k+1)!}=5\frac{1}{(k-1)!(k+1)!(k+2)!} \Leftrightarrow \frac{4}{k}=\frac{5}{k+2} \Leftrightarrow k=8\Rightarrow n=17.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $6\left(P_x - P_{x-1}\right) = P_{x+1}.$

A. $x = 2.$ **B.** $x = 3.$ **C.** $x = 2;\ x = 3.$ **D.** $x = 5.$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \geq 1$ và $x \in \mathbb{N}.$

Ta có $6\left(P_x - P_{x-1}\right) = P_{x+1} \Leftrightarrow 6\left[x! - (x-1)!\right] = (x+1)! \Leftrightarrow 6(x-1)!.(x-1) = (x-1)!.x(x+1)$

$\Leftrightarrow 6.(x-1) = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 2 \ (\text{thỏa mãn}) \\ x = 3 \ (\text{thỏa mãn}) \end{bmatrix}.$

Câu 2: Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $P_2.x^2 - P_3.x = 8.$

A. $S = -4.$ **B.** $S = -1.$ **C.** $S = 4.$ **D.** $S = 3.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $P_2.x^2 - P_3.x = 8 \Leftrightarrow 2!.x^2 - 3!.x = 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = 4 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow S = -1 + 4 = 3.$

Câu 3: Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa mãn $3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 = 0$?

A. $0.$ **B.** $1.$ **C.** $2.$ **D.** $6.$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 = 0 \Leftrightarrow 3.\dfrac{x!}{(x-2)!} - \dfrac{(2x)!}{(2x-2)!} + 42 = 0$

$\Leftrightarrow 3.(x-1).x - (2x-1).2x + 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = -7 (\text{loại}) \\ x = 6 (\text{thỏa mãn}) \end{bmatrix}.$

Câu 4: Cho số tự nhiên x thỏa mãn $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. x là số chính phương. **B.** x là số nguyên tố. **C.** x là số chẵn. **D.** x là số chia hết cho $3.$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \geq 10$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $A_x^{10}+A_x^9=9A_x^8 \Leftrightarrow \dfrac{x!}{(x-10)!}+\dfrac{x!}{(x-9)!}=9\dfrac{x!}{(x-8)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{x-9}=\dfrac{9}{(x-9)(x-8)} \Leftrightarrow x^2-16x+55=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11(\text{thỏa mãn}) \\ x=5(\text{loại}) \end{array}\right.$.

Câu 5: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $A_n^3+5A_n^2=2(n+15)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $n\geq 3$ và $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $A_n^3+5A_n^2=2(n+15) \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-3)!}+5.\dfrac{n!}{(n-2)!}-2n-30=0$

$\Leftrightarrow (n-2).(n-1).n+5.(n-1).n-2n-30=0 \Leftrightarrow n^3+2n^2-5n-30=0 \Leftrightarrow n=3.$

Câu 6: Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_{n+1}^1+3C_{n+2}^2=C_{n+1}^3$.

A. $n=12$. **B.** $n=9$. **C.** $n=16$. **D.** $n=2$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $C_{n+1}^1+3C_{n+2}^2=C_{n+1}^3 \Leftrightarrow \dfrac{(n+1)!}{1!.n!}+3.\dfrac{(n+2)!}{2!.n!}=\dfrac{(n+1)!}{3!.(n-2)!}$

$\Leftrightarrow n+1+3.\dfrac{(n+1).(n+2)}{2}=\dfrac{(n-1).n.(n+1)}{6} \Leftrightarrow 1+3.\dfrac{(n+2)}{2}=\dfrac{(n-1).n.}{6}$

$\Leftrightarrow 6+9n+18=n^2-n \Leftrightarrow n^2-10n-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-2(\text{loại}) \\ n=12(\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$.

Câu 7: Tính tích P của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $C_{14}^x+C_{14}^{x+2}=2C_{14}^{x+1}$.

A. $P=4$. **B.** $P=32$. **C.** $P=-32$. **D.** $P=12$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $0\leq x\leq 12$ và $x\in\mathbb{N}$.

Ta có $C_{14}^x+C_{14}^{x+2}=2C_{14}^{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{14!}{x!(14-x)!}+\dfrac{14!}{(x+2)!(12-x)!}=2\dfrac{14!}{(x+1)!(13-x)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(14-x)(13-x)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=2.\dfrac{1}{(x+1)(13-x)}$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)+(14-x)(13-x)=2(x+2)(14-x)$

$\Leftrightarrow x^2-12x+32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=8\end{array}\right.\longrightarrow P=4.8=32.$

Câu 8: Tính tổng S của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $\frac{1}{C_n^1}-\frac{1}{C_{n+1}^2}=\frac{7}{6C_{n+4}^1}$.

A. $S=8.$ **B.** $S=11.$ **C.** $S=12.$ **D.** $S=15.$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $n\geq 1$ và $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $\frac{1}{C_n^1}-\frac{1}{C_{n+1}^2}=\frac{7}{6C_{n+4}^1}\Leftrightarrow\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{2!.(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{7(n+3)!}{6(n+4)!}\Leftrightarrow\frac{1}{n}-\frac{2}{n(n+1)}=\frac{7}{6(n+4)}$

$\Leftrightarrow n^2-11n+24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=3(\text{thỏa mãn})\\n=8(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.\longrightarrow S=3+8=11.$

Câu 9: Tìm giá trị $x\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_x^0+C_x^{x-1}+C_x^{x-2}=79.$

A. $x=13.$ **B.** $x=17.$ **C.** $x=16.$ **D.** $x=12.$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x\in\mathbb{N}$.

Ta có $C_x^0+C_x^{x-1}+C_x^{x-2}=79\Leftrightarrow C_x^0+C_x^1+C_x^2=79$

$\Leftrightarrow 1+x+\frac{x(x-1)}{2}=79\Leftrightarrow x^2+x-156=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=12(\text{thỏa mãn})\\x=-13(\text{loại})\end{array}\right.$.

Câu 10: Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3).$

A. $n=15.$ **B.** $n=18.$ **C.** $n=16.$ **D.** $n=12.$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $n\in\mathbb{N}$.

Ta có $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=7(n+3)\Leftrightarrow C_{n+4}^3-C_{n+3}^3=7(n+3)$

$\Leftrightarrow\frac{(n+4)(n+2)}{3!}-\frac{(n+2)(n+1)}{3!}=7\Leftrightarrow 3n-36=0\Leftrightarrow n=12(\text{thỏa mãn}).$

Câu 11: Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_n^1+C_n^2+C_n^3=\frac{7n}{2}.$

A. $n=3.$ **B.** $n=4.$ **C.** $n=6.$ **D.** $n=8.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $C_n^1+C_n^2+C_n^3=\frac{7n}{2}\Leftrightarrow\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{2!.(n-2)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{7n}{2}$

$\Leftrightarrow n^2-16=0\longrightarrow n=4.$

Câu 12: Tính tổng S của tất cả các giá trị của x thỏa $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x.$

A. $S=2.$ **B.** $S=7.$ **C.** $S=9.$ **D.** $S=14.$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x\geq 3$ và $x\in\mathbb{N}.$

Ta có $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x\Leftrightarrow\frac{x!}{1!.(x-1)!}+6.\frac{x!}{2!.(x-2)!}+6.\frac{x!}{3!.(x-3)!}=9x^2-14x$

$\Leftrightarrow x+3x(x-1)+(x-2)(x-1)x=9x^2-14x\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0(\text{loại})\\x=2(\text{loại})\\x=7(\text{thỏa mãn})\end{bmatrix}.$

Câu 13: Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8.$

A. $n=18.$ **B.** $n=16.$ **C.** $n=15.$ **D.** $n=14.$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $n\geq 9$ và $n\in\mathbb{N}.$

Áp dụng công thức $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$, ta có $C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8$

$\Leftrightarrow C_n^6+C_n^7+2\left(C_n^7+C_n^8\right)+C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8\Leftrightarrow C_{n+1}^7+2C_{n+1}^8+C_{n+1}^9=2C_{n+2}^8$

$\Leftrightarrow\left(C_{n+1}^7+C_{n+1}^8\right)+\left(C_{n+1}^8+C_{n+1}^9\right)=2C_{n+2}^8\Leftrightarrow C_{n+2}^8+C_{n+2}^9=2C_{n+2}^8$

$\Leftrightarrow C_{n+2}^9=C_{n+2}^8\longrightarrow n+2=9+8\Leftrightarrow n=15.$

Câu 14: Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $C_{2007}^7=C_{2006}^7+C_{2006}^6.$ **B.** $C_{2007}^7=C_{2006}^{2000}+C_{2006}^6.$ **C.** $C_{2007}^7=C_{2006}^{2000}+C_{2006}^{1999}.$ **D.** $C_{2007}^7=C_{2006}^7+C_{2006}^{2000}.$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$, ta có $C_{2006}^6+C_{2006}^7=C_{2007}^7$. Do đó A đúng.

Áp dụng công thức $C_n^k=C_n^{n-k}\longrightarrow\begin{cases}C_{2006}^6=C_{2006}^{2000}\\C_{2006}^7=C_{2006}^{1999}\end{cases}.$

Suy ra $C_{2007}^7=C_{2006}^6+C_{2006}^7=C_{2006}^{2000}+C_{2006}^{1999}=C_{2006}^{2000}+C_{2006}^7$. Do đó C, D đúng; B sai.

Câu 15: Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $1+2+3+4+...+n=C_{n+1}^{2}.$

B. $1+2+3+4+...+n=A_{n+1}^{2}.$

C. $1+2+3+4+...+n=C_{n}^{1}+C_{n}^{2}+....+C_{n}^{n}.$

D. $1+2+3+4+...+n=A_{n}^{1}+A_{n}^{2}+....+A_{n}^{n}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $1+2+3+4+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ và $C_{n+1}^{2}=\dfrac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!}=\dfrac{n(n+1)}{2}.$

Do đó A đúng.

Câu 16: Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $P_nA_n^2+72=6\left(A_n^2+2P_n\right).$

A. $P=12.$ **B.** $P=5.$ **C.** $P=10.$ **D.** $P=6.$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}.$

Ta có $P_nA_n^2+72=6\left(A_n^2+2P_n\right)\Leftrightarrow n!.\dfrac{n!}{(n-2)!}+72=6\left[\dfrac{n!}{(n-2)!}+2.n!\right]$

$\Leftrightarrow n!.(n-1).n+72=6\left[(n-1)n+2.n!\right]\Leftrightarrow (n!-6)\left(n^2-n-12\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n^2-n-12=0\\ n!-6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=4(\text{thỏa mãn})\\ n=-3(\text{loại})\\ n=3(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.\longrightarrow P=4.3=12.$

Câu 17: Tính tích P của tất cả các giá trị của x thỏa mãn $7\left(A_{x+1}^{x-1}+2P_{x-1}\right)=30P_x.$

A. $P=7.$ **B.** $P=4.$ **C.** $P=28.$ **D.** $P=14.$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x\geq 1$ và $x\in\mathbb{N}$.

Ta có $7\left(A_{x+1}^{x-1}+2P_{x-1}\right)=30P_x\Leftrightarrow 7\left[\dfrac{(x+1)!}{2!}+2.(x-1)!\right]=30.x!$

$\Leftrightarrow 7\left[\dfrac{x(x+1)}{2}+2\right]=30x\Leftrightarrow 7x^2-53x+28=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7(\text{thỏa mãn})\\ x=\dfrac{4}{7}(\text{loại})\end{array}\right.\longrightarrow P=7.$

Câu 18: Tìm giá trị $n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $C_{n+8}^{n+3}=5A_{n+6}^{3}.$

A. $n=15.$ **B.** $n=17.$ **C.** $n=6.$ **D.** $n=14.$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3 \Leftrightarrow C_{n+8}^5 = 5.A_{n+6}^3$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+8)(n+7)}{5!} = 5 \Leftrightarrow n^2 + 15n - 544 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 17 \text{(thỏa mãn)} \\ n = -32 \text{(loại)} \end{array}\right.$.

Câu 19: Tìm giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $A_x^2.C_x^{x-1} = 48.$

A. $x = 4.$ **B.** $x = 3.$ **C.** $x = 7.$ **D.** $x = 12.$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq 2$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $A_x^2.C_x^{x-1} = 48 \Leftrightarrow \dfrac{x!}{(x-2)!}.\dfrac{x!}{(x-1)!.1!} = 48$

$\Leftrightarrow (x-1)x.x = 48 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{(thỏa mãn)}.$

Câu 20: Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5.$

A. $n = 3.$ **B.** $n = 5.$ **C.** $n = 4.$ **D.** $n = 6.$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}.$

Ta có $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} - \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = 5 \Leftrightarrow (n-1).n - \dfrac{n(n+1)}{2} - 5 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -2 \text{ (loại)} \\ n = 5 \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$.

Câu 21: Tính tích P của tất cả các giá trị của n thỏa mãn $A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n.$

A. $P = 5.$ **B.** $P = 6.$ **C.** $P = 30.$ **D.** $P = 360.$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}.$

Ta có $A_n^2 - 3C_n^2 = 15 - 5n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} - 3.\dfrac{n!}{2!.(n-2)!} = 15 - 5n$

$\Leftrightarrow n(n-1) - 3\dfrac{n(n-1)}{2} = 15 - 5n \Leftrightarrow -n^2 + 11n - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 6 \text{(thỏa mãn)} \\ n = 5 \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$

$\longrightarrow P = 5.6 = 30.$

Câu 22: Tìm giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $3A_x^4 = 24\left(A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}\right)$.

A. $x = 3$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 1; x = 5$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \geq 4$ và $x \in \mathbb{N}$.

Ta có $3A_x^4 = 24\left(A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}\right) \Leftrightarrow 23.\dfrac{x!}{(x-4)!} = 24.\left[\dfrac{(x+1)!}{(x-2)!} - \dfrac{x!}{(x-4)!.4!}\right]$

$\Leftrightarrow 23.\dfrac{1}{(x-4)!} = 24.\left[\dfrac{x+1}{(x-2)!} - \dfrac{1}{(x-4)!.4!}\right] \Leftrightarrow 23.\dfrac{1}{1} = 24.\left[\dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)} - \dfrac{1}{1.24}\right]$

$\Leftrightarrow 23 = 24.\dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)} - 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1(\text{loại}) \\ x = 5(\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$.

Câu 23: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!} \Leftrightarrow \dfrac{(n+4)!}{(n+2)!.n!} < \dfrac{15}{(n-1)!} \Leftrightarrow \dfrac{(n+3)(n+4)}{n} < 15$

$\Leftrightarrow (n+3)(n+4) < 15n \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 6 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{3;\ 4;\ 5\}$.

Câu 24: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 - 20 < 0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 - 20 < 0 \Leftrightarrow 2\dfrac{(n+1)!}{2!.(n-1)!} + 3.\dfrac{n!}{(n-2)!} - 20 < 0$

$\Leftrightarrow n(n+1) + 3(n-1)n - 20 < 0 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 10 < 0 \Leftrightarrow -2 < n < \dfrac{5}{2} \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \geq 2} n = 2.$

Câu 25: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 < 30$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 < 30 \Leftrightarrow 2.\dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 3.\dfrac{n!}{(n-2)!} < 30$

$\Leftrightarrow n(n+1) + 3(n-1)x < 30 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 15 < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2} < n < 3 \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \geq 2} n = 2.$

Câu 26: Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $14.P_3C_{n-1}^{n-3} < A_{n+1}^4$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $14.P_3C_{n-1}^{n-3} < A_{n+1}^4 \Leftrightarrow 14.3!.\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!.2!} < \dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}$

$\Leftrightarrow 42(n-2)(n-1) < (n-2)(n-1)n(n+1) \Leftrightarrow 42 < n(n+1) \Leftrightarrow n^2 + n - 42 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n < -7 \\ n > 6 \end{array}\right.$

$\xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \geq 3} \begin{cases} n \geq 7 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}.$

Câu 27: Giải hệ phương trình $\begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases}.$

A. $\begin{cases} x = 17 \\ y = 8 \end{cases}.$ **B.** $\begin{cases} x = 17 \\ y = -8 \end{cases}.$ **C.** $\begin{cases} x = 9 \\ y = 8 \end{cases}.$ **D.** $\begin{cases} x = 7 \\ y = 9 \end{cases}.$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq y+1$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Ta có $\begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 & (1) \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 & (2) \end{cases}.$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow C_x^y = C_x^{y+1} \Leftrightarrow y + y + 1 = x \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0$.

Phương trình $(2) \Leftrightarrow 4C_x^y = 5C_x^{y-1} \Leftrightarrow 4.\dfrac{x!}{y!.(x-y)!} = 5.\dfrac{x!}{(y-1)!.(x-y+1)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{y} = \dfrac{5}{x-y+1} \Leftrightarrow 4x - 9y + 4 = 0.$

Do đó hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 4x - 9y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 8 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Câu 28: Tìm cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\dfrac{C_{x+1}^y}{6} = \dfrac{C_x^{y+1}}{5} = \dfrac{C_x^{y-1}}{2}.$

A. $(x;y) = (8;3).$ **B.** $(x;y) = (3;8).$

C. $(x;y)=(-1;0)$. **D.** $(x;y)=(-1;0),\ (x;y)=(8;3)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x\ge y+1$ và $x,y\in\mathbb{N}$.

- $\frac{C_{x+1}^{y}}{6}=\frac{C_{x}^{y+1}}{5}\Leftrightarrow 5.C_{x+1}^{y}=6.C_{x}^{y+1}\Leftrightarrow \frac{5(x+1)!}{y!(x+1-y)!}=\frac{6x!}{(y+1)!(x-y-1)!}$

$\Leftrightarrow \frac{5(x+1)}{(x-y)(x-y+1)}=\frac{6}{(y+1)}\Leftrightarrow 5(y+1)(x+1)=6(x-y)(x-y+1).\ (1)$

- $\frac{C_{x}^{y+1}}{5}=\frac{C_{x}^{y-1}}{2}\Leftrightarrow 2.C_{x}^{y+1}=5.C_{x}^{y-1}\Leftrightarrow \frac{x!}{5.(y+1)!.(x-y-1)!}=\frac{x!}{2.(y-1)!.(x-y+1)!}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5.y(y+1)}=\frac{1}{2.(x-y)(x-y+1)}$

$\Leftrightarrow 5.y(y+1)=2.(x-y)(x-y+1)\Leftrightarrow 15.y(y+1)=6.(x-y)(x-y+1).\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\Leftrightarrow 5(y+1)(x+1)=15.y(y+1)\Leftrightarrow x+1=3y$. Thay vào (1), ta được

$\Leftrightarrow 15(y+1)y=6(2y-1)2y\Leftrightarrow 3y^2-9y=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\longrightarrow x=-1(\text{loại})\\ y=3\longrightarrow x=8(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.$.

Câu 29: Giải hệ phương trình $\begin{cases} C_y^x:C_{y+2}^x=\frac{1}{3}\\ C_y^x:A_y^x=\frac{1}{24}\end{cases}$.

A. $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=4\\y=8\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases},\ \begin{cases}x=4\\y=8\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1\\y=8\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $y\ge x$ và $x,y\in\mathbb{N}$.

Ta có $\begin{cases} C_y^x:C_{y+2}^x=\frac{1}{3} & (1)\\ C_y^x:A_y^x=\frac{1}{24} & (2)\end{cases}$.

Phương trình $(2)\Leftrightarrow \frac{C_y^x}{A_y^x}=\frac{1}{24}\Leftrightarrow 24C_y^x=A_y^x\Leftrightarrow 24.\frac{y!}{x!(y-x)!}=\frac{y!}{(y-x)!}\Leftrightarrow \frac{24}{x!}=1\Leftrightarrow x=4$.

Thay $x=4$ vào (1), ta được $\frac{C_y^4}{C_{y+2}^4}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3C_y^4=C_{y+2}^4\Leftrightarrow 3.\frac{y!}{4!.(y-4)!}=\frac{(y+2)!}{4!.(y-2)!}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{1}=\frac{(y+1)(y+2)}{(y-3)(y-2)}\Leftrightarrow y^2-9y+8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1<4=x(\text{loại})\\ y=8>4=x(\text{thỏa mãn})\end{array}\right.$.

Câu 30: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq y$ và $x, y \in \mathbb{N}$.

Đặt $\begin{cases} u = A_x^y \\ v = C_x^y \end{cases}$, ta được $\begin{cases} 2u + 5v = 90 \\ 5u - 2v = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 20 \\ v = 10 \end{cases}$.

Ta có $A_n^k = k!C_n^k \longrightarrow u = y!.v \Leftrightarrow 20 = y!.10 \Leftrightarrow y! = 2 \Leftrightarrow y = 2.$

Với $u = 20$, suy ra $A_x^y = 20 \Leftrightarrow A_x^2 = 20 \Leftrightarrow \dfrac{x!}{(x-2)!} = 20 \Leftrightarrow (x-1)x = 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -4 \text{(loại)} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$.

BÀI 3. NHỊ THỨC NIU-TƠN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Ta thừa nhận công thức nhị thức Niu-ton sau:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+...+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^nb^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}=C_n^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+...+C_n^{n-1}a^{n-1}b^1+C_n^na^n.$$

Hệ quả:

- Với $a=b=1$ ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n.$
- Với $a=1,b=-1$ ta có $0=C_n^0-C_n^1+...+(-1)^kC_n^k+...+(-1)^nC_n^n.$

Chú ý:

- Số các số hạng của khai triển bằng $n+1.$
- Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n.
- Số hạng tổng quát (thứ $k+1$) có dạng:

$$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k,\ (k=0,1,2,\ldots,n).$$

- Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và cuối thì bằng nhau: $C_n^k=C_n^{n-k}.$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định hệ số hoặc số hạng chứa x^k

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Số hạng không chứa x trong khai triển $(x^2+\frac{1}{x^3})^{10}$ là:

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển $(x^2+\frac{1}{x^3})^{10}$ có dạng:

$$C_{10}^k(x^2)^{10-k}\left(\frac{1}{x^3}\right)^k=C_{10}^kx^{20-2k}x^{-3k}=C_{10}^kx^{20-5k}.$$

Từ yêu cầu bài toán ta có $20-5k=0\Leftrightarrow k=4.$

Do đó số hạng không chứa x là $C_{10}^4=210.$

Ví dụ 2: Trong khai triển $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$, hệ số của số hạng chứa x^4 bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$ là:

$(-1)^k C_{12}^k \left(\frac{3}{x}\right)^{12-k} \left(\frac{x}{3}\right)^k = (-1)^k C_{12}^k x^{12-k} x^{-k} 3^{k-12} 3^k = (-1)^k C_{12}^k x^{12-2k} 3^{2k-12}.$

Từ yêu cầu bài toán ta có: $12-2k=4 \Leftrightarrow k=4.$

Suy ra hệ số cần tìm là: $(-1)^4 .C_{12}^4 .3^{-4} = \frac{55}{9}.$

Ví dụ 3: Khai triển và rút gọn $P(x)=(1+x)^2+(1+x)^3+...+(1+x)^{10}$ ta được $P(x)=a_0+a_1 x^2+a_2 x^3+...+a_{10} x^{10}$. Hệ số a_9 bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Trong khai triển $(1+x)^n$ thì đơn thức có bậc cao nhất là n.

Do đó a_9 là hệ số của x^9 chỉ có trong đa thức $(1+x)^9+(1+x)^{10}$.

Hệ số của x^9 trong $(1+x)^9$ là $C_9^9=1$

Hệ số của x^9 trong $(1+x)^{10}$ là $C_{10}^9=10$

Suy ra $a_9=10+1=11$

Ví dụ 4: Trong khai triển của $\left(x^{\frac{1}{15}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{5}}\right)^{2007}$, số hạng mà lũy thừa của x và y bằng nhau

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển của $\left(x^{\frac{1}{15}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{5}}\right)^{2007}$ là:

$C_{2007}^k x^{\frac{k}{15}} y^{\frac{k}{3}} x^{\frac{2007-k}{3}} y^{\frac{2007-k}{5}} = C_{2007}^k x^{\frac{10035-4k}{15}} y^{\frac{6021+2k}{3}}.$

Ta cần có: $\frac{10035-4k}{15}=\frac{6021+2k}{3}$, do đó $k=669.$

Ví dụ 5: Tìm hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển $\left(x^3+xy\right)^{15}$.

Hướng dẫn giải

Xét số hạng: $T_{k+1}=C_{15}^k \left(x^3\right)^{15-k} (xy)^k = C_{15}^k x^{45-3k+k} y^k = C_{15}^k x^{45-2k} y^k$

Ta có: $\begin{cases} 45-2k=25 \\ k=10 \end{cases} \Leftrightarrow k=10.$

Vậy hệ số của $x^{25}y^{10}$ là của $C_{15}^{10}=3003$.

Ví dụ 6: Tổng các hệ số của khai triển $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n$ bằng 1024. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n=C_n^0\left(\frac{1}{x}\right)^n+C_n^1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}x^3+...+C_n^nx^{3n}$.

Tổng hệ số của khai triển là: $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$.

Vậy $2^n=1024\Leftrightarrow 2^n=2^{10}\Leftrightarrow n=10$.

Xét số hạng $T_{k+1}=C_{10}^k\left(\frac{1}{x}\right)^{10-k}x^{3k}=C_{10}^k\frac{x^{3k}}{x^{10-k}}=C_{10}^kx^{4k-10}$.

Ta được $4k-10=6\Leftrightarrow k=4$. Vậy $C_{10}^4=210$.

Ví dụ 7. Với n là số nguyên dương thỏa $C_n^1+C_n^2=55$, Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^n$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{Z}$

Ta có

$$C_n^1+C_n^2=55\Leftrightarrow\frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{2!(n-2)!}=55\Leftrightarrow n^2+n-110=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=10\\n=-11(L)\end{array}\right.$$

Với $n=10$ ta có khai triển $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$

Số hạng tổng quát của khai triển là $C_{10}^kx^{3(10-k)}.\left(\frac{2}{x^2}\right)^k=C_{10}^k2^kx^{30-5k}$, với $0\leq k\leq 10$.

Số hạng không chứ x ứng với k thoải $30-5k=0\Leftrightarrow k=6$.

Vậy số hạng không chứa x là $C_{10}^62^6=13440$.

Dạng 2 : Tìm số hạng đứng chính giữa

1. Phương pháp

- Khi n chẵn thì số hạng đứng giữa là số hạng thứ: $\frac{n}{2}+1$.
- Khi n lẻ thì coó hai số hạng đứng giữa là $\frac{n+1}{2}$ và $\frac{n+1}{2}+1$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Trong khai triển $(2x+3y)^8$, hệ số của số hạng đứng chính giữa bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Trong khai triển $(2x+3y)^8$ có tất cả 9 số hạng

Do đó số hạng đứng giữa là số hạng thứ 5: $C_8^4(2x)^4(3y)^4$.

Suy ra hệ số cần tìm là: $C_8^4.2^4.3^4 = 90720$.

Ví dụ 2: Tìm số hạng ở chính giữa trong khai triển: $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$.

Hướng dẫn giải

Ta có số hạng $T_6 = C_{10}^5\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5 = 252\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$.

Dạng 3: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $(a+b)^n$

1. Phương pháp

Bước 1: Số hạng tổng quát thứ $k+1$ là: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}b^k$

Đặt $u_k = C_n^k a^{n-k}b^k, (0 \le k \le n)$.

Bước 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} u_k \ge u_{k+1} \\ u_k \ge u_{k-1} \end{cases} \Rightarrow k_0$.

Bước 3: Hệ số lớn nhất trong khai triển là $C_n^{k_0}a^{n-k_0}b^{k_0}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 36: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển thành đa thức biến x của $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$?

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4 = \frac{1}{256}+\frac{3}{64}x+\frac{27}{128}x^2+\frac{27}{64}x^3+\frac{27}{256}x^4$.

Vậy hệ số lớn nhất là $\frac{27}{64}$.

Ví dụ 2: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $(1+x)^n$, biết tổng các hệ số bằng 4096.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n - 2096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$.

Xét $C_{12}^k \ge C_{12}^{k-1}(1 \le k \le 12) \Leftrightarrow \frac{12!}{k!(12-k)!} \ge \frac{12!}{(k-1)!(13-k)!} \Leftrightarrow 13-k \ge k \Leftrightarrow k \le 6$.

Tương tự $C_{12}^{k+1} \le C_{12}^{k} \Rightarrow k \ge 6.$

Vậy $k = 6.$ Khi đó $T_7 = C_{12}^{6} = 924.$

Dạng 4: Tìm số hạng hữu tỉ trong khai triển $(a+b)^n$

1. Phương pháp

Bước 1: hạng tổng quát thứ $k+1$ là: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^k a^{\frac{m}{p}} . b^{\frac{r}{q}}$ (Với a, b là hữu tỉ.

Bước 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{m}{p} \in \mathbb{N} \\ \frac{r}{q} \in \mathbb{N} \end{cases} (k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n) \Rightarrow k_0.$

Bước 3: Số hạng cần tìm là $C_n^{k_0} a^{n-k_0} b^{k_0}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm các số hạng là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^5$.

Hướng dẫn giải

Xét số hạng $T_{k+1} = C_5^k \left(\sqrt{2}\right)^{5-k} . \left(\sqrt[3]{3}\right)^k, 0 \le k \le 5.$

$T_{k+1} \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $5-k$ chia hết cho 2 và k chia kết cho 3 mà $0 \le k \le 5,$ nên $k = 3.$ Vậy $T_4 = C_5^3 \left(\sqrt{2}\right)^2 . \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 60.$

Ví dụ 2: Có bao nhiêu số hạng là số hữu tỉ trong khai triển $\left(\sqrt[4]{4} + \sqrt[3]{4}\right)^{100}$?

Hướng dẫn giải

Xét số hạng $T_{k+1} = C_{100}^k \left(\sqrt[4]{4}\right)^{100-k} \left(\sqrt[3]{4}\right)^k; 0 \le k \le 100.$

$T_{k+1} \in \mathbb{Q}$ khi và chỉ khi $100-k$ là bội của 4 và k là bội của 3. Vì 100 chia hết cho 4, nên k là bội của 4 và k là bội của 3.

Vậy k là bội của 12. Mà $0 \le k \le 100,$ nên $k = 0; 12; 24; 36; 48; 60; 72; 84$ và 96. Tức là có 9 số.

Dạng 5: Tính tổng hoặc chứng minh đẳng thức

1. Phương pháp

- Khi các số hạng của tổng đó có dạng $C_n^k a^{n-k} b^k$ thì ta dùng trực tiếp nhị thức Niu-ton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = C_n^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + ... + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n.$$

Việc còn lại chỉ chỉ khóe léo chọn a, b.

Lưu ý hai kết quả thường dùng là:

- Với $a = b = 1$ ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n.$
- Với $a = 1, b = -1$ ta có $0 = C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^k C_n^k + ... + (-1)^n C_n^n.$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính tổng $C_{2007}^1 + C_{2007}^2 + C_{2007}^3 + ... + C_{2007}^{2007}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(1+1)^{2007} = C_{2007}^1 + C_{2007}^2 + C_{2007}^3 + ... + C_{2007}^{2007}.$

Vậy $C_{2007}^1 + C_{2007}^2 + C_{2007}^3 + ... + C_{2007}^{2007} = 2^{2007} - 1.$

Ví dụ 2: Tính tổng của $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$ bằng:

Hướng dẫn giải

Khai triển: $C = C_{2n}^0 x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1} + ... + C_{2n}^n x^n + ... + C_{2n}^{2n}.$

Mặt khác

$(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n = (C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n)(C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n).$

Trong cách khai triển đầu, hệ số của x^n là C_{2n}^n. Trong cách sau, hệ số của x^n là: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$.

Vậy $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$

Ví dụ 3: Tính giá trị của biểu thức: $B = 2^{2006} C_{2007}^1 + 2^{2004} C_{2007}^3 + 2^{2002} C_{2007}^5 + ... + 2^0 C_{2007}^{2007}$

Hướng dẫn giải

- Ta có: $(1+2x)^{2007} = C_{2007}^0 x^{2007}.2^{2007} + C_{2007}^1 2^{2006}.2^{2006} + ... + C_{2007}^{2007}$

Cho $x = 1$ ta có: $3^{2007} = A + B$ (1)

- Mặt khác: $(1-2x)^{2007} = -C_{2007}^0 x^{2007}.2^{2007} + C_{2007}^1 2^{2006}.2^{2006} - ... + C_{2007}^{2007}$

Cho $x = 1$ ta có: $1 = A - B$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $A = \frac{1}{2}(3^{2007} + 1); B = \frac{1}{2}(3^{2007} - 1).$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm hệ số của x^{12} trong khai triển $\left(2x-x^2\right)^{10}$.

A. C_{10}^8. **B.** $C_{10}^2 2^8$. **C.** C_{10}^2. **D.** $-C_{10}^2 2^8$.

Lời giải

Chọn B

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(2x-x^2\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.(2x)^{10-k}.\left(-x^2\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.(2)^{10-k}.x^{10-k+2k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.(2)^{10-k}.x^{10+k}.$$

Hệ số của x^{12} ứng với $10+k=12\Leftrightarrow k=2\longrightarrow$ hệ số cần tìm $C_{10}^2 2^8$.

Câu 2: Khai triển đa thức $P(x)=(5x-1)^{2007}$ ta được $P(x)=a_{2007}x^{2007}+a_{2006}x^{2006}+...+a_1x+a_0$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a_{2000}=-C_{2007}^7.5^7$. **B.** $a_{2000}=C_{2007}^7.5^7$. **C.** $a_{2000}=-C_{2007}^{2000}.5^{2000}$. **D.** $a_{2000}=C_{2007}^7.5^7$.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$(5x-1)^{2007}=\sum_{k=0}^{2017}C_{2017}^k.(5x)^{2017-k}.(-1)^k=\sum_{k=0}^{2017}C_{2017}^k.(5)^{2017-k}.(-1)^k.x^{2017-k}.$$

Hệ số của x^{2000} ứng với $2017-k=2000\Leftrightarrow k=7$

$\longrightarrow$ hệ số cần tìm $-C_{2017}^7.(5)^{2000}=-C_{2007}^{2000}.5^{2000}$.

Câu 3: Đa thức $P(x)=32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$ là khai triển của nhị thức nào dưới đây?

A. $(1-2x)^5$. **B.** $(1+2x)^5$. **C.** $(2x-1)^5$. **D.** $(x-1)^5$.

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy $P(x)$ có dấu đan xen nên loại đáp án **B.**

Hệ số của x^5 bằng 32 nên loại đáp án D và còn lại hai đáp án A và C thì chỉ có C phù hợp (vì khai triển số hạng đầu tiên của đáp án C là $32x^5$.)

Câu 4: Tìm số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}$.

A. $-C_{13}^4x^7$. **B.** $-C_{13}^3$. **C.** $-C_{13}^3x^7$. **D.** $C_{13}^3x^7$.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}.x^{13-k}.\left(-\frac{1}{x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}.(-1)^{k}.x^{13-2k}.$$

Hệ số của x^7 ứng với $13-2k=7\Leftrightarrow k=3\longrightarrow$ số hạng cần tìm $-C_{13}^{3}x^7$.

Câu 5: Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^9$.

A. $-\frac{1}{8}C_9^3x^3$. **B.** $\frac{1}{8}C_9^3x^3$. **C.** $-C_9^3x^3$. **D.** $C_9^3x^3$.

Lời giải

Chọn B

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x+\frac{1}{2x}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k.x^{9-k}.\left(\frac{1}{2x}\right)^k=\sum_{k=0}^{9}C_9^k.\left(\frac{1}{2}\right)^k.x^{9-2k}.$$

Hệ số của x^3 ứng với $9-2k=3\Leftrightarrow k=3\longrightarrow$ số hạng cần tìm $\frac{1}{8}C_9^3x^3$.

Câu 6: Tìm số hạng chứa x^{31} trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

A. $-C_{40}^{37}x^{31}$. **B.** $C_{40}^{37}x^{31}$. **C.** $C_{40}^{2}x^{31}$. **D.** $C_{40}^{4}x^{31}$.

Lời giải

Chọn B

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}=\sum_{k=0}^{40}C_{40}^{k}.x^{40-k}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{40}C_{40}^{k}.x^{40-3k}.$$

Hệ số của x^{31} ứng với $40-3k=31\Leftrightarrow k=3\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_{40}^{37}x^{31}$.

Câu 7: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$.

A. $2^4C_6^2$. **B.** $2^2C_6^2$. **C.** $-2^4C_6^4$. **D.** $-2^2C_6^4$.

Lời giải

Chọn A

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}C_6^k.\left(x^2\right)^{6-k}.\left(\frac{2}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{6}C_6^k.(2)^k.x^{12-3k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $12-3k=0\Leftrightarrow k=4$

$\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_6^4.2^4=2^4C_6^2$.

Câu 8: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(xy^2-\frac{1}{xy}\right)^8$.

A. $70y^4$. **B.** $60y^4$. **C.** $50y^4$. **D.** $40y^4$.

Lời giải

Chọn A

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(xy^2-\frac{1}{xy}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k.\left(xy^2\right)^{8-k}.\left(-\frac{1}{xy}\right)^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^k.(-1)^k.x^{8-2k}.y^{16-3k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $8-2k=0\Leftrightarrow k=4$

$\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_8^4y^4=70y^4$.

Câu 9: Tìm số hạng chứa x^3y trong khai triển $\left(xy+\frac{1}{y}\right)^5$.

A. $3x^3y$. **B.** $5x^3y$. **C.** $10x^3y$. **D.** $4x^3y$.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(xy+\frac{1}{y}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}C_5^k.(xy)^{5-k}.\left(\frac{1}{y}\right)^k=\sum_{k=0}^{5}C_5^k.x^{5-k}.y^{5-2k}.$$

Hệ số của x^3y ứng với $\begin{cases}5-k=3\\5-2k=1\end{cases}\Leftrightarrow k=2\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_5^2x^3y=10x^3y$.

Câu 10: Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^{3n+1}$ với $x\neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $3C_{n+1}^2+nP_2=4A_n^2$.

A. $210x^6$. **B.** $120x^6$. **C.** 120. **D.** 210.

Lời giải

Chọn D

Từ phương trình $3C_{n+1}^2+nP_2=4A_n^2\longrightarrow n=3$.

Với $n=3$, ta có $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^{3n+1}=\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k.\left(\frac{1}{x}\right)^{10-k}.\left(x^3\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^kx^{4k-10}$.

Hệ số của x^6 ứng với $4k-10=6\Leftrightarrow k=4\longrightarrow$ hệ số cần tìm $C_{10}^4=210$.

Câu 11: Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $\left(1-\sqrt{3}x\right)^{2n}$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $\frac{2}{C_n^2}+\frac{14}{3C_n^3}=\frac{1}{n}$.

A. $-C_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9$. **B.** $-C_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9x^9$. **C.** $C_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9x^9$. **D.** $C_{18}^9\left(\sqrt{3}\right)^9$.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình $\frac{2}{C_n^2}+\frac{14}{3C_n^3}=\frac{1}{n}\longrightarrow n=9.$

Với $n=9$, ta có $\left(1-\sqrt{3}x\right)^{2n}=\left(1-\sqrt{3}x\right)^{18}=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^{k}.(1)^{18-k}\left(-\sqrt{3}x\right)^{k}=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^{k}.\left(-\sqrt{3}\right)^{k}.x^{k}.=\sum_{k=0}^{18}C_{18}^{k}.(-1)^{k}\left(\sqrt{3}\right)^{k}.x^{k}$

Hệ số của x^9 ứng với $k=9\longrightarrow$ hệ số cần tìm $-C_{18}^{9}\left(\sqrt{3}\right)^{9}$.

Câu 12: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}$ với $x\neq 0$, biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^3+2n=A_{n+1}^2$.

A. $-C_{16}^{12}.2^4.3^{12}.$ **B.** $C_{16}^{0}.2^{16}.$ **C.** $C_{16}^{12}.2^4.3^{12}.$ **D.** $C_{16}^{16}.2^{0}.$

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình $C_n^3+2n=A_{n+1}^2\longrightarrow n=8.$

Với $n=8$, ta có

$$\left(2x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2n}=\left(2x-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}=\sum_{k=0}^{16}C_{16}^{k}.\left(2x\right)^{16-k}.\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{16}C_{16}^{k}.2^{16-k}.(-3)^{k}.x^{16-\frac{4k}{3}}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $16-\frac{4k}{3}=0\Leftrightarrow k=12$

$\longrightarrow$ số hạng cần tìm $C_{16}^{12}.2^4.3^{12}.$

Câu 13: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3x^2-\frac{2}{x}\right)^{n}$ với $x\neq 0$, biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển bằng 1080.

A. $1080.$ **B.** $-810.$ **C.** $810.$ **D.** $1080.$

Lời giải

Chọn B

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(3x^2-\frac{2}{x}\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_n^{k}.\left(3x^2\right)^{n-k}.\left(-\frac{2}{x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^{k}.3^{n-k}\left(-2\right)^{k}.x^{2n-3k}.$$

Số hạng thứ 3 ứng với $k=2$, kết hợp với giả thiết ta có

$$C_n^2.3^{n-2}.4=1080\Leftrightarrow n(n-1).3^n=4.5.3^5\Leftrightarrow n=5.$$

Hệ số của x^7 ứng với $2n-3k=7\Leftrightarrow 10-3k=7\Leftrightarrow k=1$

$\longrightarrow$ hệ số cần tìm $C_5^1 3^4(-2)=-810.$

Câu 14: Tìm số tự nhiên n, biết hệ số của số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x trong khai triển $\left(x-\frac{1}{3}\right)^n$ bằng 4.

A. 8. **B.** 17. **C.** 9. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}.\left(-\frac{1}{3}\right)^k=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}.\left(-\frac{1}{3}\right)^1+C_n^2x^{n-2}.\left(-\frac{1}{3}\right)^2+...+C_n^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$\longrightarrow$ số hạng thứ 3 theo số mũ giảm dần của x là $C_n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^2x^{n-2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow C_n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^2=4\Leftrightarrow\frac{n!}{2!(n-2)!}.\frac{1}{9}=4\longrightarrow n=9.$

Do $n\in\mathbb{N}$ nên ta chọn $n=9$ thỏa mãn.

Câu 15: Tìm số hạng đứng giữa trong khai triển $\left(x^3+xy\right)^{21}$.

A. $C_{21}^{10}x^{40}y^{10}$. **B.** $C_{21}^{10}x^{43}y^{10}$.

C. $C_{21}^{11}x^{41}y^{11}$. **D.** $C_{21}^{10}x^{43}y^{10}$; $C_{21}^{11}x^{41}y^{11}$.

Lời giải

Chọn D

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(x^3+xy\right)^{21}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k.\left(x^3\right)^{21-k}.(xy)^k=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k.x^{63-2k}.y^k.$$

Suy ra khai triển $\left(x^3+xy\right)^{21}$ có 22 số hạng nên có hai số hạng đứng giữa là số hạng thứ 11 (ứng với $k=10$) và số hạng thứ 12 (ứng với $k=11$).

Vậy hai số hạng đứng giữa cần tìm là $C_{21}^{10}x^{43}y^{10}$; $C_{21}^{11}x^{41}y^{11}$.

Câu 16: Tính tổng S tất cả các hệ số trong khai triển $(3x-4)^{17}$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=0$. **D.** $S=8192$.

Lời giải

Chọn B

Tính tổng các hệ số trong khai triển $\longrightarrow$ cho $x=1$.

Khi đó $S=(3.1-4)^{17}=-1$.

Câu 17: Khai triển đa thức $P(x)=(2x-1)^{1000}$ ta được $P(x)=a_{1000}x^{1000}+a_{999}x^{999}+...+a_1x+a_0$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a_{1000}+a_{999}+...+a_1=2^n$. **B.** $a_{1000}+a_{999}+...+a_1=2^n-1$.

C. $a_{1000}+a_{999}+...+a_1=1$. **D.** $a_{1000}+a_{999}+...+a_1=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P(x)=a_{1000}x^{1000}+a_{999}x^{999}+...+a_1x+a_0$.

Cho $x=1$ ta được $P(1)=a_{1000}+a_{999}+...+a_1+a_0$.

Mặt khác $P(x)=(2x-1)^{1000}\longrightarrow P(1)=(2.1-1)^{1000}=1$.

Từ đó suy ra $a_{1000}+a_{999}+...+a_1+a_0=1\longrightarrow a_{1000}+a_{999}+...+a_1=1-a_0$.

Mà là số hạng không chứa x trong khai triển $P(x)=(2x-1)^{1000}$ nên

$$a_0=C_{1000}^{1000}(2x)^0(-1)^{1000}=C_{1000}^{1000}=1.$$

Vậy $a_{1000}+a_{999}+...+a_1=0$.

Câu 18: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$.

A. 80. **B.** 3240. **C.** 3320. **D.** 259200.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$x(1-2x)^5=x.\sum_{k=0}^{5}C_5^k.(-2x)^{5-k}=\sum_{k=0}^{5}C_5^k.(-2)^{5-k}.x^{6-k}.$$

$\longrightarrow$ số hạng chứa x^5 tương ứng với $6-k=5\Leftrightarrow k=1$.

Tương tự, ta có $x^2(1+3x)^{10}=x^2.\sum_{l=0}^{10}C_{10}^l.(3x)^{10-l}=\sum_{l=0}^{10}C_{10}^l.3^{10-l}.x^{12-l}$.

$\longrightarrow$ số hạng chứa x^5 tương ứng với $12-l=5\Leftrightarrow l=7$.

Vậy hệ số của x^5 cần tìm $P(x)$ là $C_5^1.(2)^4+C_{10}^7.3^3=3320$.

Câu 19: Tìm hệ số chứa x^{10} trong khai triển $f(x)=\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)^2(x+2)^{3n}$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $A_n^3+C_n^{n-2}=14n$.

A. $2^5C_{19}^{10}$. **B.** $2^5C_{19}^{10}x^{10}$. **C.** $2^9C_{19}^{10}$. **D.** $2^9C_{19}^{10}x^{10}$.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình $A_n^3+C_n^{n-2}=14n\longrightarrow n=5$.

Với $n=5$, ta có $f(x)=\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)^2(x+2)^{3n}=\frac{1}{16}(x+2)^4(x+2)^{15}=\frac{1}{16}(x+2)^{19}$.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có $f(x)=\frac{1}{16}(x+2)^{19}=\frac{1}{16}\sum_{k=0}^{19}C_{19}^{k}.2^{k}.x^{19-k}$.

Số hạng chứa x^{10} trong khai triển tương ứng với $19-k=10\Leftrightarrow k=9$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển là $\frac{1}{16}C_{19}^{10}2^{9}=2^{5}C_{19}^{10}$.

Câu 20: Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $P(x)=\left(1-x-3x^3\right)^n$ với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $C_n^{n-2}+6n+5=A_{n+1}^2$.

A. 210. **B.** 840. **C.** 480. **D.** 270.

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình $C_n^{n-2}+6n+5=A_{n+1}^2\longrightarrow n=10.$

Với $n=10$, khi đó $P(x)=\left(1-x-3x^3\right)^n=\left(1-x-3x^3\right)^{10}$.

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$P(x)=\left(1-x-3x^3\right)^{10}=\left[1-\left(x+3x^3\right)\right]^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}(-1)^{k}\left(x+3x^3\right)^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}(-1)^{k}x^{k}\left(1+3x^2\right)^{k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\sum_{l=0}^{k}C_{k}^{l}(-1)^{k}3^{l}x^{k+2l}.$$

Số hạng chứa x^4 trong khai triển tương ứng với $\begin{cases}k+2l=4\\0\le k\le 10\end{cases}\Leftrightarrow(k;l)=\{(4;0),(2;1)\}$.
$0\le l\le k$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển là $C_{10}^{4}C_{4}^{0}+C_{10}^{2}C_{2}^{1}3=480$.

Câu 21: Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(1+x+x^2+x^3\right)^5$.

A. 5. **B.** 50. **C.** 101. **D.** 105.

Lời giải

Chọn C

Theo khai triển nhị thức Niu-tơn, ta có

$$\left(1+x+x^2+x^3\right)^5=(1+x)^5\left(1+x^2\right)^5=\sum_{k=0}^{5}C_5^{k}x^{k}.\sum_{l=0}^{5}C_5^{l}\left(x^2\right)^{l}=\sum_{k=0}^{5}C_5^{k}.\sum_{l=0}^{5}C_5^{l}.x^{k+2l}.$$

Số hạng chứa x^{10} trong khai triển tương ứng với $k+2l=10\Leftrightarrow k=10-2l$.

Kết hợp với điều kiện ta có hệ $\begin{cases}k+2l=10\\0\le k\le 5,\ 0\le l\le 5\\k,l\in\mathbb{N}\end{cases}\Leftrightarrow(k;l)=\{(0;5),(2;4),(4;3)\}$.

Vậy hệ số cần tìm là $C_5^{0}.C_5^{5}+C_5^{2}.C_5^{4}+C_5^{4}.C_5^{3}=101.$

Câu 22: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)=(1+x)+2(1+x)^2+...+8(1+x)^8$.

A. 630. **B.** 635. **C.** 636. **D.** 637.

Lời giải

Chọn C

Các biểu thức $(1+x),\ (1+x)^2,\cdots,(1+x)^4$ không chứa số hạng chứa x^5.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $5(1+x)^5$ là $5C_5^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $6(1+x)^6$ là $6C_6^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $7(1+x)^7$ là $7C_7^5$.

Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $8(1+x)^8$ là $8C_8^5$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)$ là $5C_5^5+6C_6^5+7C_7^5+8C_8^5=636$.

Câu 23: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $C_{2n}^0+C_{2n}^1+\ldots+C_{2n}^n=C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+\ldots+C_{2n}^{2n}$.

B. $C_{2n}^0+C_{2n}^1+\ldots+C_{2n}^{n-1}=C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+\ldots+C_{2n}^{2n}$.

C. $C_{2n}^0+C_{2n}^1+\ldots+C_{2n}^{n-2}=C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+\ldots+C_{2n}^{2n}$.

D. $C_{2n}^0+C_{2n}^1+\ldots+C_{2n}^{n+1}=C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+\ldots+C_{2n}^{2n}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $C_n^k=C_n^{n-k}$, ta có $\begin{cases}C_{2n}^0=C_{2n}^{2n}\\C_{2n}^1=C_{2n}^{2n-1}\\\cdots\\C_{2n}^{n-1}=C_{2n}^{n+1}\end{cases}$.

Cộng vế theo vế, ta được $C_{2n}^0+C_{2n}^1+\ldots+C_{2n}^{n-1}=C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+\ldots+C_{2n}^{2n}$.

Câu 24: Tính tổng $S=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n$.

A. $S=2^n-1$. **B.** $S=2^n$. **C.** $S=2^{n-1}$. **D.** $S=2^n+1$.

Lời giải

Chọn B

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^n$, ta có

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n.$$

Cho $x=1$, ta được $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

Câu 25: Tính tổng $S=C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+\ldots+C_{2n}^{2n}$.

A. $S=2^{2n}$. **B.** $S=2^{2n}-1$. **C.** $S=2^n$. **D.** $S=2^{2n}+1$.

Lời giải

Chọn A

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^{2n}$, ta có

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Cho $x=1$, ta được $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$.

Câu 26: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.

A. $n=8$. **B.** $n=9$. **C.** $n=10$. **D.** $n=11$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}$. (1)

Lại có $C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1}$; $C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}$; $C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}$; …; $C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^n = \dfrac{2^{2n+1}}{2}$

$\Leftrightarrow C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{2n} - 1 \Leftrightarrow 2^{20} - 1 = 2^{2n} - 1 \Leftrightarrow n = 10$.

Vậy $n=10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.

A. $n=5$. **B.** $n=9$. **C.** $n=10$. **D.** $n=4$.

Lời giải

Chọn A

Xét khai triển $(x+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 x^{2n+1} + C_{2n+1}^1 x^{2n} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}$.

Cho $x=1$, ta được $2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}$. (1)

Cho $x=-1$, ta được $0 = -C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 - \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}$. (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được

$2^{2n+1} = 2\left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}\right) \Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2.1024 \Leftrightarrow n = 5$.

Câu 28: Tính tổng $S = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^3 + \ldots + 3^n C_n^n$.

A. $S = 3^n$. **B.** $S = 2^n$. **C.** $S = 3.2^n$. **D.** $S = 4^n$.

Lời giải

Chọn D

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+x)^n$, ta có

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n.$$

Cho $x=3$, ta được $C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^3+...+3^nC_n^n=(1+3)^n=4^n.$

Câu 29: Khai triển đa thức $P(x)=(1+2x)^{12}=a_0+a_1x+...+a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_k $(0\le k\le 12)$ lớn nhất trong khai triển trên.

A. $C_{12}^8 2^8.$ **B.** $C_{12}^9 2^9.$ **C.** $C_{12}^{10} 2^{10}.$ **D.** $1+C_{12}^8 2^8.$

Lời giải

Chọn A

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $(1+2x)^{12}$, ta có

$$(1+2x)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k(2x)^k=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k 2^k x^k.$$

Suy ra $a_k=C_{12}^k 2^k$.

Hệ số a_k lớn nhất khi $\begin{cases}a_k\ge a_{k+1}\\ a_k\ge a_{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^kC_{12}^k\ge 2^{k+1}C_{12}^{k+1}\\ 2^kC_{12}^k\ge 2^{k-1}C_{12}^{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{12-k}\ge\dfrac{2}{k+1}\\ \dfrac{2}{k}\ge\dfrac{1}{12-k+1}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{23}{3}\le k\le\dfrac{26}{3}.$

$\xrightarrow[k\in\mathbb{N}]{0\le k\le 12}k=8$. Vậy hệ số lớn nhất là $a_8=C_{12}^8 2^8$.

Câu 30: Khai triển đa thức $P(x)=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{10}=a_0+a_1x+...+a_9x^9+a_{10}x^{10}$. Tìm hệ số a_k $(0\le k\le 10)$ lớn nhất trong khai triển trên.

A. $1+\dfrac{2^7}{3^{10}}C_{10}^7.$ **B.** $\dfrac{2^7}{3^{10}}C_{10}^7.$ **C.** $\dfrac{2^6}{3^{10}}C_{10}^6.$ **D.** $\dfrac{2^8}{3^{10}}C_{10}^8.$

Lời giải

Chọn B

Khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{10}$, ta có

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}x\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k.$$

Suy ra $a_k=C_{10}^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$.

Giả sử a_k là hệ số lớn nhất, khi đó $\begin{cases}a_k\ge a_{k+1}\\ a_k\ge a_{k-1}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}C_{10}^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\ge C_{10}^{k+1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-(k+1)}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1}\\ C_{10}^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\ge C_{10}^{k-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-(k-1)}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\ge\dfrac{19}{3}\\ k\le\dfrac{22}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{19}{3}\le k\le\frac{22}{3}\xrightarrow[k\in\mathbb{N}]{0\le k\le 10}k=7.$$

Vậy hệ số lớn nhất là $a_7=\dfrac{2^7}{3^{10}}C_{10}^7$.

BÀI 4&5. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A. KIẾN THỨC LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

I. PHÉP THỬ, KHÔNG GIAN MẪU

1. Phép thử

Gieo một đồng tiền kim loại (gọi tắt là đồng tiền), rút một quân bài từ cỗ bài tú lơ khơ (cỗ bài 52 lá) hay bắn một viên đạn vào bia,… là những ví dụ về phép thử.

Khi gieo một đồng tiền, ta không thể đoán trước được mặt ghi số (mặt ngửa, viết tắt là N) hay mặt kia (mặt sấp, viết tắt là S) sẽ xuất hiện). Đó là phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

Để đơn gian, từ nay phép thử ngẫu nhiên được gọi tắt là phép thử.

2. Không gian mẫu

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là Ω (đọc là ô-mê-ga)

II. BIẾN CỐ

- **Biến cố** là một tập con của không gian mẫu. Người ta thường kí hiệu các biến cố bằng các chữ in hoa A, B, C, …
- Tập $\varnothing$ được gọi là biến cố không thể (gọi tắt là **biến cố không**). Còn tập Ω được gọi là **biến cố chắc chắn**.
- Ta nói rằng biến cố A xảy ra trong một phép thử nào đó khi và chỉ khi kết quả của phép thử đó là một phần tử của A (hay thuận lợi cho A)

III. PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

Giả sử A là biến cố liên quan đến phép thử

- Biến cố đối của A kí hiệu là $\overline{A} = \Omega \setminus A$
- Hợp hai biến cố A và B kí hiệu là $A \cup B$
- Giao hai biến cố A và B kí hiệu là $A \cap B$ (hoặc A.B)
- $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B xung khắc.

IV. ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

1. Định nghĩa

Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử với không gian mẫu Ω chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xảy ra xuất hiện.

Ta gọi tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A, kí hiệu là $P(A)$.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Chú ý:

$n(A)$ là số phần tử của A hay cũng là số các kết quả thuận lợi cho biến cố A, còn $n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Bộ bài tú - lơ khơ có 52 quân bài. Rút ngẫu nhiên ra 4 quân bài. Tìm xác suất của các biến cố:

A: "Rút ra được tứ quý K ‘’

B: "4 quân bài rút ra có ít nhất một con Át"

C: "4 quân bài lấy ra có ít nhất hai quân bích’’

Giải

Ta có số cách chọn ngẫu nhiên 4 quân bài là: $C_{52}^4=270725$

Suy ra $n(\Omega)=270725$

Vì bộ bài chỉ có 1 tứ quý K nên ta có $n(A)=1$

Vậy $P(A)=\frac{1}{270725}$

Vì có C_{48}^4 cách rút 4 quân bài mà không có con Át nào,

suy ra $N(B)=C_{52}^4-C_{48}^4\Rightarrow P(B)=\frac{15229}{54145}$

Vì trong bộ bài có 13 quân bích, số cách rút ra bốn quân bài mà trong đó số quân bích không ít hơn 2 là: $C_{13}^2.C_{39}^2+C_{13}^3C_{39}^1+C_{13}^4.C_{39}^0=69667$

Suy ra $n(C)=69667\Rightarrow P(C)=\frac{5359}{20825}.$

Ví dụ 2. Trong một chiếc hộp có 20 viên bi, trong đó có 8 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên bi. Tìm xác suất để:

1. 3 viên bi lấy ra đều màu đỏ **2.** 3 viên bi lấy ra có không quá hai màu.

Giải

Gọi biến cố A :" 3 viên bi lấy ra đều màu đỏ"

B : "3 viên bi lấy ra có không quá hai màu"

Số các lấy 3 viên bi từ 20 viên bi là: C_{20}^3 nên ta có: $|\Omega|=C_{20}^3=1140$

1. Số cách lấy 3 viên bi màu đỏ là: $C_8^3=56$ nên $|\Omega_A|=56$

Do đó: $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{56}{1140}=\frac{14}{285}$.

2. Ta có:

- Số cách lấy 3 viên bi chỉ có một màu: $C_8^3+C_7^3+C_5^3=101$
- Số các lấy 3 viên bi có đúng hai màu

  Đỏ và xanh: $C_{15}^3-\left(C_8^3+C_7^3\right)$

  Đỏ và vàng: $C_{13}^3-\left(C_8^3+C_5^3\right)$

  Vàng và xanh: $C_{12}^3-\left(C_5^3+C_7^3\right)$

Nên số cách lấy 3 viên bi có đúng hai màu:

$$C_{15}^3+C_{13}^3+C_{12}^3-2\left(C_8^3+C_7^3+C_5^3\right)=759$$

Do đó: $|\Omega_B|=860$. Vậy $P(B)=\frac{|\Omega_B|}{|\Omega|}=\frac{43}{57}$.

V. TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

1. Định lí

Định lí

a) $P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1.$

b) $0\le P(A)\le 1,$ với mọi biến cố A.

c) Nếu A và B xung khắc thì

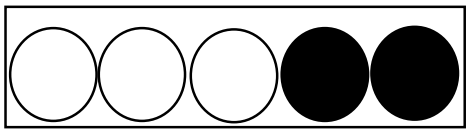
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Hệ quả: Với mọi biến cố A, ta có $P(\overline{A})=1-P(A).$

2. Ví dụ

Ví dụ 3: Cho hộp chứ ba quả cầu trắng và hai quả cầu đen như hình, lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả. Hãy tính xác suất sao cho hai quả đó:

a) khác màu; b) Cùng màu.



Giải

Mỗi lần lấy đồng thời hai quả cầu cho ta một tổ hợp chập hai của năm phần tử. Do đó, không gian mẫu gồm các tổ hợp chập hai của năm phần tử và $n(\Omega)=C_5^2=10.$

Vì việc lấy quả cầu là ngẫu nhiên nên các kết quả đó là đồng khả năng. Ký hiệu A : "Hai quả cầu khác màu", B : "Hai quả cầu cùng màu".

Vì chỉ có hai màu đen hoặc trắng nên ta thấy $B = \overline{A}$.

a) theo quy tắc nhân, $n(A) = 2.3 = 6$.

Do đó: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

b) Vì $B = \overline{A}$ nên theo hệ quả ta có: $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$.

Ví dụ 4: Một hộp chứa 20 quả cầu đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên một quả. Tính xác suất các biến cố sau:

a) A : "Nhận được quả cầu ghi số chẵn";

b) B : "Nhận được quả cầu ghi số chia hết cho 3"

c) $A \cap B$;

d) C : "Nhận được quả cầu ghi số không chia hết cho 6"

Giải

Không gian mẫu được mô tả là $\Omega = \{1,2,...,20\}$ gồm 20 kết quả đồng khả năng, $n(\Omega) = 20$.

a) $A = \{2,4,6,8,10,12,14,`6,18,20\}, n(A) = 10$ nên

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$.

b) $B = \{3,6,9,15,18\}, n(B) = 6$. Từ đó:

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$.

c) $A \cap B = \{6,12,18\}, n(A \cap B) = 3$ nên

$P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{20}$.

d) Vì $A \cap B = \{6,12,18\}$, nên $A \cap B$ là biến cố "Nhận được quả cầu ghi số chia hết cho 6". Do đó, C là biến cố đối của biến cố $A \cap B$, ta có $C = \overline{A \cap B}$ và

$P(C) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \dfrac{3}{20} = \dfrac{17}{20}$.

VI. CÁC BIẾN CỐ ĐỘC LẬP, CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

Ví dụ 5: Bạn thứ nhất có một đồng tiền, bạn thứ hai có con súc sắc (cân đối, đồng chất). Xét phép thử "Bạn thứ nhất gieo đồng tiền, sau đó bạn thứ hai gieo con súc sắc" (hình.a).

a) Mô tả không gian mẫu của phép thử này.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Đồng tiền xuất hiện mặt sấp";

B: "Con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm";

C: "Con súc sắc xuất hiện mặt lẻ".

c) Chứng tỏ: $P(A.B) = P(A).P(B); P(A.C) = P(A).P(C)$.

Giải

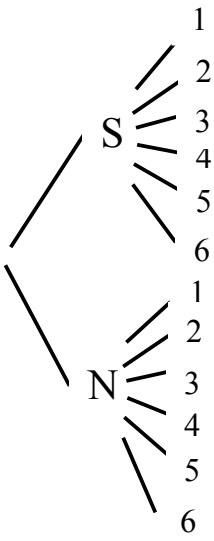
a) Không gian mẫu của phép thử có dạng

$\Omega = \{S1, S2, S3, S4, S5, S6, N1, N2, N3, N4, N5, N6\}$.

Theo giả thiết, Ω gồm 12 kết quả đồng khả năng xuất hiện.(hình.b)



Hình a



Hình b

b) Ta thấy $A = \{S1, S2, S3, S4, S5, S6\}, n(A) = 6;$

$B = \{S6, N6\}, n(B) = 2;$

$C = \{N1, N3, N5, S1, S3, S5\}, n(C) = 6.$

Từ đó $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2};$

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6};$

$P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}.$

c) Rõ ràng $A.B=\{S6\}$ và $P(A.B)=\dfrac{n(A.B)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{12}$.

Ta có

$$P(A.B)=\frac{1}{12}=\frac{1}{2}.\frac{1}{6}=P(A)P(B).$$

Tương tự $A.C=\{S1,S3,S5\}$;

$$P(A.C)=\frac{n(A.C)}{n(\Omega)}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=P(A)P(C).$$

Trong ví dụ trên, xác suất xuất hiện mỗi mặt của con súc sắc là $\dfrac{1}{6}$, không phụ thuộc vào đồng tiền xuất hiện mặt "sấp" hoặc "ngữa".

Nếu sự xảy ra của một biến cố không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của một biến cố khác thì ta nói hai biến cố đó độc lập. Như vậy trong ví dụ trên biến cố A và B độc lập và cũng vậy, A và C độc lập.

Tổng quát, đối với hai biến cố bất kỳ thì ta có mối liên hệ sau:

A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi

$$P(A.B)=P(A).P(B).$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính xác suất dựa vào định nghĩa cổ điển

1. Phương pháp

- Tính xác suất theo thống kê ta sử dụng công thức:

$$P(A)=\frac{\text{Số lần xuất hiện của biến cố A}}{N}.$$

- Tính xác suất của biến cố theo định nghĩa cổ điển ta sử dụng công thức :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một tổ có 8 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người từ tổ đó. Xác suất để chọn được cả 2 nam bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Tổng số học sinh trong tổ là $8+4=12$ học sinh.

Số cách chọn 2 trong 12 học sinh trong tổ là $C_{12}^{2}=66$ (cách).

Suy ra $n(\Omega)=66$.

Gọi A là biến cố: "Chọn được 2 nam"

Suy ra $n(A)=C_8^2=28.$

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{28}{66}=\dfrac{14}{33}.$

Ví dụ 2: Một hộp đựng 4 viên bi đỏ và 5 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp đó. Xác suất để chọn được đúng một viên bi đỏ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Tổng số viên bi trong hộp là $4+5=9$ (viên bi).

Số cách chọn 3 trong 9 viên bi là: $C_9^3=84$ (cách).

Suy ra: $n(\Omega)=84.$

Gọi A là biến cố: "Chọn 3 viên bi và được đúng 1 viên bi đỏ".

Số cách chọn 1 trong 4 viên bi đỏ là 4 (cách).

Số cách chọn 2 trong 5 viên bi trắng là $C_5^2=10$ (cách)

Suy ra $n(A)=4\times 10=40.$

Vậy $P(A)=\dfrac{40}{84}=\dfrac{10}{21}.$

Ví dụ 3: Trong một hộp đựng 10 cây viết trong đó có 4 cây viết hư. Lấy ngẫu nhiên 3 cây viết. Xác suất để chọn được cả 3 cây đều tốt là bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{2}.$ **B.** $\dfrac{1}{4}.$ **C.** $\dfrac{1}{6}.$ **D.** $\dfrac{1}{8}.$

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 10 cây viết là $C_{10}^3=120$ (cách).

Suy ra $n(\Omega)=120.$

Gọi A là biến cố: "Chọn được cả 3 cây đều tốt".

Số cây viết còn tốt là $10-4=6$ (cây viết).

Số cách chọn 3 trong 6 cây viết còn tốt là $C_6^3=20$ (cách).

Suy ra $n(A)=20.$

Vậy $P(A)=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}.$

Ví dụ 4: Gieo 2 con súc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc giống nhau là bao nhiêu?

A. $\dfrac{1}{2}.$ **B.** $\dfrac{1}{4}.$ **C.** $\dfrac{1}{6}.$ **D.** $\dfrac{1}{8}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega)=6^2=36.$

Gọi A là biến cố: "Số hiệu xuất hiện trên 2 con súc sắc giống nhau".

Suy ra $A=\{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(5;5),(6;6)\}\Rightarrow n(A)=6.$

Vậy $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$

Ví dụ 5: Gieo một đồng tiền 5 lần. Xác suất để cả 5 lần đều xuất hiện mặt ngửa là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega)=2^5=32.$

Gọi A là biến cố: "Cả 5 lần xuất hiện mặt ngửa".

Suy ra $A=\{(N\ N\ N\ N\ N)\}\Rightarrow n(A)=1.$

Vậy $P(A)=\frac{1}{32}.$

Ví dụ 6: Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con rút ngẫu nhiên 4 con. Xác suất để được 1 con át và 3 con K là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega)=C_{52}^4=270725.$

Gọi A là biến cố: "Rút được 1 con át và 3 con K".

Số cách rút được 1 trong 4 con át là 4 cách.

Số cách rút được 3 trong 4 con K là $C_4^3=4$ (cách).

Suy ra $n(A)=4\times 4=16.$

Vậy $P(A)=\frac{16}{270725}.$

Ví dụ 7: Có 6 quả cầu được đánh số từ 1 đến 6 và đựng trong một hộp. Lấy ngẫu nhiên 4 quả và xếp chúng theo thứ tự thành hàng ngang từ trái sáng phải. Xác suất để được tổng các chữ số bằng 10 là bao nhiêu?

A. $\frac{4}{15}.$ **B.** $\frac{3}{15}.$ **C.** $\frac{2}{15}.$ **D.** $\frac{1}{15}.$

Hướng dẫn giải

Lấy 4 quả cầu từ 6 quả cầu và xếp chúng có thứ tự là số chỉnh hợp chập 4 của 6 (cách xếp).

Suy ra $n(\Omega)=A_6^4=360.$

Gọi A là biến cố: "Tổng 4 chữ số trên 4 quả cầu bằng 10".

Các chữ số trên 4 quả cầu chỉ có thể là 1, 2, 3, 4.

Vậy mỗi phần tử của A là một hoán vị của 4 chữ số 1, 2, 3, 4.

Suy ra $P(A)=\frac{24}{360}=\frac{1}{15}$.

Ví dụ 8: Trong 100 vé số có 1 vé trúng 10.000 đồng, 5 vé trúng 5.000 đồng và 10 vé trúng 1.000 đồng. Một người mua ngẫu nhiên 3 vé. Xác suất để người đó trúng thưởng đúng 3.000 đồng là bao nhiêu?

A. $\frac{4}{2695}$. **B.** $\frac{3}{2695}$. **C.** $\frac{2}{2695}$. **D.** $\frac{1}{2695}$.

Hướng dẫn giải

Số cách mua 3 trong 100 vé số là $C_{100}^3=161700$ (cách)

Suy ra $n(\Omega)=161700$.

Gọi A là biến cố: "Mua 3 vé và trúng đúng 3000 đồng".

Như vậy phải mua đúng 3 vé số loại trúng 1000 đồng.

Suy ra $n(A)=C_{10}^3=120$.

Suy ra $P(A)=\frac{120}{161700}=\frac{2}{2695}$.

Ví dụ 9: Một hộp đựng 100 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên từ hộp một thẻ. Xác suất để số ghi trên thẻ lấy ra đó chia hết cho 2 hoặc 5 là bao nhiêu?

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{7}{10}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{9}{10}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega)=100$.

Gọi A là biến cố: "Số ghi trên thẻ chia hết cho 2 hoặc cho 5".

Nhận xét: Một số vừa chia hết cho 2 và vừa chia hết cho 5 thì số đó có chữ số tận cùng là chữ số 0. Do đó cách đếm số phần tử của A như sau:

- Các số chẵn từ 2 đến 100 có 50 số.
- Các số chia hết cho 5 và có chữ số tận cùng khác chữ số 0 từ 5 đến 95 có 10 số.

Suy ra $n(A)=50+10=60$.

Suy ra $P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$.

Ví dụ 10: Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là 1kg, 2kg, 3kg, 4kg, 5kg, 6kg, 7kg, 8kg. Chọn ngẫu nhiên ba quả cân trong số đó. Xác suất để tổng trọng lượng 3 quả cân được chọn không vượt quá 9kg là bao nhiêu?

A. $\frac{1}{14}$. **B.** $\frac{5}{56}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{3}{28}$.

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 8 quả cân là $C_8^3 = 56$ (cách).

Suy ra $n(\Omega) = 56$.

Gọi A là biến cố: "Tổng trọng lượng 3 quả cân không vượt quá 9kg".

Suy ra 3 quả cân được chọn chỉ có thể là:

1kg	1kg	1kg	1kg	1kg	1kg	2kg
2kg	2kg	2kg	2kg	3kg	3kg	3kg
3kg	4kg	5kg	6kg	4kg	5kg	4kg

Suy ra $n(A) = 7$.

Suy ra $P(A) = \frac{7}{56} = \frac{1}{8}$.

Ví dụ 11: Một hộp chứa 10 viên bi gồm 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Xác suất để lấy được 2 viên bi màu trắng và 2 viên bi màu đỏ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 4 trong 10 viên bi là $C_{10}^4 = 210$ (cách).

Suy ra $n(\Omega) = 210$.

Gọi A là biến cố: "Lấy được 2 viên bi trắng và 2 viên bi đỏ".

Số cách chọn 2 trong 6 viên bi trắng là $C_6^2 = 15$ (cách).

Số cách chọn 2 trong 4 viên bi đỏ là $C_4^2 = 6$ (cách).

Suy ra $n(A) = 15 \times 6 = 90$.

Suy ra $P(A) = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$.

Ví dụ 12. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu xanh và 6 quả cầu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu từ 11 quả cầu là $C_{11}^2 = 55$.

Số các chọn hai quả cầu cùng màu là $C_5^2 + C_6^2 = 25$.

Xác suất để chọn ra hai quả cầu cùng màu là $\frac{25}{55}=\frac{5}{11}$.

Ví dụ 13. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hang ngang. Tính xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau.

A. $\frac{11}{630}$. **B.** $\frac{1}{126}$. **C.** $\frac{1}{105}$. **D.** $\frac{1}{42}$.

Hướng dẫn giải

Số cách xếp 10 học sinh vào 10 vị trí: $n(\Omega)=10!$ cách.

Gọi A là biến cố : "10 học sinh trên không có hai học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau".

Xếp 5 học sinh lớp 12C vào 5 vị trí có $5!$ cách.

Ứng mỗi cách xếp 5 học sinh lớp 12C sẽ có 6 khoảng trống gồm 4 vị trí ở giữa và 2 vị trí ở đầu để xếp các học sinh còn lại.

	C_1		C_2		C_3		C_4		C_5	

TH1: Xếp 3 học sinh lớp 12B vào 4 vị trí ở giữa (không xếp vào hai đầu), có A_4^3 cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó, chọn lấy 1 học sinh lớp 12A xếp vào vị trí thứ 4 (để hai học sinh lớp 12C không được ngồi cạnh nhau), có 2 cách.

Học sinh lớp 12A còn lại có 8 vị trí để xếp, có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5!.A_4^3.2.8$ cách.

TH2: Xếp hai học sinh trong 3 học sinh lớp 12B vào 4 vị trí ở giữa và học sinh còn lại xếp ở vị trí đầu có $C_3^1.2.A_4^2$ cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó còn hai vị trí trống ở giữa, xếp 2 học sinh lớp 12A vào hai vị trí đó. Có 2 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5!.C_3^1.2.A_4^2.2$ cách.

Do đó số cách xếp không có học sinh cùng lớp ngồi cạnh nhau là:

$n(\text{A})=5!.A_4^3.2.8+5!.C_3^1.2.A_4^2.2=63360$ cách.

Vậy $P(\text{A})=\frac{n(\text{A})}{n(\Omega)}=\frac{63360}{10!}=\frac{11}{630}$.

Dạng 2: Quy tắc tính xác suất

1. Phương pháp

1. Quy tắc cộng xác suất

Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì $\text{P}(\text{A}\cup\text{B})=\text{P}(\text{A})+\text{P}(\text{B})$.

- Mở rộng quy tắc cộng xác suất

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đôi một xung khắc. Khi đó:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k).$$

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$

- Giải sử A và B là hai biến cố tùy ý cùng liên quan đến một phép thử. Lúc đó:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

2. Quy tắc nhân xác suất

- Ta nói hai biến cố A và B độc lập nếu sự xảy ra (hay không xảy ra) của A không làm ảnh hưởng đến xác suất của B.

- Hai biến cố A và B độc lập khi và chỉ khi $P(AB) = P(A).P(B).$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một hộp đựng 20 viên bi gồm 12 viên bi màu đỏ và 8 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp đó. Xác suất để có ít nhất một viên bi màu đỏ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số cách chọn 3 trong 20 viên bi là $C_{20}^3 = 1140$ (cách).

Suy ra $n(\Omega) = 1140.$

Gọi A là biến cố: "Có ít nhất một viên màu đỏ".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Cả 3 viên bi đều màu xanh".

Suy ra $n(\overline{A}) = C_8^3 - 56.$ Suy ra $P(\overline{A}) = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285}.$

Ta có: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{14}{285} = \frac{271}{285}.$

Ví dụ 2: Gieo liên tiếp 4 lần một đồng tiền cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố A: "Có ít nhất một lần mặt ngửa xuất" là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Ta có: $n(\Omega) = 2^4 = 16.$

Biến cố $\overline{A}$ là: "Không có mặt ngửa xuất hiện". Nghĩa là cả 4 lần đều xuất hiện mặt sấp.

Suy ra $n(\overline{A}) = 1.$ Suy ra $P(\overline{A}) = \frac{1}{16}.$

Ta có: $P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$

Ví dụ 3: Một tổ có 10 nam và 5 nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 người. Xác suất để có ít nhất một nữ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Số người trong tổ là $10+5=15$ (người).

Số cách chọn 4 trong 15 người là $C_{15}^4=1365$ (cách).

Suy ra $n(\Omega)=1365.$

Gọi A là biến cố: "Có ít nhất một nữ".

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố: "Không có nữ". Nghĩa là có 4 nam.

Suy ra $n(\overline{A})=C_{10}^4=210.$ Suy ra $P(\overline{A})=\frac{210}{1365}=\frac{2}{13}.$

Ta có: $P(A)=1-\frac{2}{13}=\frac{11}{13}.$

Ví dụ 4: Có hai bình, mỗi bình chứa 6 viên bi. Bình thứ nhất có 3 bi xanh, 2 bi vàng và 1 bi đỏ. Bình thứ hai có 2 bi xanh, 1 bi vàng và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi bình 1 viên bi. Xác suất để được 2 bi xanh là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Mỗi bình có 6 viên bi và lấy mỗi bình 1 viên nên $n(\Omega)=6.$

Gọi A là biến cố: "Lấy được một viên bi xanh ở bình thứ nhất".

Suy ra $n(A)=3.$ Suy ra $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$

Gọi B là biến cố: "Lấy được một viên bi xanh ở bình thứ hai".

Suy ra $n(B)=2.$ Suy ra $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$

Ta có: $A.B$ là biến cố: "Lấy được 1 viên bi xanh ở bình thứ nhất và 1 viên bi xanh ở bình thứ 2".

Vì A và B là hai biến cố độc lập nên $P(A.B)=P(A).P(B)=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$

Ví dụ 5: Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một phát vào bia. Xác suất trúng đích của người thứ nhất là 0,9; người thứ hai và 0,7. Xác suất cả 2 người đều trúng là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Gọi A là biến cố: "Người thứ nhất bắn trúng".

Gọi B là biến cố: "Người thứ hai bắn trúng".

Như vậy $A.B$ là biến cố "Hai người đều bắn trúng".

Vì A và B là hai biến cố độc lập nên $P(A.B)=P(A).P(B)=0,9.0,7=0,63.$

Ví dụ 6: Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích của các xạ thủ theo thứ tự là 0,9 và 0,8. Lấy ngẫu nhiên ra một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Xác suất để viên đạn đó trúng đích là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Gọi A là biến cố: "Lấy 1 xạ thủ loại I bắn trúng đích".

Có 2 xạ thủ loại I nên $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{0,9}{2}=0,45.$

Gọi B là biến cố: "Lấy 1 xạ thủ loại II bắn trúng đích".

Có 8 xạ thủ loại II nên $\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{0,8}{8}=0,1.$

Ta có: $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ là biến cố: "Lấy ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ này bắn trúng".

Vì A và B là biến cố xung khắc nên: $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})=0,45+0,1=0,55.$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là?

A. $\frac{4}{16}.$ **B.** $\frac{2}{16}.$ **C.** $\frac{1}{16}.$ **D.** $\frac{6}{16}.$

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=2.2.2.2=16.$

Gọi A là biến cố "Cả bốn lần gieo xuất hiện mặt sấp" $\longrightarrow|\Omega_A|=1.$

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{1}{16}.$

Câu 2: Gieo một con súc sắc hai lần. Xác suất để ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm là?

A. $\frac{12}{36}.$ **B.** $\frac{11}{36}.$ **C.** $\frac{6}{36}.$ **D.** $\frac{8}{36}.$

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=6.6=36.$

Gọi A là biến cố "Ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm". Để tìm số phần tử của biến cố A, ta đi tìm số phần tử của biến cố đối $\overline{A}$ là "Không xuất hiện mặt sáu chấm" $\longrightarrow|\Omega_{\overline{A}}|=5.5=25\longrightarrow|\Omega_A|=36-25=11.$

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{11}{36}.$

Câu 3: Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất 2 lần. Tính xác suất để biến cố có tổng hai mặt bằng $8.$

A. $\frac{1}{6}.$ **B.** $\frac{5}{36}.$ **C.** $\frac{1}{9}.$ **D.** $\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6 = 36.$

Gọi A là biến cố "Số chấm trên mặt hai lần gieo có tổng bằng 8".

Gọi số chấm trên mặt khi gieo lần một là $x,$ số chấm trên mặt khi gieo lần hai là $y.$

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} 1 \le x \le 6 \\ 1 \le y \le 6 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow (x;y) = \{(2;6), (3;5), (4;4), (6;2), (5;3), (4;4)\}.$

Khi đó số kết quả thuận lợi của biến cố là $|\Omega_A| = 6.$

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

Câu 4: Gieo một con xúc xắc cân đối đồng chất 2 lần, tính xác suất để biến cố có tích 2 lần số chấm khi gieo xúc xắc là một số chẵn.

A. $0,25.$ **B.** $0,5.$ **C.** $0,75.$ **D.** $0,85.$

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6 = 36.$

Gọi A là biến cố "Tích hai lần số chấm khi gieo xúc xắc là một số chẵn".

Ta xét các trường hợp:

TH1. Gieo lần một, số chấm xuất hiện trên mặt là **số lẻ** thì khi gieo lần hai, số chấm xuất hiện phải là số **chẵn**. Khi đó có $3.3 = 9$ cách gieo.

TH2. Gieo lần một, số chấm xuất hiện trên mặt là số chẵn thì có hai trường hợp xảy ra là số chấm xuất hiện trên mặt khi gieo lần hai là số lẻ hoặc số chẵn. Khi đó có $3.3 + 3.3 = 18$ cách gieo.

Suy ra số kết quả thuận lợi cho biến cố là $|\Omega_A| = 9 + 18 = 27.$

Vậy xác suất cần tìm tính $P(A) = \frac{27}{36} = 0,75.$

Câu 5: Gieo ba con súc sắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên ba con súc sắc như nhau là?

A. $\frac{12}{216}.$ **B.** $\frac{1}{216}.$ **C.** $\frac{6}{216}.$ **D.** $\frac{3}{216}.$

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6.6 = 36.$

Gọi A là biến cố "Số chấm xuất hiện trên ba con súc sắc như nhau". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $(1;1;1),\ (2;2;2),\ (3;3;3),\ \cdots,(6;6;6)$.

Suy ra $|\Omega_A| = 6.$

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{6}{216}$.

Câu 6: Một đội gồm 5 nam và 8 nữ. Lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca, tính xác suất để trong 4 người được chọn có ít nhất 3 nữ.

A. $\frac{70}{143}$. **B.** $\frac{73}{143}$. **C.** $\frac{56}{143}$. **D.** $\frac{87}{143}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là chọn tùy ý 4 người từ 13 người.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{13}^4 = 715$.

Gọi A là biến cố "4 người được chọn có ít nhất 3 nữ". Ta có hai trường hợp thuận lợi cho biến cố A như sau:

● **TH1:** Chọn 3 nữ và 1 nam, có $C_8^3 C_5^1$ cách.

● **TH2:** Chọn cả 4 nữ, có C_8^4 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_8^3 C_5^1 + C_8^4 = 350$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{350}{715} = \frac{70}{143}$.

Câu 7: Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp, tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng.

A. $\frac{313}{408}$. **B.** $\frac{95}{408}$. **C.** $\frac{5}{102}$. **D.** $\frac{25}{136}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp chứa 18 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{18}^5 = 8568$.

Gọi A là biến cố "5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

● **TH1:** Chọn 1 bi đỏ, 1 bi vàng và 3 bi xanh nên có $C_6^1.C_7^1.C_5^3$ cách.

● **TH2:** Chọn 2 bi đỏ, 2 bi vàng và 1 bi xanh nên có $C_6^2.C_7^2.C_5^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_6^1.C_7^1.C_5^3 + C_6^2.C_7^2.C_5^1 = 1995$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{1995}{8568}=\frac{95}{408}$.

Câu 8: Một hộp có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên từ hộp 4 viên bị, tính xác suất để 4 viên bi được chọn có số bi đỏ lớn hơn số bi vàng và nhất thiết phải có mặt bi xanh.

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{16}{33}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp chứa 12 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{12}^4=495$.

Gọi A là biến cố "4 viên bi được chọn có số bi đỏ lớn hơn số bi vàng và nhất thiết phải có mặt bi xanh". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

● **TH1:** Chọn 1 bi đỏ và 3 bi xanh nên có $C_5^1.C_4^3$ cách.

● **TH2:** Chọn 2 bi đỏ và 2 bi xanh nên có $C_5^2C_4^2$ cách.

● **TH3:** Chọn 3 bi đỏ và 1 bi xanh nên có $C_5^3.C_4^1$ cách.

● **TH4:** Chọn 2 bi đỏ, 1 bi vàng và 1 bi xanh nên có $C_5^2C_3^1C_4^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=C_5^1.C_4^3+C_5^2C_4^2+C_5^3.C_4^1+C_5^2C_3^1C_4^1=240$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{240}{495}=\frac{16}{33}$.

Câu 9: Có 3 bó hoa. Bó thứ nhất có 8 hoa hồng, bó thứ hai có 7 bông hoa ly, bó thứ ba có 6 bông hoa huệ. Chọn ngẫu nhiên 7 hoa từ ba bó hoa trên để cắm vào lọ hoa, tính xác suất để trong 7 hoa được chọn có số hoa hồng bằng số hoa ly.

A. $\frac{3851}{4845}$. **B.** $\frac{1}{71}$. **C.** $\frac{36}{71}$. **D.** $\frac{994}{4845}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 7 hoa từ ba bó hoa gồm 21 hoa.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{21}^7=116280$.

Gọi A là biến cố "7 hoa được chọn có số hoa hồng bằng số hoa ly". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

● **TH1:** Chọn 1 hoa hồng, 1 hoa ly và 5 hoa huệ nên có $C_8^1.C_7^1.C_6^5$ cách.

● **TH2:** Chọn 2 hoa hồng, 2 hoa ly và 3 hoa huệ nên có $C_8^2.C_7^2.C_6^3$ cách.

● **TH3:** Chọn 3 hoa hồng, 3 hoa ly và 1 hoa huệ nên có $C_8^3.C_7^3.C_6^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_8^1.C_7^1.C_6^5 + C_8^2.C_7^2.C_6^3 + C_8^3.C_7^3.C_6^1 = 23856$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{23856}{116280} = \dfrac{994}{4845}$.

Câu 10: Có 13 học sinh của một trường THPT đạt danh hiệu học sinh xuất sắc trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và khối 12.

A. $\dfrac{57}{286}$. **B.** $\dfrac{24}{143}$. **C.** $\dfrac{27}{143}$. **D.** $\dfrac{229}{286}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh từ 13 học sinh.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{13}^3 = 286$.

Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và khối 12". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

● **TH1:** Chọn 1 học sinh khối 11; 1 học sinh nam khối 12 và 1 học sinh nữ khối 12 nên có $C_2^1C_8^1C_3^1 = 48$ cách.

● **TH2:** Chọn 1 học sinh khối 11; 2 học sinh nữ khối 12 có $C_2^1C_3^2 = 6$ cách.

● **TH3:** Chọn 2 học sinh khối 11; 1 học sinh nữ khối 12 có $C_2^2C_3^1 = 3$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 48 + 6 + 3 = 57$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{57}{286}$.

Câu 11: Một chiếc hộp đựng 7 viên bi màu xanh, 6 viên bi màu đen, 5 viên bi màu đỏ, 4 viên bi màu trắng. Chọn ngẫu nhiên ra 4 viên bi, tính xác suất để lấy được ít nhất 2 viên bi cùng màu.

A. $\dfrac{2808}{7315}$. **B.** $\dfrac{185}{209}$. **C.** $\dfrac{24}{209}$. **D.** $\dfrac{4507}{7315}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ 22 viên bi đã cho.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{22}^4 = 7315$.

Gọi A là biến cố "Lấy được 4 viên bi trong đó có ít nhất hai viên bi cùng màu". Để tìm số phần tử của A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là lấy được 4 viên bi trong đó không có hai viên bi nào cùng màu.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $|\Omega_{\overline{A}}| = C_7^1C_6^1C_5^1C_4^1 = 840$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = |\Omega| - |\Omega_{\overline{A}}| = 6475$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{6475}{7315} = \dfrac{185}{209}$.

Câu 12: Một hộp đựng 8 quả cầu trắng, 12 quả cầu đen. Lần thứ nhất lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu trong hộp, lần thứ hai lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu trong các quả cầu còn lại. Tính xác suất để kết quả của hai lần lấy được 2 quả cầu cùng màu.

A. $\dfrac{14}{95}$. **B.** $\dfrac{48}{95}$. **C.** $\dfrac{47}{95}$. **D.** $\dfrac{81}{95}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là lấy 2 quả cầu trong hộp một cách lần lượt ngẫu nhiên.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{20}^1.C_{19}^1 = 380$.

Gọi A biến cố "2 quả cầu được lấy cùng màu". Ta có các trường hợp thuận lợi cho biến cố A như sau:

● **TH1:** Lần thứ nhất lấy quả màu trắng và lần thứ hai cũng màu trắng.

Do đó trường hợp này có $C_8^1.C_7^1$ cách.

● **TH2:** Lần thứ nhất lấy quả màu đen và lần thứ hai cũng màu đen.

Do đó trường hợp này có $C_{12}^1.C_{11}^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_8^1.C_7^1 + C_{12}^1.C_{11}^1$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_8^1.C_7^1 + C_{12}^1.C_{11}^1}{C_{20}^1.C_{19}^1} = \dfrac{47}{95}$.

Câu 13: Một hộp chứa 12 viên bi kích thước như nhau, trong đó có 5 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 5; có 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp, tính xác suất để 2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số.

A. $\dfrac{8}{33}$. **B.** $\dfrac{14}{33}$. **C.** $\dfrac{29}{66}$. **D.** $\dfrac{37}{66}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số sách lấy tùy ý 2 viên từ hộp chứa 12 viên bi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{12}^2 = 66$.

Gọi A là biến cố "2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số".

● Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi đỏ là $4.4 = 16$ cách (do số bi đỏ ít hơn nên ta lấy trước, có 4 cách lấy bi đỏ. Tiếp tục lấy bi xanh nhưng không lấy viên trùng với số của bi đỏ nên có 4 cách lấy bi xanh).

● Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi xanh và 1 bi vàng là $3.4=12$ cách.

● Số cách lấy 2 viên bi gồm: 1 bi đỏ và 1 bi vàng là $3.3=9$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=16+12+9=37$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{37}{66}$.

Câu 14: Một hộp chứa 3 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp, tính xác suất để 6 viên bi được lấy ra có đủ cả ba màu.

A. $\dfrac{810}{1001}$. **B.** $\dfrac{191}{1001}$. **C.** $\dfrac{4}{21}$. **D.** $\dfrac{17}{21}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp chứa 14 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{14}^6=3003$.

Gọi A là biến cố "6 viên bi được lấy ra có đủ cả ba màu". Để tìm số phần tử của biến cố A ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$ tức là 6 viên bi lấy ra không có đủ ba màu như sau:

● **TH1:** Chọn 6 viên bi chỉ có một màu (chỉ chọn được màu vàng).

Do đó trường hợp này có $C_6^6=1$ cách.

● **TH2:** Chọn 6 viên bi có đúng hai màu xanh và đỏ, có C_8^6 cách.

Chọn 6 viên bi có đúng hai màu đỏ và vàng, có $C_{11}^6-C_6^6$ cách.

Chọn 6 viên bi có đúng hai màu xanh và vàng, có $C_9^6-C_6^6$ cách.

Do đó trường hợp này có $C_8^6+\left(C_{11}^6-C_6^6\right)+\left(C_9^6-C_6^6\right)=572$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $|\Omega_{\overline{A}}|=1+572=573$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=|\Omega|-|\Omega_{\overline{A}}|=3003-573=2430$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{2430}{3003}=\dfrac{810}{1001}$.

Câu 15: Trong một hộp có 50 viên bi được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp, tính xác suất để tổng ba số trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3.

A. $\dfrac{816}{1225}$. **B.** $\dfrac{409}{1225}$. **C.** $\dfrac{289}{1225}$. **D.** $\dfrac{936}{1225}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp chứa 50 viên bi. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{50}^3=19600$.

Gọi A là biến cố "3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3". Trong 50 viên bi được chia thành ba loại gồm: 16 viên bi có số chia hết cho 3; 17 viên bi có số chia cho 3 dư 1 và 17 viên bi còn lại có số chia cho 3 dư 2. Để tìm số kết quả thuận lợi cho biến cố A, ta xét các trường hợp

● **TH1:** 3 viên bi được chọn cùng một loại, có $\left(C_{16}^3+C_{17}^3+C_{17}^3\right)=1920$ cách.

● **TH2:** 3 viên bi được chọn có mỗi viên mỗi loại, có $C_{16}^1.C_{17}^1.C_{17}^1=4624$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=\left(C_{16}^3+C_{17}^3+C_{17}^3\right)+C_{16}^1.C_{17}^1.C_{17}^1=6544$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{6544}{19600}=\dfrac{409}{1225}$.

Câu 16: Cho tập hợp $A=\{0;\,1;\,2;\,3;\,4;\,5\}$. Gọi S là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\dfrac{23}{25}$. **C.** $\dfrac{2}{25}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi số cần tìm của tập S có dạng $\overline{abc}$. Trong đó $\begin{cases}a,b,c\in A\\ a\neq 0\\ a\neq b;b\neq c;c\neq a\end{cases}$.

Khi đó

● Số cách chọn chữ số a có 5 cách chọn vì $a\neq 0$.

● Số cách chọn chữ số b có 5 cách chọn vì $b\neq a$.

● Số cách chọn chữ số c có 4 cách chọn vì $c\neq a$ và $c\neq b$.

Do đó tập S có $5.5.4=100$ phần tử.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{100}^1=100$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu". Khi đó ta có các bộ số là $\overline{1b2}$ hoặc $\overline{2b4}$ thỏa mãn biến cố X và cứ mỗi bộ thì b có 4 cách chọn nên có tất cả 8 số thỏa yêu cầu.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X|=8$.

Vậy xác suất cần tính $P(X)=\dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|}=\dfrac{8}{100}=\dfrac{2}{25}$.

Câu 17: Cho tập hợp $A=\{2;\,3;\,4;\,5;\,6;\,7;\,8\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính

xác suất để số được chọn mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{3}{35}$. **C.** $\frac{17}{35}$. **D.** $\frac{18}{35}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của tập S là $A_7^4 = 840$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{840}^1 = 840$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ".

● Số cách chọn hai chữ số chẵn từ bốn chữ số $2; 4; 6; 8$ là $C_4^2 = 6$ cách.

● Số cách chọn hai chữ số lẻ từ ba chữ số $3; 5; 7$ là $C_3^2 = 3$ cách.

● Từ bốn chữ số được chọn ta lập số có bốn chữ số khác nhau, số cách lập tương ứng với một hoán vị của 4 phần tử nên có $4!$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = C_4^2.C_3^2.4! = 432$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \frac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \frac{432}{840} = \frac{18}{35}$.

Câu 18: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số $1; 2; 3; 4; 6$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác xuất để số được chọn chia hết cho 3.

A. $\frac{1}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{1}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của S là $A_5^3 = 60$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{60}^1 = 60$.

Gọi A là biến cố "Số được chọn chia hết cho 3". Từ 5 chữ số đã cho ta có 4 bộ gồm ba chữ số có tổng chia hết cho 3 là $(1; 2; 3)$, $(1; 2; 6)$, $(2; 3; 4)$ và $(2; 4; 6)$. Mỗi bộ ba chữ số này ta lập được $3! = 6$ số thuộc tập hợp S.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 6.4 = 24$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

Câu 19: Cho tập hợp $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có ít nhất 3 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số thuộc tập A. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác xuất để số được chọn có tổng các chữ số bằng 10.

A. $\frac{1}{30}$. **B.** $\frac{3}{25}$. **C.** $\frac{22}{25}$. **D.** $\frac{2}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta tính số phần tử thuộc tập S như sau:

● Số các số thuộc S có 3 chữ số là A_5^3.

● Số các số thuộc S có 4 chữ số là A_5^4.

● Số các số thuộc S có 5 chữ số là A_5^5.

Suy ra số phần tử của tập S là $A_5^3+A_5^4+A_5^5=300$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{300}^1=300$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có tổng các chữ số bằng 10". Các tập con của A có tổng số phần tử bằng 10 là $A_1=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $A_2=\{2;\ 3;\ 5\}$, $A_3=\{1;\ 4;\ 5\}$.

● Từ A_1 lập được các số thuộc S là $4!$.

● Từ A_2 lập được các số thuộc S là $3!$.

● Từ A_3 lập được các số thuộc S là $3!$.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X|=4!+3!+3!=36.$

Vậy xác suất cần tính $P(X)=\frac{|\Omega_X|}{|\Omega|}=\frac{36}{300}=\frac{3}{25}.$

Câu 20: Một hộp đựng 10 chiếc thẻ được đánh số từ 0 đến 9. Lấy ngẫu nhiên ra 3 chiếc thẻ, tính xác suất để 3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể **ghép thành một số chia** hết cho 5.

A. $\frac{8}{15}$. **B.** $\frac{7}{15}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách lấy ngẫu nhiên 3 chiếc thẻ từ 10 chiếc thẻ.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{10}^3=120$.

Gọi A là biến cố "3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể ghép thành một số chia hết cho 5". Để cho biến cố A xảy ra thì trong 3 thẻ lấy được phải có thẻ mang chữ số 0

hoặc chữ số 5. Ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, tức 3 thẻ lấy ra không có thẻ mang chữ số 0 và cũng không có thẻ mang chữ số 5 là C_8^3 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_{10}^3 - C_8^3$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{10}^3 - C_8^3}{C_{10}^3} = \dfrac{8}{15}$.

Câu 21: Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 8 tấm thẻ, tính xác suất để có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

A. $\dfrac{560}{4199}$. **B.** $\dfrac{4}{15}$. **C.** $\dfrac{11}{15}$. **D.** $\dfrac{3639}{4199}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là cách chọn 8 tấm thể trong 20 tấm thẻ.

Suy ra số phần tử của không mẫu là $|\Omega| = C_{20}^8 = 25970$.

Gọi A là biến cố "3 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10". Để tìm số phần tử của A ta làm như sau:

● Đầu tiên chọn 3 tấm thẻ trong 10 tấm thẻ mang số lẻ, có C_{10}^3 cách.

● Tiếp theo chọn 4 tấm thẻ trong 8 tấm thẻ mang số chẵn (không chia hết cho 10), có C_8^4 cách.

● Sau cùng ta chọn 1 trong 2 tấm thẻ mang số chia hết cho 10, có C_2^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_{10}^3.C_8^4.C_2^1 = 16800$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{10}^3.C_8^4.C_2^1}{C_{20}^8} = \dfrac{560}{4199}$.

Câu 22: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp S. Tính xác suất để hai số được chọn có chữ số hàng đơn vị giống nhau.

A. $\dfrac{8}{89}$. **B.** $\dfrac{81}{89}$. **C.** $\dfrac{36}{89}$. **D.** $\dfrac{53}{89}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của tập S là $9.10 = 90$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{90}^2 = 4005$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn có chữ số hàng đơn vị giống nhau". Ta mô tả không gian của biến cố X nhưu sau:

● Có 10 cách chọn chữ số hàng đơn vị (chọn từ các chữ số $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;...;\ 9\}$).

● Có C_9^2 cách chọn hai chữ số hàng chục (chọn từ các chữ số $\{1;\ 2;\ 3;...;\ 9\}$).

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 10.C_9^2 = 360$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{360}{4005} = \dfrac{8}{89}$.

Câu 23: Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 9 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để chọn được một số gồm 4 chữ số lẻ và chữ số 0 luôn đứng giữa hai chữ số lẻ (hai số hai bên chữ số 0 là số lẻ).

A. $\dfrac{49}{54}$. **B.** $\dfrac{5}{54}$. **C.** $\dfrac{1}{7776}$. **D.** $\dfrac{45}{54}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của tập S là $9.A_9^8$.

Không gian mẫu là chọn ngẫu nhiên 1 số từ tập S.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9.A_9^8 = 3265920$.

Gọi X là biến cố "Số được chọn gồm 4 chữ số lẻ và chữ số 0 luôn đứng giữa hai chữ số lẻ". Do số 0 luôn đứng giữa 2 số lẻ nên số 0 không đứng ở vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng. Ta có các khả năng

● Chọn 1 trong 7 vị trí để xếp số 0, có C_7^1 cách.

● Chọn 2 trong 5 số lẻ và xếp vào 2 vị trí cạnh số 0 vừa xếp, có A_5^2 cách.

● Chọn 2 số lẻ trong 3 số lẻ còn lại và chọn 4 số chẵn từ $\{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$ sau đó xếp 6 số này vào 6 vị trí trống còn lại có $C_3^2.C_4^4.6!$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = C_7^1.A_5^2.C_3^2.C_4^4.6! = 302400$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{C_7^1.A_5^2.C_3^2.C_4^4.6!}{9.A_9^8} = \dfrac{5}{54}$.

Câu 24: Giải bóng chuyền **VTV Cup** gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 3 bảng A, B, C và mỗi bảng có 3 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của Việt Nam ở 3 bảng khác nhau.

A. $\dfrac{3}{56}$. **B.** $\dfrac{19}{28}$. **C.** $\dfrac{9}{28}$. **D.** $\dfrac{53}{56}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là số cách chia tùy ý 9 đội thành 3 bảng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_9^3.C_6^3.C_3^3$.

Gọi X là biến cố "3 đội bóng của Việt Nam ở 3 bảng khác nhau".

● Bước 1. Xếp 3 đội Việt Nam ở 3 bảng khác nhau nên có $3!$ cách.

● Bước 2. Xếp 6 đội còn lại vào 3 bảng A, B, C này có $C_6^2.C_4^2.C_2^2$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = 3!.C_6^2.C_4^2.C_2^2$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{3!.C_6^2.C_4^2.C_2^2}{C_9^3.C_6^3.C_3^3} = \dfrac{540}{1680} = \dfrac{9}{28}$.

Câu 25: Trong giải cầu lông kỷ niệm ngày truyền thống học sinh sinh viên có 8 người tham gia trong đó có hai bạn Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai bảng A và B, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên, tính xác suất để cả 2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đấu.

A. $\dfrac{6}{7}$. **B.** $\dfrac{5}{7}$. **C.** $\dfrac{4}{7}$. **D.** $\dfrac{3}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chia tùy ý 8 người thành 2 bảng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_8^4.C_4^4$.

Gọi X là biến cố "2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đấu".

● Bước 1. Xếp 2 bạn Việt và Nam nằm chung 1 bảng đấu nên có C_2^1 cách.

● Bước 2. Xếp 6 bạn còn lại vào 2 bảng A, B cho đủ mỗi bảng là 4 bạn thì có $C_6^2.C_4^4$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = C_2^1.C_6^2.C_4^4$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{C_8^4.C_4^4}{C_2^1.C_6^2.C_4^4} = \dfrac{3}{7}$.

Câu 26: Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là"Tốt" nếu trong đề thi có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt".

A. $\dfrac{941}{1566}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{625}{1566}$.

Lời giải

Chọn D

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_{30}^5 = 142506$.

Gọi A là biến cố "Đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt"".

Vì trong một đề thi "Tốt" có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2 nên ta có các trường hợp sau đây thuận lợi cho biến cố A.

● Đề thi gồm 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó: có $C_{15}^3C_{10}^1C_5^1$ đề.

● Đề thi gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó: có $C_{15}^3C_{10}^1C_5^1$ đề.

● Đề thi gồm 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó: có $C_{15}^2C_{10}^1C_5^2$ đề.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_{15}^3C_{10}^1C_5^1 + C_{15}^3C_{10}^1C_5^1 + C_{15}^2C_{10}^1C_5^2 = 56875$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{56875}{142506} = \dfrac{625}{1566}$.

Câu 27: Trong một kỳ thi vấn đáp thí sinh A phải đứng trước ban giám khảo chọn ngẫu nhiên 3 phiếu câu hỏi từ một thùng phiếu gồm 50 phiếu câu hỏi, trong đó có 4 cặp phiếu câu hỏi mà mỗi cặp phiếu có nội dung khác nhau từng đôi một và trong mỗi một cặp phiếu có nội dung giống nhau. Tính xác suất để thí sinh A chọn được 3 phiếu câu hỏi có nội dung khác nhau.

A. $\dfrac{3}{4}$ **B.** $\dfrac{12}{1225}$. **C.** $\dfrac{4}{7}$. **D.** $\dfrac{1213}{1225}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chọn tùy ý 3 phiếu câu hỏi từ 50 phiếu câu hỏi.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega_A| = C_{50}^3$.

Gọi X là biến cố "Thí sinh A chọn được 3 phiếu câu hỏi khác nhau".

Để tìm số phần tử của X ta tìm số phần tử của biến cố $\overline{X}$, lúc này cần chọn được 1 cặp trong 4 cặp phiếu có câu hỏi giống nhau và chọn 1 phiếu trong 48 phiếu còn lại.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{X}$ là $|\Omega_{\overline{X}}| = C_4^1.C_{48}^1$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{|\Omega| - |\Omega_{\overline{X}}|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{50}^3 - C_4^1.C_{48}^1}{C_{50}^3} = \dfrac{1213}{1225}$.

Trong kỳ thi THPT Quốc Gia năm 2016 có môn thi bắt buộc là môn Tiếng Anh. Môn thi này thi dưới hình thức trắc nghiệm với 4 phương án trả lời A, B, C, D. Mỗi câu trả lời đúng được cộng $0,2$ điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi $0,1$ điểm. Bạn Hoa vì học rất kém môn Tiếng Anh nên chọn ngẫu nhiên cả 50 câu trả lời. Tính xác xuất để bạn Hoa đạt được 4 điểm môn Tiếng Anh trong kỳ thi trên.

A. $\dfrac{C_{50}^{30}.(3)^{20}}{4^{50}}$. **B.** $\dfrac{A_{50}^{30}.(3)^{20}}{4^{50}}$. **C.** $\dfrac{C_{50}^{30}.(3)^{20}}{50}$. **D.** $\dfrac{A_{50}^{30}.(3)^{20}}{50}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi x là số câu trả lời đúng, suy ra $50-x$ là số câu trả lời sai.

Ta có số điểm của Hoa là $0,2.x - 0,1.(50-x) = 4 \Leftrightarrow x = 30$.

Do đó bạn Hoa trả lời đúng 30 câu và sai 20 câu.

Không gian mẫu là số phương án trả lời 50 câu hỏi mà bạn Hoa chọn ngẫu nhiên. Mỗi câu có 4 phương án trả lời nên có 4^{50} khả năng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 4^{50}$.

Gọi X là biến cố "Bạn Hoa trả lời đúng 30 câu và sai 20 câu". Vì mỗi câu đúng có 1 phương án trả lời, mỗi câu sai có 3 phương án trả lời. Vì vậy có $C_{50}^{30}.(3)^{20}$ khả năng thuận lợi cho biến cố X.

Suy ra số phần tử của biến cố X là $|\Omega_X| = C_{50}^{30}.(3)^{20}$.

Vậy xác suất cần tính $P(X) = \dfrac{|\Omega_X|}{|\Omega|} = \dfrac{C_{50}^{30}.(3)^{20}}{4^{50}}$.

Câu 28: Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngẫu nhiên vào 9 ghế thành một dãy. Tính xác suất để xếp được 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11.

A. $\dfrac{5}{12}$. **B.** $\dfrac{7}{12}$. **C.** $\dfrac{1}{1728}$. **D.** $\dfrac{5}{72}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách sắp xếp tất cả 9 học sinh vào một ghế dài.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 9!$.

Gọi A là biến cố "Xếp 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

● Đầu tiên xếp 6 học sinh lớp 11 thành một dãy, có $6!$ cách.

● Sau đó xem 6 học sinh này như 6 vách ngăn nên có 7 vị trí để xếp 3 học sinh lớp 12 (gồm 5 vị trí giữa 6 học sinh và 2 vị trí hai đầu). Do đó có A_7^3 cách xếp 3 học sinh lớp 12.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 6!.A_7^3$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{6!.A_7^3}{9!} = \dfrac{5}{12}$.

Câu 29: Đội tuyển học sinh giỏi của một trường THPT có 8 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Trong buổi lễ trao phần thưởng, các học sinh trên được xếp thành một hàng ngang. Tính xác suất để khi xếp sao cho 2 học sinh nữ không đứng cạnh nhau.

A. $\dfrac{653}{660}$. **B.** $\dfrac{7}{660}$. **C.** $\dfrac{41}{55}$. **D.** $\dfrac{14}{55}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách sắp xếp tất cả 12 học sinh thành một hàng ngang. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 12!$.

Gọi A là biến cố "Xếp các học sinh trên thành một hàng ngang mà 2 học sinh nữ không đứng cạnh nhau". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

● Đầu tiên xếp 8 học sinh nam thành một hàng ngang, có $8!$ cách.

● Sau đó xem 8 học sinh này như 8 vách ngăn nên có 9 vị trí để xếp 4 học sinh nữ thỏa yêu cầu bài toán (gồm 7 vị trí giữa 8 học sinh và 2 vị trí hai đầu). Do đó có A_9^4 cách xếp 4 học sinh nữ.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 8!.A_9^4$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{8!A_9^4}{12!} = \dfrac{14}{55}$.

Câu 30: Có 3 bì thư giống nhau lần lượt được đánh số thứ tự từ 1 đến 3 và 3 con tem giống nhau lần lượt đánh số thứ tự từ 1 đến 3. Dán 3 con tem đó vào 3 bì thư sao cho không có bì thư nào không có tem. Tính xác suất để lấy ra được 2 bì thư trong 3 bì thư trên sao cho mỗi bì thư đều có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó.

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách dán 3 con tem trên 3 bì thư, tức là hoán vị của 3 con tem trên 3 bì thư. Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 3! = 6$.

Gọi A là biến cố "2 bì thư lấy ra có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó". Thế thì bì thư còn lại cũng có số thứ tự giống với số thứ tự con tem đã dán vào nó. Trường hợp này có 1 cách duy nhất.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 1$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{1}{6}$.

Câu 31: Trong thư viện có 12 quyển sách gồm 3 quyển Toán giống nhau, 3 quyển Lý giống nhau, 3 quyển Hóa giống nhau và 3 quyển Sinh giống nhau. Có bao nhiêu cách xếp thành một dãy sao cho 3 quyển sách thuộc cùng 1 môn không được xếp liền nhau?

A. 16800. **B.** 1680. **C.** 140. **D.** 4200.

Lời giải

Chọn A

Xếp 3 cuốn sách Toán kề nhau. Xem 3 cuốn sách Toán là 3 vách ngăn, giữa 3 cuốn sách Toán có 2 vị trí trống và thêm hai vị trí hai đầu, tổng cộng có 4 vị trí trống.

Bước 1. Chọn 3 vị trí trống trong 4 vị trí để xếp 3 cuốn Lý, có C_4^3 cách.

Bước 2. Giữa 6 cuốn Lý và Toán có 5 vị trí trống và thêm 2 vị trí hai đầu, tổng cộng có 7 vị trí trống. Chọn 3 vị trí trong 7 vị trí trống để xếp 3 cuốn Hóa, có C_7^3 cách.

Bước 3. Giữa 9 cuốn sách Toán, Lý và Hóa đã xếp có 8 vị trí trống và thêm 2 vị trí hai đầu, tổng cộng có 10 vị trí trống. Chọn 3 vị trí trong 10 vị trí trống để xếp 3 cuốn Sinh, có C_{10}^3 cách. Vậy theo quy tắc nhân có $C_4^3.C_7^3.C_{10}^3=16800$ cách.

Câu 32: Xếp 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ vào một bàn tròn 10 ghế. Tính xác suất để không có hai học sinh nữ ngồi cạnh nhau.

A. $\frac{37}{42}$. **B.** $\frac{5}{42}$. **C.** $\frac{5}{1008}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Cố định 1 vị trí cho một học sinh nam (hoặc nữ), đánh dấu các ghế còn lại từ 1 đến 9.

Không gian mẫu là hoán vị 9 học sinh (còn lại không cố định) trên 9 ghế đánh dấu.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=9!$.

Gọi A là biến cố "không có hai học sinh nữ ngồi cạnh nhau". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

● Đầu tiên ta cố định 1 học sinh nam, 5 học sinh nam còn lại có $5!$ cách xếp.

● Ta xem 6 học sinh nam như 6 vách ngăn trên vòng tròn, thế thì sẽ tạo ra 6 ô trống để ta xếp 4 học sinh nữ vào (mỗi ô trống chỉ được xếp 1 học sinh nữ). Do đó có A_6^4 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=5!.A_6^4$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{5!.A_6^4}{9!}=\frac{5}{42}$.

Câu 33: Có 4 hành khách bước lên một đoàn tàu gồm 4 toa. Mỗi hành khách độc lập với nhau và chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để 1 toa có 3 người, 1 toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{16}$. **C.** $\frac{13}{16}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách sắp xếp 4 hành khách lên 4 toa tàu. Vì mỗi hành khách có 4 cách chọn toa nên có 4^4 cách xếp.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=4^4$.

Gọi A là biến cố "1 toa có 3 người, 1 toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai". Để tìm số phần tử của A, ta chia làm hai giai đoạn như sau:

● **Giai đoạn thứ nhất.** Chọn 3 hành khách trong 4 hành khách, chọn 1 toa trong 4 toa và xếp lên toa đó 3 hành khách vừa chọn. Suy ra có $C_4^3.C_4^1$ cách.

● **Giai đoạn thứ hai.** Chọn 1 toa trong 3 toa còn lại và xếp lên toa đó 1 một hành khách còn lại. Suy ra có C_3^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_4^3.C_4^1.C_3^1$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_4^3.C_4^1.C_3^1}{4^4} = \frac{48}{4^4} = \frac{3}{16}$.

Câu 34: Có 8 người khách bước ngẫu nhiên vào một cửa hàng có 3 quầy. Tính xác suất để 3 người cùng đến quầy thứ nhất.

A. $\frac{10}{13}$. **B.** $\frac{3}{13}$. **C.** $\frac{4769}{6561}$. **D.** $\frac{1792}{6561}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách sắp xếp 8 người khách vào 3 quầy. Vì mỗi người khách có 3 cách chọn quầy nên có 3^8 khả năng xảy ra.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 3^8$.

Gọi A là biến cố "Có 3 người cùng đến quầy thứ nhất, 5 người còn lại đến quầy thứ hai hoặc ba". Để tìm số phần tử của A, ta chia làm hai giai đoạn như sau:

● **Giai đoạn thứ nhất.** Chọn 3 người khách trong 8 người khách và cho đến quầy thứ nhất, có C_8^3 cách.

● **Giai đoạn thứ hai.** Còn lại 5 người khách xếp vào 2 quầy. Mỗi người khách có 2 cách chọn quầy. Suy ra có 2^5 cách xếp.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_8^3.2^5$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_8^3.2^5}{3^8} = \frac{1792}{6561}$.

Câu 35: Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 3 người để biểu diễn một tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

A. $\frac{94}{95}$. **B.** $\frac{1}{95}$. **C.** $\frac{6}{95}$. **D.** $\frac{89}{95}$.

Lời giải

Chọn D

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 người trong 20 người.

Suy ra số phần tử không gian mẫu là $|\Omega| = C_{20}^3 = 1140$.

Gọi A là biến cố "3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào". Để tìm số phần tử của A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là 3 người được chọn luôn có 1 cặp vợ chồng.

● Chọn 1 cặp vợ chồng trong 4 cặp vợ chồng, có C_4^1 cách.

● Chọn thêm 1 người trong 18 người, có C_{18}^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $\left|\Omega_{\overline{A}}\right| = C_4^1.C_{18}^1 = 72$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $\left|\Omega_A\right| = 1140 - 72 = 1068$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{\left|\Omega_A\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{1068}{1140} = \dfrac{89}{95}$.

Câu 36: Một lớp học có 40 học sinh trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Trong buổi họp đầu năm thầy giáo chủ nhiệm lớp muốn chọn ra 3 học sinh để làm cán sự lớp gồm lớp trưởng, lớp phó và bí thư. Tính xác suất để chọn ra 3 học sinh làm cán sự lớp mà không có cặp anh em sinh đôi nào.

A. $\dfrac{64}{65}$. **B.** $\dfrac{1}{65}$. **C.** $\dfrac{1}{256}$. **D.** $\dfrac{255}{256}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 3 học sinh trong 40 học sinh.

Suy ra số phần tử không gian mẫu là $\left|\Omega\right| = C_{40}^3 = 9880$.

Gọi A là biến cố "3 học sinh được chọn không có cặp anh em sinh đôi nào". Để tìm số phần tử của A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là 3 học sinh được chọn luôn có 1 cặp anh em sinh đôi.

● Chọn 1 cặp em sinh đôi trong 4 cặp em sinh đôi, có C_4^1 cách.

● Chọn thêm 1 học sinh trong 38 học sinh, có C_{38}^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $\left|\Omega_{\overline{A}}\right| = C_4^1.C_{38}^1 = 152$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $\left|\Omega_A\right| = 9880 - 152 = 9728$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{\left|\Omega_A\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{9728}{9880} = \dfrac{64}{65}$.

Câu 37: Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi.

A. $\dfrac{3}{7}$. **B.** $\dfrac{13}{64}$. **C.** $\dfrac{99}{323}$. **D.** $\dfrac{224}{323}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là số cách chọn ngẫu nhiên 4 chiếc giày từ 20 chiếc giày.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $\left|\Omega\right| = C_{20}^4 = 4845$.

Gọi A là biến cố "4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi". Để tìm số phần tử của biến cố A, ta đi tìm số phần tử của biến cố $\overline{A}$, với biến cố $\overline{A}$ là 4 chiếc giày được chọn không có đôi nào.

● Số cách chọn 4 đôi giày từ 10 đôi giày là C_{10}^4.

● Mỗi đôi chọn ra 1 chiếc, thế thì mỗi chiếc có C_2^1 cách chọn. Suy ra 4 chiếc có $\left(C_2^1\right)^4$ cách chọn.

Suy ra số phần tử của biến cố $\overline{A}$ là $\left|\Omega_{\overline{A}}\right| = C_{10}^4.\left(C_2^1\right)^4 = 3360$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $\left|\Omega_A\right| = 4845 - 3360 = 1485$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \dfrac{\left|\Omega_A\right|}{\left|\Omega\right|} = \dfrac{1485}{4845} = \dfrac{99}{323}$.

Câu 38: Một trường THPT có 10 lớp 12, mỗi lớp cử 3 học sinh tham gia vẽ tranh cổ động. Các lớp tiến hành bắt tay giao lưu với nhau (các học sinh cùng lớp không bắt tay với nhau). Tính số lần bắt tay của các học sinh với nhau, biết rằng hai học sinh khác nhau ở hai lớp khác nhau chỉ bắt tay đúng 1 lần.

A. 405. **B.** 435. **C.** 30. **D.** 45.

Lời giải

Chọn A

Mỗi lớp cử ra 3 học sinh nên 10 lớp cử ra 30 học sinh.

Suy ra số lần bắt tay là C_{30}^2 (bao gồm các học sinh cùng lớp bắt tay với nhau).

Số lần bắt tay của các học sinh học cùng một lớp là $10.C_3^2$.

Vậy số lần bắt tay của các học sinh với nhau là $C_{30}^2 - 10.C_3^2 = 405$.

Câu 39: Có 5 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là $2cm$, $4cm$, $6cm$, $8cm$ và $10cm$. Lấy ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng trên, tính xác suất để 3 đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác.

A. $\dfrac{3}{10}$. **B.** $\dfrac{9}{10}$. **C.** $\dfrac{7}{10}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách lấy 3 đoạn thẳng từ 5 đoạn thẳng.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $\left|\Omega\right| = C_5^3 = 10$.

Gọi A là biến cố "3 đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác". Để ba đoạn thẳng tạo thành một tam giác chỉ có các trường hợp: $(4cm, 6cm, 8cm)$ hoặc $(6cm, 8cm, 10cm)$ hoặc $(4cm, 8cm, 10cm)$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $\left|\Omega_A\right| = 3$.

Vậy xác suất cần tìm $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{3}{10}$.

Câu 40: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ở góc phần tư thứ nhất ta lấy 2 điểm phân biệt; cứ thế ở các góc phần tư thứ hai, thứ ba, thứ tư ta lần lượt lấy $3, 4, 5$ điểm phân biệt (các điểm không nằm trên các trục tọa độ). Trong 14 điểm đó ta lấy 2 điểm bất kỳ. Tính xác suất để đoạn thẳng nối hai điểm đó cắt hai trục tọa độ.

A. $\frac{68}{91}$. **B.** $\frac{23}{91}$. **C.** $\frac{8}{91}$. **D.** $\frac{83}{91}$.

Lời giải

Chọn B

Không gian mẫu là số cách chọn 2 điểm bất kỳ trong 14 điểm đã cho.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{14}^2=91$.

Gọi A là biến cố "Đoạn thẳng nối 2 điểm được chọn cắt hai trục tọa độ". Để xảy ra biến cố A thì hai đầu đoạn thẳng đó phải ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba hoặc phần tư thứ hai và thứ tư.

● Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba, có $C_2^1C_4^1$ cách.

● Hai đầu đoạn thẳng ở góc phần tư thứ hai và thứ tư, có $C_3^1C_5^1$ cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A|=C_2^1C_4^1+C_3^1C_5^1=23$.

Vậy xác suất cần tính $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{23}{91}$.

Câu 41: Một lớp học có 30 học sinh gồm có cả nam và nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hoạt động của Đoàn trường. Xác suất chọn được 2 nam và 1 nữ là $\frac{12}{29}$. Tính số học sinh nữ của lớp.

A. 16. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 17.

Lời giải

Chọn B

Gọi số học sinh nữ của lớp là n $\left(n\in\mathbb{N}^*, n\le 28\right)$.

Suy ra số học sinh nam là $30-n$.

Không gian mẫu là chọn bất kì 3 học sinh từ 30 học sinh.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_{30}^3$.

Gọi A là biến cố "Chọn được 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ".

● Chọn 2 nam trong $30-n$ nam, có C_{30-n}^2 cách.

● Chọn 1 nữ trong n nữ, có C_n^1 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_{30-n}^2.C_n^1$.

Do đó xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_{30-n}^2.C_n^1}{C_{30}^3}$.

Theo giả thiết, ta có $P(A) = \frac{12}{29} \Leftrightarrow \frac{C_{30-n}^2.C_n^1}{C_{30}^3} = \frac{12}{29} \longrightarrow n = 14.$

Vậy số học sinh nữ của lớp là 14 học sinh.

Câu 42: Một chi đoàn có 3 đoàn viên nữ và một số đoàn viên nam. Cần lập một đội thanh niên tình nguyện (TNTN) gồm 4 người. Biết xác suất để trong 4 người được chọn có 3 nữ bằng $\frac{2}{5}$ lần xác suất 4 người được chọn toàn nam. Hỏi chi đoàn đó có bao nhiêu đoàn viên.

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Gọi số đoàn viên trong chi đoàn đó là n $\left(n \geq 7, n \in \mathbb{N}^*\right)$.

Suy ra số đoàn viên nam trong chi đoàn là $n-3$.

Xác suất để lập đội TNTN trong đó có 3 nữ là $\frac{C_3^3.C_{n-3}^1}{C_n^4}$.

Xác suất để lập đội TNTN có toàn nam là $\frac{C_{n-3}^4}{C_n^4}$.

Theo giả thiết, ta có $\frac{C_3^3.C_{n-3}^1}{C_n^4} = \frac{2}{5}.\frac{C_{n-3}^4}{C_n^4} \Leftrightarrow C_{n-3}^1 = \frac{2}{5}.C_{n-3}^4 \longrightarrow n = 9.$

Vậy cho đoàn có 9 đoàn viên.

Câu 43: Một hộp có 10 phiếu, trong đó có 2 phiếu trúng thưởng. Có 10 người lần lượt lấy ngẫu nhiên mỗi người 1 phiếu. Tính xác suất người thứ ba lấy được phiếu trúng thưởng.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Không gian mẫu là mỗi người lấy ngẫu nhiên 1 phiếu.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 10!$.

Gọi A là biến cố "Người thứ ba lấy được phiếu trúng thưởng". Ta mô tả khả năng thuận lợi của biến cố A như sau:

- Người thứ ba có $C_2^1 = 2$ khả năng lấy được phiếu trúng thưởng.
- 9 người còn lại có số cách lấy phiếu là $9!$.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = 2.9!$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{2.9!}{10!} = \frac{1}{5}$.

Câu 44: Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, mỗi lớp thi gồm 24 thí sinh được sắp xếp vào 24 bàn khác nhau. Bạn Nam là một thí sinh dự thi, bạn đăng ký 4 môn thi và cả 4 lần thi đều thi tại một phòng duy nhất. Giả sử giám thị xếp thí sinh vào vị trí một cách ngẫu nhiên, tính xác xuất để trong 4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí.

A. $\frac{253}{1152}$. **B.** $\frac{899}{1152}$. **C.** $\frac{4}{7}$. **D.** $\frac{26}{35}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu là số cách ngẫu nhiên chỗ ngồi trong 4 lần thi của Nam.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 24^4$.

Gọi A là biến cố "4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí". Ta mô tả không gian của biến cố A như sau:

● Trong 4 lần có 2 lần trùng vị trí, có C_4^2 cách.

● Giả sử lần thứ nhất có 24 cách chọn chỗ ngồi, lần thứ hai trùng với lần thứ nhất có 1 cách chọn chỗ ngồi. Hai lần còn lại thứ ba và thứ tư không trùng với các lần trước và cũng không trùng nhau nên có 23.22 cách.

Suy ra số phần tử của biến cố A là $|\Omega_A| = C_4^2.24.23.22$.

Vậy xác suất cần tính $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_4^2.24.23.22}{24^4} = \frac{C_4^2.23.22}{24^3} = \frac{253}{1152}$.

CHƯƠNG 3. DÃY SỐ- CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

BÀI 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp thì có thể làm như sau:

- Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1.$
- Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1.$

Đó là phương pháp quy nạp toán học, hay còn gọi tắt là phương pháp quy nạp.

Một cách đơn giản, ta có thể hình dung như sau: Mệnh đề đã đúng khi $n = 1$ nên theo kết quả ở bước 2, nó cũng đúng với $n = 1 + 1 = 2.$ Vì nó đúng với $n = 2$ nên lại theo kết quả ở bước 2, nó đúng với $n = 2 + 1 = 3,...$ Bằng cách ấy, ta có thể khẳng định rằng mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*.$

Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên) thì:

- Bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p;$
- Bước 2, giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1.$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh đẳng thức

Ví dụ 1 . Chứng minh rằng: $1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + n(3n - 1) = n^2(n + 1), với n \in N^*$ (1)

Lời giải

- Bước 1: Với n=1, vế trái bằng 1.2=2, vế phải bằng 2. hệ thức (1) đúng
- Bước 2: Đặt vế trái bằng S_n.

Giả sử hệ thức (1) đúng vơi $n = k \geq 1$, tức là :

$S_k = 1.2 + 2.5 + ... + k(3k - 1) = k^2(k + 1)$(giả thiết quy nạp)

Ta phải chứng minh rằng (1) cũng đúng với n=k+1, tức là :

$$S_{k+1} = (k + 1)^2(k + 2)$$

Thậ vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$S_{k+1} = S_k + (k + 1)\left[3(k + 1 - 1)\right] = k^2(k + 1) + (k + 1)(3k + 2)$

$= (k + 1)(k^2 + 3k + 2) = (k + 1)^2(k + 2)$

Vậy hệ thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}\mathbb{N}N^*$

Dạng 2. Chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$ ta có: $3^n > n^2 + 4n + 5$ (1)

Lời giải

Với n=3, vế trái bằng 27, còn vế phải bằng 26.

Bất đẳng thức (4) đúng.

Giải sử bất đẳng thức (4) đúng với $n=k\geq 3$. tức là:

$$3^k > k^2+4k+5. \quad (1')$$

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với n=k+1, tức là:

$$3^{k+1} > (k+1)^2+4(k+1)+5$$

Thật vậy, nhân hai vế của bất đẳng thức (1') với 3 ta có:

$$3^{k+1} > 3k^2+12k+15 = (k+1)^2+4(k+1)+5+2k^2+6k+5$$

Vì $2k^2+6k+5>0$ nên $3^{k+1} > (k+1)^2+4(k+1)+5$

Đăng thức (1) đã được chứng minh

Dạng 3. Chứng minh một tính chất

Ví dụ. Chứng minh rằng: n^7-n chia hết cho 7 với mọi $n\in N^*$

Giải

Đặt $A_n = n^7-n$.

Khi n=1 thì $A_1=0$ chia hết cho 7

Giả sử đã có: $A_k = (k^7-k)\vdots 7$

Thật vây, áp dụng công thức nhị thức Niu-ton ta có:

$$A_{k+1} = (k+1)^7-(k+1) = k^7+7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k+1-k-1$$
$$= k^7-k+7(k^6+3k^5+5k^4+5k^3+3k^2+k)$$

Theo giả thiết quy nạp thì $A_k = k^7-k$ chia hết cho 7, do đó $A_{k+1}\vdots 7$

Vậy n^7-n chia hết cho 7 với mọi $n\in N^*$

Dạng 4. Một số bài toán khác

Ví dụ. Chứng minh rằng: $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

Giải

Đặt vế trái của hệ thức (1) bằng C_n.

Khi n=1, vế trái bằng $\sqrt{2}$, vế phải bằng $2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$; hệ thức (1) đúng

Giả sử hệ thức (1) đúng với $n=k\geq 1$, tức là $C_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$

ta phải chứng minh: $C_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$$C_{k+1} = \sqrt{2+C_k} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} =$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} \ (\text{vì } \cos\frac{\pi}{2^{k+2}})$$

Vậy hệ thức (1) đã được chứng minh

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 1 (bước cơ sở) của chứng minh quy nạp, bắt đầu với n bằng:

A. $n=1.$ **B.** $n=p.$ **C.** $n>p.$ **D.** $n \geq p.$

Lời giải.

Chọn B

Câu 2: Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với $n=k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $k>p.$ **B.** $k \geq p.$ **C.** $k=p.$ **D.** $k<p.$

Lời giải.

Chọn B

Câu 3: Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên), ta tiến hành hai bước:

- Bước 1, kiểm tra mệnh đề $A(n)$ đúng với $n=p.$
- Bước 2, giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với số tự nhiên bất kỳ $n=k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1.$

Trong hai bước trên:

A. Chỉ có bước 1 đúng. **B.** Chỉ có bước 2 đúng. **C.** Cả hai bước đều đúng. **D.** Cả hai bước đều sai.

Lời giải.

Chọn C

Câu 4: Một học sinh chứng minh mệnh đề "8^n+1 chia hết cho $7, \forall n \in \mathbb{N}^*$" $(*)$ như sau:

- Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, tức là 8^k+1 chia hết cho $7.$
- Ta có: $8^{k+1}+1=8\left(8^k+1\right)-7$, kết hợp với giả thiết 8^k+1 chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1}+1$ chia hết cho $7.$ Vậy đẳng thức $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*.$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Lời giải.

Chọn D

Thiếu bước 1 là kiểm tra với $n=1$, khi đó ta có $8^1+1=9$ không chi hết cho 7.

Câu 5: Cho $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3=\frac{1}{12}$. **B.** $S_2=\frac{1}{6}$. **C.** $S_2=\frac{2}{3}$. **D.** $S_3=\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Chọn C

Lưu ý rằng S_n là tổng n số hạng đầu tiên nên.

Do đó với $n=2$, ta có $S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$.

Câu 6: Cho $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\frac{n-1}{n}$. **B.** $S_n=\frac{n}{n+1}$. **C.** $S_n=\frac{n+1}{n+2}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{n+3}$.

Lời giải.

Chọn B

Cách trắc nghiệm: Ta tính được $S_1=\frac{1}{2}, S_2=\frac{2}{3}, S_3=\frac{3}{4}$. Từ đó ta thấy quy luật là từ nhỏ hơn mẫu đúng 1 đơn vị.

Cách tự luận. Ta có $S_1=\frac{1}{2}, S_2=\frac{2}{3}, S_3=\frac{3}{4}\longrightarrow$ dự đoán $S_n=\frac{n}{n+1}$.

- Với $n=1$, ta được $S_1=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}$: đúng.
- Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k\ \ (k\geq 1)$, tức là $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$.
- Ta có $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$. S

uy ra mệnh đề đúng với $n=k+1$.

Câu 7: Cho $S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\frac{n-1}{2n-1}$. **B.** $S_n=\frac{n}{2n+1}$. **C.** $S_n=\frac{n}{3n-2}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{2n+5}$.

Lời giải.

Chọn B

Cho $\begin{cases} n=1 \longrightarrow S_1=\dfrac{1}{3} \\ n=2 \longrightarrow S_2=\dfrac{6}{15} \\ n=3 \longrightarrow S_3=\dfrac{3}{7} \end{cases}$. Kiểm tra các đáp án chỉ cho B thỏa.

Câu 8: Cho $P_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ với $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=\dfrac{n+1}{n+2}$. **B.** $P=\dfrac{n-1}{2n}$. **C.** $P=\dfrac{n+1}{n}$. **D.** $P=\dfrac{n+1}{2n}$.

Lời giải.

Chọn D

Vì $n\geq 2$ nên ta cho $\begin{cases} n=2 \longrightarrow P_2=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)=\dfrac{3}{4} \\ n=3 \longrightarrow P_3=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right).\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)=\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Kiểm tra các đáp án chỉ cho D thỏa.

Câu 9: Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là sai?

A. $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

B. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

C. $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D. $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải.

Chọn D

Bằng cách thử với $n=1$, $n=2$, $n=3$ là ta kết luận được.

Câu 10: Xét hai mệnh đề sau:

I) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, số n^3+3n^2+5n chia hết cho 3.

II) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Không có. **D.** Cả I và II.

Lời giải.

Chọn A

- Ta chứng minh I) đúng.

Với $n=1$, ta có $u_1=1^3+3.1^2+5.1=9\vdots 3$: đúng.

Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k\ \ (k\geq 1)$, tức là $u_k=k^3+3k^2+5k\vdots 3$.

Ta có $u_{k+1}=\left(k^3+3k^2+5k\right)+3k^2+9k+9=u_k+3\left(k^2+3k+3\right)\vdots 3.$ Kết thúc chứng minh.

- Mệnh đề II) sai vì với $n=1,$ ta có $\text{VT}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{12}{24}>\dfrac{13}{24}$: Vô lý.

BÀI 2. DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA

1. Định nghĩa dãy số

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$u:\ \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n).$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...,$

trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là $(u_n),$ và gọi u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

2. Định nghĩa dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1,2,3,...,m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, ..., u_n,$ trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

II –CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

1. Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

2. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

3. Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Cách cho một dãy số bằng phương pháp truy hồi, tức là:

a) Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).

b) Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

III – DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

1. Dãy số tăng, dãy số giảm

Định nghĩa 1

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý: Không phải mọi dãy số đều tăng hoặc giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^n$ tức là dãy $-3, 9, -27, 81, ...$ không tăng cũng không giảm.

2. Dãy số bị chặn

Định nghĩa 2

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho

$$\boxed{u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*}.$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho

$$\boxed{u_n \ge m,\ \forall n \in \mathbb{N}^*}.$$

Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho

$$\boxed{m \le u_n \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*}.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n), tìm u_n

a) $(u_n):\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$; b) $(u_n):\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$u_1 = 5$

$u_2 = 5 + 1.3$

$u_3 = 5 + 2.3$

$u_4 = 5 + 3.3$

...

$u_n = 5 + (n-1).3\ (*)$

b) Ta có

$u_1 = 3$

$u_2 = 3.4$

$u_3 = 3.4^2$

$u_4 = 3.4^3$

...

$u_n = 3.4^{n-1}\ (*)$

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n), tìm u_n

a) $(u_n):\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$; b) $(u_n):\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$u_1 = 1 = 2^2 - 3$

$u_2 = 5 = 2^3 - 3$

$u_3 = 13 = 2^4 - 3$

$u_4 = 29 = 2^5 - 3$

...

$u_n = 2^{n+1} - 3 (*)$

b) Ta có

$u_1 = 3 = \sqrt{3^2 + 0}$

$u_2 = \sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1}$

$u_3 = \sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 2}$

$u_4 = \sqrt{12} = \sqrt{3^2 + 3}$

...

$u_n = \sqrt{3^3 + n - 1}\ (*)$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\frac{1}{2};-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};-\frac{4}{5};-\frac{5}{6}$. **B.** $-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};-\frac{4}{5};-\frac{5}{6};-\frac{6}{7}$. **C.** $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$.

Nhận xét: (i) Dùng MTCT chức năng CALC để kiểm tra (tính) nhanh.

(ii) Ta thấy dãy (u_n) là dãy số âm nên loại các phương án C, D **.** Đáp án đúng là A hoặc B. Ta chỉ cần kiểm tra một số hạng nào đó mà cả hai đáp án khác nhau là được. Chẳng hạng kiểm tra u_1 thì thấy $u_1 = -\frac{1}{2}$

Câu 2: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{26}$. **C.** $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Chọn B

Dùng MTCT chức năng CALC: ta có

$u_1=\frac{1}{2}; u_2=\frac{2}{3^2-1}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}; u_3=\frac{3}{3^3-1}=\frac{3}{26}.$

Câu 3: Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases}u_1=-1\\u_{n+1}=u_n+3\end{cases}$ với $n\geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-1;2;5.$ **B.** $1;4;7.$ **C.** $4;7;10.$ **D.** $-1;3;7.$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $u_1=-1; u_2=u_1+3=2; u_3=u_2+3=5.$

Nhận xét: (i) Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:

Nhập vào màn hình: $X=X+3.$

Bấm CALC và cho $X=-1$ (ứng với $u_1=-1$)

Để tính u_n cần bấm "=" ra kết quả liên tiếp $n-1$ lần. Ví dụ để tính u_2 ta bấm "=" ra kết quả lần đầu tiên, bấm "=" ra kết quả thứ hai chính là $u_3,...$

(ii) Vì $u_1=-1$ nên loại các đáp án B, C. Còn lại các đáp án A, C; để biết đáp án nào ta chỉ cần kiểm tra u_2 (vì u_2 ở hai đáp án là khác nhau): $u_2=u_1+3=2$

Câu 4: Cho dãy số $(u_n),$ biết $u_n=\frac{2n^2-1}{n^2+3}.$ Tìm số hạng $u_5.$

A. $u_5=\frac{1}{4}.$ **B.** $u_5=\frac{17}{12}.$ **C.** $u_5=\frac{7}{4}.$ **D.** $u_5=\frac{71}{39}.$

Lời giải.

Chọn C

Thế trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_5=\frac{2.5^2-1}{5^2+3}=\frac{49}{28}=\frac{7}{4}.$

Câu 5: Cho dãy số $(u_n),$ biết $u_n=(-1)^n.2n.$ Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_1=-2.$ **B.** $u_2=4.$ **C.** $u_3=-6.$ **D.** $u_4=-8.$

Lời giải.

Chọn D

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC:

$$u_1=-2.1=-2; u_2=(-1)^2.2.2=4, u_3=(-1)^3 2.3=-6; u_4=(-1)^4 2.4=8.$$

Nhận xét: Dễ thấy $u_n>0$ khi n chẵn và ngược lại nên đáp án D sai.

Câu 6: Cho dãy số $(u_n),$ biết $u_n=(-1)^n.\frac{2^n}{n}.$ Tìm số hạng $u_3.$

A. $u_3=\frac{8}{3}$. **B.** $u_3=2$. **C.** $u_3=-2$. **D.** $u_3=-\frac{8}{3}$.

Lời giải.

Chọn D

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_3=(-1)^3.\frac{2^3}{3}=-\frac{8}{3}$.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+1)\end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4=\frac{5}{9}$. **B.** $u_4=1$. **C.** $u_4=\frac{2}{3}$. **D.** $u_4=\frac{14}{27}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có

$$u_2=\frac{1}{3}(u_1+1)=\frac{1}{3}(2+1)=1;\ u_3=\frac{1}{3}(u_2+1)=\frac{2}{3};\ u_4=\frac{1}{3}(u_3+1)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5}{9}.$$

Nhận xét: Có thể dùng chức năng "lặp" trong MTCT để tính nhanh.

Câu 8: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+2\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_2=\frac{5}{2}$. **B.** $u_3=\frac{15}{4}$. **C.** $u_4=\frac{31}{8}$. **D.** $u_5=\frac{63}{16}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $\begin{cases}u_2=\frac{u_1}{2}+2=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2};\ u_3=\frac{u_2}{2}+2=\frac{7}{4}+2=\frac{15}{4}\\u_4=\frac{u_3}{2}+2=\frac{15}{8}+2=\frac{31}{8};\ u_5=\frac{u_4}{2}+2=\frac{31}{16}+2=\frac{63}{16}.\end{cases}$

Nhận xét: Dùng chức năng "lặp" trong MTCT để tính nhanh.

Câu 9: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải.

Chọn D

Ta cần tìm n sao cho $u_n=\frac{n+1}{2n+1}=\frac{8}{15}\Leftrightarrow 15n+15=16n+8\Leftrightarrow n=7$.

Nhận xét: Có thể dùng chức năng CALC để kiểm tra nhanh.

Câu 10: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n+5}{5n-4}$. Số $\dfrac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải.

Chọn A

Dùng chức năng "lặp" để kiểm tra đáp án. Hoặc giải cụ thể như sau:

$u_n = \dfrac{2n+5}{5n-4} = \dfrac{7}{12} \Leftrightarrow 24n+60 = 35n-28 \Leftrightarrow 11n = 88 \Leftrightarrow n = 8.$

Câu 11: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = 2^n.2.$ **B.** $u_{n+1} = 2^n + 1.$ **C.** $u_{n+1} = 2(n+1).$ **D.** $u_{n+1} = 2^n + 2.$

Lời giải.

Chọn A

Thay n bằng $n+1$ trong công thức u_n ta được: $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2.2^n$.

Câu 12: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}.

A. $u_{2n-1} = 3^2.3^n - 1.$ **B.** $u_{2n-1} = 3^n.3^{n-1}.$ **C.** $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1.$ **D.** $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $u_n = 3^n \xrightarrow{n \leftrightarrow 2n-1} u_{2n-1} = 3^{2n-1} = 3^n.3^{n-1}.$

Câu 13: Cho dãy số (u_n), với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n-1} = 5^{n-1}.$ **B.** $u_{n-1} = 5^n.$ **C.** $u_{n-1} = 5.5^{n+1}.$ **D.** $u_{n-1} = 5.5^{n-1}.$

Lời giải.

Chọn B

$u_n = 5^{n+1} \xrightarrow{n \leftrightarrow n-1} u_{n-1} = 5^{(n-1)+1} = 5^n.$

Câu 14: Cho dãy số (u_n), với $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}.$ **B.** $u_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}.$

C. $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+3}.$ **D.** $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}.$

Lời giải.

Chọn D

$u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \xrightarrow{n \leftrightarrow n+1} u_{n+1} = \left(\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}.$

Câu 15: Dãy số có các số hạng cho bởi: $0;\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\cdots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n=\frac{n+1}{n}$. **B.** $u_n=\frac{n}{n+1}$. **C.** $u_n=\frac{n-1}{n}$. **D.** $u_n=\frac{n^2-n}{n+1}$.

Lời giải.

Chọn C

Vì $u_1=0$ nên loại các đáp án A và B. Ta kiểm tra $u_2=\frac{1}{2}$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n=\frac{n-1}{n}\longrightarrow u_2=\frac{1}{2}$

Xét đáp án D: $u_n=\frac{n^2-n}{n+1}\longrightarrow u_2=\frac{2}{3}\neq\frac{1}{2}\longrightarrow$ loại

Nhận xét: $u_1=0=\frac{1-1}{1};u_2=\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2};u_3=\frac{2}{3}=\frac{3-1}{3},...$ nên đoán $u_n=\frac{n-1}{n}$.

Câu 16: Dãy số có các số hạnh cho bởi: $-1;1;-1;1;-1;\cdots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n=1$. **B.** $u_n=-1$. **C.** $u_n=(-1)^n$. **D.** $u_n=(-1)^{n+1}$.

Lời giải.

Chọn C

Vì dãy số đa cho không phải là dãy hằng nên loại các đáp án A và B. Ta kiểm tra $u_1=-1$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n=(-1)^n\longrightarrow u_1=-1$

Xét đáp án D: $u_n=(-1)^{n+1}\longrightarrow u_1=(-1)^2=1\neq-1\longrightarrow$ loại D.

Câu 17: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2;0;2;4;6;\cdots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n=-2n$. **B.** $u_n=n-2$. **C.** $u_n=-2(n+1)$. **D.** $u_n=2n-4$.

Lời giải.

Chọn D

Kiểm tra $u_1=-2$ ta loại các đáp án B, C. Ta kiểm tra $u_2=0$ ở các đáp án A, D:

Xét đáp án A: $u_n=2n\Rightarrow u_2=4\neq0\longrightarrow$ loại A.

Xét đáp án D: $u_n=2n-4=2.2-4=0$

Nhận xét: Dãy $2;4;6;...$ có công thức là $2n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ nên dãy $-2;0;2;4;6;\cdots$. có được bằng cách "tịnh tiến" $2n$ sang trái 4 đơn vị, tức là $2n-4$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = n^{n-1}$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = 2^{n+1}$. **D.** $u_n = 2$.

Lời giải.

Chọn B

Từ công thức $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 = 2.2 = 4 \\ u_3 = 2u_2 = 2.4 = 8 \end{cases}$.

Xét đáp án A với $n = 1 \longrightarrow u_1 = 1^{1-1} = 1^0 = 1 \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n = 1 \longrightarrow u_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4 \longrightarrow$ C loại.

Dễ thấy đáp án D không thỏa mãn.

Câu 19: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \dfrac{1}{2} + 2(n-1)$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2(n-1)$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{2} - 2n$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{2} + 2n$.

Lời giải.

Chọn B

Từ công thức $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 = \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2} \\ u_3 = u_2 - 2 = -\dfrac{3}{2} - 2 = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$.

Xét đáp án A với $n = 2 \longrightarrow u_2 = \dfrac{1}{2} + 2(2-1) = \dfrac{5}{2} \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n = 2 \longrightarrow u_2 = \dfrac{1}{2} - 2.2 = \dfrac{1}{2} - 4 = -\dfrac{7}{2} \longrightarrow$ C loại.

Xét đáp án D với $n = 1 \longrightarrow u_1 = \dfrac{1}{2} + 2.1 = \dfrac{5}{2} \longrightarrow$ D loại.

Câu 20: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$. **B.** $u_n = 2 + n^2$.

C. $u_n = 2+(n+1)^2$.

D. $u_n = 2-(n-1)^2$.

Lời giải.

Chọn A

Kiểm tra $u_1 = 2$ ta loại các đáp án B và C. Ta có $u_2 = u_1 + 2.1 - 1 = 3.$

Xét đáp án A: $u_n = 2+(n-1)^2 \longrightarrow u_2 = 3$

Hoặc kiểm tra: $u_{n+1} - u_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1.$

Xét đáp án D: $u_n = 2-(n-1)^2 \longrightarrow u_2 = 1 \longrightarrow$ loại D. Hoặc kiểm tra:

$u_{n+1} - u_n = (n-1)^2 - n^2 = -2n+1 \neq 2n-1.$

Câu 21: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B. $u_n = 1+\dfrac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

D. $u_n = 1+\dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Lời giải.

Chọn C

Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án A. Ta có $u_2 = u_1 + 1^2 = 2.$

Xét đáp án B: $u_n = 1+\dfrac{n(n-1)(2n+2)}{6} \longrightarrow u_2 = 1+\dfrac{2.1.6}{6} = 3 \neq 2 \longrightarrow$ B loại.

Xét đáp án C: $u_n = u_n = 1+\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6} \longrightarrow u_2 = 1+\dfrac{2.1.3}{6} = 2$

Xét đáp án D: $u_n = 1+\dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6}. \longrightarrow u_2 = 1+\dfrac{2.3.2}{6} = 3 \neq 2 \longrightarrow$ D loại.

Câu 22: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \dfrac{-n+1}{n}$.

B. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

C. $u_n = -\dfrac{n+1}{n}$.

D. $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$.

Lời giải.

Chọn C

Kiểm tra $u_1=-2$ ta loại các đáp án A, B. Ta có $u_2=-2-\dfrac{1}{u_1}=-\dfrac{3}{2}.$

Xét đáp án C: $u_n=-\dfrac{n+1}{n}\longrightarrow u_2=-\dfrac{3}{2}$

Xét đáp án D : $u_n=-\dfrac{n}{n+1}\longrightarrow u_2=-\dfrac{2}{3}\longrightarrow$ D loại.

Câu 23: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+(-1)^{2n}\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=1+n.$ **B.** $u_n=1-n.$ **C.** $u_n=1+(-1)^{2n}.$ **D.** $u_n=n.$

Lời giải.

Chọn D

Kiểm tra $u_1=1$ ta loại đáp án A, B và C

Câu 24: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n=2\left(3^n\right)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là:

A. $\begin{cases}u_1=6\\u_n=6u_{n-1},\ n>1\end{cases}.$ **B.** $\begin{cases}u_1=6\\u_n=3u_{n-1},\ n>1\end{cases}.$

C. $\begin{cases}u_1=3\\u_n=3u_{n-1},\ n>1\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}u_1=3\\u_n=6u_{n-1},\ n>1\end{cases}.$

Lời giải.

Chọn B

Vì $u_1=2.3^1=6$ nên ta loại các đáp án C và D. Ta có $u_2=2.3^2=18.$

Xét đáp án A: $\begin{cases}u_1=6\\u_n=6u_{n-1},\ n>1\end{cases}\longrightarrow u_2=6u_1=6.6=36\longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B: $\begin{cases}u_1=6\\u_n=3u_{n-1},\ n>1\end{cases}\longrightarrow u_2=3u_1=3.6=18$

Câu 25: Cho dãy số (a_n), được xác định $\begin{cases}a_1=3\\a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n,\ n\geq 1\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\dfrac{93}{16}.$ **B.** $a_{10}=\dfrac{3}{512}.$

C. $a_{n+1}+a_n=\dfrac{9}{2^n}.$ **D.** $a_n=\dfrac{3}{2^n}.$

Lời giải.

Chọn D

Ta có $a_1=3; a_2=\frac{u_1}{2}; a_3=\frac{u_2}{2}=\frac{u_1}{2^2}; a_4=\frac{u_3}{2}=\frac{u_1}{2^3},...\longrightarrow u_n=\frac{u_1}{2^{n-1}}=\frac{3}{2^{n-1}}$ nên suy ra đáp án D sai.

Xét đáp án A:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)=3.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{93}{16}\longrightarrow \text{A đúng.}$$

Xét đáp án B: $a_{10}=\frac{3}{2^9}=\frac{3}{512}\longrightarrow$ B đúng.

Xét đáp án **C.** $a_{n+1}+a_n=\frac{3}{2^n}+\frac{3}{2^{n-1}}=\frac{3+3.2}{2^n}=\frac{9}{2^n}\longrightarrow$ C đúng.

Dạng 2. Tính tăng giảm và bị chặn của dãy số

1. Phương pháp

Xét tính tăng giảm

- (u_n) *là dãy số tăng* $\Leftrightarrow u_{n+1}>u_n,\ \forall n\in N^*$.

$$\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n>0,\ \forall n\in N^*\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}>1,\forall n\in N^*\ (u_n>0).$$

- (u_n) *là dãy số giảm* $\Leftrightarrow u_{n+1}<u_n$ *với* $\forall n\in N^*$.

$$\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n<0,\ \forall n\in N^*\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}<1,\ \forall n\in N^*\ (u_n>0).$$

Dãy số bị chặn

- (u_n) *là dãy số bị chăn trên* $\Leftrightarrow \exists M\in R: u_n\le M,\ \forall n\in N^*$.
- (u_n) *là dãy số bị chặn dưới* $\Leftrightarrow \exists m\in R: u_n\ge m,\ \forall n\in N^*$.
- (u_n) *là dãy số bị chặn* $\Leftrightarrow \exists m, M\in R: m\le u_n\le M,\ \forall n\in N^*$.

1. Phương pháp

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết

a) $u_n=\frac{2n+1}{3n-2}$; b) $u_n=\frac{2-n}{\sqrt{n}}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n=\frac{2n+1}{3n-2}=\frac{2}{3}+\frac{\frac{7}{3}}{3(n+1)-2}$; $u_{n+1}-u_n<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy dãy giảm

Lưu ý: Ta không cần phải chia như vậy, làm cũng rất nhanh.

b)

$u_n = \frac{2-n}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$

$u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{n(n+1)}} + 1\right) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy giảm

Ví dụ 2. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết

a) $u_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$; b) $u_n = \frac{2^{n+2}}{\sqrt{n}}$.

Hướng dẫn giải

a) Xét $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1}.\frac{2n+5}{(n+3)(n+2)} = \begin{cases} \frac{2n+5}{(n+3)(n+2)} > 0, n = 2k+1 \\ \frac{2n+5}{(n+3)(n+2)} < 0, n = 2k \end{cases}$

Vậy dãy đã cho không tăng không giảm

b) Xét $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1}.\frac{1}{(n+4)(n+5)} = \begin{cases} \frac{1}{(n+4)(n+5)} > 0, n = 2k+1 \\ \frac{1}{(n+4)(n+5)} < 0, n = 2k \end{cases}$

Vậy dãy đã cho không tăng không giảm

Ví dụ 3. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n)

a) $u_n = \frac{n^2+2n}{n^2+n+1}$; b) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = \frac{n^2+2n}{n^2+n+1} = 1 + \frac{n-1}{n^2+n+1}$

Ta có:

$0 \le \frac{n-1}{n^2+n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra: $1 \le u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số đã cho bị chặn

b) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \Rightarrow 0 < u_n < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ví dụ 4. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n)

a) $u_n = (-1)^n \cos\frac{\pi}{2n}$; b) $u_n = \frac{4\sin n + 4\cos\left(3n^2+1\right)}{5n^2+n}$

Hướng dẫn giải

a) $u_n = (-1)^n \cos\dfrac{\pi}{2n} \Rightarrow |u_n| = \left|(-1)^n \cos\dfrac{\pi}{2n}\right| = \left|\cos\dfrac{\pi}{2n}\right| \le 1$

$\Rightarrow -1 \le u_n \le 1$

Vậy dãy đã cho bị chặn.

b) $u_n = \dfrac{4\sin n + 4\cos\left(3n^2+1\right)}{5n^2+n} \Rightarrow |u_n| = \dfrac{\left|4\sin n + 4\cos\left(3n^2+1\right)\right|}{5n^2+n} < \dfrac{5}{5n^2} < 1$

Suy ra: $-1 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy đã cho bị chặn.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

A. $1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\cdots$

B. $1;\ -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots$

C. $1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\cdots$

D. $1;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots$

Lời giải.

Chọn C

Xét đáp án A: $1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\cdots$ đây là dãy hằng nên không tăng không giảm.

Xét đáp án B: $1;\ -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots \longrightarrow u_1 > u_2 < u_3 \longrightarrow$ loại B

Xét đáp án C: $1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\cdots \longrightarrow u_n < u_{n+1},\ n \in \mathbb{N}^*$

Xét đáp án D: $1;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots \longrightarrow u_1 > u_2 > u_3 \ldots > u_n > \ldots \longrightarrow$ loại **D.**

Câu 2: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \dfrac{1}{2^n}.$ **B.** $u_n = \dfrac{1}{n}.$ **C.** $u_n = \dfrac{n+5}{3n+1}.$ **D.** $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}.$

Lời giải.

Chọn D

Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\dfrac{1}{2^n}; \dfrac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại A,B.

Xét đáp án C: $u_n = \dfrac{n+5}{3n+1} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_2 = \dfrac{7}{6} \end{cases} \longrightarrow u_1 > u_2 \longrightarrow$ loại C

Xét đáp án D: $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1} = 2 - \dfrac{3}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right) > 0$

Câu 3: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=\dfrac{2}{3^n}$. **B.** $u_n=\dfrac{3}{n}$. **C.** $u_n=2^n$. **D.** $u_n=(-2)^n$.

Lời giải.

Chọn C

Xét đáp án C: $u_n=2^n\longrightarrow u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-2^n=2^n>0\longrightarrow$

Vì $2^n;n$ là các dãy dương và tăng nên $\dfrac{1}{2^n};\dfrac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án A và B.

Xét đáp án D: $u_n=(-2)^n\longrightarrow\begin{cases}u_2=4\\u_3=-8\end{cases}\longrightarrow u_2>u_3\longrightarrow$ loại D.

Câu 4: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n=\dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n=\dfrac{3n-1}{n+1}$. **C.** $u_n=n^2$. **D.** $u_n=\sqrt{n+2}$.

Lời giải.

Chọn A

Vì 2^n là dãy dương và tăng nên $\dfrac{1}{2^n}$ là dãy giảm $\longrightarrow$

Xét B: $u_n=\dfrac{3n-1}{n+1}\longrightarrow\begin{cases}u_1=1\\u_2=\dfrac{5}{3}\end{cases}\longrightarrow u_1<u_2\longrightarrow$ loại B. Hoặc

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3n+2}{n+2}-\frac{3n-1}{n+1}=\frac{4}{(n+1)(n+2)}>0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét C: $u_n=n^2\longrightarrow u_{n+1}-u_n=(n+1)^2-n^2=2n+1>0\longrightarrow$ loại C.

Xét D: $u_n=\sqrt{n+2}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}=\dfrac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}>0\longrightarrow$ loại D.

Câu 5: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n=\sin n$. **B.** $u_n=\dfrac{n^2+1}{n}$.

C. $u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$. **D.** $u_n=(-1)^n.(2^n+1)$.

Lời giải.

Chọn C

A. $u_n=\sin n\Rightarrow u_{n+1}-u_n=2\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\sin\dfrac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n nên đáp án A sai. Hoặc dễ thấy $\sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy $\sin n$ không tăng, không giảm.

B. $u_n=\dfrac{n^2+1}{n}=n+\dfrac{1}{n}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=1+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)}>0$ nên dãy đã cho tăng nên B sai.

C. $u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, dãy $\sqrt{n}+\sqrt{n-1}>0$ là dãy tăng nên suy ra u_n giảm.

D. $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách trắc nghiệm.

A. $u_n=\sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy này không tăng không giảm.

B. $u_n=\dfrac{n^2+1}{n}$, ta có $\begin{cases}n=1\to u_1=2\\ n=2\to u_2=\dfrac{5}{2}\end{cases}\longrightarrow u_1<u_2\longrightarrow u_n=\dfrac{n^2+1}{n}$ không giảm.

C. $u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$, ta có $\begin{cases}n=1\to u_1=1\\ n=2\to u_2=\sqrt{2}-1\end{cases}\longrightarrow u_1>u_2$ nên dự đoán dãy này giảm.

D. $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách CASIO.

- Các dãy $\sin n;(-1)^n\left(2^n+1\right)$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên các dãy này không tăng không giảm nên loại các đáp án A, **D.**
- Còn lại các đáp án B, C ta chỉ cần kiểm tra một đáp án bằng chức năng TABLE.

Chẳng hạn kiểm tra đáp án B, ta vào chức năng TABLE nhập $F(X)=\dfrac{X^2+1}{X}$ với thiết lập $\text{Start}=1,\ \text{End}=10,\ \text{Step}=1.$

Nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị tăng thì loại B và chọn C, nếu ngược lại nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị giảm dần thị chọn B và loại **C.**

Câu 6: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số $u_n=\dfrac{1}{n}-2$ là dãy tăng.

B. Dãy số $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$ là dãy giảm.

C. Dãu số $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n=2n+\cos\dfrac{1}{n}$ là dãy tăng.

Lời giải.

Chọn D

Xét đáp án A: $u_n=\dfrac{1}{n}-2\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}<0\longrightarrow$ loại **A.**

Xét đáp án B: $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$ là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại **B.**

Xét đáp án C: $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}=1-\dfrac{2}{n+1}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=2\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)>0\longrightarrow$ loại **C.**

Xét đáp án D: $u_n=2n+\cos\dfrac{1}{n}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\left(2-\cos\dfrac{1}{n+1}\right)+\cos\dfrac{1}{n+2}>0$ nên

Câu 7: Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. Dãy số $u_n=\dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm. **B.** Dãy số $u_n=2n^2-5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm. **D.** Dãy số $u_n=n+\sin^2 n$ là dãy tăng.

Lời giải.

Chọn C

Xét A: $u_n=\dfrac{1-n}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}<0$ nên dãy (u_n) là dãy giảm nên C đúng.

Xét đáp án B: $u_n=2n^2-5$ là dãy tăng vì n^2 là dãy tăng nên B đúng. Hoặc

$$u_{n+1}-u_n=2(2n+1)>0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét đáp án C: $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n>0\longrightarrow\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+2}{n+1}.\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n>1\longrightarrow(u_n)$ là dãy tăng nên

Xét đáp án D: $u_n=n+\sin^2 n\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\left(1-\sin^2(n+1)\right)+\sin^2 n>0$ nên D đúng.

Câu 8: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\dfrac{3n-1}{3n+1}.$ Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\dfrac{1}{3}.$ **B.** $1.$ **C.** $\dfrac{1}{2}.$ **D.** $0.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $u_n=\dfrac{3n-1}{3n+1}=1-\dfrac{2}{3n+1}<1.$ Mặt khác: $u_2=\dfrac{5}{7}>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2}>0$ nên suy ra dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 1.

Câu 9: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

A. $u_n=n^2.$ **B.** $u_n=2^n.$ **C.** $u_n=\dfrac{1}{n}.$ **D.** $u_n=\sqrt{n+1}.$

Lời giải.

Chọn C

Các dãy số $n^2;\ 2^n;\ n+1$ là các dãy tăng đến vô hạn khi n tăng lên vô hạn nên chúng không bị chặn trên (có thể dùng chức năng TABLE của MTCT để kiểm tra).

Nhận xét: $u_n=\dfrac{1}{n}\le 1$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 1.

Câu 10: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\cos n+\sin n.$ Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $0.$ **B.** $1.$ **C.** $\sqrt{2}.$ **D.** Không bị chặn trên.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $u_n \xrightarrow{MTCT} u_1 = \sin 1 + \cos 1 > 1 > 0$ nên loại các đáp án A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần 1 số hạn nào đó của dãy số lớn hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn trên bởi $\alpha.$)

Ta có $u_n = \cos n + \sin n = \sqrt{2}\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

Câu 11: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sin n - \cos n.$ Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. $0.$ **B.** $-1.$ **C.** $-\sqrt{2}.$ **D.** Không bị chặn dưới.

Lời giải.

Chọn C

$u_n \xrightarrow{MTCT} u_5 = \sin 5 - \cos 5 < -1 < 0 \longrightarrow$ loại A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần có một số hạng nào đó của dãy số nhỏ hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn dưới với số $\alpha.$)

Ta có $u_n = \sqrt{2}\sin\left(n - \frac{\pi}{4}\right) \ge -\sqrt{2}$

Câu 12: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sqrt{3}\cos n - \sin n.$ Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m = -2;\ M = 2.$ **B.** $m = -\frac{1}{2};\ M = \sqrt{3} + 1.$

C. $m = -\sqrt{3} + 1;\ M = \sqrt{3} - 1.$ **D.** $m = -\frac{1}{2};\ M = \frac{1}{2}.$

Lời giải.

Chọn A

$u_n \xrightarrow{MTCT\,(TABLE)} u_1 > \sqrt{3} - 1 > \frac{1}{2} \longrightarrow$ loại C và D.

$u_n \xrightarrow{MTCT\,(TABLE)} u_4 < -\frac{1}{2} \longrightarrow$ loại B. Vậy

Nhận xét: $u_n = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n - \frac{1}{2}\cos n\right) = 2\sin\left(n - \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow -2 \le u_n \le 2.$

Câu 13: Cho dãy số $(u_n),$ biết $u_n = (-1)^n.5^{2n+5}.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Chọn D

Nếu n chẵn thì $u_n = 5^{2n+1} > 0$ tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn trên.

Nếu n lẻ thì $u_n = -5^{2n+1} < 0$ giảm xuống vô hạn (âm vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Vậy dãy số đã cho không bị chặn.

Câu 14: Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + ... + \frac{1}{n(n+3)}, \forall n = 1;\ 2;\ 3\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $u_n > 0 \longrightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k(k+3)} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\ (k \in \mathbb{N}^*)$

nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Câu 15: Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}, \forall n = 2;\ 3;\ 4;\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $u_n > 0 \longrightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\ (k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2)$

nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Câu 16: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \sqrt{n^2+1}.$ **B.** $u_n = n+\frac{1}{n}.$ **C.** $u_n = 2^n+1.$ **D.** $u_n = \frac{n}{n+1}.$

Lời giải.

Chọn D

Các dãy số $n^2; n; 2^n$ dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn, nên các dãy $\sqrt{n^2+1}; n+\frac{1}{n}; 2^n+1$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0 < u_n = \frac{n}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1} < 1.$

Câu 17: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}.$ **B.** $u_n = 3^n.$ **C.** $u_n = \sqrt{n+1}.$ **D.** $u_n = n^2.$

Lời giải.

Chọn A

Các dãy số $n^2; n; 3^n$ dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên các dãy $n^2; \sqrt{n+1}; 3^n$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0 < u_n = \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2}.$

Câu 18: Cho dãy số (u_n), xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{6} \le u_n < \frac{5}{2}.$ **B.** $\sqrt{6} \le u_n < 3.$

C. $\sqrt{6} \le u_n < 2.$ **D.** $\sqrt{6} \le u_n \le 2\sqrt{3}.$

Lời giải.

Chọn D

Ta có $u_2 = \sqrt{12} > 3 > \frac{5}{2} > 2$ nên loại các đáp án A, B, **C.**

Nhận xét: Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} \ge 0 \end{cases} \longrightarrow u_n \ge 0 \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \ge \sqrt{6} \end{cases} \longrightarrow u_n \ge \sqrt{6}.$$

Ta chứng minh quy nạp $u_n \le 2\sqrt{3}$.

$$u_1 \le 2\sqrt{3}; u_k \le 2\sqrt{3} \longrightarrow u_{k+1} = \sqrt{6+u_{k+1}} \le \sqrt{6+2\sqrt{3}} < \sqrt{6+6} = 2\sqrt{3}.$$

Câu 19: Cho dãy số (u_n), với $u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$.

B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

Lời giải.

Chọn B

$u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1} \longrightarrow u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{(n+1)+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+2} \longrightarrow$ A sai.

$u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1} \longrightarrow -1 \le u_n \le 1 \longrightarrow$ B đúng.

$u_{n+1} - u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+2} - \sin\dfrac{\pi}{n+1} < 0 \left(0 < \dfrac{\pi}{n+2} < \dfrac{\pi}{n+1} \le \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$ C, D sai.

Câu 20: Cho dãy số (u_n), với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Lời giải.

Chọn C

$u_n = (-1)^n$ là dãy thay dấu nên không tăng, không giảm $\longrightarrow$ A, B sai.

Tập giá trị của dãy $u_n = (-1)^n$ là $\{-1;1\} \longrightarrow -1 \le u_n \le 1 \longrightarrow$ C đúng.

BÀI 4. CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi:

$$\boxed{u_{n+1} = u_n q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.}$$

Đặc biệt:

- Khi $q = 0$, cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, ..., 0, ...$
- Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, ..., u_1, ...$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q, cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, ..., 0, ...$

II - SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Định lí 1

Nếu cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$\boxed{u_n = u_1.q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.}$$

III – TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ NHÂN

Định lí 2

Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$\boxed{u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \text{ với } k \geq 2.}$$

IV – TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

Định lí 3

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Khi đó

$$\boxed{S_n = \frac{u_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}.}$$

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì cấp số nhân là $u_1, u_1, u_1, ..., u_1, ...$ khi đó $S_n = nu_1$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định cấp số nhân, số hạng , công bội của cấp số nhân

1. Phương pháp

- Xác định một cấp số nhân là xác định số hạng đầu u_1 và công bội q
- Từ những giải thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và q rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $128;\ -64;\ 32;\ -16;\ 8;\ ...$ **B.** $\sqrt{2};\ 2;\ 4;\ 4\sqrt{2};\ ....$

C. $5;\ 6;\ 7;\ 8;\ ...$ **D.** $15;\ 5;\ 1;\ \frac{1}{5};\ ...$

Lời giải.

Chọn A

Dãy (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n = qu_{n-1}\ (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \cdots = q\ (u_n \neq 0)$, q gọi là công bội.

Xét đáp án A: $128;\ -64;\ 32;\ -16;\ 8;\ ... \longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{2} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3}$

Xét đáp án B: $\sqrt{2};\ 2;\ 4;\ 4\sqrt{2};\ .... \longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 2 = \frac{u_3}{u_2} \longrightarrow$ loại B.

Tương tự, ta cũng loại các đáp án C, D.

Ví dụ 2: Với giá trị x nào dưới đấy thì các số $-4;\ x;\ -9$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

A. $x = 36.$ **B.** $x = -\frac{13}{2}.$ **C.** $x = 6.$ **D.** $x = -36.$

Lời giải.

Chọn C

Nhận xét: ba số $a; b; c$ theo thứ tự đó lấp thành cấp số nhân $\Leftrightarrow ac = b^2.$

Ví dụ 3: Tìm $b > 0$ để các số $\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{b};\ \sqrt{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $b = -1.$ **B.** $b = 1.$ **C.** $b = 2.$ **D.** $b = -2.$

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân $\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{b};\ \sqrt{2} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} = \left(\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow b = 1$

Ví dụ 4: Cho cấp số nhân $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \cdots; \frac{1}{4096}$. Hỏi số $\frac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân: $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \cdots; \frac{1}{4096} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}.$

$u_n = \frac{1}{4096} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{12}} \Leftrightarrow n = 12$

Ví dụ 5: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1.u_2.u_3 = 64 \end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2 = 4.$ **B.** $u_2 = 6.$ **C.** $u_2 = 8.$ **D.** $u_2 = 10.$

Lời giải.

Chọn A

Từ $u_1.u_2.u_3 = 64 \Leftrightarrow u_1.u_1q.u_1q^2 = 64 \Leftrightarrow (u_1q)^3 = 64 \Leftrightarrow u_1q = 4$ hay $u_2 = 4$.

Thay vào hệ ban đầu ta được $\begin{cases} u_1 + 4 + u_3 = 14 \\ u_1.4.u_3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1.u_3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ u_3 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_3 = 8 \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \longrightarrow u_2 = u_1q = 4.$

Ví dụ 6: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$. Tính u_3.

A. $u_3 = 10.$ **B.** $u_3 = 15.$ **C.** $u_3 = 20.$ **D.** $u_3 = 25.$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1q^2 + u_1q^4 = 65 \\ u_1 + u_1q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 - q^2 + q^4\right) = 65 \quad (1) \\ u_1\left(1 + q^6\right) = 325 \quad (2) \end{cases}$.

Lấy (2) chia (1), ta được $\frac{1+q^6}{1-q^2+q^4} = \frac{325}{65} \Leftrightarrow 1 + q^2 = 5 \Leftrightarrow q = \pm 2$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = -2 \end{cases} \longrightarrow u_3 = u_1q^2 = 5.4 = 20.$

Dạng 2. Tính tổng của cấp số nhân

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=-2$ và $u_5=54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{1000}=\dfrac{1-3^{1000}}{4}$. **B.** $S_{1000}=\dfrac{3^{1000}-1}{2}$. **C.** $S_{1000}=\dfrac{3^{1000}-1}{6}$. **D.** $S_{1000}=\dfrac{1-3^{1000}}{6}$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $\begin{cases}-2=u_2=u_1q\\54=u_5=u_1q^4=u_1q.q^3=-2q^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{2}{3}\\q=-3\end{cases}$. Khi đó

$S_{100}=u_1.\dfrac{1-q^{100}}{1-q}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1-(-3)^{100}}{1-(-3)}=\dfrac{1-3^{100}}{6}$

Ví dụ 2: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2};\ 1;\ \cdots;\ 2048$. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S=2047,75$. **B.** $S=2049,75$. **C.** $S=4095,75$. **D.** $S=4096,75$.

Lời giải.

Chọn A

Cấp số nhân đã cho có

$$\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{4}\longrightarrow 2048=2^{11}=u_1q^{n-1}=\dfrac{1}{2}.2^{n-1}=2^{n-2}\Leftrightarrow n=13.\\q=2\end{cases}$$

Vậy cấp số nhân đã cho có tất cả 13 số hạng. Vậy

$S_{13}=u_1.\dfrac{1-q^{13}}{1-q}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1-2^{13}}{1-2}=2047,75$

Ví dụ 3: Tính tổng $S=-2+4-8+16-32+64-...+(-2)^{n-1}+(-2)^n$ với $n\geq 1,\ n\in\mathbb{N}$.

A. $S=2n$. **B.** $S=2^n$.

C. $S=\dfrac{-2\left(1-2^n\right)}{1-2}$. **D.** $S=-2.\dfrac{1-(-2)^n}{3}$.

Lời giải.

Chọn D

Các số hạng $-2;\ 4;\ -8;\ 16;\ -32;\ 64;...;(-2)^{n-1};\ (-2)^n$ trong tổng S gồm có n số hạng theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân có $u_1=-2,\ q=-2$. Vậy

$$S = S_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q} = -2.\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = -2.\frac{1-(-2)^n}{3}$$

Ví dụ 4: Gọi $S = 9+99+999+...+999...9$ (n số 9) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S = \frac{10^n-1}{9}.$ **B.** $S = 10\left(\frac{10^n-1}{9}\right).$

C. $S = 10\left(\frac{10^n-1}{9}\right)-n.$ **D.** $S = 10\left(\frac{10^n-1}{9}\right)+n.$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $S = 9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{\text{n số 9}} = (10-1)+(10^2-1)+...+(10^n-1)$

$$= 10+10^2+...+10^n-n = 10.\frac{1-10^n}{1-10}-n.$$

Ví dụ 5 : Cho cấp số nhân (u_n) có tổng của hai số hạng đầu tiên bằng 4, tổng của ba số hạng đầu tiên bằng 13. Tính tổng của năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho, biết công bội của cấp số nhân là một số dương.

A. $S_5 = \frac{181}{16}.$ **B.** $S_5 = 141.$ **C.** $S_5 = 121.$ **D.** $S_5 = \frac{35}{16}.$

Lời giải.

Chọn C

$$\begin{cases} 4 = S_2 = u_1+u_2 = u_1(1+q) \\ 13 = S_3 = u_1(1+q+q^2) \end{cases} \Leftrightarrow 4(1+q+q^2) = 13(1+q) \Leftrightarrow q = 3\ (q>0) \Rightarrow u_1 = 1.$$

Khi đó $S_5 = u_1.\frac{1-q^5}{1-q} = 1.\frac{1-3^5}{1-3} = 121$

Dạng 3. Các bài toán thực tế

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nữa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12\ 288\ m^2$). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6m^2.$ **B.** $8m^2.$ **C.** $10m^2.$ **D.** $12m^2.$

Lời giải.

Chọn A

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{2}$ và $u_1=\frac{12288}{2}=6144.$ Khi đó diện tích mặt trên cùng là

$u_{11}=u_1q^{10}=\frac{6144}{2^{10}}=6$

Ví dụ 2: Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ $10.$ Hỏi du khác trên thắng hay thua bao nhiêu?

A. Hòa vốn.

B. Thua 20000 đồng.

C. Thắng 20000 đồng.

D. Thua 40000 đồng.

Lời giải.

Chọn C

Số tiền du khác đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1=20\,000$ và công bội $q=2.$

Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9=u_1+u_2+...+u_9=\frac{u_1\left(1-p^9\right)}{1-p}=10220000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10}=u_1.p^9=10240000$

Ta có $u_{10}-S_9=20\,000>0$ nên du khách thắng 20 000.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải là một cấp số nhân?

A. $2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots$

B. $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots$

C. $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots$

D. $a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots(a\neq 0).$

Lời giải.

Chọn C

Xét đáp án C: $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots\longrightarrow\frac{u_2}{u_1}=4\neq\frac{9}{4}=\frac{u_3}{u_2}$

Các đáp án A, B, D đều là các cấp số nhân.

Nhận xét: Dãy (u_n) với $u_n\neq 0$ là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n=a.q^n$, tức là các số hạng của nó đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của cùng một cơ số q (công bội), các số hạng liên tiếp (kể từ số hạng thứ hai) thì số mũ của chúng cách đều nhau. Ví dụ

$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n=2^n.$

$1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n=(-1)^n.$

$a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots (a\neq 0)\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n=a^{2n-1}=\frac{1}{a}.\left(a^2\right)^n$.

Câu 2: Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \cdots$ **B.** $3;\ 3^2;\ 3^3;\ 3^4;\ \cdots$

C. $4;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \cdots$ **D.** $\frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi^2};\ \frac{1}{\pi^4};\ \frac{1}{\pi^6};\ \cdots$

Lời giải.

Chọn D

Các đáp án A, B, C đều là các cấp số nhân công bội lần lượt là $2;3;\frac{1}{2}$.

Xét đáp án D: $\frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi^2};\ \frac{1}{\pi^4};\ \frac{1}{\pi^6};\ \cdots\longrightarrow\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{\pi}\neq\frac{1}{\pi^2}=\frac{u_3}{u_2}$

Câu 3: Dãy số $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ \cdots$ là một cấp số nhân với:

A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.

B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.

C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.

D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân: $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ldots\longrightarrow\begin{cases}u_1=1\\ q=\frac{u_2}{u_1}=2\end{cases}$

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=-2$ và $q=-5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $-2;\ 10;\ 50;\ -250.$ **B.** $-2;\ 10;\ -50;\ 250.$

C. $-2;\ -10;\ -50;\ -250.$ **D.** $-2;\ 10;\ 50;\ 250.$

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases}u_1=-2\\ q=-5\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=-2\\ u_2=u_1q=10\\ u_3=u_2q=-50\\ u_4=u_3q=250\end{cases}$$

Câu 5: Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là:

A. 720. **B.** 81. **C.** 64. **D.** 56.

Lời giải.

Chọn B

Ta có cấp số nhân (u_n) có:

$$\begin{cases} u_k = 16 \\ u_{k+1} = 36 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{9}{4} \longrightarrow u_{k+2} = u_{k+1} q = 81$$

Câu 6: Tìm x để các số $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 14.$ **B.** $x = 32.$ **C.** $x = 64.$ **D.** $x = 68.$

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó sẽ là $u_1; u_2; u_3; u_4$, ta có

$$\begin{cases} \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \\ \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{2} = \frac{x}{8} \\ \frac{128}{x} = \frac{x}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x^2 = 1024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x = 32 \\ x = -32 \end{cases} \Leftrightarrow x = 32$$

Câu 7: Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1;\ x;\ 2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$ **B.** $x = \pm\frac{1}{3}.$ **C.** $x = \pm\sqrt{3}.$ **D.** $x = \pm 3.$

Lời giải.

Chọn A

Cấp số nhân $2x-1;\ x;\ 2x+1 \longrightarrow (2x-1)(2x+1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Câu 8: Tìm x để ba số $1+x;\ 9+x;\ 33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 1.$ **B.** $x = 3.$ **C.** $x = 7.$ **D.** $x = 3;\ x = 7.$

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân $1+x;\ 9+x;\ 33+x \longrightarrow (1+x)(33+x) = (9+x)^2 \Leftrightarrow x = 3.$

Câu 9: Với giá trị x, y nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là $-2;\ x;\ -18;\ y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

A. $\begin{cases} x = 6 \\ y = -54 \end{cases}.$ **B.** $\begin{cases} x = -10 \\ y = -26 \end{cases}.$ **C.** $\begin{cases} x = -6 \\ y = -54 \end{cases}.$ **D.** $\begin{cases} x = -6 \\ y = 54 \end{cases}.$

Lời giải.

Chọn C

Cấp số nhân: $-2;\ x;\ -18;\ y \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{-2} = \frac{-18}{x} \\ \frac{-18}{x} = \frac{y}{-18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 6 \\ y = \frac{324}{x} = \pm 54 \end{cases}.$ Vậy

$(x; y) = (6; 54)$ hoặc $(x; y) = (-6; -54)$

Câu 10: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $x;\ 12;\ y;\ 192.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x=1; y=144.$ **B.** $x=2; y=72.$ **C.** $x=3; y=48.$ **D.** $x=4; y=36.$

Lời giải.

Chọn C

Cấp số nhân: $x;\ 12;\ y;\ 192 \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{12}{x}=\dfrac{y}{12} \\ \dfrac{y}{12}=\dfrac{192}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{144}{y} \\ y^2=2304 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 48 \end{cases}.$

Câu 11: Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số $5;\ x;\ y;\ 320$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhận. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x=25 \\ y=125 \end{cases}.$ **B.** $\begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases}.$ **C.** $\begin{cases} x=15 \\ y=45 \end{cases}.$ **D.** $\begin{cases} x=30 \\ y=90 \end{cases}.$

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân: $5;\ x;\ y;\ 320 \longrightarrow \begin{cases} u_1=5 \\ q=\dfrac{x}{5} \\ y=u_3=u_1q^2=\dfrac{x^2}{5} \\ 320=u_4=u_1q^3=\dfrac{x^3}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases}.$

Câu 12: Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x-6;\ x$ và $y.$ Tìm y, biết rằng công bội của cấp số nhân là $6.$

A. $y=216.$ **B.** $y=\dfrac{324}{5}.$ **C.** $y=\dfrac{1296}{5}.$ **D.** $y=12.$

Lời giải.

Chọn C

Cấp số nhân $x-6;\ x$ và y có công bội $q=6$ nên ta có

$$\begin{cases} u_1=x-6,\ q=6 \\ x=u_2=u_1q=6(x-6) \\ y=u_3=u_2q^2=36x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{36}{5} \\ y=36.\dfrac{36}{5}=\dfrac{1296}{5} \end{cases}$$

Câu 13: Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x+1$ và $4x^2-1.$ Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

A. $2x-1.$ **B.** $2x+1.$

C. $8x^3-4x^2-2x+1.$ **D.** $8x^3+4x^2-2x-1.$

Lời giải.

Chọn C

Công bội của cấp số nhân là: $q=\dfrac{4x^2-1}{2x+1}=2x-1.$ Vậy số hạng thứ ba của cấp số nhân là: $\left(4x^2-1\right)\left(2x-1\right)=8x^3-4x^2-2x+1$

Câu 14: Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+1,\ n\geq 1\end{cases}.$

B. $\begin{cases}u_1=-1\\u_{n+1}=-3u_n,\ n\geq 1\end{cases}.$

C. $\begin{cases}u_1=-2\\u_{n+1}=2u_n+3,\ n\geq 1\end{cases}.$

D. $\begin{cases}u_1=\dfrac{\pi}{2}\\u_n=\sin\left(\dfrac{\pi}{n-1}\right),\ n\geq 1\end{cases}.$

Lời giải.

Chọn B

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1}=qu_n\longrightarrow$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{3}{2}.5^n.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=5$ và số hạng đầu $u_1=\dfrac{3}{2}.$

C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=5$ và số hạng đầu $u_1=\dfrac{15}{2}.$

D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=\dfrac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1=3.$

Lời giải.

Chọn C

$u_n=\dfrac{3}{2}.5^n$ là cấp số nhân công bội $q=5$ và $u_1=\dfrac{15}{2}$

Câu 16: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n=\dfrac{1}{3^{n-2}}.$ **B.** $u_n=\dfrac{1}{3^n}-1.$ **C.** $u_n=n+\dfrac{1}{3}.$ **D.** $u_n=n^2-\dfrac{1}{3}.$

Lời giải.

Chọn A

Dãy $u_n=\dfrac{1}{3^{n-2}}=9.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases}u_1=3\\q=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Câu 17: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n=7-3n.$ **B.** $u_n=7-3^n.$ **C.** $u_n=\dfrac{7}{3n}.$ **D.** $u_n=7.3^n.$

Lời giải.

Chọn D

Dãy $u_n = 7.3^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 = 21 \\ q = 3 \end{cases} \longrightarrow$

Câu 18: Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $u_1; u_3; u_5; ...$ **B.** $3u_1; 3u_2; 3u_3; ...$

C. $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; ...$ **D.** $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; ...$

Lời giải.

Chọn D

Giả sử (u_n) là cấp số nhân công bội q, thì

Dãy $u_1; u_3; u_5; ...$ là cấp số nhân công bội q^2.

Dãy $3u_1; 3u_2; 3u_3; ...$ là cấp số nhân công bội $2q$.

Dãy $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; ...$ là cấp số nhân công bội $\frac{1}{q}$.

Dãy $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; ...$ không phải là cấp số nhân.

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số nhân cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n = 2^n$.

Câu 19: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $3; 9; 27; 81; ...$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n = 3^{n-1}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = 3^{n+1}$. **D.** $u_n = 3 + 3^n$.

Lời giải.

Chọn B

Cấp số nhân $3; 9; 27; 81; ... \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \frac{9}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 3.3^{n-1} = 3^n$.

Câu 20: Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q = 3$. **B.** $q = -3$. **C.** $q = 2$. **D.** $q = -2$.

Lời giải.

Chọn A

Theo giải thiết ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \longrightarrow 486 = u_6 = u_1 q^5 = 2q^5 \Leftrightarrow q^5 = 243 \Leftrightarrow q = 3.$

Câu 21: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=\frac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_5=-\frac{27}{16}$. **B.** $u_5=-\frac{16}{27}$. **C.** $u_5=\frac{16}{27}$. **D.** $u_5=\frac{27}{16}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases}u_1=-3\\q=\frac{2}{3}\end{cases}\longrightarrow u_5=u_1q^4=-3.\left(\frac{2}{3}\right)^4=-3.\frac{16}{81}=-\frac{16}{27}.$$

Câu 22: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$ và $u_2=-8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_6=130$. **B.** $u_5=256$. **C.** $S_5=256$. **D.** $q=-4$.

Lời giải.

Chọn D

$$\begin{cases}u_1=2\\u_2=-8=u_1q=2q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_1=2\\q=-4\\S_5=u_1.\frac{1-q^5}{1-q}=2.\frac{1-(-4)^5}{1+4}=410\\S_6=2.\frac{1-(-4)^6}{1+4}=-1638\\u_5=u_1q^4=2.(-4)^4=512.\end{cases}$$

Câu 23: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và $q=-2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6.

C. Số hạng thứ 7. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải.

Chọn C

$$192=u_n=u_1q^{n-1}=3.(-2)^{n-1}\Leftrightarrow(-1)^{n-1}.2^{n-1}=64=(-1)^6.2^6\Leftrightarrow n=7.$$

Câu 24: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-1$ và $q=-\frac{1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104.

C. Số hạng thứ 105. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải.

Chọn B

$$\frac{1}{10^{103}}=u_n=u_1q^{n-1}=-1.\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{(-1)^n}{10^{n-1}}\Leftrightarrow\begin{cases}n\ chan\\ n-1=103\end{cases}\Leftrightarrow n=104.$$

Câu 25: Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải.

Chọn B

$32805=u_n=u_1q^{n-1}=5.3^{n-1}\Leftrightarrow 3^{n-1}=6561=3^8\Leftrightarrow n=9.$ Vậy u_9 là số hạng chính giữa của cấp số nhân, nên cấp số nhân đã cho có 17 số hạng.

Câu 26: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n=81$ và $u_{n+1}=9.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $q=\frac{1}{9}.$ **B.** $q=9.$ **C.** $q=-9.$ **D.** $q=-\frac{1}{9}.$

Lời giải.

Chọn A

Công bội $q=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}$

Câu 27: Một dãy số được xác định bởi $u_1=-4$ và $u_n=-\frac{1}{2}u_{n-1},\ n\geq 2.$ Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là:

A. $u_n=2^{n-1}.$ **B.** $u_n=(-2)^{n-1}.$

C. $u_n=-4\left(2^{-n+1}\right).$ **D.** $u_n=-4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$

Lời giải.

Chọn D

$$\begin{cases}u_1=-4\\ u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=-4\\ q=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow u_n=u_1q^{n-1}=-4.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Câu 28: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=-2.$ Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{10}=-511.$ **B.** $S_{10}=-1025.$ **C.** $S_{10}=1025.$ **D.** $S_{10}=1023.$

Lời giải.

Chọn D

$$\begin{cases}u_1=-3\\ q=-2\end{cases}\longrightarrow S_{10}=u_1.\frac{1-q^{10}}{1-q}=-3.\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}=1023.$$

Câu 29: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $1;\ 4;\ 16;\ 64;\ \cdots$ Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = 4^{n-1}.$ **B.** $S_n = \dfrac{n\left(1+4^{n-1}\right)}{2}.$ **C.** $S_n = \dfrac{4^n-1}{3}.$ **D.** $S_n = \dfrac{4\left(4^n-1\right)}{3}.$

Lời giải.

Chọn C

Cấp số nhân đã cho có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 4 \end{cases} \longrightarrow S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = 1.\dfrac{1-4^n}{1-4} = \dfrac{4^n-1}{3}.$

Câu 30: Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_6 = 32.$ **B.** $u_6 = 104.$ **C.** $u_6 = 48.$ **D.** $u_6 = 96.$

Lời giải.

Chọn D

Theo giả thiết: $\begin{cases} q = 2 \\ S_6 = 189 = u_1\dfrac{1-q^6}{1-q} = u_1.\dfrac{1-2^6}{1-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow u_6 = u_1q^5 = 3.2^5 = 96.$

Câu 31: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2.$ Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng $2046.$ Tìm $n.$

A. $n = 9.$ **B.** $n = 10.$ **C.** $n = 11.$ **D.** $n = 12.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $2046 = S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = -6.\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = 2\left((-2)^n - 1\right) \Rightarrow (-2)^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10.$

Câu 32: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1.$ Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_4 = 100.$ **B.** $u_4 = 124.$ **C.** $u_4 = 500.$ **D.** $u_4 = 624.$

Lời giải.

Chọn C

Ta có $5^{n-1} - 1 = S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{u_1}{q-1}\left(q^n - 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = q-1 \\ q = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 5 \end{cases}.$ Khi đó

$u_4 = u_1q^3 = 4.5^3 = 50$

Câu 33: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \dfrac{3^n-1}{3^{n-1}}.$ Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_5=\frac{2}{3^4}.$ **B.** $u_5=\frac{1}{3^5}.$ **C.** $u_5=3^5.$ **D.** $u_5=\frac{5}{3^5}.$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $\frac{3^n-1}{3^{n-1}}=3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=S_n=\frac{u_1}{1-q}\left(1-q^n\right)\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=3(1-q)\\q=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2\\q=\frac{1}{3}\end{cases}$. Khi đó

$u_5=u_1q^4=\frac{2}{3^4}$

Câu 34: Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\frac{1}{2}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

A. 4096. **B.** 2048. **C.** 1024. **D.** $\frac{1}{512}$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases}q=\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}=u_7=u_1q^6=\frac{u_1}{4^6}\end{cases}\Rightarrow u_1=\frac{4^6}{2}=2048$

Câu 35: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=-6$ và $u_6=-486.$ Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3>0.$

A. $q=-3.$ **B.** $q=-\frac{1}{3}.$ **C.** $q=\frac{1}{3}.$ **D.** $q=3.$

Lời giải.

Chọn D

$\begin{cases}-6=u_2=u_1q\\-486=u_6=u_1q^5=u_1q.q^4=-6.q^4\end{cases}\Rightarrow q^4=81=3^4\Rightarrow q=3.$

Câu 36: Cho cấp số nhân $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \cdots$ với $u_1=1.$ Tìm công bội q để $4u_2+5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $q=-\frac{2}{5}.$ **B.** $q=0.$ **C.** $q=\frac{2}{5}.$ **D.** $q=1.$

Lời giải.

Chọn A

Ta có $4u_2+5u_3=4u_1q+5u_1q^2=5q^2+4q=5\left(q+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\geq-\frac{4}{5}.$ Vậy

$\min\left(4u_2+5u_3\right)=-\frac{4}{5}$ khi $q=-\frac{2}{5}$

Câu 37: Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

A. $u_n = 2^{n-1}.$ **B.** $u_n = 2^n$ **C.** $u_n = 2^{n+1}.$ **D.** $u_n = 2n.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases} 4 = u_2 = u_1 q \\ 64 = u_6 = u_1 q^5 = u_1 q.q^4 = 4q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n.$

Câu 38: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_k = u_1.q^{k-1}.$ **B.** $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}.$

C. $u_k = \sqrt{u_{k+1}.u_{k+2}}.$ **D.** $u_k = u_1 + (k-1)q.$

Lời giải.

Chọn A

Câu 39: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0.$ Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $u_7 = u_4.q^3.$ **B.** $u_7 = u_4.q^4.$ **C.** $u_7 = u_4.q^5.$ **D.** $u_7 = u_4.q^6.$

Lời giải.

Chọn A

$\begin{cases} u_4 = u_1 q^3 \\ u_7 = u_1 q^6 \end{cases} \longrightarrow u_7 = \left(u_1 q^3\right).q^3 = u_4 q^3$

Câu 40: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0.$ Với $1 < k < m,$ đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $u_m = u_k.q^k.$ **B.** $u_m = u_k.q^m.$ **C.** $u_m = u_k.q^{m-k}.$ **D.** $u_m = u_k.\mathrm{q}^{m+k}.$

Lời giải.

Chọn C

$u_k = u_1 q^{k-1} \longrightarrow u_m = u_1 q^{m-1} = \left(u_1 q^{k-1}\right).q^{m-k} = u_k q^{m-k}$

Câu 41: Cho một cấp số nhân có n số hạng $(n > k > 55).$ Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $u_1.u_n = u_2.u_{n-1}.$ **B.** $u_1.u_n = u_5.u_{n-4}.$

C. $u_1.u_n = u_{55}.u_{n-55}.$ **D.** $u_1.u_n = u_k.u_{n-k+1}.$

Lời giải.

Chọn C

$u_1 u_n = u_1.u_1 q^{n-1} = \left(u_1 q^{k-1}\right).\left(u_1 q^{m-1}\right) = u_k.u_m$ với $k + m = n + 1.$

Câu 42: Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân $(u_n),$ biết $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}.$

A. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases} 192 = u_6 = u_1 q^5 \\ 384 = u_7 = u_1 q^6 = \left(u_1 q^5\right) q = 192q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \dfrac{192}{q^5} = 6 \end{cases}.$$

Câu 43: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 36 \\ u_5 - u_3 = 72 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases} 36 = u_4 - u_2 = u_1 q\left(q^2 - 1\right) \\ 72 = u_5 - u_3 = u_1 q^2\left(q^2 - 1\right) = \left[u_1 q\left(q^2 - 1\right)\right] q = 36q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \dfrac{36}{q\left(q^2 - 1\right)} = 6 \end{cases}.$$

Câu 44: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q = 2.$ **B.** $q = -4.$ **C.** $q = 4.$ **D.** $q = -2.$

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^{19} = 8u_1 q^{16} \\ u_1\left(1 + q^4\right) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1 = \dfrac{272}{1 + q^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 16 \end{cases}.$$

Câu 45: Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\frac{1}{16}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} u_1, \\ u_2 > 0 \\ u_1.u_3 = 1 \\ u_3.u_5 = \dfrac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 > 0, \\ q > 0 \\ u_1^2 q^2 = 1 \\ \dfrac{1}{16} = u_1^2 q^6 = \left(u_1^2 q^2\right) q^4 = q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ u_1 = \dfrac{1}{q} = 2 \end{cases}.$$

Câu 46: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=49\left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}+\dfrac{1}{u_4}+\dfrac{1}{u_5}\right) \\ u_1+u_3=35 \end{cases}.$$

Tính $P=u_1+4q^2$.

A. $P=24$. **B.** $P=29$. **C.** $P=34$. **D.** $P=39$.

Lời giải.

Chọn B

Nhận xét: Nếu $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5$ là một cấp số nhân với công bội q thì $\dfrac{1}{u_1},\ \dfrac{1}{u_2},\ \dfrac{1}{u_3},\ \dfrac{1}{u_4},\ \dfrac{1}{u_5}$ cũng tạo thành cấp số nhân với công bội $\dfrac{1}{q}$.

Do đó từ giả thiết ta có $\begin{cases} u_1.\dfrac{q^5-1}{q-1}=49\left(\dfrac{1}{u_1}.\dfrac{\dfrac{1}{q^5}-1}{\dfrac{1}{q}-1}\right) & (1) \\ u_1+u_1q^2=35 & (2) \end{cases}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow u_1.\dfrac{q^5-1}{q-1}=\dfrac{49}{u_1}\left(\dfrac{q^5-1}{q^4(q-1)}\right)\Leftrightarrow u_1^2q^4=49\Leftrightarrow u_1q^2=\pm 7$.

Với $u_1q^2=-7$. Thay vào (2), ta được $u_1-7=35\Leftrightarrow u_1=42$. Suy ra $q^2=-\dfrac{7}{42}$: vô lý.

Với $u_1q^2=7$. Thay vào (2), ta được $u_1+7=35\Leftrightarrow u_1=28$. Vậy $\begin{cases} u_1=28 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1=28 \\ q=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó $u_1+4q^2=29$.

Câu 47: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=26 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q>1$.

A. $q=\dfrac{5}{4}$. **B.** $q=4$. **C.** $q=\dfrac{4}{3}$. **D.** $q=3$.

Lời giải.

Chọn D

Ta có $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=26 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=364 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=26 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4\right)=364 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u_1^2\left(1+q+q^2\right)^2=26^2 & (1) \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4\right)=364 & (2) \end{cases}$.

Lấy (1) chia (2), ta

được $\dfrac{\left(1+q+q^2\right)^2}{1+q^2+q^4}=\dfrac{26^2}{364}\Leftrightarrow 3q^4-7q^3-4q^2-7q+3=0\Leftrightarrow 3\left(q^2+\dfrac{1}{q^2}\right)-7\left(q+\dfrac{1}{q}\right)-4=0$.

Đặt $t=q+\frac{1}{q}$, $|t|\ge 2$. Phương trình trở thành $3t^2-7t-10=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t=-1\ (\text{loại})\\ t=-\frac{10}{3}\end{bmatrix}$.

Với $t=-\frac{10}{3}$, suy ra $q+\frac{1}{q}=-\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3q^2-10q+3=0\Leftrightarrow q=3$ hoặc $q=\frac{1}{3}$. Vì $q>1$ nên $q=3$.

Câu 48: Các số $x+6y,\ 5x+2y,\ 8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1,\ y+2,\ x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính x^2+y^2.

A. $x^2+y^2=40$. **B.** $x^2+y^2=25$. **C.** $x^2+y^2=100$. **D.** $x^2+y^2=10$.

Lời giải.

Chọn A

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}(x+6y)+(8x+y)=2(5x+2y)\\ (x-1)(x-3y)=(y+2)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y\\ (3y-1)(3y-3y)=(y+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y\\ 0=(y+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6\\ y=-2\end{cases}.$$

Suy ra $x^2+y^2=40$.

Câu 49: Ba số $x;\ y;\ z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x;\ 2y;\ 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q.

A. $q=\frac{1}{3}$. **B.** $q=\frac{1}{9}$. **C.** $q=-\frac{1}{3}$. **D.** $q=-3$.

Lời giải.

Chọn A

$$\begin{cases}y=xq;\ z=xq^2\\ x+3z=2(2y)\end{cases}\Rightarrow x+3xq^2=4xq\Rightarrow x(3q^2-4q+1)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\ 3q^2-4q+1=0\end{bmatrix}.$$

Nếu $x=0\Rightarrow y=z=0\Rightarrow$ công sai của cấp số cộng: $x;\ 2y;\ 3z$ bằng 0 (vô lí).

Nếu $3q^2-4q+1=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}q=1\\ q=\frac{1}{3}\end{bmatrix}\Leftrightarrow q=\frac{1}{3}\ (q\ne 1)$.

Câu 50: Cho dãy số tăng $a,\ b,\ c\ (c\in\mathbb{Z})$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời $a,\ b+8,\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $a,\ b+8,\ c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P=a-b+2c$.

A. $P=\frac{184}{9}$. **B.** $P=64$. **C.** $P=\frac{92}{9}$. **D.** $P=32$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases} ac=b^2 \\ a+c=2(b+8) \\ a(c+64)=(b+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac=b^2 & (1) \\ a-2b=16-c & (2) \\ ac+64a=(b+8)^2 & (3) \end{cases}$.

Thay (1) vào (3) ta được: $b^2+64a=b^2+16b+64 \Leftrightarrow 4a-b=4\ (4)$.

Kết hợp (2) với (4) ta được: $\begin{cases} a-2b=16-c \\ 4a-b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{c-8}{7} \\ b=\dfrac{4c-60}{7} \end{cases} \quad (5)$

Thay (5) vào (1) ta được:

$$7(c-8)c=(4c-60)^2 \Leftrightarrow 9c^2-424c+3600=0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=36 \\ c=\dfrac{100}{9} \end{cases} \Leftrightarrow c=36\ (c\in\mathbb{Z}).$$

Với $c=36 \Rightarrow a=4,\ b=12 \Rightarrow P=4-12+72=64.$

Câu 51: Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q.

A. $q=2.$ **B.** $q=-2.$ **C.** $q=-\dfrac{3}{2}.$ **D.** $q=\dfrac{3}{2}.$

Lời giải.

Chọn B

Giả sử ba số hạng $a;b;c$ lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, khi đó $b;a;c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q. Ta có

$$\begin{cases} a+c=2b \\ a=bq; c=bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq+bq^2=2b \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ q^2+q-2=0 \end{cases}.$$

Nếu $b=0 \Rightarrow a=b=c=0$ nên $a;b;c$ là cấp số cộng công sai $d=0$ (vô lí).

Nếu $q^2+q-2=0 \Leftrightarrow q=1$ hoặc $q=-2$. Nếu $q=1 \Rightarrow a=b=c$ (vô lí), do đó $q=-2.$

Câu 52: Cho bố số a,b,c,d biết rằng a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q>1$; còn b,c,d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a+d=14$ và $b+c=12.$

A. $q=\dfrac{18+\sqrt{73}}{24}.$ **B.** $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}.$ **C.** $q=\dfrac{20+\sqrt{73}}{24}.$ **D.** $q=\dfrac{21+\sqrt{73}}{24}.$

Lời giải.

Chọn B

Giả sử a,b,c lập thành cấp số cộng công bội q. Khi đó theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} b=aq,\ c=aq^2 \\ b+d=2c \\ a+d=14 \\ b+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq+d=2aq^2 & (1) \\ a+d=14 & (2) \\ a\left(q+q^2\right)=12 & (3) \end{cases}$$

Nếu $q=0\Rightarrow b=c=0=d$ (vô lí)

Nếu $q=-1\Rightarrow b=-a;c=a\Rightarrow b+c=0$ (vô lí).

Vậy $q\neq 0,\ q\neq -1,$ từ (2) và (3) ta có: $d=14-a$ và $a=\dfrac{12}{q+q^2}$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{12q}{q+q^2}+\frac{14q^2+14q-12}{q+q^2}=\frac{24q^3}{q+q^2}\Leftrightarrow 12q^3-7q^2-13q+6=0$$

$$\Leftrightarrow (q+1)\left(12q^2-19q+6\right)=0\Leftrightarrow q=\frac{19\pm\sqrt{73}}{24}$$

Vì $q>1$ nên $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}.$

Câu 53: Gọi $S=1+11+111+...+111...1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\dfrac{10^n-1}{81}.$ **B.** $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{81}\right).$

C. $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{81}\right)-n.$ **D.** $S=\dfrac{1}{9}\left[10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)-n\right].$

Lời giải.

Chọn D

Ta có $S=\dfrac{1}{9}\left(9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{\text{n so 9}}\right)=\dfrac{1}{9}.\left[10.\dfrac{1-10^n}{1-10}-n\right].$

Câu 54: Biết rằng $S=1+2.3+3.3^2+...+11.3^{10}=a+\dfrac{21.3^b}{4}.$ Tính $P=a+\dfrac{b}{4}.$

A. $P=1.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=3.$ **D.** $P=4.$

Lời giải.

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $3S=3+2.3^2+3.3^3+...+11.3^{11}$. Do đó

$$-2S=S-3S=1+3+3^2+...+3^{10}-10.3^{11}=\frac{1-3^{11}}{1-3}-11.3^{11}=-\frac{1}{2}-\frac{21.3^{11}}{2}\Rightarrow S=\frac{1}{4}+\frac{21}{4}.3^{11}.$$

Vì $S=\dfrac{1}{4}+\dfrac{21.3^{11}}{4}=a+\dfrac{21.3^b}{4}\Rightarrow a=\dfrac{1}{4},\ b=11\longrightarrow P=\dfrac{1}{4}+\dfrac{11}{4}=3.$

Câu 55: Một cấp số nhân có ba số hạng là $a,\ b,\ c$ (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q\neq 0.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{bc}.$ **B.** $\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{ac}.$ **C.** $\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{ba}.$ **D.** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{c}.$

Lời giải.

Chọn B

Ta có $ac = b^2 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$

Câu 56: Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

A. 56^0. **B.** 102^0. **C.** 252^0. **D.** 168^0.

Lời giải.

Chọn C

Giả sử 4 góc A, B, C, D (với $A < B < C < D$) theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân thỏa yêu cầu với công bội q. Ta có

$$\begin{cases} A+B+C+D=360 \\ D=27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\left(1+q+q^2+q^3\right)=360 \\ Aq^3=27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=3 \\ A=9 \\ D=Aq^3=243 \end{cases} \Rightarrow A+D=252.$$

CHƯƠNG 4. GIỚI HẠN

BÀI 1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Định nghĩa 2

Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$.

Chú ý: Từ nay về sau thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

II – ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lí 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim (u_n + v_n) = a + b$
- $\lim (u_n - v_n) = a - b$
- $\lim (u_n . v_n) = a.b$
- $\lim \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

b) Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0 \end{cases}$.

III – TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

IV – GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Định nghĩa

• Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

• Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Nhận xét: $u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận các kết quả sau

a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương;

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

3. Định lí 2

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n > 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n.v_n = +\infty$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Sử dụng nguyên lý kẹp

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1 : Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ và $v_n = \frac{1}{n^2+2}$. Khi đó $\lim(u_n + v_n)$ có giá trị bằng:

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} 0 \le |u_n| \le \dfrac{1}{n^2+1} \le \dfrac{1}{n} \to 0 \\ 0 \le |v_n| \le \dfrac{1}{n^2+2} \le \dfrac{1}{n} \to 0 \end{cases} \longrightarrow \lim u_n = \lim v_n = 0 \longrightarrow \lim (u_n + v_n) = 0.$

Ví dụ 2: Kết quả của giới hạn $\lim\left(\dfrac{\sin 5n}{3n} - 2\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $0 \le \left|\dfrac{\sin 5n}{3n}\right| \le \dfrac{1}{n}$, mà $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim \dfrac{\sin 5n}{3n} = 0$, do đó $\lim\left(\dfrac{\sin 5n}{3n} - 2\right) = -2.$

Nhận xét : Có thể dùng MTCT để tính (có thể chính xác hoặc gần đúng) giới hạn như sau (các bài sau có thể làm tương tự) :

Nhập $\dfrac{\sin(5X)}{3X} - 2.$

Bấm CALC và nhập 9999999999 (một số dòng MTCT khi bấm nhiều số « 9 » thì nó báo lỗi, khi đó ta cần bấm ít số « 9 » hơn.

Bấm « = » ta được kết quả (có thể gần đúng), sau đó chọn đáp án có giá trị gần đúng với kết quả hiện trên MTCT.

Ví dụ 3 : Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3\sin n + 4\cos n}{n+1}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $0 \le \left|\dfrac{3\sin n + 4\cos n}{n+1}\right| \le \dfrac{7}{n+1} \le \dfrac{7}{n} \to 0 \longrightarrow \lim \dfrac{3\sin n + 4\cos n}{n+1} = 0.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\left(4 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$ bằng:

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $0 \le \left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right| \le \dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{n} \to 0 \longrightarrow \lim \dfrac{(-1)^n}{n+1} = 0 \longrightarrow \lim\left(4 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right) = 4.$

Câu 2: Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn k để $\lim \dfrac{n - 2\sqrt{n^k}\cos\dfrac{1}{n}}{2n} = \dfrac{1}{2}.$

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{n-2\sqrt{n^k}\cos\frac{1}{n}}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{n^k}\cos\frac{1}{n}}{n}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim\frac{\sqrt{n^k}\cos\frac{1}{n}}{n}=0.$

Ta có $\lim\cos\frac{1}{n}=\cos 0=1$ nên bài toán trở thành tìm k sao cho

$\lim\frac{\sqrt{n^k}}{n}=\lim n^{\frac{k}{2}-1}=0\Leftrightarrow\frac{k}{2}-1<0\Leftrightarrow k<2\xrightarrow[k\in\mathbb{N}^*,k=3l]{}$ không tồn tại k (do k nguyên dương và chẵn).

Câu 3: Kết quả của giới hạn $\lim\left(5-\frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 5. **D.** -4.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$0\le\left|\frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right|\le\frac{n}{n^2+1}\le\frac{1}{n}\to 0\longrightarrow\lim\frac{n\cos 2n}{n^2+1}=0\longrightarrow\lim\left(5-\frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)=5.$$

Câu 4: Kết quả của giới hạn $\lim\left(n^2\sin\frac{n\pi}{5}-2n^3\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\left(n^2\sin\frac{n\pi}{5}-2n^3\right)=\lim n^3\left(\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5}-2\right).$

Vì

$$\begin{cases}\lim n^3=+\infty\\ 0\le\left|\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5}\right|\le\frac{1}{n}\to 0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\lim n^3=+\infty\\ \lim\left(\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5}-2\right)=-2<0\end{cases}\longrightarrow\lim n^3\left(\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5}-2\right)=-\infty.$$

Dạng 2. Giới hạn hữu tỉ

1. Phương pháp

Chú ý : Cho $P(n),Q(n)$ lần lượt là các đa thức bậc m,k theo biến n:

$$P(x)=a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0\,(a_m\neq 0)$$
$$Q(n)=b_k n^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0\ (b_k\neq 0)$$

Khi đó $\lim\frac{P(n)}{Q(n)}=\lim\frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, viết tắt $\frac{P(n)}{Q(n)}\sim\frac{a_m n^m}{b_k n^k}$, ta có các trường hợp sau :

Nếu « bậc tử » $<$ « bậc mẫu ($m<k$) thì $\lim\frac{P(n)}{Q(n)}=0.$

Nếu « bậc tử » $=$ « bậc mẫu ($m=k$) thì $\lim\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{a_m}{b_k}.$

Nếu « bậc tử » $>$ « bậc mẫu ($m>k$) thì $\lim\frac{P(n)}{Q(n)}=\begin{cases}+\infty\ khi\ a_m b_k>0\\ -\infty\ khi\ a_m b_k<0\end{cases}.$

Để ý rằng nếu $P(n),Q(n)$ có chứa « căn » thì ta vẫn tính được bậc của nó. Cụ thể $\sqrt[m]{n^k}$ tì có bậc là $\frac{k}{n}$. Ví dụ $\sqrt{n}$ có bậc là $\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{n^4}$ có bậc là $\frac{4}{3}$,...

Trong các bài sau ta có thể dùng dấu hiệu trên để chỉ ra kết quả một cách nhanh chóng !

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tính $\lim\frac{3n^3-5n^2+1}{2n^3+6n^2+4n+5}$.

Giải

$$\lim\frac{3n^3-5n^2+1}{2n^3+6n^2+4n+5}=\lim\frac{3-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n^3}}=\frac{3}{2}$$

Ví dụ 2: Tính $\lim\frac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$

Lời giải

Ta có $\lim\frac{n+2n^2}{n^3+3n-1}=\lim\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=\frac{0}{1}=0.$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Ví dụ 3 : Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b bằng bao nhiêu

Lời giải

Ta có $\lim u_n=\lim\frac{2n+b}{5n+3}=\lim\frac{2+\frac{b}{n}}{5+\frac{3}{n}}=\frac{2}{5}\ (\forall b\in\mathbb{R})$

Giải nhanh : $\frac{2n+b}{5n+3}\sim\frac{2n}{5n}=\frac{2}{5}$ với mọi $b\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a bằng bao nhiêu

Lời giải

$$2=\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\lim\frac{4+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{a+\frac{5}{n^2}}=\frac{4}{a}\ (a\neq 0)\Leftrightarrow a=2.$$

Giải nhanh : $2\sim\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}\sim\frac{4n^2}{an^2}=\frac{4}{a}\Leftrightarrow a=2.$

Ví dụ 5 : Tính giới hạn $L=\lim\frac{\left(n^2+2n\right)\left(2n^3+1\right)(4n+5)}{\left(n^4-3n-1\right)\left(3n^2-7\right)}$.

Lời giải

$$L=\lim\frac{\left(n^2+2n\right)\left(2n^3+1\right)(4n+5)}{\left(n^4-3n-1\right)\left(3n^2-7\right)}=\lim\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n^3}\right)\left(4+\frac{5}{n}\right)}{\left(1-\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)\left(3-\frac{7}{n^2}\right)}=\frac{1.2.4}{1.3}=\frac{8}{3}.$$

Giải nhanh: $\frac{\left(n^2+2n\right)\left(2n^3+1\right)(4n+5)}{\left(n^4-3n-1\right)\left(3n^2-7\right)}\sim\frac{n^2.2n^3.4n}{n^4.3n^2}=\frac{8}{3}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{-3}{4n^2-2n+1}$ là:

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\frac{-3}{4n^2-2n+1}=\lim\frac{\frac{-3}{n^2}}{4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{4}=0.$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\dfrac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}{4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=\dfrac{0}{4}=0.$

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 3: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\dfrac{1}{n+1}$ và $v_n=\dfrac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim\dfrac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\dfrac{v_n}{u_n}=\lim\dfrac{n+1}{n+2}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}=\dfrac{1}{1}=1.$

Giải nhanh : $\dfrac{n+1}{n+2}\sim\dfrac{n}{n}=1.$

Câu 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a=10.$ **B.** $a=8.$ **C.** $a=6.$ **D.** $a=4.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim u_n=\lim\dfrac{an+4}{5n+3}=\lim\dfrac{a+\dfrac{4}{n}}{5+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{a}{5}.$ Khi đó

$\lim u_n=2\Leftrightarrow\dfrac{a}{5}=2\Leftrightarrow a=10$

Giải nhanh : $2\sim\dfrac{an+4}{5n+3}\sim\dfrac{an}{5n}=\dfrac{a}{5}\Leftrightarrow a=10.$

Câu 5: Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}.$

A. $L=\dfrac{3}{2}.$ **B.** $L=\dfrac{1}{2}.$ **C.** $L=2.$ **D.** $L=1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $L=\lim\dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}$

Giải nhanh: $\frac{n^2+n+5}{2n^2+1}\sim\frac{n^2}{2n^2}=\frac{1}{2}.$

Câu 6: Tính giới hạn $L=\lim\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}.$

A. $L=-\frac{3}{2}.$ **B.** $L=\frac{1}{5}.$ **C.** $L=\frac{1}{2}.$ **D.** $L=0.$

Lời giải

Chọn A

$$L=\lim\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}=\lim\frac{\frac{1}{n}-3}{2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}}=\frac{-3}{2}$$

Giải nhanh: $\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}\sim\frac{-3n^3}{2n^3}=-\frac{3}{2}.$

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L=\lim\frac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1}>0.$

A. $a\le 0;a\ge 1.$ **B.** $0<a<1.$ **C.** $a<0;\ a>1.$ **D.** $0\le a<1.$

Lời giải

Chọn C

$$L=\lim\frac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1}=\lim\frac{\frac{5}{n^2}-3a}{(1-a)+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{-3a}{(1-a)}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<0\\a>1\end{array}\right.$$

Câu 8: Tính giới hạn $L=\lim\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}.$

A. $L=-\frac{3}{2}.$ **B.** $L=1.$ **C.** $L=3.$ **D.** $L=+\infty.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$L=\lim\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}=\lim\frac{n^3\left(\frac{2}{n^2}-1\right).n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right).n^4\left(1-\frac{7}{n^4}\right)}=\lim\frac{\left(\frac{2}{n^2}-1\right)\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{7}{n^4}\right)}=\frac{-1.3}{2.1}=-\frac{3}{2}.$$

Giải nhanh: $\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}\sim\frac{-n^3.3n^2}{2n.n^4}=-\frac{3}{2}.$

Câu 9: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{n^3-2n}{1-3n^2}$ là:

A. $-\frac{1}{3}.$ **B.** $+\infty.$ **C.** $-\infty.$ **D.** $\frac{2}{3}.$

Lời giải

Chọn C

$\lim\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim\dfrac{n^3\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n^2}-3\right)}=\lim n.\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-3}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-3}=-\dfrac{1}{3}<0\end{cases}\longrightarrow \text{im}\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim n.\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-3}=-\infty$$

Giải nhanh : $\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}\sim\dfrac{n^3}{-3n^2}=-\dfrac{1}{3}n\longrightarrow-\infty.$

Câu 10: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}$ là:

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0 **D.** $\dfrac{5}{7}$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim\dfrac{n^3\left(\dfrac{2}{n^2}+3\right)}{n^2\left(4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\lim n.\dfrac{\dfrac{2}{n^2}+3}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\dfrac{\dfrac{2}{n^2}+3}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{3}{4}>0\end{cases}\longrightarrow \text{im}\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim n.\dfrac{\dfrac{2}{n^2}+3}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=+\infty.$$

Giải nhanh : $\dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}\sim\dfrac{3n^3}{4n^2}=\dfrac{3}{4}.n\longrightarrow+\infty.$

Câu 11: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{3n-n^4}{4n-5}$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\dfrac{3n-n^4}{4n-5}=\lim\dfrac{n^4\left(\dfrac{3}{n^3}-1\right)}{n\left(4-\dfrac{5}{n}\right)}=\lim n^3.\dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim n^3=+\infty \\ \lim\dfrac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}}=-\dfrac{1}{4}<0\end{cases}\longrightarrow \lim\frac{3n-n^4}{4n-5}=1\lim n^3.\frac{\dfrac{3}{n^3}-1}{4-\dfrac{5}{n}}=-\infty.$$

Giải nhanh : $\dfrac{3n-n^4}{4n-5}\sim\dfrac{-n^4}{4n}=-\dfrac{1}{4}.n^3\longrightarrow-\infty.$

Câu 12: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\dfrac{3+2n^3}{2n^2-1}.$ **B.** $\lim\dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}.$ **C.** $\lim\dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1}.$ **D.** $\lim\dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}.$

Lời giải

Chọn B

. Theo dấu hiệu ở đã nêu ở phần **Chú ý** trên thì ta chọn giới hạn nào rơi vào trường hợp « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » !

$\lim\dfrac{3+2n^3}{2n^2-1}=+\infty$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_mb_k=2.2=4>0.$

$\lim\dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}=0$: « bậc tử » $<$ « bậc mẫu ».

$\lim\dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1}=+\infty$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_nb_k=(-3).(-2)>0.$

$\lim\dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$: « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $\dfrac{a_m}{b_k}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}.$

Câu 13: Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\dfrac{1+2n}{5n+5n^2}.$ **B.** $u_n=\dfrac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}.$ **C.** $u_n=\dfrac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}.$ **D.** $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+1}.$

Lời giải

Chọn C

Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $a_mb_k<0.$

$u_n=\dfrac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_mb_k=-3.2=-6<0\longrightarrow\lim u_n=-\infty.$

Chú ý : (i) $\lim\left(a_mn^m+a_{n-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0\right)=\begin{cases}+\infty & khi\ a_n>0\\ -\infty & khi\ a_n<0\end{cases}.$

(ii) Giả sử $|q|>\max\left\{|q_i|:i=1;2\ldots;m\right\}$ thì

$$\lim\left(a.q^n+a_mq_m^n+\cdots+a_1q_1^n+a_0\right)=\begin{cases}a_0 & khi\ |q|<1\\ +\infty & khi\ a>0,\ q>1\\ -\infty & khi\ a<0,\ q>1\end{cases}.$$

Ta dùng « dấu hiệu nhanh » này để đưa ra kết quả nhanh chóng cho các bài sau.

Câu 14: Tính giới hạn $L=\lim\left(3n^2+5n-3\right)$.

A. $L=3$. **B.** $L=-\infty$. **C.** $L=5$. **D.** $L=+\infty$.

Lời giải

Chọn D

. $L=\lim\left(3n^2+5n-3\right)=\lim n^2\left(2+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim n^2=+\infty\\ \lim\left(2+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=2>0\end{cases}$.

Giải nhanh : $3n^2+5n-3\sim 3n^2\longrightarrow+\infty$.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10;10)$ để $L=\lim\left(5n-3\left(a^2-2\right)n^3\right)=-\infty$.

A. 19. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\left(5n-3\left(a^2-2\right)n^3\right)=\lim n^3\left(\frac{5}{n^2}-3\left(a^2-2\right)\right)=-\infty$

$\Leftrightarrow \lim\left(\frac{5}{n^2}-3\left(a^2-2\right)\right)=a^2-2<0\Leftrightarrow -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}\xrightarrow[a\in\mathbb{Z},a\in(-10;10)]{}a=-1;0;1.$

Câu 16: Tính giới hạn $\lim\left(3n^4+4n^2-n+1\right)$.

A. $L=7$. **B.** $L=-\infty$. **C.** $L=3$. **D.** $L=+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$\lim\left(3n^4+4n^2-n+1\right)=\lim n^4\left(3+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim n^4=+\infty\\ \lim\left(3+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)=3>0\end{cases}$.

Giải nhanh : $3n^4+4n^2-n+1\sim 3n^4\longrightarrow+\infty$.

Câu 17: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+...+\left(\sqrt{2}\right)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\lim u_n=-\infty$. **B.** $\lim u_n=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$. **C.** $\lim u_n=+\infty$. **D.** Không tồn tại $\lim u_n$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\sqrt{2},\left(\sqrt{2}\right)^2,\ldots,\left(\sqrt{2}\right)^n$ lập thành cấp số nhân có $u_1=\sqrt{2}=q$ nên

$$u_n=\sqrt{2}.\frac{1-\left(\sqrt{2}\right)^n}{1-\sqrt{2}}=\left(2-\sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2}\right)^n-1\right]\longrightarrow \lim u_n=+\infty \text{ vì } \begin{cases}a=2-\sqrt{2}>0\\ q=\sqrt{2}>1\end{cases}.$$

Câu 18: Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}}{n^2+1}$ bằng:

A. $\frac{1}{8}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{2}.\frac{n(n+1)}{2}$. Do đó

$$\lim\frac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}}{n^2+1}=\lim\frac{n^2+n}{4n^2+4}=\frac{1}{4}$$ ("bậc tử" = "bậc mẫu").

Câu 19: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n-1)=\frac{1}{n^2}.\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2n^2}$. Do đó

$$\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

Câu 20: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $1+3+5+\cdots(2n-1)=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$ nên

$$\lim\left(\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}\right)=\lim\frac{n^2}{3n^2+4}=\frac{1}{3}\longrightarrow$$

Câu 21: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Câu 22: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Với mọi $k\in\mathbb{N}^*$ thì $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$, do đó

$$\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\lim\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$$
$$=\lim\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{1}{2}.$$

Câu 23: Giá trị của giới hạn $\lim\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+.....+\frac{1}{n(n+3)}\right]$ bằng:

A. $\frac{11}{18}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+.....+\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n+3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

Do đó $\lim\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+.....+\frac{1}{n(n+3)}\right)=\lim\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{11}{8}$.

Câu 24: Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n\left(n^2+1\right)}$ bằng:

A. 4. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $P(n)=\dfrac{2n^3-3n^2+n}{6}=\dfrac{n(n-1)(2n+1)}{6}$ thì ta có

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\left(P(2)-P(1)\right)+\left(P(3)-P(2)\right)+\cdots+\left(P(n+1)-P(n)\right)$$
$$=P(n+1)-P(1)=\frac{n(n+1)(2n+3)}{6}$$

Do đó $\lim\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n\left(n^2+1\right)}=\lim\dfrac{n(n+1)(2n+3)}{6n\left(n^2+1\right)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 25: Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n},\ n\geq 1\end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=-1$. **B.** $\lim u_n=0$. **C.** $\lim u_n=\dfrac{1}{2}$. **D.** $\lim u_n=1$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $\lim u_n=a$ thì ta có

$$a=\lim u_{n+1}=\lim\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-a}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 2\\ a(2-a)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 2\\ a^2-2a+1=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1.$$

Câu 26: Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2},\ n\geq 1\end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=1$. **B.** $\lim u_n=0$. **C.** $\lim u_n=2$. **D.** $\lim u_n=+\infty$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $\lim u_n=a$ thì ta có

$a=\lim u_{n+1}=\lim\dfrac{u_n+1}{2}=\dfrac{a+1}{2}\Leftrightarrow a=1\longrightarrow$

Câu 27: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$ bằng:

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

. $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}=\lim\dfrac{\sqrt{9-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{4-\dfrac{2}{n}}=\dfrac{3}{4}$

Giải nhanh: $\dfrac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}\sim\dfrac{\sqrt{9n^2}}{4n}=\dfrac{3}{4}.$

Câu 28: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ bằng:

A. $-\dfrac{2}{3}.$ **B.** $\dfrac{1}{2}.$ **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$ **D.** $-\dfrac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn C

$\lim\dfrac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}=\lim\dfrac{-1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{3+\dfrac{2}{n^4}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Giải nhanh : $\dfrac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}\sim\dfrac{-n^2}{\sqrt{3n^4}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Câu 29: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5}$ là:

A. $\dfrac{5}{2}.$ **B.** $\dfrac{5}{7}.$ **C.** $+\infty.$ **D.** $1.$

Lời giải

Chọn D

$\lim\dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5}=\lim\dfrac{\sqrt{2+\dfrac{3}{n}}}{\sqrt{2}+\dfrac{5}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1.$

Giải nhanh: $\dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5}\sim\dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}}=1.$

Câu 30: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}$ bằng:

A. $1.$ **B.** $0.$ **C.** $-1.$ **D.** $\dfrac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn B

$$\lim\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}=\lim\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{0}{1}=0$$

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}\sim\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0.$

Câu 31: Biết rằng $\lim\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n}-2}=a\sin\frac{\pi}{4}+b.$ Tính $S=a^3+b^3.$

A. $S=1.$ **B.** $S=8.$ **C.** $S=0.$ **D.** $S=-1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n}-2}=\lim\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}-\frac{2}{n}}=\frac{1+\sqrt{1}}{1}=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$

$$\longrightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=0\end{cases}\longrightarrow S=8$$

Câu 32: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ là:

A. $+\infty.$ **B.** $10.$ **C.** $0.$ **D.** $-\infty.$

Lời giải

Chọn C

$$\lim\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}=\lim\frac{\frac{10}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}=\frac{0}{1}=0.$$

Giải nhanh: $\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}\sim\frac{10}{\sqrt{n^4}}=\frac{10}{n^2}\longrightarrow 0.$

Câu 33: Kết quả của giới hạn $\lim(n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$ là:

A. $+\infty.$ **B.** $1.$ **C.** $0.$ **D.** $-\infty.$

Lời giải

Chọn C

$\lim(n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}=\lim\sqrt{\frac{2(n+1)^3}{n^4+n^2-1}}=0$ (“bậc tử” < “bậc mẫu”).

Giải nhanh: $(n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}\sim n.\sqrt{\frac{2n}{n^4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0.$

Câu 34: Biết rằng $\lim \frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = b\sqrt{3}+c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a+c}{b^3}$.

A. $P = 3$. **B.** $P = \frac{1}{3}$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim \frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = \lim \frac{\sqrt[3]{a+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}$

$= b\sqrt{3}+c \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{a} = \frac{b}{3} \Rightarrow P = \frac{1}{3}. \\ c = 0 \end{cases}$

Câu 35: Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$\lim \sqrt[5]{200-3n^5+2n^2} = \lim n\left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5}-3+\frac{2}{n^3}}\right) = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim\left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5}-3+\frac{2}{n^3}}\right) = -\sqrt[5]{3} < 0 \end{cases}$.

Giải nhanh: $\sqrt[5]{200-3n^5+2n^2} \sim \sqrt[5]{-3n^5} = -\sqrt[5]{3}.n \longrightarrow -\infty$.

Dạng 3. Dãy số chứa căn thức

1. Phương pháp

- Nếu biểu thức chứa căn thức cần nhân một lượng liên hiệp để đưa về dạng cơ bản.

$A-B$	lượng liên hiệp là: $A+B$
$\sqrt{A}-B$	lượng liên hiệp là: $\sqrt{A}+B$
$\sqrt{A}-\sqrt{B}$	lượng liên hiệp là: $\sqrt{A}+\sqrt{B}$
$\sqrt[3]{A}-B$	lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2}+B\sqrt[3]{A}+B^2\right)$
$\sqrt[3]{A}+B$	lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2}-B\sqrt[3]{A}+B^2\right)$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tính $\lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)$

Giải

$\lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right) = \lim \frac{n^2+7-n^2-5}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}} = 0$

Ví dụ 2. Tính $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2}\right)$

Giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2}\right)=\lim\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2}}=\lim\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1}}=\frac{3}{2}$$

Ví dụ 3. Tính $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$

Lời giải

. $\sqrt{n^2-n+1}-n\sim\sqrt{n^2}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)=\lim\frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}=\lim\frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-n+1}-n=\frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}\sim\frac{-n}{\sqrt{n^2}+n}=-\frac{1}{2}.$

Ví dụ 4. Tính $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$

Lời giải

$\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\sim\sqrt[3]{-n^3}+n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\frac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-1}+1}=\frac{1}{3}.$$

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^2-n^3}+n=\frac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}\sim\frac{n^2}{\sqrt[3]{n^6}-n\sqrt[3]{-n^3}+n^2}=\frac{1}{3}.$

Ví dụ 5. Tính $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]$

Lời giải

$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sim\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\sim\sqrt{n}-\sqrt{n}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)=\lim\frac{4}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}}=0$$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)$ là:

A. $-2.$ **B.** $0.$ **C.** $-\infty.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn C

$\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)=\lim n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}\right)=-\infty$ vì

$$\lim n=+\infty,\ \lim\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}\right)=1-\sqrt{3}<0.$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{3n^2}=\left(1-\sqrt{3}\right)n\longrightarrow-\infty.$

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$ là:

A. $1.$ **B.** $2.$ **C.** $4.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=2.$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}=\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\sim\frac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=2.$

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=0.$

A. $0.$ **B.** $2.$ **C.** $1.$ **D.** $3.$

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=\lim\frac{\left(a^2-a-2\right)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

$$= \lim \frac{a^2 - a - 2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{a^2 - a - 2}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a = -1 \\ a = 2 \end{bmatrix}.$$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2}\right)$ là:

A. 0. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2} \sim \sqrt{2n^2} - \sqrt{2n^2} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2}\right) = \lim \frac{2n - 1}{\sqrt{2n^2 - n + 1} + \sqrt{2n^2 - 3n + 2}}$$

$$= \lim \frac{2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Giải nhanh :

$$\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2} = \frac{2n - 1}{\sqrt{2n^2 - n + 1} + \sqrt{2n^2 - 3n + 2}} \sim \frac{2n}{\sqrt{2n^2} + \sqrt{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n}\right)$ là:

A. -1. **B.** $1 - \sqrt{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh : $\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n} \sim \sqrt{n^2} - \sqrt{2n^2} = \left(1 - \sqrt{2}\right)n \longrightarrow -\infty$.

Cụ thể : $\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n}\right) = \lim n.\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{2 + \frac{1}{n}}\right) = -\infty$ vì

$$\lim n = +\infty, \lim\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{2 + \frac{1}{n}}\right) = 1 - \sqrt{2} < 0$$

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2\right) = 0$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Nếu $\sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2 \sim \sqrt{n^2} - n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=\lim\dfrac{\left(2a^2-8\right)n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{2a^2-8}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$

$=a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm 2.$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$ là:

A. $-1.$ **B.** $0.$ **C.** $1.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{n^2-2n+3}-n\sim\sqrt{n^2}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)=\lim\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=-1$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-2n+3}-n=\dfrac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}\sim\dfrac{-2n}{\sqrt{n^2}+n}=-1.$

Câu 9: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n=-1.$

A. $3.$ **B.** $2.$ **C.** $-2.$ **D.** $-3.$

Lời giải

Chọn C

$\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$-1=\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim\frac{a+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$$

Giải nhanh :

$$-1\sim\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}=\frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}\sim\frac{an}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)$ bằng:

A. $3.$ **B.** $2.$ **C.** $0.$ **D.** $1.$

Lời giải

Chọn C

$\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\sim\sqrt[3]{n^3}-\sqrt[3]{n^3}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)=\lim\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}.\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{\left(n^3+2\right)}}=0.$$

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)=\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=-\frac{2}{3}.$$

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n=\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}\sim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^6}+n.\sqrt[3]{n^3}+n^2}=-\frac{2}{3}.$

Câu 12: Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\right]$ là:

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\sim\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1$$

Giải nhanh : $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\sim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=1.$

Câu 13: Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\right]$ bằng:

A. -1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\sim n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}=2$$

Giải nhanh : $n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}\sim\dfrac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=2.$

Câu 14: Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\right]$ là:

A. $\sqrt{7}-1.$ **B.** $3.$ **C.** $\dfrac{7}{2}.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn C

$n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\sim n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\lim\frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}$$
$$=\lim\frac{7}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{6}{n^2}}}=\frac{7}{2}.$$

Giải nhanh : $n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\dfrac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}\sim\dfrac{7n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\dfrac{7}{2}.$

Câu 15: Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ là:

A. $1.$ **B.** $0.$ **C.** $-\infty.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn C

$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=\lim-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)=\lim n.\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)\right]=-\infty$$

vì $\lim n=+\infty,\ \lim\left[-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{n^2}}\right)\right]=-1<0$

Giải nhanh :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)\sim-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}\right)=-n\longrightarrow-\infty.$$

Câu 16: Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

A. $1.$ **B.** $0.$ **C.** $3.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}\sim\sqrt{9n^2}=3n\neq0\longrightarrow$ giải nhanh :

$$\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}\sim\frac{\sqrt{9n^2}}{3n}=1$$

Cụ thể : $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}=\lim\frac{\sqrt{9-\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{\sqrt{9}}{3}=1.$

Câu 17: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}-n}$ là:

A. $2.$ **B.** $0.$ **C.** $-\infty.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[3]{n^3+1}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=0$$

Dạng 4. Dãy số chứa hàm lũy thừa

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}$

Lời giải

Giải nhanh : $\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}\sim\frac{-2.5^{n+1}}{5^n}=-10$

Cụ thể : $\lim\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}=\lim\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n-10}{2.\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=-10.$

Ví dụ 2: Tính $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}$

Lời giải

Giải nhanh : $\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}\sim\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\longrightarrow 0.$

Cụ thể : $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}=\lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-8.\left(\frac{1}{2}\right)^n-3.\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3.\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=\frac{0}{1}=0.$

Ví dụ 3: Tính $\lim\frac{\left(-1\right)^n 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Ta có: $\lim\dfrac{\left(-1\right)^{n}2^{5n+1}}{3^{5n+2}}=\lim\left(-1\right)^{n}.\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}=0.$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$\dfrac{\left(-1\right)^{n}2^{5n+1}}{3^{5n+2}}\sim\left(-1\right)^{n}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5n}=0.$

Ví dụ 4: Tính $\lim\dfrac{3^{n}-4.2^{n+1}-3}{3.2^{n}+4^{n}}.$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Ta có: $\dfrac{3^{n}-4.2^{n+1}-3}{3.2^{n}+4^{n}}=\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n}-4.2\left(\dfrac{2}{4}\right)^{n}-\dfrac{3}{n^{4}}}{3.\left(\dfrac{2}{4}\right)^{n}+1}$ (chia tử và mẫu cho n^{4}).

Suy ra $\lim\dfrac{3^{n}-4.2^{n+1}-3}{3.2^{n}+4^{n}}=\dfrac{0}{1}=0.$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$\dfrac{3^{n}-4.2^{n+1}-3}{3.2^{n}+4^{n}}\sim\dfrac{3^{n}}{4^{n}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n}=0.$

Ví dụ 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^{2}-1}{3+n^{2}}-\dfrac{1}{2^{n}}}$ là một số nguyên.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\dfrac{an^{2}-1}{3+n^{2}}=\lim\dfrac{a-\dfrac{1}{n^{2}}}{\dfrac{3}{n^{2}}+1}=a\\ \lim\dfrac{1}{2^{n}}=\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\sqrt{3+\dfrac{an^{2}-1}{3+n^{2}}-\dfrac{1}{2^{n}}}=\sqrt{3+a}.$

Ta có $\begin{cases}a\in(0;20),\ a\in\mathbb{Z}\\ \sqrt{a+3}\in\mathbb{Z}\end{cases}\longrightarrow a\in\{1;6;13\}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{2-5^{n+2}}{3^{n}+2.5^{n}}$ bằng:

A. $-\dfrac{25}{2}.$ **B.** $\dfrac{5}{2}.$ **C.** $1.$ **D.** $-\dfrac{5}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Cụ thể : $\lim\dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}=\lim\dfrac{2\left(\dfrac{1}{5}\right)^n-25}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+2}=-\dfrac{25}{2}.$

Giải nhanh : $\dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}\sim\dfrac{-5^{n+2}}{2.5^n}=-\dfrac{25}{2}$

Câu 2: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}$ bằng:

A. $-1.$ **B.** $-\dfrac{1}{2}.$ **C.** $\dfrac{1}{2}.$ **D.** $\dfrac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh : $\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}\sim\dfrac{3^n}{-2.3^n}=-\dfrac{1}{2}$

Cụ thể : $\lim\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}=\lim\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=-\dfrac{1}{2}.$

Câu 3: Biết rằng $\lim\left(\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\dfrac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\dfrac{a\sqrt{5}}{b}+c$ với $a, b, c\in\mathbb{Z}.$ Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+b^2+c^2.$

A. $S=26.$ **B.** $S=30.$ **C.** $S=21.$ **D.** $S=31.$

Lời giải

Chọn B

$$\lim\left(\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}++\frac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\lim\left(\frac{1-2.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5.\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\sqrt{5}-.\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}+\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}+2=\frac{\sqrt{5}}{5}+2.$$

Giải nhanh :

$$\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\frac{2n^2+3}{n^2-1}\sim\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}+\frac{2n^2}{n^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}+2=\frac{\sqrt{5}}{5}+2\longrightarrow\begin{cases}a=1\\b=5.\\c=2\end{cases}$$

Vậy $S=1^2+5^2+2^2=30.$

Câu 4: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}$ là:

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh: $\frac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\frac{\pi^n+3^n+4^n}{3\pi^n-3^n+4.4^n}\sim\frac{4^n}{4.4^n}=\frac{1}{4}$

Cụ thể : $\lim\frac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\lim\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{3.\left(\frac{\pi}{4}\right)^n-3.\left(\frac{3}{4}\right)^n+4}=\frac{1}{4}.$

Câu 5: Kết quả của giới hạn $\lim\left[3^n-\sqrt{5}^n\right]$ là:

A. 3. **B.** $-\sqrt{5}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh : Vì $3>\sqrt{5}$ nên $3^n-\sqrt{5}^n\sim 3^n\longrightarrow+\infty.$

Cụ thể : $\lim\left[3^n-\sqrt{5}^n\right]=\lim 3^n\left(1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim 3^n=+\infty\\ \lim 1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n=1>0\end{cases}.$

Câu 6: Kết quả của giới hạn $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh : $3^4.2^{n+1}-5.3^n\sim-5.3^n=-\infty\left(-5<0\right).$

Cụ thể : $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)=\lim 3^n\left(162.\left(\frac{2}{3}\right)^n-5\right)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim 3^n=+\infty\\ \lim\left(162.\left(\frac{2}{3}\right)^n-5\right)=-5<0\end{cases}.$

Câu 7: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

Giải nhanh : $\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}\sim\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\longrightarrow 0.$

Cụ thể : $0 \le \left|\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}\right| \le \frac{8.3^{n+1}}{4^n} = 24.\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0 \longrightarrow \lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n} = 0.$

Câu 8: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}$ là:

A. $+\infty$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

. Ta có $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Rightarrow 2^n \ge C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \sim \frac{n^3}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2^n} \to 0 \\ \frac{2^n}{n^2} \to +\infty \end{cases}$. Khi đó:

$$\lim\frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2} = \lim\frac{2^n}{n^2}.\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim\frac{2^n}{n^2} = +\infty \\ \lim\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3} > 0 \end{cases}.$$

Câu 9: Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0;2018)$ để $\lim\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}} \le \frac{1}{1024}$.

A. 2007. **B.** 2008. **C.** 2017. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn B

$$\lim\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}} = \lim\sqrt[4]{\frac{1+2.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+4^a}} = \sqrt{\frac{1}{4^a}} = \sqrt{\frac{1}{\left(2^a\right)^2}} = \frac{1}{2^a}.$$

Giải nhanh: $\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+2}}} \sim \sqrt[4]{\frac{4^n}{4^{n+a}}} = \frac{1}{2^a} \le \frac{1}{1024} \Leftrightarrow 2^a \ge 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow a \ge 10.$

Mà $a \in (0;2018)$ và $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{10;2017\} \longrightarrow$ có 2008 giá trị a.

Câu 10: Kết quả của giới hạn $\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

. Ta có $\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right) = \lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1} + \lim\frac{(-1)^n}{3^n}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}}{3-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{3}\\ 0\le\left|\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right|\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\to 0\Rightarrow\lim\dfrac{(-1)^n}{3^n}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)=\dfrac{1}{3}.$$

Câu 11: Kết quả của giới hạn $\lim\left(\dfrac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

. $\lim\left(\dfrac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\lim\left(\dfrac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}+\dfrac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}}\right)$. Ta có :

$$\begin{cases}\lim\dfrac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\\ 0\le\left|\dfrac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}\to 0\Rightarrow\lim\dfrac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\dfrac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\sqrt{3}.$$

Câu 12: Kết quả của giới hạn $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=\lim\sqrt{3^n}.\sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+2.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$. Vì

$$\left.\begin{array}{l}\lim\sqrt{3^n}=+\infty\\ 0\le\dfrac{n}{3^n}\le\dfrac{n}{C_n^2}=\dfrac{n}{\dfrac{n(n-1)}{2}}=\dfrac{2}{n-1}\to 0\Rightarrow\lim\dfrac{n}{3^n}=0\\ \lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0\end{array}\right\}\longrightarrow\begin{cases}\lim\sqrt{3^n}=+\infty\\ \lim\sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+2.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=\sqrt{2}>0\end{cases},$$

do đó $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=+\infty$.

Dạng 5. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

1. Phương pháp

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội là $|q|<1$.

✓ Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \frac{u_1}{1-q}$$

✓ Mọi số thập phân đều được biểu diễn dưới dạng luỹ thừa của 10

$$X = N, a_1a_2a_3...a_n... = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a^n}{10^n} + ...$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ..., \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, ...$

Hướng dẫn giải

Theo đề cho ta có: $u_1 = 1, q = -\frac{1}{2}$.

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 0,212121...$ (chu kỳ là 21). Tìm a dưới dạng phân số.

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Ta có: $a = 0,212121...$

$$= 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + ...$$

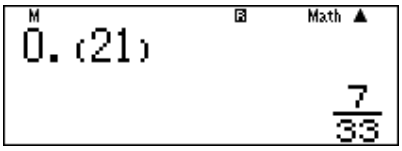
$$= 21\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + ...\right)$$

Tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + ...$ là tổng cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{1}{10^2}, q = \frac{1}{10^2}$.

$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{1}{99}$. Do đó $A = 21.\frac{1}{99} = \frac{7}{33}$.

Cách 3: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $0,(21)$ và ấn phím $=$ ta được kết quả $\frac{7}{33}$.



Ví dụ 3: Tổng $S_n = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + ... + (0,9)^{n-1} + ...$ có kết quả bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

$$S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + ... + (0,9)^{n-1} + ...$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạng có $u_1 = 1, q = 0,9$.

$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-0,9}=10.$

Ví dụ 4: Cho $S=1+q+q^2+q^3+...,|q|<1$

$T=1+Q+Q^2+Q^3+...,|Q|<1$

$E=1+qQ+q^2Q^2+q^3Q^3+...$

Biểu thị biểu thức E theo S,T

Hướng dẫn giải

- $S=1+q+q^2+q^3+...,|q|<1$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, có $u_1=1, q=q.$

Khi đó: $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-q}\Rightarrow q=\frac{S-1}{S}.$ (1)

- Tương tự: $T=\frac{1}{1-Q}\Rightarrow Q=\frac{T-1}{T}.$ (2)

- $E=1+q.Q+q^2.Q^2+q^3.Q^3+...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạng công bội qQ (vì $|qQ|<1$, và $u_1=1$).

$E=\frac{u_1}{1-qQ}$ (3)

Thay (1), (2) vào (3): $E=\frac{u_1}{1-\frac{T-1}{T}.\frac{S-1}{S}}\Rightarrow E=\frac{ST}{S+T-1}.$

Ví dụ 5: Tìm số hạng U_1 của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S=4; q=\frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $S=\frac{u_1}{1-q}\left(|q|<1\right)\Rightarrow 4-\frac{u_1}{1-\frac{1}{2}}\Rightarrow u_1=2.$

Ví dụ 6: Tìm công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết $S=-6; U_1=-3.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $S=\frac{u_1}{1-q}\left(|q|<1\right)\Rightarrow -6=\frac{-3}{1-q}\Rightarrow q=\frac{1}{2}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là:

A. $u_1=3.$ **B.** $u_1=4.$ **C.** $u_1=\frac{9}{2}.$ **D.** $u_1=5.$

Lời giải

Chọn A

Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{u_1}{1-q}=2\\ S_3=u_1.\dfrac{1-q^3}{1-q}=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2(1-q)\\ 2(1-q^3)=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=-\dfrac{1}{2}\\ u_1=2\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=3\end{cases}.$$

Câu 2: Tính tổng $S=9+3+1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-3}}+\cdots$.

A. $S=\dfrac{27}{2}$. **B.** $S=14$. **C.** $S=16$. **D.** $S=15$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$S=9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots=9\left(\underbrace{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\frac{1}{3}}\right)=9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{27}{2}.$$

Câu 3: Tính tổng $S=\sqrt{2}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots\right)$.

A. $S=\sqrt{2}+1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=2\sqrt{2}$. **D.** $S=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S=\sqrt{2}\left(\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=2\sqrt{2}.$$

Câu 4: Tính tổng $S=1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+\cdots+\dfrac{2^n}{3^n}+\cdots$.

A. $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=5$. **D.** $S=6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots=\underbrace{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\frac{2}{3}}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3.$$

Câu 5: Tổng của cấp số nhân vô hạn $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{18},\ldots,\dfrac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}},\ldots$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chon D

. Ta có :

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}}+\cdots=\frac{1}{2}\left(\underbrace{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}}_{CSN\ lvh:u_1=1,\ q=-\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{8}.$$

Câu 6: Tính tổng $S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+...$.

A. 1. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+...$$

$$=\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=q=\frac{1}{2}}\right)-\left(\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:u_1=q=\frac{1}{3}}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}(|a|<1,|b|<1)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1-b}{1-a}$. **C.** $\frac{1-a}{1-b}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Ta có $1+a+a^2+...+a^n$ là tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1 và công bội là a, nên $1+a+a^2+...+a^n=\frac{1.\left(1-a^{n+1}\right)}{1-a}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Tương tự: $1+b+b^2+...+b^n=\frac{1\left(1-b^{n+1}\right)}{1-b}=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$.

Do đó $\lim\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}=\lim\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\lim\frac{1-b}{1-a}.\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\frac{1-b}{1-a}$ $(|a|<1,|b|<1)$.

Câu 8: Rút gọn $S=1+\cos^2x+\cos^4x+\cos^6x+\cdots+\cos^{2n}x+\cdots$ với $\cos x\neq\pm1$.

A. $S=\sin^2 x.$ **B.** $S=\cos^2 x.$ **C.** $S=\dfrac{1}{\sin^2 x}.$ **D.** $S=\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S=\underbrace{1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots+\cos^{2n} x+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\cos^2 x}=\frac{1}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Câu 9: Rút gọn $S=1-\sin^2 x+\sin^4 x-\sin^6 x+\cdots+(-1)^n.\sin^{2n} x+\cdots$ với $\sin x\neq\pm 1.$

A. $S=\sin^2 x.$ **B.** $S=\cos^2 x.$ **C.** $S=\dfrac{1}{1+\sin^2 x}.$ **D.** $S=\tan^2 x.$

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$S=\underbrace{1-\sin^2 x+\sin^4 x-\sin^6 x+\cdots+(-1)^n.\sin^{2n} x+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=-\sin^2 x}=\frac{1}{1+\sin^2 x}.$$

Câu 10: Thu gọn $S=1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+\ldots$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}.$

A. $S=\dfrac{1}{1-\tan\alpha}.$ **B.** $S=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}.$ **C.** $S=\dfrac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}.$ **D.** $S=\tan^2\alpha.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan\alpha\in(0;1)$ với mọi $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right),$ do đó

$$S=\underbrace{1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+\ldots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=-\tan\alpha}=\frac{1}{1+\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}.$$

Câu 11: Cho m, n là các số thực thuộc $(-1;1)$ và các biểu thức:

$$M=1+m+m^2+m^3+\cdots$$

$$N=1+n+n^2+n^3+\cdots$$

$$A=1+mn+m^2n^2+m^3n^3+\cdots$$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A=\dfrac{MN}{M+N-1}.$ **B.** $A=\dfrac{MN}{M+N+1}.$ **C.** $A=\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{N}-\dfrac{1}{MN}.$ **D.** $A=\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{MN}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} M=\dfrac{1}{1-m} \\ N=\dfrac{1}{1-n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1-\dfrac{1}{M} \\ n=1-\dfrac{1}{N} \end{cases}$, khi đó

$$A=\frac{1}{1-mn}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{M}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)}=\frac{MN}{M+N-1}.$$

Câu 12: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\cdots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng $T=a+b.$

A. 17. **B.** 68. **C.** 133. **D.** 137.

Lời giải

Chọn B

Ta có $0,5111\cdots=0,5+10^{-2}+10^{-3}+\cdots+10^{-n}+\cdots$

Dãy số $10^{-2};10^{-3};...;10^{-n};...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1=10^{-2},$ công bội bằng $q=10^{-1}$ nên $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{10^{-2}}{1-10^{-1}}=\frac{1}{90}.$

Vậy $0,5111...=0,5+S=\frac{46}{90}=\frac{23}{45}\longrightarrow\begin{cases} a=23 \\ b=45 \end{cases}\longrightarrow T=a+b=68.$

Câu 13: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A=0,353535...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T=ab.$

A. 3456. **B.** 3465. **C.** 3645. **D.** 3546.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$A=0,353535...=0,35+0,0035+...=\frac{35}{10^2}+\frac{35}{10^4}+...=\frac{\frac{35}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{35}{99}\Rightarrow\begin{cases} a=35 \\ b=99 \end{cases}\Rightarrow T=3465..$$

Câu 14: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B=5,231231...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T=a-b.$

A. 1409. **B.** 1490. **C.** 1049. **D.** 1940.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$B = 5,231231... = 5 + 0,231 + 0,000231 + ...$$

$$= 5 + \frac{231}{10^3} + \frac{231}{10^6} + ... = 5 + \frac{\frac{231}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 5 + \frac{231}{999} = \frac{1742}{333} \longrightarrow \begin{cases} a = 1742 \\ b = 333 \end{cases} \Rightarrow T = 1409$$

Câu 15: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a - b > 2^{15}$. **B.** $a - b > 2^{14}$. **C.** $a - b > 2^{13}$. **D.** $a - b > 2^{12}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$0,17232323... = 0,17 + 23\left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^8} \cdots\right)$$

$$= \frac{17}{100} + 23.\frac{\frac{1}{10000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{17}{100} + \frac{23}{100.99} = \frac{1706}{9900} = \frac{853}{4950}.$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = 853 \\ b = 4950 \end{cases} \Rightarrow 2^{12} < T = 4097 < 2^{13}.$$

Dạng 6: Giới hạn dãy số có quy luật công thức, dãy cho bởi hệ thức truy hồi

1. Phương pháp

- ✓ Dãy tăng và bị chặn trên hoặc giảm và bị chặn dưới thì tồn tại giới hạn.
- ✓ Phương pháp quy nạp thường được sử dụng.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Hướng dẫn giải

Ta luôn có: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ áp dụng vào u_n:

- $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Do đó: $\lim u_n = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

Ví dụ 2: Cho $u_n = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Hướng dẫn giải

Ta luôn có: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$

$$u_n = \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Do đó $\lim u_n = \lim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{6}.$

Ví dụ 3: $\lim \frac{1+2+3+...+n}{2n^2}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Vì $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ nên: $\lim \frac{1+2+3+...+n}{2n^2} = \lim \frac{n(n+1)}{4n^2} = \frac{1}{4}.$

Ví dụ 4: Tính giới hạn: $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right].$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2^2-1}{2^2}.\frac{3^2-1}{3^2}...\frac{n^2-1}{n^2}$

$$= \frac{(2+1).(2-1).(3+1).(3-1)...(n+1)(n-1)}{2^2.3^2...n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Vậy $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{2}.$

Ví dụ 5: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{2}; \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Ta chứng minh dãy (U_n) là bị chặn: $1 < U_n \le 2.$

Dãy (U_n) là dãy giảm.

Thật vậy ta xét $U_{k+1} < U_k \Leftrightarrow \frac{U_n + 1}{2} < U_k \Leftrightarrow 2U_k > U_k + 1 \Leftrightarrow U_k > 1$ (đúng).

Vậy dãy (U_n) có giới hạn. Đặt $\lim U_n = a$.

Ta có: $\lim(U_{n+1}) = \lim\left(\frac{U_n + 1}{2}\right)$ hay $a = \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow a = 1.$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Khai báo: $1 \to X$ {biến đếm}; $2 \to A$ {giá trị u_1 }

Ghi vào màn hình: $X = X + 1 : A = \frac{A+1}{2}$

Ấn CALC và lặp lại phím $=$, quan sát ta thấy dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1. Vậy $\lim U_n = 1.$

Ví dụ 6: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n};\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Ta sẽ chứng minh dãy bị chặn: $\sqrt{2} \le U_n < 2$ (bằng phương pháp quy nạp).

- $U_1 = \sqrt{3}$ (đúng).
- Giả sử $U_k \ge \sqrt{2},\ \forall k \ge 1$.

Ta có: $U_{k+1} = \sqrt{2+U_k} \ge \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2}\ (\forall k \ge 1)$.

Vậy $U_k \ge \sqrt{2}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tương tự: $U_n < 2\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh dãy (U_n) là dãy tăng (bằng phương pháp quy nạp).

+ $U_1 = \sqrt{2};\ U_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \Rightarrow U_1 < U_2$.

+ Giả sử $U_{k-1} < U_k\ \forall k \ge 2$. Ta xét $U_k < U_{k+1};\ \forall k \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow U_k < \sqrt{2+U_m} \Leftrightarrow U_k^2 < 2 + U_k \Leftrightarrow U_k^2 - U_k - 2 < 0$

$\Leftrightarrow -1 < U_k < 2$ (luôn đúng vì $\sqrt{2} < U_k < 2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$)

Vậy dãy (U_n) tăng; bị chặn trên nên có giới hạn, gọi $a = \lim U_n = \lim U_{n+1}$.

Ta có: $\lim U_n = \sqrt{2+\text{Lim}U_n} \Leftrightarrow a = \sqrt{2+a} \Leftrightarrow a^2 = 2 + a$

$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \text{ (nhận)} \\ a = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Khai báo: $1 \to X$ {biến đếm}; $\sqrt{2} \to A$ {giá trị u_1 }

Ghi vào màn hình: $X = X + 1 : A = \sqrt{2+A}$

Ấn CALC và lặp lại phím $=$, quan sát ta thấy dãy tăng và bị chặn dưới bởi 2. Vậy $\lim U_n = 2$.

Ví dụ 7: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{3}{U_n}\right);\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $U_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có: $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{3}{U_n}\right) \ge \sqrt{3},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (U_n) là dãy bị chặn dưới.

Vì $U_n \ge \sqrt{3} \Rightarrow U_n^2 \ge 3 \Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{3}{U_n}\right) \le \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{U_n^2}{U_n}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(U_n + U_n\right) = U_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dãy đã cho là giảm. Vậy dãy có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1} = \lim U_n = a$.

Ta có: $\lim U_n = \lim\left[\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{3}{U_n}\right)\right]$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{3}{a}\right) \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}.$

3. Bài tập trắc nghệm

Câu 1: Tính giới hạn: $\lim \frac{1+3+5+...+\left(2n+1\right)}{3n^2+4}$.

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $1+3+5+...+\left(2n+1\right) = \left(n+1\right)^2$.

Vậy: $\lim \frac{1+3+5+...+\left(2n+1\right)}{3n^2+4} = \lim \frac{\left(n+1\right)^2}{3n^2+4}$

$= \lim \frac{n^2+2n+1}{3n^2+4} = \lim \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}.$

Câu 2: Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n\left(n+1\right)}\right]$.

A. 0. **B.** 1.

C. $\frac{3}{2}$. **D.** Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n\left(n+1\right)}\right] = \lim\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$= \lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Câu 3: Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{n\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}\right]$.

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{n(2n-1)(2n+1)}\right]$

$=\frac{1}{2}\lim\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\lim\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$

Câu 4: Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{n(n+2)}\right].$

A. $\frac{3}{4}.$ **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}.$

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{n(n+2)}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

Vậy $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{n(n+2)}\right]=\frac{3}{4}.$

Câu 5: Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}\right].$

A. $\frac{11}{18}.$ **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}.$

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$ vậy:

$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

$\lim\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}\right]=\frac{11}{18}.$

Câu 6: Cho dãy (u_n) với $u_n=\frac{1+2+3+...+n}{n^2+1}.$ Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\lim u_n=0.$ **B.** $\lim u_n=\frac{1}{2}.$

C. $\lim u_n = 1$. **D.** $\lim u_n$ không tồn tại.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

- Dãy số 1, 2, 3, …, n là cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 1$ số hạng cuối cùng $u_n = n$, công sai $d = 1$.

Khi đó $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(u_1 + n)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- Viết lại: $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$

$$\lim u_n = \lim \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \lim \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim \frac{1}{2}.$$

Câu 7: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{U_n^2}{2}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

A. 2. **B.** 1.

C. $\sqrt{2}$. **D.** Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $U_1 = \dfrac{1}{2}; U_2 = \dfrac{5}{8}; U_3 = \dfrac{57}{64}; ...$

Ta chứng minh: $U_n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (bằng phương pháp quy nạp). Vậy dãy bị chặn trên.

Ta chứng minh (U_n) là dãy tăng. Thật vậy:

Ta có: $U_{n+1} > U_n \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} + \dfrac{U_n^2}{2} > U_n$

$\Leftrightarrow U_n^2 - 2U_n + 1 > 0 \Leftrightarrow (U_n - 1)^2 > 0$ luôn đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, vì $U_n < 1$.

Vậy dãy có giới hạn. Đặt $a = \lim U_n = \lim U_{n+1}$.

Ta có: $\lim U_{n+1} = \lim\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{U_n^2}{2}\right) \Rightarrow a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow 2a = 1 + a^2$

$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$.

Câu 8: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_{n+1} = \dfrac{2 + U_n^2}{2U_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$. **D.** Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $U_{n+1}=\frac{1}{U_n}+\frac{1}{2}U_n\ge\sqrt{2}$ (theo bất đẳng thức Cô-si với $U_n>0$). Vậy $\left(U_n\right)$ là dãy bị chặn dưới.

Dấu "=" không xảy ra, nên $U_n>\sqrt{2},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lại có: $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{2+U_n^2}{2U_n^2}=\frac{1}{U_n^2}+\frac{1}{2}$. Vì $U_n>\sqrt{2}\Rightarrow U_n^2>2$

$\Rightarrow\frac{1}{U_n^2}<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{U_n^2}+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\Rightarrow U_{n+1}<U_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy dãy giảm, khi đó U_n có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1}=\lim U_n=a\ \left(a>0\right)$.

Ta có: $\lim U_{n+1}=\lim\frac{2+U_n^2}{2U_n}\Rightarrow a=\frac{2+a^2}{2a}\Rightarrow 2a^2=2+a^2$

$\Rightarrow a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2}$ (vì $a>0$).

Câu 9: Tìm giới hạn của dãy: $\begin{cases}U_1=\sqrt{2}\\U_{n+1}=\sqrt{2.U_n};\ n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

A. 2. **B.** $1+\sqrt{2}$.

C. $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$. **D.** Không có giới hạn.

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $U_1=\sqrt{2};U_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$;…

- Ta sẽ chứng minh $U_n<2$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$ (bằng phương pháp quy nạp).

$n=1,U_1=\sqrt{2}<2$. Giả sử $U_k<2,\forall k\ge1$.

Ta có: $U_{k+1}=\sqrt{2U_k}<\sqrt{2.2}=\sqrt{4}=2.$

Vậy $U_n<2,\forall n\in\mathbb{N}$. Lại có: $U_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

- Lại có: $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\sqrt{2U_n}}{U_n}=\sqrt{\frac{2}{U_n}}>\sqrt{\frac{2}{2}}=1\Rightarrow$ dãy tăng.

Vậy dãy đã cho có giới hạn. Đặt $\lim U_{n+1}=\lim U_n=a\ \left(a>0\right)$

Ta có: $\lim U_{n+1}=\lim\sqrt{2U_n}\Rightarrow a=\sqrt{2a}\Rightarrow a^2=2a\Rightarrow a=2.$

BÀI 2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$. **Ta nói hàm số** $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần đến x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to x_0$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=L\Leftrightarrow \forall (x_n), x_n\in K\setminus\{x_0\}, x_n\to x_0\Rightarrow f(x_n)\to L}$$

2. Định lí về giới hạn hữu hạn:

Ta thừa nhận định lý sau:

a) Giải sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó:

* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=L\pm M;$

* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M;$

* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{L}{M}$ $(\text{nếu } M\neq 0)$.

b) Nếu $f(x)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì: $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

(Dấu của f(x) được xác định trên khoảng đang tìm giới hạn, với $x\neq x_0$)

3. Giới hạn một bên

*** Định nghĩa:**

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.

  Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$ ta có: $f(x_n)\to L$.

  Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L\Leftrightarrow \forall (x_n), x_0<x_n<b, x_n\to x_0\Rightarrow f(x_n)\to L}$$

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$ ta có: $f(x_n)\to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow \forall (x_n), a<x_n<x_0, x_n\to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to L.$$

*** Định lí**

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L.}$$

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

*** Định nghĩa**

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi khi $x\to+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta có: $f(x_n)\to L$. .

Kí hiệu: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n>a, x_n\to+\infty \Rightarrow f(x_n)\to L.$$

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi khi $x\to-\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$ ta có: $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n<a, x_n\to+\infty \Rightarrow f(x_n)\to L.$$

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn vô cực

Các định nghĩa về giới hạn $+\infty$ (hoặc $-\infty$) của hàm số được phát biểu tương tự các định nghĩa 1,2 hay 3 ở trên. Chẳng hạn, giới hạn $-\infty$ của hàm số $y=f(x)$ khi x dần đến dương vô vực được định nghĩa như sau:

*** Định nghĩa:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x\to+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có: $f(x_n)\to-\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ hay $f(x)\to-\infty$ khi $x\to+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n>a, x_n\to+\infty \Rightarrow f(x_n)\to-\infty.}$$

Nhận xét: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(-x)=-\infty.$

2. Các giới hạn đặc biệt

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x} = 0$ với c là hằng số

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu k nguyên dương} \\ 0 & \text{nếu k nguyên âm} \end{cases}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu k chẵn} \\ -\infty & \text{nếu k lẻ} \end{cases}$

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực:

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty\left(\text{hoặc} -\infty\right)$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc trong bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$
L > 0	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
L < 0	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của tích $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
L > 0	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
L<0		+	$-\infty$
		-	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp

$x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to +\infty, x \to -\infty$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Dãy số có giới hạn hữu hạn

1. Phương pháp

Nếu hàm số $f(x)$ xác định trên $K \supset x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x \to -1}\left(x^2 - x + 7\right)$.

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x \to -1}\left(x^2 - x + 7\right) = 1 + 1 + 7 = 9.$

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 1}$

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + 3x^6 + 1} = \dfrac{3 - 2}{5 + 3 + 1} = \dfrac{1}{9}.$

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x \to -1}\left|4x^3 - 2x - 3\right|$ là:

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A $\lim\limits_{x \to -1}\left|4x^3 - 2x - 3\right| = \left|-4 + 2 - 3\right| = 5.$

Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2}$

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2} = \dfrac{-1 + 1}{\sqrt[3]{4} - 2} = 0.$

Ví dụ 5: Tính $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{\dfrac{x^4 - 4x^2 + 3}{7x^2 + 9x - 1}}$

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{\dfrac{x^4 - 4x^2 + 3}{7x^2 + 9x - 1}} = \sqrt{\dfrac{16 - 16 + 3}{28 - 18 - 1}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x \to 2}\left(3x^2 + 7x + 11\right)$ là:

A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 40.

Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)=3.2^2+7.2+11=37$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|=\left|\left(\sqrt{3}\right)^2-4\right|=1$

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}$ là:

A. $\sin\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}=0.\sin\dfrac{1}{2}=0$

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}$ là:

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}=\dfrac{(-1)^2-3}{(-1)^3+2}=-2$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}$ là:

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}=\dfrac{1-1^3}{(2.1-1)\left(1^4-3\right)}=0$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$ là:

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}=\dfrac{|-1-1|}{1-1-3}=-\dfrac{2}{3}$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ là:

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}=\dfrac{\sqrt{3+1}+1}{-1-1}=-\dfrac{3}{2}$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}$ là:

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}=\sqrt{\dfrac{9.3^2-3}{(2.3-1)(3^4-3)}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$ là:

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x}}=\sqrt{\dfrac{2^2-2+1}{2^2+2.2}}=\dfrac{1}{2}$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ là:

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}=\dfrac{\sqrt[3]{12-4}-\sqrt{6-2}}{3}=\dfrac{0}{3}=0$

Dạng 2. giới hạn một bên

1. Phương pháp

Ta cần nắm các tính chất sau

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_0<x_n<b, \lim_{n\to+\infty} x_n=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n)=L$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow \forall (x_n), a<x_n<x_0, \lim_{n\to+\infty} x_n=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n)=L$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{2x-6}$

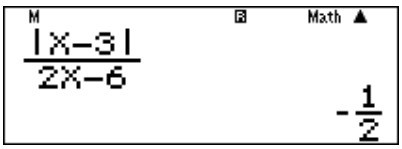
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x-3|}{2x-6}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{2(x-3)}=\frac{1}{2}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{|x-3|}{2x-6}$ và ấn CALC $3+10^{-5}$ = ta được kết quả



Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\dfrac{1-x^3}{3x^2+x}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{1-x^3}{3x^2+x}}=\sqrt{\frac{0}{4}}=0.$$

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^3-2x+3}{x^2+2x}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Tử số có giới hạn là -1, mẫu số có giới hạn 0 và khi $x<-2$ thì $x^2+2x>0.$

Do đó $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^3-2x+3}{x^2+2x}=-\infty.$

Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{5x-\sqrt{x}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\sqrt{x}}{5x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(5\sqrt{x}-1\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\left(5\sqrt{x}-1\right)}=\frac{-1}{1}=-1.$$

Ví dụ 5: Tính $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^3+x^2}}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^3+x^2}}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\left(x+1\right)\left(x+3\right)}{\sqrt{x^2\left(x+1\right)}}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+1}\left(x+3\right)}{\sqrt{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$ vì tử số có giới hạn là 2, mẫu số có giới hạn 0 và $1-x>0$ với $x<1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{15}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

. Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-15\right)=-13<0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-2\right)=0\ \&\ x-2>0,\forall x>2\end{cases}\longrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}=-\infty.$

Câu 2: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$.

C. $-\dfrac{15}{2}$. **D.** Không xác định.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x+2}=2>0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0 \ \&\ \sqrt{x-2}>0,\forall x>2\end{cases}\longrightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=+\infty.$$

Câu 3: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 3.

C. $+\infty$. **D.** Không xác định.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|x+2|=x+2$ với mọi $x>-2,$ do đó :

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|3x+6|}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{3|x+2|}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{3(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}3=3$$

Câu 4: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{(2-x)(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{1-2x}=-\dfrac{1}{3}.$

Câu 5: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ là:

A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x+3>0$ với mọi $x>-3,$ nên:

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}=\lim_{x\to -3^+}\frac{(x+3)(x+10)}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}=\lim_{x\to -3^+}\frac{\sqrt{x+3}.(x+10)}{\sqrt{x^2+5}}=\frac{\sqrt{-3+3}(-3+7)}{\sqrt{(-3)^2+5}}=0\,.$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\ge 1\end{cases}.$ Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ là:

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{3.1^2+1}=2$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ là:

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0 \ \&\ 1-x>0\ (\forall x<1)\end{cases}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & \text{với } x\ge 2\\ x-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-3\right)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)=1\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=1.$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2}+3 & \text{với } x\ge 2\\ ax-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

A. $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x-2}+3\right)=3\end{cases}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ tồn tại $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\Leftrightarrow 2a-1=3\Leftrightarrow a=2.$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{với } x>3\\ 1 & \text{với } x=3\\ 3-2x^2 & \text{với } x<3\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6.$ **B.** Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x).$

C. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=6.$ **D.** $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-15.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(x^2-2x+3\right)=6\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(3-2x^2\right)=-15\end{cases}\longrightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$\longrightarrow$ không tồn tại giới hạn khi $x\to 3$.

Vậy chỉ có khẳng định C sai.

Dạng 3. Giới hạn tại vô cực

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-x^3+1\right)$ là:

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-x^3+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{x^2}-1+\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}-1+\frac{1}{x^3}\right)=-1<0\end{cases}$.

Giải nhanh: $x-x^3+1\sim(-1)x^3\longrightarrow+\infty$ khi $x\to-\infty$.

Câu 12: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+2x^2-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=+\infty$.

Giải nhanh: $|x|^3+2x^2+3|x|\sim|x|^3\to+\infty$ khi $x\to-\infty$.

Câu 13: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x\to+\infty:\sqrt{x^2+1}+x\sim\sqrt{x^2}+x=2x\to+\infty$.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1=2>0\end{cases}.$$

Câu 14: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x\to+\infty:\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\sim\sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2}=\left(\sqrt[3]{3}+1\right)x\to+\infty.$

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=+\infty \text{ vì}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=\sqrt[3]{3}+1>0\end{cases}.$$

Câu 15: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$ là:

A. 4. **B.** $-\infty$. **C.** 6. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Đặt x^2 làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)=4>0\end{cases}.$$

Giải nhanh: $x\to+\infty:x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)\sim x\left(\sqrt{4x^2}+2x\right)=4x^2\to+\infty.$

Dạng 4. Dạng vô định $\frac{0}{0}$

1. Phương pháp

✓ Nhận dạng vô định $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0.$

✓ Phân tích tử và mẫu thành các nhân tử và giản ước

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$ và tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$.

Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm là x_0 thì $f(x)=(x-x_0).g(x)$

Đặc biệt:

- Nếu tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$, mà $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thì $f(x)$ được phân tích thành $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

- Phương trình bậc 3: $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$

  - $a+b+c+d=0$ thì pt có một nghiệm là $x_1=1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner

  - $a-b+c-d=0$ thì pt có một nghiệm là $x_1=-1$, để phân tích thành nhân tử ta dùng phép chia đa thức hoặc dùng sơ đồ Hooc-ner

- Nếu $u(x)$ và $v(x)$ có chứa dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hiệp, sau đó phân tích chúng thành tích để giản ước.

$A-B$	lượng liên hiệp là: $A+B$.
$\sqrt{A}-B$	lượng liên hiệp là: $\sqrt{A}+B$.
$\sqrt{A}-\sqrt{B}$	lượng liên hiệp là: $\sqrt{A}+\sqrt{B}$.
$\sqrt[3]{A}-B$	lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2}+B\sqrt[3]{A}+B^2\right)$.
$\sqrt[3]{A}+B$	lượng liên hiệp là: $\left(\sqrt[3]{A^2}-B\sqrt[3]{A}+B^2\right)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

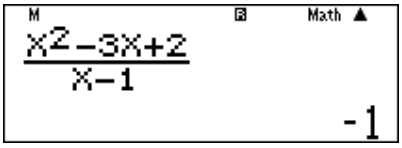
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to}(x-2)=-1.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{X^2-3X+2}{X-1}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 2: Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{1-x^2}$.

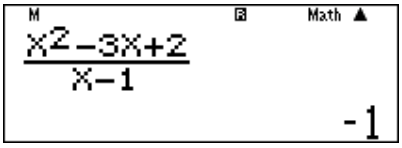
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)(x-1)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(2x-1)}{(1+x)}=\frac{-1}{2}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{2X^2-3X+1}{1-X^2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$

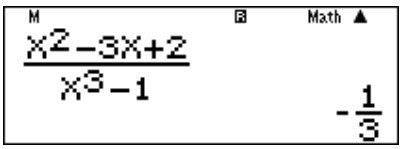
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2+x+1}=\frac{-1}{3}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{t^4-a^4}{t-a}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{t\to a}\frac{t^4-a^4}{t-a}=\lim_{t\to a}\left(t^3+t^2a+ta^2+a^3\right)=4a^3.$$

Ví dụ 5: Tính $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^4-1}{y^3-1}$

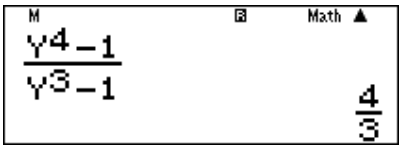
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^3+y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3+y^2+y+1}{y^2+y+1}=\frac{4}{3}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{Y^4-1}{Y^3-1}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-10}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 6: Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

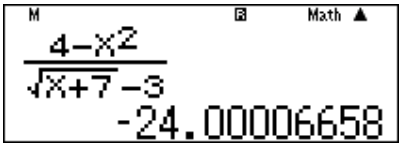
$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x+7-9}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\left(x+2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right]=-24.$$

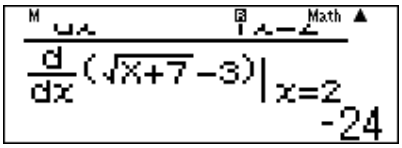
Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{4-X^2}{\sqrt{X+7}-3}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $1+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả ≈ -24.



Lưu ý: Để ra kết quả chính xác -24 ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(4-X^2\right)\Big|_{x=2}}{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{X+7}-3\right)\Big|_{x=2}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác -24.



Ví dụ 7: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

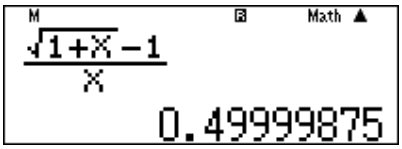
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$$

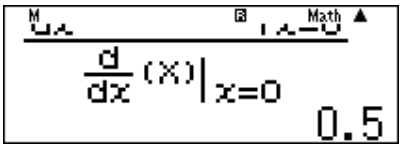
Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $0+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả $\approx \frac{1}{2}$.



Lưu ý: Để ra kết quả chính xác $\frac{1}{2}$ ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+X}-1\right)\Big|_{x=0}}{\frac{d}{dx}(X)\Big|_{x=0}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác $0,5=\frac{1}{2}$.



Ví dụ 8: Tính $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2}$

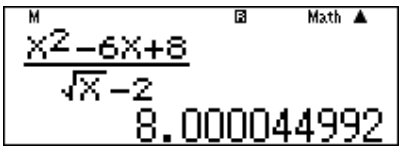
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-2)(\sqrt{x}+2)=2\times 4=8.$$

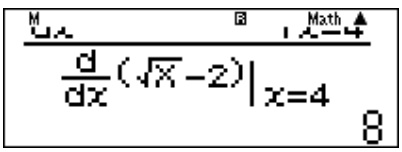
Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $4+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả ≈ 8.



Lưu ý: Để ra kết quả chính xác 8 ta có thể tính theo quy tắc Lô-pi-tan như sau:

Nhập $\frac{\frac{d}{dx}\left(X^2-6X+8\right)\Big|_{x=4}}{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{X}-2\right)\Big|_{x=4}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả chính xác 8.



Ví dụ 9: Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{4-\sqrt{2x^2+8}}$ b

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$E=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{4-\sqrt{2x^2+8}}$$

Nhân tử và mẫu hai lượng liên hợp:

$$\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]\left[4+\sqrt{2x^2+8}\right]$$

$$E=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]\left(4+\sqrt{2x^2+8}\right)}{\left(4-\sqrt{2x^2+8}\right)\left(4+\sqrt{2x^2+8}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]}$$

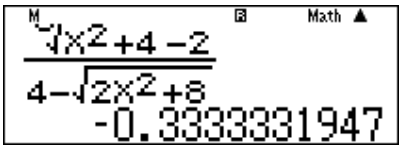
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+4-8\right)\left(4+\sqrt{2x^2+8}\right)}{\left(16-2x^2-8\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-4\right)\left(4+\sqrt{2x^2+8}\right)}{\left[-2\left(x^2-4\right)\right]\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4+\sqrt{2x^2+8}}{-2\left[\left(\sqrt[3]{x^2+4}\right)^2+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right]}=\frac{8}{-24}=-\frac{1}{3}.$$

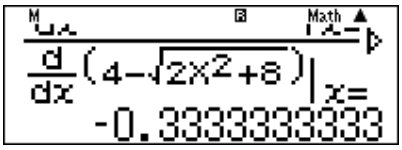
Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{4-\sqrt{2x^2+8}}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ $4+10^{-5}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả $\approx -\dfrac{1}{3}$.



Lời bình: Nếu ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

Nhập $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2+4}-2\right)\Big|_{x=2}}{\dfrac{d}{dx}\left(4-\sqrt{2x^2+8}\right)\Big|_{x=2}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $-0,(3)=-\dfrac{1}{3}$.



Ví dụ 10: Tính $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[4]{x^2+12}-2}{x^2-4}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$E=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[4]{x^2+12}-2}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt[4]{x^2+12}-2\right)\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)}$$ (vẫn còn dạng vô định $\dfrac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{x^2+12}-4\right)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}$$

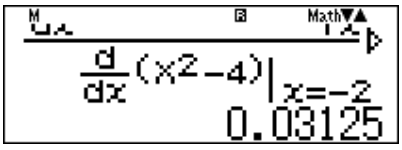
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+12-16}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+2\right)\left(\sqrt{x^2+12}+4\right)}=\frac{1}{32}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

Nhập $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[4]{x^2+12}-2\right)\Big|_{x=-2}}{\dfrac{d}{dx}\left(x^2-4\right)\Big|_{x=-2}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $0,03125=\dfrac{1}{32}$.



Ví dụ 11: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{x^2-1}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$E=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[6]{x}-1}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)}$$ (Vẫn dạng vô định $\frac{0}{0}$)

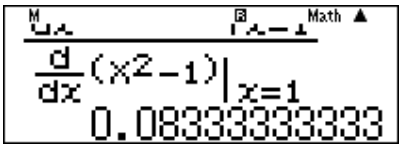
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(x+1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{12}.$$

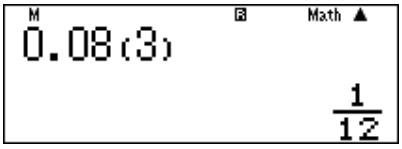
Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Ta dùng quy tắc Lô-pi-tan

Nhập $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[6]{X}-1\right)\Big|_{x=1}}{\dfrac{d}{dx}\left(x^2-1\right)\Big|_{x=1}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả $0,08\left(3\right)=\frac{1}{12}$.



Để chuyển $0,08\left(3\right)=\frac{1}{12}$ ta bấm như sau 0.08Qs3=



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$.

C. 3. **D.** Không xác định.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=\dfrac{12}{4}=3$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$ là:

A. $-\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{5}{3}.$

Câu 3: Biết rằng $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{3}+b.$ Tính $a^2+b^2.$

A. 10. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\sqrt{3}-x}$

$=\dfrac{2\left[\left(-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}.\left(-\sqrt{3}\right)+3\right]}{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{18}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}\longrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=10$.

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$ là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|=\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)}\right|=\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{x-2}{x}\right|=\left|\dfrac{-3-2}{-3}\right|=\dfrac{5}{3}.$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3-x>0$ với mọi $x<3,$ do đó:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}=\lim_{x\to 3^-}\frac{3-x}{\sqrt{(3-x)\left(9+3x+x^2\right)}}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}}=\frac{\sqrt{3-3}}{\sqrt{9+3.3+3^2}}=0.$$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}$ là:

A. $-\dfrac{2\pi^{21}}{7}.$ **B.** $-\dfrac{2\pi^{21}}{9}.$ **C.** $-\dfrac{2\pi^{21}}{5}.$ **D.** $\dfrac{1-2\pi^{21}}{7}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\left(\sqrt[7]{1-2x}-1\right)}{x}+\lim_{x\to 0}x=-\frac{2\pi^{21}}{7}.$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ là:

A. $0.$ **B.** $-\infty.$ **C.** $1.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(x^2+x\right)-x}{x^2\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}=+\infty$

vì $1>0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)=0$ và $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}>0$ với mọi $x>0.$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$ là:

A. $-1.$ **B.** $0.$ **C.** $1.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{(4x+4-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{4\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{12}{12}=1.$$

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $-\dfrac{13}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\sqrt{1+x}-2}{x}+\dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}\right)=1+\dfrac{1}{12}=\dfrac{13}{12}.$

Câu 10: Biết rằng $b>0, a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $1<a<3.$ **B.** $b>1.$ **C.** $a^2+b^2>10.$ **D.** $a-b<0.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}+\dfrac{1-\sqrt{1-bx}}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ax}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}+\dfrac{bx}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}+\dfrac{b}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)=\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=2.$

Vậy ta được: $\begin{cases}a+b=5\\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ 2a+3b=12\end{cases}\Leftrightarrow a=3,\ b=2$

Dạng 5. Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

1. Phương pháp

✓ Nhận biết dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\pm\infty.$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\pm\infty.$

✓ Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ cao nhất của biến ở mẫu (Hoặc phân tích thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước)

- ✓ Nếu u(x) hoặc v(x) có chứa biến x trong dấu căn thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (Với k là mũ cao nhất của biến x trong dấu căn), sau đó chia tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x (thường là bậc cao nhất ở mẫu).
- ✓ Cách tính giới hạn dạng này hoàn toàn tương tự giới hạn dãy số.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4+x^3-2x^2-3}{x-2x^4}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

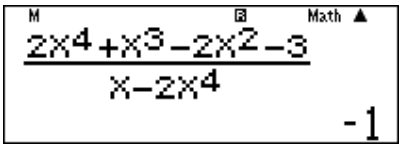
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+x^3-2x^2-3}{x-2x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}}{\dfrac{1}{x^3}-2}=-1.$$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$$\frac{2x^4+x^3-2x^2-3}{x-2x^4}\sim\frac{2x^4}{-2x^4}=-1.$$

Cách 3: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\dfrac{2x^4+x^3-2x^2-3}{x-2x^4}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ 10^{15} $\boxed{=}$ ta được kết quả -1.



Lời bình: "Bậc tử bằng bậc mẫu" nên kết quả $\dfrac{2}{-2}=-1$.

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2x}{5+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)=5>0;\ \lim_{x\to+\infty}\left(3-2x\right)=-\infty.$$

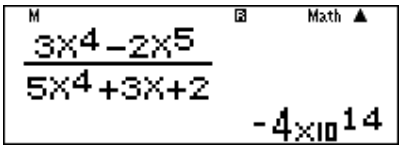
Do đó: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}=-\infty.$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$$\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}\sim\frac{-2x^5}{5x^4}=-\frac{2}{5}x=-\infty.$$

Cách 3: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x+2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ 10^{15} $\boxed{=}$ ta được kết quả $\approx-\infty$.



Lời bình: Bậc tử lớn hơn bậc mẫu nên kết quả là ∞.

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x^6+2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

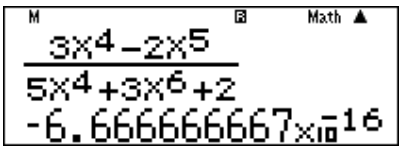
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x^6+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}{\frac{5}{x^2}+3+\frac{2}{x^6}}=\frac{0}{3}=0.$$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$$\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x^6+2}\sim\frac{-2x^5}{3x^6}=-\frac{2}{3}.\frac{1}{x}=0.$$

Cách 3: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{3x^4-2x^5}{5x^4+3x^6+2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ 10^{15} $\boxed{=}$ ta được kết quả ≈ 0.



Lời bình: "Bậc tử bé hơn bậc mẫu" nên kết quả là 0.

Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

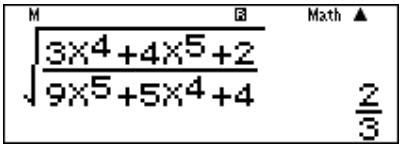
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\frac{3}{x}+4+\frac{2}{x^5}}{9+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^5}}}=\frac{2}{3}.$$

Cách 2: *Mẹo giải nhanh*

$$\sqrt{\frac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}} \sim \sqrt{\frac{4x^5}{9x^5}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Cách 3: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\sqrt{\frac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ 10^{15} $\boxed{=}$ ta được kết quả ≈ 0.



Ví dụ 5: Tính $L = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

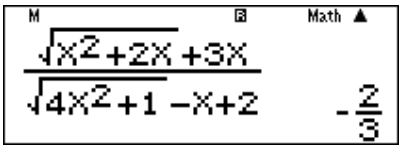
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3}{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}} = \frac{2}{-3}.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ -10^{15} $\boxed{=}$ ta được kết quả $\frac{2}{3}$.



Ví dụ 6: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x+5}}{2x-7}$

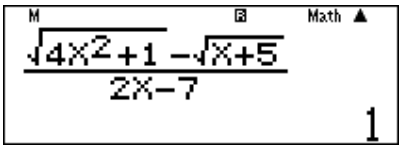
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x+5}}{2x-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}{2-\frac{7}{x}} = \frac{2-0}{2-0} = 1.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\frac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x+5}}{2x-7}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ 10^{25} $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 7: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+5\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}$

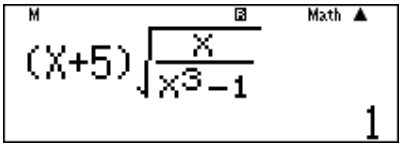
Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+5\right)\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x\left(x+5\right)^2}{x^3-1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^2}{1-\dfrac{1}{x^3}}}=1.$$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Nhập vào màn hình $\left(x+5\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}$ ấn $\boxed{\text{CALC}}$ 10^{25} $\boxed{=}$ ta được kết quả



Ví dụ 8: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(-x^2+1\right)^3\left(1-2x\right)^{94}}{2x^{100}+3}$

Hướng dẫn giải

$$E=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-x^2+1\right)^3\left(1-2x\right)^{94}}{2x^{100}+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[x^2\left(-1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]^3\left[x\left(\dfrac{1}{x}-2\right)\right]^{94}}{x^{100}\left(2+\dfrac{3}{x^{100}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6\left(-1+\dfrac{1}{x^2}\right)^3x^{94}\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^{94}}{x^{100}\left(2+\dfrac{3}{x^{100}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-1+\dfrac{1}{x^2}\right)^3\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^{94}}{2+\dfrac{3}{x^{100}}}=\frac{\left(-1\right)^3.\left(-2\right)^{94}}{2}=-2^{93}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2$.

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}\sim\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

Câu 2: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x.\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=-\infty.$

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}\sim\dfrac{2x^3}{x^2}=2x\to-\infty.$

Câu 3: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{7}{x^4}+\dfrac{11}{x^6}}{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^6}}=\dfrac{0}{3}=0.$

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}\sim\dfrac{2x^3}{3x^6}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{x^3}\to 0.$

Câu 4: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

. Khi $x\to-\infty$ thì $\sqrt{x^2}=-x\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=-x-x=-2x\neq 0$

$\longrightarrow$ chia cả tử và mẫu cho x, ta được $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-1$.

Câu 5: Biết rằng $\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$ (với a là tham số). Tính giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4.$

A. $P_{\min}=1.$ **B.** $P_{\min}=3.$ **C.** $P_{\min}=4.$ **D.** $P_{\min}=5.$

Lời giải

Chọn B

Khi $x\to+\infty$ thì $\sqrt{x^2}=x\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=x-x=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2-a)x-3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right).$

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)=4>0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=+\infty$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)=2-a>0\Rightarrow a<2$.

Giải nhanh : ta có $x\to+\infty\longrightarrow\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$

$=\left((2-a)x-3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\sim(2-a)x.\left(\sqrt{x^2}+x\right)=2(2-a)x\to+\infty\Leftrightarrow a<2$.

Khi đó $P=a^2-2a+4=(a-1)^2+3\ge3,\ P=3\Leftrightarrow a=1<2\Rightarrow P_{\min}=3.$

Câu 6: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là:

A. $-2.$ **B.** $-1.$ **C.** $-2.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh: khi $x\to-\infty\longrightarrow\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}\sim\dfrac{\sqrt{4x^2}}{x}=\dfrac{-2x}{x}=-2.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{-\sqrt{4}}{1}=-2.$

Câu 7: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ là:

A. $-\frac{1}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh : khi

$$x \to +\infty \longrightarrow \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x} \sim \frac{\sqrt{4x^2}-x}{\sqrt{9x^2}+2x} = \frac{2x-x}{3x+2x} = \frac{1}{5}.$$

Cụ thể : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}-1}{\sqrt{9-\frac{3}{x}}+2} = \frac{1}{5}.$

Câu 8: Biết rằng $L = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx} > 0$ là hữu hạn (với a,b là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng.

A. $a \geq 0$. **B.** $L = -\frac{3}{a+b}$ **C.** $L = \frac{3}{b-\sqrt{a}}$ **D.** $b > 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta phải có $ax^2-3x > 0$ trên $(-\infty;\alpha) \Leftrightarrow a \geq 0$.

Ta có $x \to -\infty \longrightarrow \sqrt{4x^2-2x+1}+2-x \sim \sqrt{4x^2}-x = -3x \neq 0$.

Như vậy xem như "tử" là một đa thức bậc 1. Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx} > 0$ khi và chỉ khi $\sqrt{ax^2-3x}+bx$ là đa thức bậc 1.

Ta có $\sqrt{ax^2-3x}+bx \sim \sqrt{ax^2}+bx = \left(-\sqrt{a}+b\right)x \longrightarrow -\sqrt{a}+b \neq 0$.

Khi đó $\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx} \sim \frac{-3x}{\left(-\sqrt{a}+b\right)x} = \frac{3}{b-\sqrt{a}} = L > 0 \Leftrightarrow b-\sqrt{a} > 0 \Rightarrow b > \sqrt{a}$.

Câu 9: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh: $x \to -\infty \longrightarrow \frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}} \sim \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{x}{-\sqrt{2}x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)$ là $+\infty.$

A. $a>\sqrt{2}.$ **B.** $a<\sqrt{2}.$ **C.** $a>2.$ **D.** $a<2.$

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{2x^2+1}+ax\sim\sqrt{2x^2}+x$

$=-\sqrt{2}x+ax=\left(a-\sqrt{2}\right)x\to+\infty\Leftrightarrow a-\sqrt{2}<0\Leftrightarrow a<\sqrt{2}.$

Cụ thể: vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+a\right)=+\infty$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+a\right)=a-\sqrt{2}<0\Leftrightarrow a<\sqrt{2}.$

Dạng 6. Dạng vô định $\infty-\infty,0.\infty$

1. Phương pháp

- ✓ Nếu biểu thức chứa biến số dưới dấu căn thì nhân và chia với biểu thức liên hợp
- ✓ Nếu biểu thức chứa nhiều phân thức thì quy đồng mẫu và đưa về cùng một biểu thức.
- ✓ Thông thường, các phép biến đổi này có thể cho ta khử ngay dạng vô định $\infty-\infty;0.\infty$ hoặc chuyển về dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty};\dfrac{0}{0}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)$

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1-x+3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{4}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}\right)}=0.$

Ví dụ 2: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+1}=\dfrac{5}{2}.$

Ví dụ 3: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$

Hướng dẫn giải

$E=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$

Nhân và chia liên hợp $x+\sqrt{x^2+5x}$

$$E=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-5x}{x+|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x+x\sqrt{1+\frac{5}{x}}}\ (\text{Vì}=\lim_{x\to+\infty}|x|=\lim_{x\to+\infty}x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=\frac{-5}{1+\sqrt{1+0}}=-\frac{5}{2}.$$

Ví dụ 4: Tính $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$

Hướng dẫn giải

$E=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$ (Dạng vô định $0.\infty$)

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{1-x-1}{x(x+1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{x+1}=-1.$$

Ví dụ 6: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=0.$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{5}{x}}=1.$$

Ví dụ 7: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{2}{2}=1.$$

Ví dụ 8: Tính $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-x^2-x-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{0}{2}=0$$

Ví dụ 9: Tính $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-7}\right)$

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+5-x+7}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-7}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{12}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}}}=\frac{0}{2}=0.$$

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-x\right)=\frac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-5x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{\sqrt{x^2-5x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\sqrt{1-\frac{5}{x}}+1}=-\frac{5}{2}.$$

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{x^2+5}=1$.

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}=-1.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2\right)$ là:

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh : $x\to-\infty\longrightarrow 2x^3-x^2\sim 2x^3\to-\infty$.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-x^2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=2>0\end{cases}$.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x+2-1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x+1}{x^2-4}\right)=-\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to2^-}(x+1)=3>0;\ \lim\limits_{x\to2^-}(x^2-4)=0$ và $x^2-4<0$ với mọi $x\in(-2;2)$.

Câu 3: Biết rằng $a+b=4$ và $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{b}{1-x^3}-\dfrac{a}{1-x}\right)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a+ax+ax^2-b}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a+ax+ax^2-b}{(1-x)(1+x+x^2)}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow1+a.1+a.1^2-b=0\Leftrightarrow2a-b=-1$.

Vậy ta có $\begin{cases}a+b=4\\2a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\Rightarrow L=-\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$

$=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2}=1$.

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=+\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=\sqrt{2}-1>0.$

Giải nhanh : $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{1+2x^2}-x\sim\sqrt{2x^2}-x=\sqrt{2}x-x=\left(\sqrt{2}-1\right)x\to+\infty.$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

. $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=x-x=0\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp.

Giải nhanh: $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\sim\frac{1}{\sqrt{x^2}+x}=\frac{1}{2x}\to 0.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{0}{2}=0.$

Câu 6: Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b.$ Tính $S=5a+b.$

A. $S=1.$ **B.** $S=-1.$ **C.** $S=5.$ **D.** $S=-5.$

Lời giải

Chọn A

$x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\sim\sqrt{5x^2}+x\sqrt{5}=-\sqrt{5}x+x\sqrt{5}=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}$

$=\frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}\sim\frac{2x}{\sqrt{5x^2}-x\sqrt{5}}=\frac{2x}{-2\sqrt{5}x}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$

Cụ thể: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{5+\frac{2}{x}}+\sqrt{5}}=\frac{2}{-2\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{5}\sqrt{5}\longrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{5}\Rightarrow S=-1.\\ b=0\end{cases}$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$ là:

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

. Khi $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\sim\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x \to +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}$

$= \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}} \sim \dfrac{-x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} = \dfrac{-x}{2x} = -\dfrac{1}{2}.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}} = -\dfrac{1}{2}.$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1.$ **B.** $+\infty.$ **C.** $\sqrt[3]{3}-1.$ **D.** $-\infty.$

Lời giải

Chọn D

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[3]{3-\dfrac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right) = -\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3-\dfrac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right) = \sqrt[3]{3}-1>0.$

Giải nhanh:

$$x \to -\infty \longrightarrow \sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2} \sim \sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2} = \left(\sqrt[3]{3}-1\right)x \to -\infty.$$

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$ là:

A. $\dfrac{5}{6}.$ **B.** $+\infty.$ **C.** $-1.$ **D.** $-\infty.$

Lời giải

Chọn A

Khi $x \to +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2} \sim \sqrt{x^2}--\sqrt[3]{x^3} = x-x = 0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x+x-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\dfrac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}\right) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}.$

Giải nhanh: $\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2} = \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)+\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

$= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\dfrac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{x^2}+x}+\dfrac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[6]{x^6}}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} (x \to +\infty).$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} \right)$ là:

A. $0.$ **B.** $+\infty.$ **C.** $-1.$ **D.** $-\infty .$

Lời giải

Chọn A

$x \to +\infty \longrightarrow \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} \sim \sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{2x} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} = 0.$$

Giải nhanh: $\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1} =$

$$\frac{-2}{\sqrt[3]{\sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{4x^2-1} - \sqrt[3]{(2x+1)^2}}} \sim \frac{-2}{\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}} \to 0.$$

Câu 11: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$ là:

A. $+\infty.$ **B.** $-1.$ **C.** $0.$ **D.** $+\infty .$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] = \lim\limits_{x \to 0} (x-1) = 0 - 1 = -1.$

Câu 12: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ là:

A. $1.$ **B.** $+\infty.$ **C.** $0.$ **D.** $-\infty .$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{0.\sqrt{2}}{2} = 0 .$

Câu 13: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ là:

A. $\frac{2}{3}.$ **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}.$ **C.** $+\infty.$ **D.** $-\infty .$

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2(2x+1)}{3x^3+x^2+2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Giải nhanh:

$$x\to+\infty \longrightarrow x\sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} \sim x.\sqrt{\frac{2x}{3x^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.x.\frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.x.\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 14: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to0} x^2\left(\sin\pi x - \frac{1}{x^2}\right)$ là:

A. 0. **B.** -1. **C.** π. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to0} x^2\left(\sin\pi x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to0}\left(x^2\sin\pi x - 1\right) = -1.$

Câu 15: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$ là:

A. 3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

. Với $x\in(-1;0)$ thì $x+1>0$ và $\frac{x}{x-1}>0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^+}\sqrt{x+1}\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\frac{x}{x-1}} = 0$

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

II – HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

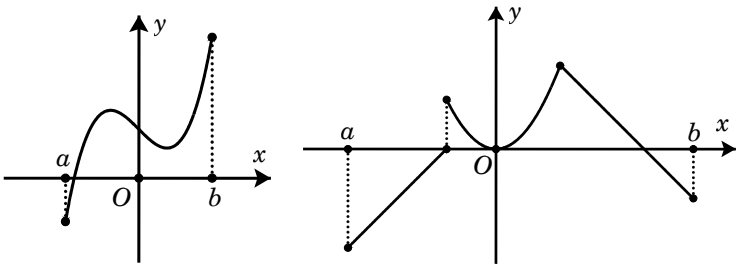
Định nghĩa 2

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a), \quad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b).$$

Nhận xét: Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.



Hàm số liên tục trên khoảng $(a;b)$ Hàm số không liên tục trên khoảng $(a;b)$

III – MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lí 2

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$ và $y=f(x).g(x)$ liên tục tại x_0;

b) Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

Định lí 3

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0,$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Định lí 3 có thể phát biểu theo một dạng khác như sau:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0,$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hàm số $f(x)=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ liên tục trên:

A. $[-4;3]$. **B.** $[-4;3)$.

C. $(-4;3]$. **D.** $[-\infty;-4]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}3-x\ge 0\\ x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-4\\ x\le -3\end{cases}\xrightarrow{TXD}D=(-4;3]\longrightarrow$ hàm số liên tục trên $(-4;3)$. Xét tại $x=3,$ ta có

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}=f(3)\longrightarrow$ Hàm số liên tục trái tại $x=3.$

Vậy hàm số liên tục trên $(-4;3]$.

Câu 2: Hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+x\cos x+\sin x}{2\sin x+3}$ liên tục trên:

A. $[-1;1]$. **B.** $[1;5]$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $2\sin x+3\ne 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\xrightarrow{TXD}D=\mathbb{R}\longrightarrow$ Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ với $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ với mọi $x\ne 1$. Tính $f(1)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1.$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-3;3]$ với $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}$ với $x\neq 0$. Tính $f(0)$.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Vì $f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ nên suy ra

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4;+\infty)$ với $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ với $x\neq 0$. Tính $f(0)$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Vì $f(x)$ liên tục trên $(-4;+\infty)$ nên suy ra

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}+2\right)=4.$$

Dạng 2. Hàm số liên tục tại một điểm

1. Phương pháp

Ta cần phải nắm vững định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0\in K$. Hàm số $y=f(x)$ gọi là liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}$ với $x\neq 0$. Phải bổ sung thêm giá trị $f(0)$ bằng bao nhiêu thì hàm số liên tục tại $x=0$?

Hướng dẫn giải

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+2-2+x}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Như vậy để hàm số liên tục tại $x=0$ thì phải bổ sung thêm giá trị $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} a-x^2 & \text{với } x\neq 1 \text{ và } a\in\mathbb{R} \\ 3 & \text{với } x=1 \end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x=1$ là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có:

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(a-x^2\right) = a-1.$

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a-1=3 \Leftrightarrow a=4.$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}} & \text{với } x\neq 3 \text{ và } x\neq -2 \\ b+3 & \text{với } x=3 \text{ và } b\in\mathbb{R} \end{cases}$. Tìm b để $f(x)$ liên tục tại $x=3$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có:

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-x+6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $f(3)=b+3.$

Để hàm số liên tục tại $x=3 \Leftrightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow b+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow b=\frac{-2\sqrt{3}}{3}.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} a-2 & \text{khi } x<2 \\ \sin\dfrac{\pi}{x} & \text{khi } x\geq 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x=2$.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(2)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(a-2)=a-2 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\sin\dfrac{\pi}{2}=1 \end{array}\right\}$$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi $a-1=2 \Leftrightarrow a=3.$

Ví dụ 5: Tìm số a để hàm số sau liên tục tại điểm x_0.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x>2 \\ ax+2 & \text{nếu } x\leq 2 \end{cases};\ x_0=2.$$

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=ax+2=2a+2.$$

Lại có: $f(2)=2a+2$.

Hàm số liên tục tại $x_0=2$ nếu $2a+2=\frac{1}{4}\Rightarrow a=-\frac{7}{8}$.

Ví dụ 6: Xét tính liên tục của hàm số sau tại x_0.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{nếu } x>1\\ \dfrac{1}{4} & \text{nếu } x=1;\ x_0=0,\ x_0=1.\\ \dfrac{x^2-1}{x^2+6x-7} & \text{nếu } x<1\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{1}{4}.$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x^2+6x-7}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x+7}=\frac{1}{4};\ f(1)=\frac{1}{4}.$$

Vậy $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=\frac{1}{4}$, nên hàm số liên tục tại $x_0=1$.

Dễ thấy $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^2+6x-7}=\frac{1}{7}=f(0)$ nên hàm số liên tục tại $x=0$.

Ví dụ 7: Xét tính liên tục của hàm số sau tại x_0.

$$f(x)=|x+2|;\ x_0=-2,\ x_0=1.$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(x)=|x+2|=\begin{cases}x+2 & \text{nếu } x\ge -2\\ -(x+2) & \text{nếu } x<-2\end{cases}$

- Ta có: $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+2)=3;\ f(1)=3.$

Vậy $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$, nên hàm số liên tục tại tại $x_0=1$.

- Lại có: $\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(x+2)=0;\ \lim_{x\to -2^-} f(x)=0;\ f(-2)=0.$

Vậy $\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2} f(x)=f(-2)=0$ nên hàm số liên tục tại $x_0=2$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+5}} & \text{với } -5<x<4\\ mx+2 & \text{với } x=4\\ \dfrac{\sqrt{x}}{3} & \text{với } x>4\end{cases}$. Tìm giá trị của m để $f(x)$ liên tục tại $x=4$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+5}}=\dfrac{2}{3}$; $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{\sqrt{x}}{3}=\dfrac{2}{3}$.

Và $f(4)=4m+2$

Để hàm số liên tục tại $x=4$ thì $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=f(4)$

$\Leftrightarrow 4m+2=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-4x+3} & \text{nếu } x<1\\ \dfrac{1}{6}\cos\pi x+a^2-x & \text{nếu } x\ge1\end{cases}$. Tìm giá trị của a để $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Hướng dẫn giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

- $f(1)=\dfrac{1}{6}\cos\pi+a^2-1=-\dfrac{1}{6}+a^2-1$.
- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{6}\cos\pi x+a^2-x\right)=-\dfrac{1}{6}+a^2-1$.
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+8-9}{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}=-\frac{1}{6}.$$

Để hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{6}+a^2-1=-\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow a=\pm1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\ne2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn D

. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$, chứa $x=2$. Theo giả thiết thì ta phải có

$$m=f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=3.$$

Câu 2: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=6$.

Lời giải

Chọn A

. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Theo giả thiết ta phải có

$$3+m=f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+2)=3\Leftrightarrow m=0.$$

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ k+1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=2$. **C.** $k=-\frac{1}{2}$. **D.** $k=0$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $D=[0;+\infty)$. Điều kiện bài toán tương đương với

Ta có: $k+1=y(1)=\lim_{x\to 1}y=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$.

Câu 4: Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$ (với m là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m\in(-3;0)$. **B.** $m\leq -3$. **C.** $m\in[0;5)$. **D.** $m\in[5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(-1;+\infty)$. Theo giả thiết ta phải có

$$m=f(3)=\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=-\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)=-4.$$

Câu 5: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ m & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0.$

A. $m\in(-2;-1).$ **B.** $m\le -2.$ **C.** $m\in[-1;7).$ **D.** $m\in[7;+\infty).$

Lời giải

Chọn C

Với mọi $x\neq 0$ ta có

$0\le|f(x)|=\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right|\le x^2\to 0$ khi $x\to 0\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$

Theo giải thiết ta phải có: $m=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$

Câu 6: Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$ Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right).$ **B.** $\left(-\infty;\dfrac{\pi}{4}\right).$ **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right).$ **D.** $(-\infty;+\infty).$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định:

$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k\pi\right)=\cdots\cup\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{2}\right)\cup\cdots$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1}{\cos x}=1.\dfrac{1}{\cos 0}=1\neq 0=f(0)\longrightarrow$ $f(x)$ không liên tục tại $x=0.$

Câu 7: Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$ Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1.$

A. $m=-\pi.$ **B.** $m=\pi.$ **C.** $m=-1.$ **D.** $m=1.$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}.$ Điều kiện bài toán tương đương với

$$m=f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x-\pi+\pi)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-\sin\pi(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[(-\pi).\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}\right]\ (*).$$

Đặt $t=\pi(x-1)$ thì $t\to 0$ khi $x\to 1.$ Do đó (*) trở thành: $m=\lim\limits_{t\to 0}(-\pi).\dfrac{\sin t}{t}=-\pi.$

Câu 8: Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$ Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} & \text{khi } x\neq\pi\\ m & \text{khi } x=\pi\end{cases}$ liên tục tại $x=\pi.$

A. $m=\dfrac{\pi}{2}.$ **B.** $m=-\dfrac{\pi}{2}.$ **C.** $m=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $m=-\dfrac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn C

. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điều kiện củz bài toán trở thành:

$$m=f(\pi)=\lim_{x\to\pi}f(x)=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos^2\dfrac{x}{2}}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)}{(x-\pi)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)}\right]^2 \quad (*)$$

Đặt $t=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\to 0$ khi $x\to 1.$ Khi đó (*) trở thành: $m=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2=\dfrac{1}{2}.1^2=\dfrac{1}{2}.$

Câu 9: Hàm số $f(x)=\begin{cases}3 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x\neq -1,\ x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x=0,\ x=1.$ **B.** mọi điểm $x\in\mathbb{R}.$

C. mọi điểm trừ $x=-1.$ **D.** mọi điểm trừ $x=0.$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1),(-1;0)$ và $(0;+\infty)$.

(i) Xét tại $x=-1$, ta có

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^4+x}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1}\left(x^2-x+1\right)=3=f(-1).$$

$\longrightarrow$ hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=-1$.

(ii) Xét tại $x=0$, ta có

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\left(x^2-x+1\right)=1=f(0).$$

$\longrightarrow$ hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Câu 10: Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5 & \text{khi } x=-1\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x\neq -1,\ x\neq 1\\ 1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

. Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ $D=\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ và $(1;+\infty)$.

(i) Xét tại $x=-1$, ta có $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}=f(-1)\longrightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=-1$.

(ii) Xét tại $x=1$, ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty\end{cases}\longrightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Dạng 3. Hàm số liên tục trên một khoảng

1. Phương pháp

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a,b]$ nếu nó liên tục trên (a,b) và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a),\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b).$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-3;2)$. **B.** $(-3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(2;3)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$ không liên tục tại $x=-2;\ x=-3,$ suy ra $f(x)$ liên tục trên khoảng $(2;3)$.

Ví dụ 2: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{3x-1}{1-x^2}$. **B.** $y=3+\tan x$.

C. $y=\dfrac{4+x}{2+\sqrt{1+x^2}}$. **D.** $y=\dfrac{3+2x}{1+\sin x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có định lí: Mọi hàm sơ cấp đều liên tục trên từng khoảng xác định.

Do đó: Phương án A sai vì tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Phương án B sai vì $\tan x$ chỉ xác định khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Phương án D sai vì $1+\sin x \neq 0$, nghĩa là hàm số chỉ xác định khi $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Phương án C đúng vì hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $(0;+\infty)$?

A. $y = \sqrt{x-1}$. **B.** $y = \frac{\sin x + 2}{x^2 - 1}$. **C.** $y = \frac{3-2x}{\sqrt{x+1}}$. **D.** $y = \sqrt{x^2 - x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

- Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1}$ là $[1;+\infty)$ suy ra y không liên tục trên $(0;+\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x + 2}{x^2 - 1}$ là $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ suy ra y không liên tục trên $(0;+\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y = \frac{3-2x}{\sqrt{x+1}}$ là $(-1;+\infty)$. Suy ra y liên tục trên $(-1;+\infty)$. Mặt khác $(-1;+\infty) \supset (0;+\infty)$ nên y cũng liên tục trên $(0;+\infty)$.
- Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 - x}$ là $(-\infty;0] \cup [1;+\infty)$. Suy ra y không liên tục trên $(0;+\infty)$.

Ví dụ 4: Hàm số $y = \tan x.\cot x$ liên tục trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;\pi)$. **D.** $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Hàm số $y = \tan x.\cot x$ xác định khi $\begin{cases} x \neq k_1\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi \end{cases};\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Do đó trong bốn khoảng của đề bài thì chỉ có $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thỏa điều kiện xác định của hàm số $y = \tan x.\cot x$. Nghĩa là nó liên tục trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{\pi}{4}\right)$. **C.** $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$.. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1\neq f(0)=0$. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x_0=0$ và $x_0=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, suy ra $f(x)$ liên tục trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}a^2x^2 & \text{với } x\le\sqrt{2},\ a\in\mathbb{R}\\ (2-a)x^2 & \text{với } x>\sqrt{2}\end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

A. 1 và 2. **B.** 1 và -1. **C.** -1 và 2. **D.** 1 và -2.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\lim_{x\to(\sqrt{2})^-}f(x)=2a^2=\lim_{x\to(\sqrt{2})^+}f(x)=2(2-a)=f(\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow a^2=2-a\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-2\end{array}\right.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\le 2\\ (1-m)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

. TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;2);\ (2;+\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2).\qquad(*)$$

Ta có $\begin{cases}f(2)=4m^2\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[(1-m)x\right]=2(1-m)\end{cases}\longrightarrow(*)\Leftrightarrow 4m^2=2(1-m)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Câu 2: Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{khi } x\in[0;4]\\ 1+m & \text{khi } x\in(4;6]\end{cases}$ tục trên $[0;6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m<2$. **B.** $2\le m<3$. **C.** $3<m<5$. **D.** $m\ge 5$.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0;4)$ và $(4;6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0;6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=4,\ x=0,\ x=6$.

Tức là ta cần có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=f(6)\\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=f(4)\end{cases}$. $(*)$

- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0\\ f(0)=\sqrt{0}=0\end{cases}$;
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}(1+m)=1+m\\ f(6)=1+m\end{cases}$;
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{x}=2\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(1+m)=1+m;\\ f(4)=1+m\end{cases}$

Khi đó $(*)$ trở thành $1+m=2\Leftrightarrow m=1<2.$

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liê tục tại $x=1,$ tức là ta cần có

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1).\quad (*)$$

Ta có $f(x)=\begin{cases}x-2 & \text{khi } x>1\\ a & \text{khi } x=1\\ 2-x & \text{khi } x<1\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1\end{cases}\longrightarrow(*)$ không tỏa mãn với mọi $a\in\mathbb{R}.$ Vậy không tồn tại giá trị a thỏa yêu cầu.

Câu 4: Biết rằng $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ (với a là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

A. a là một số nguyên. **B.** a là một số vô tỉ. **C.** $a>5.$ **D.** $a<0.$

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên $[0;1)$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1).$ $(*)$

Ta có $\begin{cases} f(1)=a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)\right]=4 \end{cases} \longrightarrow (*)\Leftrightarrow a=4.$

Câu 5: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x<1 \\ -2x & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ không liên tục trên $(0;2)$.

C. $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} f(1)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[-\left(\sqrt{2-x}+1\right)\right]=-2 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1.$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x>3 \\ 1-a^2x & \text{khi } x\le 3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$.

A. $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

B. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

C. $-\dfrac{4}{3}$.

D. $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện bài toán trở thành: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3).$ $(*)$

Ta có $\begin{cases} f(3)=1-3a^2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}{1-x}=-3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(1-a^2x\right)=1-3a^3. \end{cases}$

$\longrightarrow (*)\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\longrightarrow a_{\min}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x>2 \\ a^2x+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2.$

A. $a_{\max}=3.$ **B.** $a_{\max}=0.$ **C.** $a_{\max}=1.$ **D.** $a_{\max}=2.$

Lời giải

Chọn C

Ta cần có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2).\ (*)$

Ta có $\begin{cases} f(2)=2a^2-\dfrac{7}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(a^2x+\dfrac{1}{4}\right)=2a^2-\dfrac{7}{4} \end{cases} \longrightarrow (*)\Leftrightarrow a=\pm 1\longrightarrow a_{\max}=1.$

Câu 8: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & \text{khi } x\le 0\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x>0\end{cases}.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ liên tục tại $x=0.$ **B.** $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1).$

C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}.$ **D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x=1.$

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty).$

Mặt khác $\begin{cases} f(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)=1-\cos 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{0+1}=1 \end{cases}\longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=0.$

Câu 9: Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1\\ x-1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}.$ Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số liên tục tại $x=-1$.

B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty,-1);(1;+\infty).$

C. Hàm số liên tục tại $x=1$.

D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1,1)$.

Lời giải

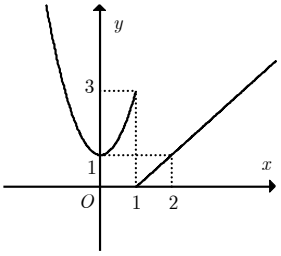
Chọn A

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1),(-1;1),(1;+\infty).$

- Ta có $\begin{cases} f(-1)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x-1)=-2 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=-1.$

- Ta có $\begin{cases} f(1)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x=1. \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0 \end{cases}$

Câu 10: Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?



A. $x=0.$

B. $x=1.$

C. $x=2.$

D. $x=3.$

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy tại điểm có hoành độ $x=1$ đồ thị của hàm số bị "đứt" nên hàm số không liên tục tại đó.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0\neq3=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x=1.$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x} & \text{khi } x<1,\ x\neq0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x\geq1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$. **B.** mọi điểm trừ $x=0$.

C. mọi điểm trừ $x=1$. **D.** mọi điểm trừ $x=0$ và $x=1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0.$

Ta có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1.$

Vậy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x<3,\ x\neq 1 \\ 4 & \text{khi } x=1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x\geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$. **B.** mọi điểm trừ $x=1$.

C. mọi điểm trừ $x=3$. **D.** mọi điểm trừ $x=1$ và $x=3$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1),(1;3)$ và $(3;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=4 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=1.$

Ta có $\begin{cases} f(3)=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 3^-}(x+1)=4 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=3.$

Câu 13: Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x)=\begin{cases} 2x & \text{khi } x<0 \\ x^2+1 & \text{khi } 0\leq x\leq 2 \\ 3x-1 & \text{khi } x>2 \end{cases}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=h(x)$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;2)$ và $(2;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} h(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases} h(2)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+1\right)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1)=5 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$.

Câu 14: Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{khi } x<1 \\ 2 & \text{khi } x=1 \\ m^2x+1 & \text{khi } x>1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $S=-1.$ **B.** $S=0.$ **C.** $S=1.$ **D.** $S=2.$

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1).\quad (*)$

Ta có $\begin{cases} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(m^2x+1\right)=m^2+1 \longrightarrow (*)\Leftrightarrow m^2+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x\right)=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m=\pm 1 \longrightarrow S=0.$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} -x\cos x & \text{khi } x<0 \\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0\le x<1. \\ x^3 & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$ Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $x\in\mathbb{R}.$ **B.** mọi điểm trừ $x=0.$

C. mọi điểm trừ $x=1.$ **D.** mọi điểm trừ $x=0;\ x=1.$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x\cos x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{1+x}=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^3=1 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

Dạng 4. Số nghiệm của phương trình trên một khoảng

1. Phương pháp

✓ Chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm

- Tìm hai số a và b sao cho $f(a).f(b)<0$
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$
- Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_0\in(a;b)$

✓ Chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất k nghiệm

- Tìm k cặp số a_i,b_i sao cho các khoảng $(a_i;b_i)$ **rời nhau** và

$$f(a_i)f(b_i)<0,\ i=1,...,k$$

- Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x_i\in(a_i;b_i)$.

✓ Khi phương trình $f(x)=0$ có chứa tham số thì cần chọn a, b sao cho :

- $f(a)$, $f(b)$ không còn chứa tham số hoặc chứa tham số nhưng dấu không đổi.
- Hoặc $f(a)$, $f(b)$ còn chứa tham số nhưng tích f(a).f(b) luôn âm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $m(x-1)(x+2)+2x+1=0.$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x)=m(x-1)(x+2)+2x+1.$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(1)=3;\ f(-2)=-3\Rightarrow f(1).f(-2)<0.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi m.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+4 & x\in[0;2) \\ (x-4)^2+6 & x\in[2;4] \end{cases}$. Phương trình $f(x)=7$ có bao nhiêu nghiệm?

Hướng dẫn giải

- Xét phương trình: $x^2+4=7$ trên $[0;2)$

Ta có: $x^2+4=7\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3}\ \text{(nhận)} \\ x=-\sqrt{3}\ \text{(loại)} \end{array}\right.$

- Xét phương trình: $(x-4)^2+6=7$ trên $[2;4]$

Ta có: $(x-4)^2+6=7\Leftrightarrow x^2-8x+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3\ \text{(nhận)} \\ x=5\ \text{(loại)} \end{array}\right.$

Vậy phương trình $f(x)=7$ có đúng hai nghiệm.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=-4x^3+4x-1.$ Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}.$

B. Phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1).$

C. Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(-2;0).$

D. Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3;\frac{1}{2}\right).$

Lời giải

Chọn B

(i) Hàm $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}\longrightarrow$ A đúng.

(ii) Ta có $\begin{cases} f(-1)=-1<0 \\ f(-2)=23>0 \end{cases}\longrightarrow f(x)=0$ có nghiệm x_1 trên $(-2;1)$, mà

$$(-2;-1)\subset(-2;0)\subset(-\infty;1)\longrightarrow$$ B sai và C đúng

(iii) Ta có $\begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0 \end{cases}\longrightarrow f(x)=0$ có nghiệm x_2 thuộc $\left(0;\frac{1}{2}\right).$ Kết hợp với (1) suy ra

$f(x)=0$ có các nghiệm x_1, x_2 thỏa: $-3<x_1<-1<0<x_2<\frac{1}{2}\longrightarrow$ D đúng.

Câu 2: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1;1).$

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2;0).$

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1).$

D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2).$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=2x^4-5x^2+x+1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

(i) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(-1)=-3 \end{cases}\Rightarrow f(-1).f(0)<0\longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_1 thuộc $(-1;0).$

(ii) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases}\Rightarrow f(0).f(1)<0\longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_2 thuộc $(0;1).$

(iii) $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=15 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2)<0 \longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_3 thuộc $(1;2)$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ đã cho có các nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa

$$-1<x_1<0<x_2<1<x_3<2$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x-1$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=x^3-3x-1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-2;-1),\ (-1;0),\ (0;2)$.

Ta có

- $\begin{cases} f(-2)=-3 \\ f(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow f(-2)f(-1)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;-1)$.
- $\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(-1)f(0)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.
- $\begin{cases} f(2)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(2)f(0)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$.

Như vậy phương trình (1) có ít nhất ba thuộc khoảng $(-2;2)$. Tuy nhiên phương trình $f(x)=0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng nghiệm trên $\mathbb{R}$.

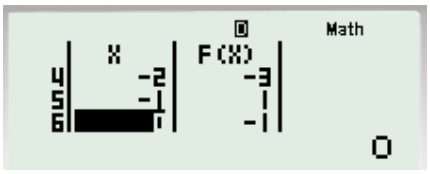
Cách CASIO. (i) Chọn MODE 7 (chức năng TABLE) và nhập: $F(X)=X^3-3X-1$.

(ii) Ấn "=" và tiếp tục nhập: **Start** $\leftrightarrow -5$ (có thể chọn số nhỏ hơn).

End $\leftrightarrow 5$ (có thể chọn số lớn hơn).

Step $\leftrightarrow 1$ (có thể nhỏ hơn, ví dụ $\frac{1}{2}$).

(iii) Ấn "=" ta được bảng sau:



Bên cột X ta cần chọn hai giá trị a và b $(a<b)$ sao cho tương ứng bên cột $F(X)$ nhận các giá trị trái dấu, khi đó phương trình có nghiệm $(a;b)$. Có bao nhiêu cặp số a, b như thế sao cho khác khoảng $(a;b)$ rời nhau thì phương trình $f(x)=0$ có bấy nhiêu nghiệm.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2$, $f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$:

A. Vô nghiệm. **B.** Có ít nhất một nghiệm. **C.** Có đúng một nghiệm. **D.** Có đúng hai nghiệm.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)-5=0$. Đặt $g(x)=f(x)-5.$ Khi đó

$$\begin{cases} g(-1)=f(-1)-5=2-5=-3 \\ g(4)=f(4)-5=7-5=2 \end{cases} \Rightarrow g(-1)g(4)<0.$$

Vậy phương trình $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$ hay phương trình $f(x)=5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$.

Câu 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<-1<x_2<x_3$?

A. 19. **B.** 18. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

● Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1<-1<x_2<x_3$. Khi đó $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có $f(-1)=(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)>0$ (do $x_1<-1<x_2<x_3$).

Mà $f(-1)=-m-5$ nên suy ra $-m-5>0 \Leftrightarrow m<-5.$

● Thử lại: Với $m<-5$, ta có

▪ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ nên tồn tại $a<-1$ sao cho $f(a)<0$. (1)

▪ Do $m<-5$ nên $f(-1)=-m-5>0$. (2)

▪ $f(0)=m-3<0$. (3)

▪ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên tồn tại $b>0$ sao cho $f(b)>0$. (4)

Từ (1) và (2), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;-1)$; Từ (2) và (3), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$; Từ (3) và (4), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy khi $m<-5$ thỏa mãn $\xrightarrow[m\in(-10;10)]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-9;-8;-7;-6\}$.

CHƯƠNG 5. ĐẠO HÀM

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$\boxed{f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.}$$

Chú ý:

Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số x tại x_0.

Đại lượng $\Delta y = f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy

$$\boxed{y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Bước 1. Giả sử Δx là số gia của đối số x tại x_0, tính $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3. Tìm $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Định lí 1

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0.

Chú ý:

a) Nếu $y=f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.

b) Nếu $y=f(x)$ liên tục tại x_0 thì có thể không có đạo hàm tại x_0.

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Định lí 2

Đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$.

Định lí 3

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ là

$$\boxed{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)}$$

trong đó $y_0=f(x_0)$.

5. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

Vận tốc tức thời: $v(t_0)=s'(t_0)$.

Cường độ tức thời: $I(t_0)=Q'(t_0)$.

II – ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

Khi đó, ta gọi hàm số $f':(a;b)\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto f'(x)$$

là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(a;b)$, kí hiệu là y' hay $f'(x)$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

1. Phương pháp

- Tính số gia của hàm số $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.
- Lập tỉ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Tính giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho f là hàm số liên tục tại x_0. Đạo hàm của f tại x_0 là:

A. $f(x_0)$.

B. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Theo định nghĩa đạo hàm tại x_0 : $f'(x_0)$.

Ví dụ 2: Cho hàm f xác định bởi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3: Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ bởi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & (x\neq 1)\\ 0 & (x=1)\end{cases}$.

Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+3x}{(x-1)(x^2-3x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-3)}{(x-1)(x-2)}=+\infty.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x & \text{khi } x\le 0\\ 1-x & \text{khi } x>0\end{cases}$ và điểm có $x_0=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$.

B. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$.

C. $f'(0)=1$.

D. Hàm số không có đạo hàm tại $x_0=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}1=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-x}{x}=-\infty.$

Do đó hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $(-1\le x\le 1)$. Tính $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

A. $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$. **B.** $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1-(x+h)^2}-\sqrt{1-x^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2x+h}{\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=\sin x$. Tính $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

A. $\cos\dfrac{x}{2}$. **B.** $2\sin\dfrac{x}{2}$. **C.** $\cos x$. **D.** $-\cos x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)=1.\cos x=\cos x\quad\left(\text{vì }\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}=1\right).$

Ví dụ 7: Tìm a để hàm số sau liên tục và có đạo hàm tại x_0.

$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{nếu } x\le 1\\ ax-1 & \text{nếu } x>1\end{cases};\ x_0=1.$

A. $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=-1$. **D.** $a=-2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

- Xét tính liên tục tại $x_0=1$. Ta có: $f(1)=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax-1)=a-1;\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1.$

Hàm số liên tục tại $x_0=1\Leftrightarrow a-1=1\Leftrightarrow a=2$.

- Xét đạo hàm của hàm số tại $x_0=1$.

Ta có: $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\left[2(1+\Delta x)-1\right]-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}=2=f'(1^+).$

Lại có: $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2=f'(1^-).$

Vậy $a=2$, hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x_0=1$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x)=|x|$ và $g(x)=1-|x|$.

Tìm đạo hàm của hàm số $f(x)$ và $f(x)+g(x)$ tại $x_0=0$.

A. $f(x)$ không có đạo hàm và $f(x)+g(x)$ không có đạo hàm tại $x_0=0$.

B. $f(x)$ không có đạo hàm tại $x_0=0$ và $f(x)+g(x)$ có đạo hàm tại $x_0=0$ và đạo hàm bằng 1 tại $x_0=0$.

C. $f(x)$ không có đạo hàm tại $x_0=0$ và $f(x)+g(x)$ có đạo hàm tại $x_0=0$ và đạo hàm bằng 0.

D. $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0=0$ và bằng 0; $f(x)+g(x)$ có đạo hàm cũng bằng 0.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $f(x)=\begin{cases}x & \text{nếu } x\ge 0\\ -x & \text{nếu } x<0\end{cases}$ tại $x_0=0;\ f(0)=0.$

- $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1.$
- $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\ne 1.$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x_0=0$.

Ta còn có: $h(x)=f(x)+g(x)=1.$ Hiển nhiên $h'(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $h'(0)=0.$

Ví dụ 9: Cho f xác định trên $(0;+\infty)$ bởi $f(x)=\frac{1}{x}$. Đạo hàm của f tại $x_0=\sqrt{2}$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

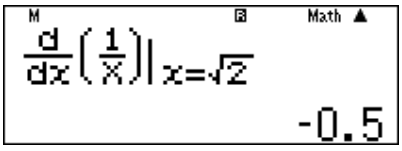
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

Dùng định nghĩa tính được $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}\Rightarrow f'(\sqrt{2})=-\frac{1}{2}$.

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*



Ví dụ 10: Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ bởi $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Giá trị $f'(-8)$ bằng:

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $-\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

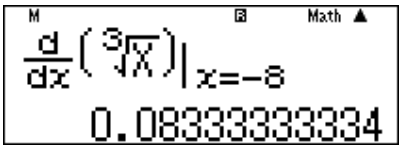
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-8+h)-f(-8)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h-8}-\sqrt[3]{-8}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h-8}+2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h-8+2^3}{h\left(\sqrt[3]{(h-8)^2}-2\sqrt[3]{h-8}+4\right)}$$

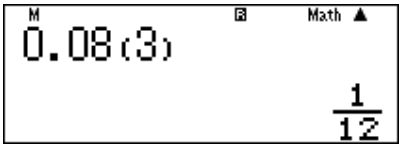
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(h-8)^2}-2\sqrt[3]{h-8}+4}=\frac{1}{12}$$

Vậy $f'(-8)=\frac{1}{12}$.

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*



Ấn tiếp



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

B. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.

C. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

D. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Cho f là hàm số liên tục tại x_0. Đạo hàm của f tại x_0 là:

A. $f(x_0)$.

B. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Lời giải

Chọn C

Ta có Cho f là hàm số liên tục tại x_0.

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Đặt $h=x-x_0\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Đặt $h=\Delta x=x-x_0\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=\dfrac{1}{4}$.

B. $f'(0)=\dfrac{1}{16}$.

C. $f'(0)=\dfrac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4}-\dfrac{1}{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{4x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\dfrac{1}{16}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=0.$ **B.** $f'(0)=1.$ **C.** $f'(0)=\frac{1}{2}.$ **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{2}.$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ bởi $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1).$

A. $f'(1)=\frac{3}{2}.$ **B.** $f'(1)=1.$ **C.** $f'(1)=0.$ **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Xét $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-3)}{x-2}=2.$

Ta thấy: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$. Do đó, hàm số không tiên tục tại điểm $x=1$.

Vậy hàm số không tồn tại đạo hàm tại điểm $x=1$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\geq 0\\ -x^2 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số không liên tục tại $x=0$. **B.** Hàm số có đạo hàm tại $x=2$.

C. Hàm số liên tục tại $x=2$. **D.** Hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D

Xét các giới hạn $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-1\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2\right)=0\end{cases}$.

Do $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x=0$.

Do đó, hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Câu 8: Tìm tham số thực b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\leq 2\\ -\frac{x^2}{2}+bx-6 & \text{khi } x>2\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=2.$

A. $b=3.$ **B.** $b=6.$ **C.** $b=1.$ **D.** $b=-6.$

Lời giải

Chọn B

Để hàm số có đạo hàm tại $x=2$ trước tiên hàm số phải liên tục tại $x=2$, tức là

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\frac{x^2}{2}+bx-6\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}x^2\Leftrightarrow -2+2b-6=4\Leftrightarrow b=6.$

Thử lại với $b=6$, ta có

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-\frac{x^2}{2}+bx-10}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-\frac{x^2}{2}+6x-10}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(10-x)}{2(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{10-x}{2} = 4;$

• $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4.$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ nên hàm số có đạo hàm tại $x=2.$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} mx^2+2x+2 & \text{khi } x>0 \\ nx+1 & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số $m,\ n$ sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. Không tồn tại $m, n.$ **B.** $m=2, \forall n.$ **C.** $n=2, \forall m.$ **D.** $m=n=2.$

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{mx^2+2x+2-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{mx^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (mx+2) = 2. \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{nx+2-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{nx}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} n = n \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại $x=0$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow n=2$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{khi } x\le 1 \\ ax+b & \text{khi } x>1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số $a,\ b$ sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

A. $a=1, b=-\dfrac{1}{2}.$ **B.** $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}.$ **C.** $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}.$ **D.** $a=1, b=\dfrac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn A

• Hàm số có đạo hàm tại $x=1$, do đó hàm số liên tục tại $x=1$.

$\Rightarrow a+b=\dfrac{1}{2}.$ (1)

• Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{ax+b-(a.1+b)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{a(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} a = a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x+1)}{2} = 1 \end{cases}$.

Hàm số có đạo hàm tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow a=1.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$.

Dạng 2. Số gia của hàm số

1. Phương pháp

- Số gia của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.
- Chú ý rằng số gia Δy của hàm số là một hàm số của số gia biến số Δx.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Số gia của hàm số $f(x)=x^2+1$ tại điểm $x_0=-1$ ứng với số gia $\Delta x=1$ bằng:

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Số gia $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(0)-f(-1)=1-2=-1$.

Ví dụ 2: Số gia của hàm số $y=2x^2+2$ tại điểm $x_0=0$ ứng với số gia $\Delta x=1$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** -8.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Số gia $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1)-f(0)=4-2=2$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=x^2-3;\ x_0=-1;\ \Delta x$. Chọn số gia tương ứng Δy dưới đây cho thích hợp.

A. $\Delta y=(\Delta x)^2-10$. **B.** $\Delta y=(-1+\Delta x)^2+2$.

C. $\Delta y=(-1+\Delta x)^2-10$. **D.** $\Delta y=(-1+\Delta x)^2-1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\Delta y=f(-1+\Delta x)-f(-1)=\left[(-1+\Delta x)-3\right]^2-\left[(-1)^2-3\right]$$

$$=(-1+\Delta x)^2-3+2=(-1+\Delta x)^2-1.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{1-3x};\ x_0=-\frac{1}{2};\ \Delta x$. Chọn số gia tương ứng Δy dưới đây cho thích hợp.

A. $\Delta y=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}+3\Delta x$.

B. $\Delta y=\sqrt{1-3\Delta x}-\sqrt{1-3.\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{1-3\Delta x}-\sqrt{\frac{5}{2}}$.

C. $\Delta y=\sqrt{1-3.\left(-\frac{1}{2}+\Delta x\right)}-\sqrt{1-3.\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{5}{2}-3\Delta x}-\sqrt{\frac{5}{2}}$.

D. $\Delta y=\sqrt{1-3x}+\Delta x-\sqrt{1-3.\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{1-3x}+\Delta x-\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\Delta y = f\left(-\frac{1}{2}+\Delta x\right)-f\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\sqrt{1-3.\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)}-\sqrt{1-3.\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\sqrt{\frac{5}{2}-3.\Delta x}-\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)=\sin x; x_0=\frac{\pi}{2}; \Delta x.$ Chọn Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dưới đây cho thích hợp.

A. $\Delta y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-1; \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$

B. $\Delta y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\frac{\pi}{2}; \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\frac{\pi}{2}}{\Delta x}.$

C. $\Delta y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-1; \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-1}{\Delta x}.$

D. $\Delta y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right); \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)}{\Delta x}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$\Delta y = f\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-1$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)}{\Delta x}.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=|x-2|; x_0=2; \Delta x.$ Chọn Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dưới đây cho thích hợp.

A. $\Delta y=|\Delta x|; \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$

B. $\Delta y=\Delta x; \frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$

C. $\Delta y=|\Delta x-2|; \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x-2|}{\Delta x}.$

D. $\Delta y=|\Delta x|; \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$$\Delta y = f(2+\Delta x)-f(2)=|2+\Delta x-2|-0=|\Delta x|$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x)=\sin 2x; x_0=\frac{\pi}{3}; \Delta x.$ Chọn số gia tương ứng Δy dưới đây cho thích hợp.

A. $\Delta y=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\Delta x-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$

B. $\Delta y=\sin 2x+\Delta x-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$

C. $\Delta y = \sin 2\left(\frac{\pi}{3}+\Delta x\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. **D.** $\Delta y = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\Delta x\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\Rightarrow \Delta y = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\Delta x\right)-\sin^2\frac{\pi}{3}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính số gia của hàm số $y = x^2+2$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 1$.

A. $\Delta y = 13$. **B.** $\Delta y = 9$. **C.** $\Delta y = 5$. **D.** $\Delta y = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f(2+1)-f(2) = f(3)-f(2)$

$=\left(3^2+2\right)-\left(2^2+2\right)=5.$

Câu 2: Tính số gia của hàm số $y = x^3+x^2+1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$.

A. $\Delta y = 3x_0^2+5x_0+3$. **B.** $\Delta y = 2x_0^3+3x_0^2+5x_0+2$.

C. $\Delta y = 3x_0^2+5x_0+2$. **D.** $\Delta y = 3x_0^2-5x_0+2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f(x_0+1)-f(x_0)$

$=\left[(x_0+1)^3+(x_0+1)^2+1\right]-\left[x_0^3+x_0^2+1\right]=3x_0^2+5x_0+2.$

Câu 3: Tính số gia của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx.

A. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2-\Delta x$. **B.** $\Delta y = \frac{1}{2}\left[(\Delta x)^2-\Delta x\right]$. **C.** $\Delta y = \frac{1}{2}\left[(\Delta x)^2+\Delta x\right]$. **D.** $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2+\Delta x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f(-1+\Delta x)-f(-1)$

$\frac{(-1+\Delta x)^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1-2\Delta x+(\Delta x)^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\Delta x)^2-\Delta x.$

Câu 4: Tính số gia của hàm số $y = x^2-4x+1$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

A. $\Delta y = \Delta x(\Delta x+2x_0-4)$. **B.** $\Delta y = 2x_0+\Delta x$. **C.** $\Delta y = \Delta x(2x_0-4\Delta x)$. **D.** $\Delta y = 2x_0-4\Delta x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\left[(x_0+\Delta x)^2-4(x_0+\Delta x)+1\right]-\left[x_0^2-4x_0+1\right]$

$=\Delta x(\Delta x+2x_0-4).$

Câu 5: Tính số gia của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm x (bất kì khác 0) ứng với số gia Δx.

A. $\Delta y=\dfrac{\Delta x}{x\left(x+\Delta x\right)}.$ **B.** $\Delta y=-\dfrac{\Delta x}{x\left(x+\Delta x\right)}.$ **C.** $\Delta y=-\dfrac{\Delta x}{x+\Delta x}.$ **D.** $\Delta y=\dfrac{\Delta x}{x+\Delta x}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\Delta x}{x\left(x+\Delta x\right)}.$

Câu 6: Tính tỷ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y=3x+1$ theo x và $\Delta x.$

A. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0.$ **B.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1.$ **C.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2.$ **D.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=\left[3\left(x+\Delta x\right)+1\right]-\left[3x+1\right]=3\Delta x\Rightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3.$

Câu 7: Tính tỷ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y=x^2-1$ theo x và $\Delta x.$

A. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0.$ **B.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2x.$ **C.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$ **D.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=\left[\left(x+\Delta x\right)^2-1\right]-\left(x^2-1\right)=2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2$

$\Rightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x.$

Câu 8: Tính tỷ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y=2x^3$ theo x và $\Delta x.$

A. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x^3-2\left(\Delta x\right)^3}{\Delta x}.$ **B.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2\left(\Delta x\right)^2.$

C. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=6x^2+6x\Delta x+2\left(\Delta x\right)^2.$ **D.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=2\left(x+\Delta x\right)^3-2x^3=6x^2\Delta x+6x\left(\Delta x\right)^2+2\left(\Delta x\right)^3$

$\Rightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=6x^2+6x\Delta x+2\left(\Delta x\right)^2.$

Câu 9: Tính tỷ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ theo x và $\Delta x.$

A. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{x\left(x+\Delta x\right)}.$ **B.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{1}{x\left(x+\Delta x\right)}.$ **C.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{1}{x+\Delta x}.$ **D.** $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{x+\Delta x}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\Delta x}{x\left(x+\Delta x\right)}$

$\Rightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{1}{x\left(x+\Delta x\right)}.$

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^2-x$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là:

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x\Delta x-\Delta x\right)$. **B.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x-1)$.

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x+1)$. **D.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x\Delta x+\Delta x\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\left[(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)\right]-\left(x_0^2-x_0\right)$

$=(\Delta x)^2+2x_0\Delta x-\Delta x\Rightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x+2x_0-1.$

Khi đó $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0-1).$

Dạng 3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 11: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^2$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=2$ giây.

A. 2m/ s. **B.** 3m/ s. **C.** 4m/ s. **D.** 5m/ s.

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $s'(t)=2t.$

Vận tốc của chất điểm $v(t)=s'(t)=2t\Rightarrow v(2)=2.2=4\text{m/s}.$

Câu 12: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t)=196t-4,9t^2$ trong đó $t>0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

A. 1690m. **B.** 1069m. **C.** 1906m. **D.** 1960m.

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $s'(t)=196-9,8t.$

Vận tốc của viên đạn $v(t)=s'(t)=196-9,8t\Rightarrow v(t)=0\Leftrightarrow 196-9,8t=0\Leftrightarrow t=20.$

Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h=s(20)=196.20-4,9.20^2=1960\text{m}.$

Câu 13: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t)=t^3-3t^2+9t+2$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì bận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t=1\text{s}.$ **B.** $t=2\text{s}.$ **C.** $t=3\text{s}.$ **D.** $t=6\text{s}.$

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $s'(t)=3t^2-6t+9.$

Vận tốc của chất điểm $v(t)=s'(t)=3t^2-6t+9=3(t-1)^2+6\geq 6.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=1$.

Câu 14: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t)=8t+3t^2$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

A. 6m/s^2. **B.** 11m/s^2. **C.** 14m/s^2. **D.** 20m/s^2.

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $v'(t)=8+6t$.

Ta có $v(t)=11\Leftrightarrow 8t+3t^2=11\Leftrightarrow t=1\ (t>0)$.

Gia tốc của chất điểm $a(t)=v'(t)=8+6t\Rightarrow a(1)=v'(1)=8+6.1=14\text{m/s}^2$.

Câu 15: Một vật rơi tự do theo phương trình $s=\frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g=9,8\,\text{m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ $t\ (t=5\text{s})$ đến $t+\Delta t$ với $\Delta t=0,001\text{s}$.

A. $v_{\text{tb}}=49\text{m/s}$. **B.** $v_{\text{tb}}=49,49\text{m/s}$. **C.** $v_{\text{tb}}=49,0049\text{m/s}$. **D.** $v_{\text{tb}}=49,245\text{m/s}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $v_{\text{tb}}=\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\dfrac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}=gt+\frac{1}{2}g\Delta t=49,0049\text{m/s}$.

Dạng 4. Phương trình tiếp tuyến

1. Phương pháp

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;y_0)$ là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Nếu tiếp tuyến có hệ số góc k thì ta giải phương trình $f'(x_0)=k$ tìm hoành độ tiếp điểm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị (C) và điểm $M_0(x_0;f(x_0))\in(C)$. Phương trình của tiếp tuyến với (C) tại M_0 là:

A. $y=f'(x_0)(x-x_0)$. **B.** $y=f'(x)(x-x_0)+y_0$.

C. $y-y_0=f'(x_0)x$. **D.** $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại $M(x_0;y_0)\in(C)$:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ hoặc $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=x^2+5$ có $f'(x)=2x$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0=-1$.

A. $y=-2(x-1)+6$. **B.** $y=2(x-1)+6$.

C. $y=-2(x+1)-6$. **D.** $y=-2(x+1)+6$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$x_0=-1\Rightarrow f(x_0)=(-1)^2+5=6$

$f'(-1)=-2$.

Phương trình tiếp tuyến: $y=-2(x+1)+6$.

Ví dụ 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^4$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là:

A. $y=-4x-3$. **B.** $y=-4x-4$. **C.** $y=-4x-5$. **D.** $y=-4x+5$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f(1)=1; f'(x)=4x^3$, do đó $f'(-1)=-4$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-4(x+1)+1=-4x-3$.

Ví dụ 4: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3$ tại điểm mà tiếp điểm có tung độ bằng -1 có phương trình là:

A. $y=3x-4$. **B.** $y=3x$. **C.** $y=3x+2$. **D.** $y=-3x-4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: Khi $y=-1$ thì $x^3=-1$, do đó $x=-1$.

$f(-1)=-1; f'(x)=3x^2$, do đó $f'(-1)=3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=3(x+1)-1=3x+2$.

Ví dụ 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=x^4$ có hệ số góc bằng 4.

A. $y=4x-3$. **B.** $y=4x$. **C.** $y=4x+5$. **D.** $y=4x-4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f'(x)=4x^3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 4 nên $4x^3=4$, do đó $x=1$; $f(1)=1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=4(x-1)+1=4x-3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 16: Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y=x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$.

A. $k=0$. **B.** $k=1$. **C.** $k=\frac{1}{4}$. **D.** $k=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}+\Delta x\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)=1.$

Vậy $k = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Câu 17: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-1;-1)$.

A. $y = -3x - 4$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 3x - 2$. **D.** $y = 3x + 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $k = y'(-1) = 3$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = 3 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y + 1 = 3(x+1) \Leftrightarrow y = 3x + 2$.

Câu 18: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $x + y + 2 = 0$. **B.** $y = x + 2$. **C.** $y = x - 2$. **D.** $y = -x + 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $k = y'(-1) = -1$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = -1 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y + 1 = -1(x+1) \Leftrightarrow y = -x - 2$.

Câu 19: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

A. $y = 8$. **B.** $y = -12x + 16$. **C.** $y = 12x - 24$. **D.** $y = 12x - 16$.

Lời giải

Chọn D

Với $y_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 2$.

Ta tính được $k = y'(2) = 12$.

Ta có $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 8 \\ k = 12 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y - 8 = 12(x-2) \Leftrightarrow y = 12x - 16$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

A. $y = 2x$. **B.** $y = 2$. **C.** $y = 0$. **D.** $y = -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $x_0 = 0; y_0 = 2; y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow k = y'(0) = 0$

Ta có : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \\ k = 0 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 2$.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.

A. $y = -9x + 7;\ y = -2$. **B.** $y = -2$. **C.** $y = 9x + 7;\ y = -2$. **D.** $y = 9x + 7;\ y = 2$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm : $y=x^3-3x^2+2=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Với $x=-1\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-2\\k=y'(-1)=9\end{array}\right.$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x+7.$

Với $x=2\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-2\\k=y'(-2)=0\end{array}\right.$. suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-2.$

Câu 22: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2.$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7.$

A. $y=9x+7;\ y=9x-25.$ **B.** $y=9x-25.$ **C.** $y=9x-7;\ y=9x+25.$ **D.** $y=9x+25.$

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0.$ Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$ nên có $k=9\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=-1\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y_0=-2\\k=9\end{array}\right.$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x+7(\text{loại})$ (vì trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0=3\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y_0=2\\k=9\end{array}\right.$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x-25.$

Câu 23: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2.$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{45}x.$

A. $y=45x-173;\ y=45x+83.$ **B.** $y=45x-173.$

C. $y=45x+173;\ y=45x-83.$ **D.** $y=45x-83.$

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0.$ Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{45}x$ nên có $k.\left(-\frac{1}{45}\right)=-1\Leftrightarrow k=45\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=45\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=5\\x_0=-3\end{array}\right.$.

Với $x_0=5\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y_0=52\\k=45\end{array}\right.$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=45x-173.$

Với $x_0=-3\rightarrow\left\{\begin{array}{l}y_0=-52\\k=45\end{array}\right.$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=45x+83.$

Câu 24: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}.$

A. $x+4y-1=0\ ;\ x+4y+1=0.$ **B.** $x+4y-4=0\ ;\ x+4y+4=0.$

C. $y=-\frac{1}{4}x-4;\ y=-\frac{1}{4}x+4.$ **D.** $y=-\frac{1}{4}x\ .$

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k=y'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}.$

Theo giả thiết ta có $k=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_0^2=4\Leftrightarrow x_0=\pm 2.$

- Với $x_0=2\to y_0=\frac{1}{2}.$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+4y-4=0.$
- Với $x_0=-2\to y_0=-\frac{1}{2}.$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{4}(x+2)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+4y+4=0.$

Câu 25: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2.$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x-3y=0$ bằng $\frac{3}{5}.$

A. $y=2;\ y=1.$ **B.** $y=-2;\ y=1.$ **C.** $y=-2;\ y=-1.$ **D.** $y=2;\ y=-2.$

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0.$

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y+y_0=k(x-x_0).$

Suy ra tiếp tuyến d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_d=(-k;1).$

Đường thẳng Δ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta=(4;-3).$

Theo đề bài ta có: $\cos(d,\Delta)=\frac{|-4k-3|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{16+9}}=\frac{3}{5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=-\frac{24}{7}.\end{array}\right.$

Với $k=-\frac{24}{7}\Rightarrow 3x_0^2-6x_0=-\frac{24}{7}:$ vô nghiệm.

Với $k=0\Rightarrow 3x_0^2-6x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2.\end{array}\right.$

- $x_0=0\Rightarrow y_0=2\ \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y-2=0\Leftrightarrow y=2.$
- $x_0=2\Rightarrow y_0=-2\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y+2=0\Leftrightarrow y=-2.$

BÀI 2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Định lý 1: Hàm số $y = x^n \left(n \in \mathbb{N}, n > 1\right)$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$

Nhận xét

$\left(c\right)' = 0 \left(c \text{ là hằng số}\right).$

$\left(x\right)' = 1.$

Định lý 2: Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

II. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

1. Định lý

Định lý 3: Giả sử $u = u\left(x\right), v = v\left(x\right)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có

$\left(u + v\right)' = u' + v'$

$\left(u - v\right)' = u' - v'$

$\left(uv\right)' = u'v + v'u$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} \quad \left(v \neq 0\right)$

Bằng quy nạp toán học, ta chứng minh được

$$\boxed{\left(u_1 \pm u_2 \pm ... \pm u_n\right)' = u_1' \pm u_2' \pm ... \pm u_n'.}$$

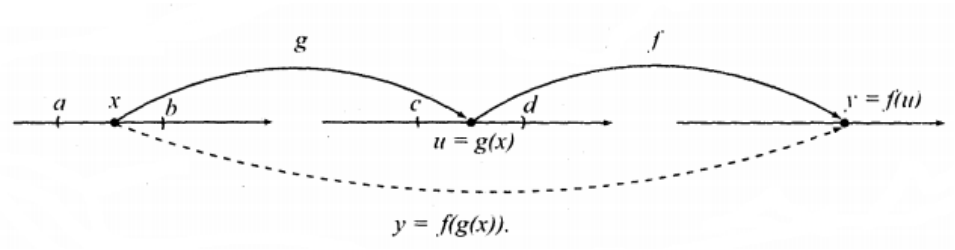
2. Hệ quả

Hệ quả 1: Nếu k là một hằng số thì $\left(ku\right)' = ku'.$

Hệ quả 2: $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}, \left(u \neq 0\right).$

III. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

1. Hàm hợp



Giả sử $u=g(x)$ là hàm số của x, xác định trên khoảng (a,b) và lấy giá trị trên khoảng (c,d); $f(u)$ là hàm số của u, xác định trên (c,d) và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Khi đó, ta lập một hàm số xác định trên (a,b) và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc sau: $x \mapsto f(g(x))$.

Ta gọi hàm số $y=f(g(x))$ là hàm hợp của hàm số $y=f(u)$ với $u=g(x)$.

2. Đạo hàm của hàm hợp

Định lý: Nếu hàm số $u=g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y=f(u)$ có đại hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y=f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x=y'_u.u'_x$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Đạo hàm của hàm đa thức

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=2x^3-3x^2-5$. Tìm x để $y'=0$

Hướng dẫn giải

$y=2x^3-3x^2-5$

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=3x^3+x^2+1$. Giải bất phương trình $y' \le 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$y=3x^3+x^2+1 \Rightarrow y'=9x^2+2x$

$y' \le 0 \Leftrightarrow 9x^2+2x \le 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \le x \le 0.$

Ví dụ 3: Cho hai hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x^2+4x$; $g(x)=9x-\frac{3}{2}x^2$. Timx để $f'(x)=g'(x)$

Hướng dẫn giải

$f'(x)=x+4; g'(x)=9-3x.$ Do đó $f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow 4x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=mx-\frac{1}{3}x^3$. Tìm m đê ị $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x)<2$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x)=m-x^2$. Giá trị $x=-1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x)<2$ khi và chỉ khi: $m-1<2\Leftrightarrow m<3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x)=0$ là:

A. $\{-2\sqrt{2}\}$. **B.** $\{2;\sqrt{2}\}$. **C.** $\{-4\sqrt{2}\}$. **D.** $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=x^2-4\sqrt{2}x+8$.

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-4\sqrt{2}x+8=0\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y=3x^3+x^2+1$, có đạo hàm là y'. Để $y'\le 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

A. $\left[-\frac{2}{9};0\right]$. **B.** $\left[-\frac{9}{2};0\right]$.

C. $\left(-\infty;-\frac{9}{2}\right]\cup[0;+\infty)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{2}{9}\right]\cup[0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=9x^2+2x$.

Do đó, $y'\le 0\Leftrightarrow y'=9x^2+2x\le 0\Leftrightarrow -\frac{2}{9}\le x\le 0 x\in\left[-\frac{2}{9};0\right]$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=-x^4+4x^3-3x^2+2x+1$ tại điểm $x=-1$.

A. $f'(-1)=4$. **B.** $f'(-1)=14$. **C.** $f'(-1)=15$. **D.** $f'(-1)=24$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=-4x^3+12x^2-6x+2$.

Suy ra $f'(-1)=-4(-1)^3+12(-1)^2-6(-1)+2=24$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2-mx-4$, có đạo hàm là y'. Tìm tất cả các giá trị của m để $y'\ge 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in\left(-1;-\frac{1}{4}\right)$. **B.** $m\in\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$.

C. $m \in (-\infty;-1] \cup \left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $m \in \left[-1;\frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - 2(2m+1)x - m$.

Khi đó, $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2(2m+1)x - m \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' = (2m+1)^2 + m \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 5m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{4}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 - mx + 3$, có đạo hàm là y'. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A. $m = -1+\sqrt{2}$; $m = -1-\sqrt{2}$. **B.** $m = -1-\sqrt{2}$.

C. $m = 1-\sqrt{2}$; $m = 1+\sqrt{2}$. **D.** $m = -1+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -mx^2 + 2(m-1)x - m$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -mx^2 + 2(m-1)x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{2(m-1)}{m}\right)^2 - 2 = 6$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{2}$.

So với điều kiện thì $m = -1 \pm \sqrt{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a > 0)$ có đạo hàm $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2 - 3ac > 0$. **B.** $b^2 - 3ac \geq 0$. **C.** $b^2 - 3ac < 0$. **D.** $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Vì $a>0$ và $f'(x)>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\Delta'<0$ tức là $b^2-3ac<0$.

Câu 7: Biết hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a<0)$ có đạo hàm $f'(x)<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b^2-3ac>0.$ **B.** $b^2-3ac\geq 0.$ **C.** $b^2-3ac<0.$ **D.** $b^2-3ac\leq 0.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Vì $a<0$ và $f'(x)<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $\Delta'<0$ tức là $b^2-3ac<0$.

Câu 8: Tính đạo hàm của của hàm số $y=\left(x^3-2x^2\right)^2$.

A. $f'(x)=6x^5-20x^4+16x^3.$ **B.** $f'(x)=6x^5+16x^3.$

C. $f'(x)=6x^5-20x^4+4x^3.$ **D.** $f'(x)=6x^5-20x^4-16x^3.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=2\left(x^3-2x^2\right)'\left(x^3-2x^2\right)=2\left(3x^2-4x\right)\left(x^3-2x^2\right)=6x^5-20x^4+16x^3$.

Câu 9: Cho hàm số $y=\left(2x^2+1\right)^3$, có đạo hàm là y'. Để $y'\geq 0$ thì x nhận các giá trị nào sau đây?

A. Không có giá trị nào của x. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=3\left(2x^2+1\right)'\left(2x^2+1\right)^2=3.4x\left(2x^2+1\right)^2=12x\left(2x^2+1\right)^2$.

Do đó, $y'\geq 0\Leftrightarrow 12x\left(2x^2+1\right)^2\Leftrightarrow x\geq 0$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(1-x^3\right)^5$.

A. $y'=5x^2\left(1-x^3\right)^4$. **B.** $y'=-15x^2\left(1-x^3\right)^4$.

C. $y'=-3x^2\left(1-x^3\right)^4$. **D.** $y'=-5x^2\left(1-x^3\right)^4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=5\left(1-x^3\right)'\left(1-x^3\right)^4=5\left(-3x^2\right)\left(1-x^3\right)^4=-15x^2\left(1-x^3\right)^4$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x^3-2x^2\right)^{2016}$.

A. $y' = 2016\left(x^3 - 2x^2\right)^{2015}$.

B. $y' = 2016\left(x^3 - 2x^2\right)^{2015}\left(3x^2 - 4x\right)$.

C. $y' = 2016\left(x^3 - 2x^2\right)\left(3x^2 - 4x\right)$.

D. $y' = 2016\left(x^3 - 2x^2\right)\left(3x^2 - 2x\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 2016\left(x^3 - 2x^2\right)'\left(x^3 - 2x^2\right)^{2015} = 2016\left(3x^2 - 4x\right)\left(x^3 - 2x^2\right)^{2015}$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2 - 2\right)(2x - 1)$.

A. $y' = 4x$.

B. $y' = 3x^2 - 6x + 2$.

C. $y' = 2x^2 - 2x + 4$.

D. $y' = 6x^2 - 2x - 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = \left(x^2 - 2\right)'(2x - 1) + \left(x^2 - 2\right)(2x - 1)' = 2x(2x - 1) + 2\left(x^2 - 2\right) = 6x^2 - 2x - 4$

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-2018)$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = -2018!$.

C. $f'(0) = 2018!$.

D. $f'(0) = 2018$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = f_0(x) f_1(x) f_2(x)... f_n(x)$ $(n \geq 1; n \in \mathbb{Z})$.

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$f'(x) = f_0'(x) f_1(x)... f_n(x) + f_0(x) f_1'(x)... f_n(x) + ... + f_0(x) f_1(x)... f_n'(x)$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-2018)$ và thay $x = 0$ với chú ý $f_0(0) = 0$ ta được:

$f'(0) = (-1).(-2)...(-2018) + 0.(-2)....(-2018) + 0.(-1)...(-2017) = 2018!$.

Câu 14: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)...(x+2018)$ tại điểm $x = -1004$.

A. $f'(-1004) = 0$.

B. $f'(-1004) = 1004!$.

C. $f'(-1004) = -1004!$.

D. $f''(-1004) = (1004!)^2$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = f_0(x) f_1(x) f_2(x)... f_n(x)$ $(n \geq 1; n \in \mathbb{Z})$.

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$f'(x) = f_0'(x) f_1(x)... f_n(x) + f_0(x) f_1'(x)... f_n(x) + ... + f_0(x) f_1(x)... f_n'(x)$.

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x)=x(x+1)(x+2)...(x+2018)$ và thay $x=-1004$ với chú ý $f_{1004}(-1004)=0$ ta được

$$f'(-1004)=[(-1004).(-1004+1)...(-1004+1003)].[(-1004+1005)...(-1004+2018)]$$
$$=(-1).1.(-2).2.....(-1004).1004=(1004!)^2.$$

Dạng 2. Đạo hàm của hàm phân thức

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: $y=\dfrac{x(1-3x)}{x+1}$

Hướng dẫn giải

$$y=\frac{x(1-3x)}{x+1}\Rightarrow y'=\frac{(1-6x)(x+1)-1(x-3x^2)}{(x+1)^2}=\frac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}$

Hướng dẫn giải

Dùng công thức nhanh: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Do đó, với $y=\dfrac{2x+3}{2x-1}$ thì $y'=-\dfrac{8}{(2x-1)^2}$.

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$?

Hướng dẫn giải

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2-1+2}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}$$

Do đó $y'=\dfrac{-2(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$.

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{x^2+x-1}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{-\left(x^2+x-1\right)'}{\left(x^2+x-1\right)^2} = \frac{-2x-1}{\left(x^2+x-1\right)^2}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$

Hướng dẫn giải

$$y = \frac{x^2+x+3}{x^2+x-1} = \frac{x^2+x-1+4}{x^2+x-1} = 1 + \frac{4}{x^2+x-1}.$$

Do đó: $y' = \frac{-4\left(x^2+x-1\right)'}{\left(x^2+x-1\right)^2} = \frac{-4\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x-1\right)^2}.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ tại điểm $x = -1$.

A. $f'(-1) = 1.$ **B.** $f'(-1) = -\frac{1}{2}.$ **C.** $f'(-1) = -2.$ **D.** $f'(-1) = 0.$

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

Ta có $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(-1) = -\frac{1}{2}$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}.$

A. $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}.$ **B.** $y' = \frac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}.$

C. $y' = \frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}.$ **D.** $y' = \frac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = x - \frac{3}{x+2} \Rightarrow y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}.$

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x(1-3x)}{x+1}.$

A. $y' = \frac{-9x^2-4x+1}{(x+1)^2}.$ **B.** $y' = \frac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}.$ **C.** $y' = 1-6x^2.$ **D.** $y' = \frac{1-6x^2}{(x+1)^2}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=\dfrac{x(1-3x)}{x+1}=\dfrac{x-3x^2}{x+1}$

$\Rightarrow y'=\dfrac{\left(x-3x^2\right)'(x+1)-\left(x-3x^2\right)(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{(1-6x)(x+1)-\left(x-3x^2\right)}{(x+1)^2}=\dfrac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}.$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1-3x+x^2}{x-1}$. Giải bất phương trình $f'(x)>0.$

A. $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$ **B.** $x\in\varnothing.$ **C.** $x\in(1;+\infty).$ **D.** $x\in\mathbb{R}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)=\dfrac{\left(1-3x+x^2\right)'(x-1)-\left(1-3x+x^2\right)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{(-3+2x)(x-1)-\left(1-3x+x^2\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}.$

Bất phương trình $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}>0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+2>0\\x\neq1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x)=0$ có tập nghiệm S là:

A. $S=\left\{0;\dfrac{2}{3}\right\}.$ **B.** $S=\left\{-\dfrac{2}{3};0\right\}.$ **C.** $S=\left\{0;\dfrac{3}{2}\right\}.$ **D.** $S=\left\{-\dfrac{3}{2};0\right\}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\dfrac{\left(x^3\right)'(x-1)-x^3(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}.$

Phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow2x^3-3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-2x^2+x-7}{x^2+3}.$

A. $y'=\dfrac{-3x^2-13x-10}{\left(x^2+3\right)^2}.$ **B.** $y'=\dfrac{-x^2+x+3}{\left(x^2+3\right)^2}.$

C. $y'=\dfrac{-x^2+2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}.$ **D.** $y'=\dfrac{-7x^2-13x-10}{\left(x^2+3\right)^2}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = \frac{\left(-2x^2+x-7\right)'\left(x^2+3\right)-\left(x^2+3\right)'\left(-2x^2+x-7\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$

$\Rightarrow y' = \frac{(-4x+1)(x^2+3)-2x.\left(-2x^2+x-7\right)}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$

Dạng 3. Đạo hàm của hàm chứa căn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 4x - \sqrt{x}$. Tìm x để $y' = 0$?

Hướng dẫn giải

$y = 4x - \sqrt{x} \Rightarrow y' = 4 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{64}.$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 - \sqrt{x} + 1$

Hướng dẫn giải

$y' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 18x - 7.$ Tìm x để $f'(x) \le 0$

Hướng dẫn giải

$f'(x) = x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 = \left(x - 3\sqrt{2}\right)^2.$

$f'(x) \le 0 \Leftrightarrow \left(x - 3\sqrt{2}\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$. Tính $f(3) + (x-3).f'(3)$?

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{4}.$

Lại có: $f(3) = 2.$ Vậy $f(3) + (x-3).f'(3) = 2 + (x-3).\frac{1}{4} = \frac{x+5}{4}.$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$?

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số: $y = x\sqrt{x^2+1}$?

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \sqrt{x^2+1} + x.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$?

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \dfrac{1}{1-x}\left(\sqrt{1-x} + \dfrac{1+x}{2\sqrt{1-x}}\right) = \dfrac{1}{1-x}.\dfrac{2-2x+1+x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y = -2\sqrt{x} + 3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' > 0$ là:

A. $S = (-\infty; +\infty)$. **B.** $S = \left(-\infty; \dfrac{1}{9}\right)$. **C.** $S = \left(\dfrac{1}{9}; +\infty\right)$. **D.** $S = \varnothing$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = -2\sqrt{x} + 3x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{x}} + 3$.

Do đó $y' > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{x}} + 3 > 0 \Leftrightarrow 3 > \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{9}$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x = 1$.

A. $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. **B.** $f'(1) = 1$. **C.** $f'(1) = 0$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Tại $x = 1$ thì $f'(x)$ không xác định.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1-2x^2}$.

A. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}$. **B.** $y' = \dfrac{-4x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **C.** $y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **D.** $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \dfrac{(1-2x^2)'}{2\sqrt{1-2x^2}} = \dfrac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2-4x^3}$.

A. $y'=\dfrac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

C. $y'=\dfrac{x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. **D.** $y'=\dfrac{x-6x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{2x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}=\dfrac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x)\ge f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\dfrac{\left(x^2-2x\right)'}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Khi đó, $f'(x)\ge f(x)\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\ge\sqrt{x^2-2x}$

$\Leftrightarrow x-1\ge x^2-2x\Leftrightarrow x^2-3x+1\le 0\Leftrightarrow\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\le x\le\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\{1;2\}\Rightarrow$ tập S có 2 giá trị nguyên.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt{x}$.

A. $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$. **B.** $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. **C.** $f'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{x}}{x}$. **D.** $f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=x'.\sqrt{x}+x.\left(\sqrt{x}\right)'=\sqrt{x}+x.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

Câu 7: Tính đạo hàm của hàm số $y=x\sqrt{x^2-2x}$.

A. $y'=\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$. **B.** $y'=\dfrac{3x^2-4x}{\sqrt{x^2-2x}}$.

C. $y' = \dfrac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

D. $y' = \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \sqrt{x^2 - 2x} + x.\dfrac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \dfrac{x^2 - 2x + x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \dfrac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x - 1)\sqrt{x^2 + x}$.

A. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} - \dfrac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$.

B. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \dfrac{4x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x}}$.

C. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \dfrac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$.

D. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \dfrac{4x^2 + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = (2x - 1)'.\sqrt{x^2 + x} + (2x - 1).\left(\sqrt{x^2 + x}\right)'$

$= 2.\sqrt{x^2 + x} + \dfrac{(2x - 1)(2x + 1)}{2\sqrt{x^2 + x}} = 2\sqrt{x^2 + x} + \dfrac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$.

Câu 9: Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

A. $y' = \dfrac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

B. $y' = -\dfrac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

C. $y' = \dfrac{x}{2(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

D. $y' = -\dfrac{x(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)' = \dfrac{-\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)'}{x^2 + 1} = \dfrac{-\left(x^2 + 1\right)'}{2\sqrt{x^2 + 1}\left(x^2 + 1\right)}$

$= \dfrac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}\left(x^2 + 1\right)}$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

A. $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

B. $y' = \dfrac{1 + x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$.

C. $y'=\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

D. $y'=\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{(x-1)'.\sqrt{x^2+1}-(x-1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-(x-1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$

$=\dfrac{x^2+1-x^2+x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}=\dfrac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$.

A. $y'=\dfrac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

B. $y'=\dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{(2x-1)^2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

D. $y'=\dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{(x+2)^2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}}.\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)'=\dfrac{1}{2}.\dfrac{5}{(x+2)^2}.\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$.

A. $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

B. $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

D. $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$.

A. $y'=-\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}$.

B. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}}$.

C. $y'=\frac{1}{4\sqrt{x+1}}+\frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$ **D.** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}.$

$\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{x+1}}+\frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$

Câu 14: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{3x^2+2x+1}{2\sqrt{3x^3+2x^2+1}}$ tại điểm $x=0.$

A. $f'(0)=0.$ **B.** $f'(0)=\frac{1}{2}.$ **C.** Không tồn tại. **D.** $f'(0)=1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=\frac{\left(3x^2+2x+1\right)'.2\sqrt{3x^3+2x^2+1}-\left(3x^2+2x+1\right).\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)'}{\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)^2}$

$=\frac{(6x+2)2\sqrt{3x^3+2x^2+1}-\left(3x^2+2x+1\right)\frac{9x^2+4x}{\sqrt{3x^3+2x^2+1}}}{\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)^2}=\frac{9x^4+6x^3-9x^2+8x+4}{4\left(3x^3+2x^2+1\right)\sqrt{3x^3+2x^2+1}}$

$\Rightarrow f'(0)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$

Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $y=\frac{a^3}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (a là hằng số).

A. $y'=\frac{a^3x}{\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}.$ **B.** $y'=\frac{a^3x}{a^2-x^2}.$

C. $y'=\frac{a^3x}{2\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}.$ **D.** $y'=\frac{a^3\left(3a^2-2x\right)}{2\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\frac{-a^3\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'}{a^2-x^2}=\frac{-a^3(-2x)}{2\sqrt{a^2-x^2}.\left(a^2-x^2\right)}=\frac{a^3x}{\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}.$

BÀI 3. ĐẠO HÀM HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Giới hạn của $\dfrac{\sin x}{x}$

Định lý 1

$$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$.

2. Đạo hàm của hàm số $y=\sin x$

Định lý 2

Hàm số $y=\sin x$ có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$.

Nếu $y=\sin u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\sin u)'=u'.\cos u}$.

3. Đạo hàm của hàm số $y=\cos x$

Định lý 3

Hàm số $y=\cos x$ có đạo hàm tại mọi $x\in\mathbb{R}$ và $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$.

Nếu $y=\cos u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\cos u)'=-u'\sin u}$.

4. Đạo hàm của hàm số $y=\tan x$

Định lý 4

Hàm số $y=\tan x$ có đạo hàm tại mọi $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $\boxed{(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

Nếu $y=\tan u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}}$.

5. Đạo hàm của hàm số $y=\cot x$

Định lý 5

Hàm số $y=\cot x$ có đạo hàm tại mọi $x\neq k\pi$ và $\boxed{(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}}$.

Nếu $y=\cot u$ và $u=u(x)$ thì $\boxed{(\cot u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}}$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Tính Đạo Hàm của các hàm số lượng gics

1. Phương pháp

- Áp dụng quy tắc tính đạo hàm.
- Áp dụng các đạo hàm lượng giác cơ bản.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan 7x$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{(7x)'}{\cos^2 7x}=\frac{7}{\cos^2 7x}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cos x}$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}}=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cos 2x}$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{(\cos 2x)'}{2\sqrt{\cos 2x}}=\frac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}=\frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\sin x}$

Hướng dẫn giải

$$y=\sqrt{\sin x}\Rightarrow y'=\frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\sin 3x}$

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{(\sin 3x)'}{2\sqrt{\sin 3x}}=\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan^2 5x$

Hướng dẫn giải

$$y'=2\tan 5x.\frac{(5x)'}{\cos^2 5x}=\frac{10\sin 5x}{\cos^3 5x}.$$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số $y=\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$

Hướng dẫn giải

$$y=\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\Rightarrow y'=\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)'.\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right).$$

Ví dụ 8: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

Hướng dẫn giải

$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x \Rightarrow y' = -2\sin 2x.$

Ví dụ 9: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2\sin 2x + \cos 2x$

Hướng dẫn giải

$y' = 2(\sin 2x)' + (\cos 2x)' = 4\cos 2x - 2\sin 2x.$

Ví dụ 10: Cho $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

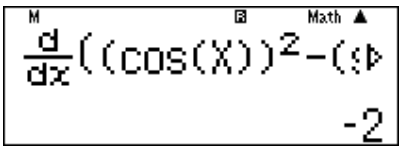
Ta có $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. Do đó $f'(x) = -2\sin 2x.$

Vậy $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} = -2.$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím SHIFT MODE 4

Nhập vào màn hình $\frac{d}{dx}\left(\left(\cos(X)\right)^2 + \left(\sin(X)\right)^2\right)\Big|_{X=\frac{\pi}{4}}$ rồi ấn phím = ta được kết quả



Ví dụ 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3 4x$

Hướng dẫn giải

$y = \cos^3 4x \Rightarrow y' = 3\cos^2 4x.(\cos 4x)' = 3\cos^2 4x.(-4\sin 4x) = -12\cos^2 4x.\sin 4x.$

Ví dụ 12: Với $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ thì $\frac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Cách 1: *Giải bằng tự luận*

$y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \Rightarrow y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

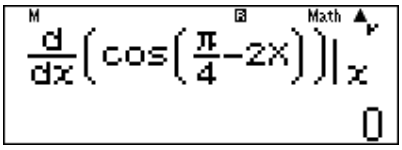
$y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 0;\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) \neq 0$

$\Rightarrow \frac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 0.$

Cách 2: *Giải nhanh bằng máy tính*

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím SHIFT MODE 4

Nhập vào màn hình $\dfrac{\left.\dfrac{d}{dx}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2X\right)\right)\right|_{x=\frac{\pi}{8}}}{\left.\dfrac{d}{dx}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2X\right)\right)\right|_{x=\frac{\pi}{3}}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

A. $y'=3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

B. $y'=-3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

C. $y'=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

D. $y'=-3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)'.\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)=-3.\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)$.

A. $y'=x\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)$.

B. $y'=\dfrac{1}{2}x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.

C. $y'=\dfrac{1}{2}x\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.

D. $y'=\dfrac{1}{2}x\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)'.\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)=-\dfrac{1}{2}.(-2x).\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)=x.\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(x^2-3x+2\right)$.

A. $y'=\cos\left(x^2-3x+2\right)$.

B. $y'=(2x-3).\sin\left(x^2-3x+2\right)$.

C. $y'=(2x-3).\cos\left(x^2-3x+2\right)$.

D. $y'=-(2x-3).\cos\left(x^2-3x+2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left(x^2-3x+2\right)'.\cos\left(x^2-3x+2\right)=(2x-3).\cos\left(x^2-3x+2\right)$.

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$.

A. $y' = 2x \tan x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = 2x \tan x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $y' = 2x \tan x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2x \tan x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \left(x^2\right)' \tan x + \left(\tan x\right)' .x^2 + \left(\sqrt{x}\right)' = 2x \tan x + \dfrac{x^2}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\cos x^2$.

A. $y' = -2 \sin x^2$.

B. $y' = -4x \cos x^2$.

C. $y' = -2x \sin x^2$.

D. $y' = -4x \sin x^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = -2.\left(x^2\right)' . \sin x^2 = -2.2x . \sin x^2 = -4x \sin x^2$.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan \dfrac{x+1}{2}$.

A. $y' = \dfrac{1}{2\cos^2 \dfrac{x+1}{2}}$.

B. $y' = \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x+1}{2}}$.

C. $y' = -\dfrac{1}{2\cos^2 \dfrac{x+1}{2}}$.

D. $y' = -\dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x+1}{2}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \left(\tan \dfrac{x+1}{2}\right)' = \dfrac{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)'}{\cos^2 \dfrac{x+1}{2}} = \dfrac{1}{2\cos^2 \dfrac{x+1}{2}}$.

Câu 7: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin \sqrt{2+x^2}$.

A. $y' = \dfrac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

B. $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

C. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

D. $y' = \dfrac{x+1}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \left(\sqrt{2+x^2}\right)' \cos\sqrt{2+x^2} = \frac{\left(2+x^2\right)'}{2\sqrt{2+x^2}} \cos\sqrt{2+x^2} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos\sqrt{2+x^2}$

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos\sqrt{2x+1}$.

A. $y' = -\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$

B. $y' = \frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$

C. $y' = -\sin\sqrt{2x+1}.$

D. $y' = -\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -\left(\sqrt{2x+1}\right)' \sin\sqrt{2x+1} = \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} \sin\sqrt{2x+1} = -\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$

Câu 9: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot\sqrt{x^2+1}$.

A. $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}.$

B. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}.$

C. $y' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}.$

D. $y' = \frac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sin^2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}.$

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(\sin x).$

A. $y' = \cos(\sin x).$

B. $y' = \cos(\cos x).$

C. $y' = \cos x.\cos(\sin x).$

D. $y' = \cos x.\cos(\cos x).$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = \left[\sin(\sin x)\right]' = (\sin x)'.\cos(\sin x) = \cos x.\cos(\sin x).$

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos(\tan x).$

A. $y' = \sin(\tan x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot$

B. $y' = -\sin(\tan x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot$

C. $y' = \sin(\tan x).$

D. $y' = -\sin(\tan x).$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -(\tan x)' \sin(\tan x) = -\frac{1}{\cos^2 x}.\sin(\tan x)$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$.

A. $y' = 4\sin x + \sin 2x + 1.$ **B.** $y' = 4\sin 2x + 1.$

C. $y' = 4\cos x + 2\sin 2x + 1.$ **D.** $y' = 4\sin x - 2\sin 2x + 1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 2.2(\sin x)'.\sin x + (2x)'\sin 2x + 1 = 4\cos x \sin x + 2\sin 2x + 1$

$= 2\sin 2x + 2\sin 2x + 1 = 4\sin 2x + 1$

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$.

A. $y' = -2\sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}\cdot$ **B.** $y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}.$

C. $y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}x.$ **D.** $y' = -2\sin(\pi - 4x).$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{1 - \cos(\pi - 4x)}{2} + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$

$= -\frac{1}{2}\cos(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra $y' = \left(-\frac{1}{2}\cos(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)'$

$= \frac{1}{2}(\pi - 4x)'\sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2} = -2\sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}$.

Câu 14: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3(2x - 1)$.

A. $y' = -3\sin(4x - 2)\cos(2x - 1).$ **B.** $y' = 3\cos^2(2x - 1)\sin(2x - 1).$

C. $y' = -3\cos^2(2x - 1)\sin(2x - 1).$ **D.** $y' = 6\cos^2(2x - 1)\sin(2x - 1).$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \left[\cos^3(2x - 1)\right]' = 3\cos^2(2x - 1)\left[\cos(2x - 1)\right]'$

$= -6\sin(2x - 1)\cos^2(2x - 1)$

$= -3\left[2\sin(2x - 1)\cos(2x - 1)\right]\cos(2x - 1) = -3\sin(4x - 2)\cos(2x - 1).$

Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin^3(1-x)$.

A. $y'=\cos^3(1-x).$ **B.** $y'=-\cos^3(1-x).$

C. $y'=-3\sin^2(1-x).\cos(1-x).$ **D.** $y'=3\sin^2(1-x).\cos(1-x).$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left[\sin^3(1-x)\right]'=3.\left[\sin(1-x)\right]'.\sin^2(1-x)=-3.\cos(1-x).\sin^2(1-x)$.

Câu 16: Tính đạo hàm của hàm số $y=\tan^3 x+\cot 2x$.

A. $y'=3\tan^2 x.\cot x+2\tan 2x.$ **B.** $y'=-\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{2}{\sin^2 2x}.$

C. $y'=3\tan^2 x-\dfrac{1}{\sin^2 2x}.$ **D.** $y'=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{2}{\sin^2 2x}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\left(\tan^3 x+\cot 2x\right)'=3\tan^2 x\left(\tan x\right)'-\dfrac{2}{\sin^2 2x}=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{2}{\sin^2 2x}$

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

A. $y'=\dfrac{-\sin 2x}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}.$ **B.** $y'=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}.$

C. $y'=\dfrac{2-2\sin 2x}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}.$ **D.** $y'=\dfrac{-2}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

Suy ra $y'=-\dfrac{1}{\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{1}{\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{-2}{\left(\sin x-\cos x\right)^2}$.

Câu 18: Tính đạo hàm của hàm số $y=-\dfrac{2}{\tan(1-2x)}$.

A. $y'=\dfrac{4x}{\sin^2(1-2x)}.$ **B.** $y'=\dfrac{-4}{\sin(1-2x)}.$

C. $y'=\dfrac{-4x}{\sin^2(1-2x)}$. **D.** $y'=\dfrac{-4}{\sin^2(1-2x)}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-\dfrac{-2(\tan(1-2x))'}{\tan^2(1-2x)}=\dfrac{-4.\dfrac{1}{\cos^2(1-2x)}}{\tan^2(1-2x)}=\dfrac{-4}{\sin^2(1-2x)}$.

Câu 19: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\cos 2x}{3x+1}$.

A. $y'=\dfrac{-2(3x+1)\sin 2x-3\cos 2x}{(3x+1)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{-2(3x+1)\sin 2x-3\cos 2x}{3x+1}$.

C. $y'=\dfrac{-(3x+1)\sin 2x-3\cos 2x}{(3x+1)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{2(3x+1)\sin 2x+3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{(\cos 2x)'(3x+1)-(3x+1)'.\cos 2x}{(3x+1)^2}=\dfrac{-2(3x+1)\sin 2x-3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Câu 20: Cho $f(x)=2x^2-x+2$ và $g(x)=f(\sin x)$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$.

A. $g'(x)=2\cos 2x-\sin x$. **B.** $g'(x)=2\sin 2x+\cos x$.

C. $g'(x)=2\sin 2x-\cos x$. **D.** $g'(x)=2\cos 2x+\sin x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x)=f(\sin x)=2\sin^2 x-\sin x+2$

$\Rightarrow g'(x)=(2\sin^2 x-\sin x+2)'=2.2\sin x.\cos x-\cos x=2\sin 2x-\cos x$.

Dạng 2. Tính đạo hàm tại một điểm

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=5\sin x-3\cos x$ tại điểm $x=\dfrac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$. **B.** $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-3$. **C.** $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-5$. **D.** $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=(5\sin x-3\cos x)'=5(\sin x)'-3(\cos x)'=5\cos x+3\sin x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=5\cos\frac{\pi}{2}+3\sin\frac{\pi}{2}=3$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=2\sin\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)$ tại điểm $x=-\frac{\pi}{5}$.

A. $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=4.$ **B.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-4.$ **C.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=2.$ **D.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-2.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=\left[2\sin\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)\right]'=2\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)'\cos\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right)=-4\cos\left(\frac{3\pi}{5}-2x\right).$

Suy ra $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-4\cos\left(\frac{3\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)=-4\cos\pi=4$.

Câu 3: Hàm số $f(x)=x^4$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x)=2x+\sin\frac{\pi x}{2}$ có đạo hàm là $g'(x)$.

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{f'(1)}{g'(1)}.$

A. $P=\frac{4}{3}.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=-2.$ **D.** $P=-\frac{4}{3}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4x^3$ và $g'(x)=\left(2x+\sin\frac{\pi x}{2}\right)'=2+\frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi x}{2}.$

Suy ra $P=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{4}{2+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}=2.$

Câu 4: Hàm số $f(x)=4x$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x)=4x+\sin\frac{\pi x}{4}$ có đạo hàm là $g'(x)$.

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{f'(2)}{g'(2)}.$

A. $P=1.$ **B.** $P=\frac{16}{16+\pi}.$ **C.** $P=\frac{16}{17}.$ **D.** $P=\frac{1}{16}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=4$ và $g'(x)=4+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}$.

Suy ra $P=\frac{f'(2)}{g'(2)}=\frac{4}{4+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi.2}{4}}=1$

Câu 5: Hàm số $f(x)=a\sin x+b\cos x+1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Để $f'(0)=\frac{1}{2}$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1$ thì giá trị của a và b bằng bao nhiêu?

A. $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $a=\frac{\sqrt{2}}{2};b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $a=\frac{1}{2};b=-\frac{1}{2}$.

D. $a=b=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=a\cos x-b\sin x$. Khi đó $\begin{cases}f'(0)=\frac{1}{2}\\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a\cos 0-b\sin 0=\frac{1}{2}\\ a\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+b\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\ a=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)-\cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn $y'(x)=1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. $f(x)=x+\frac{1}{2}\cos 2x$. **B.** $f(x)=x-\frac{1}{2}\cos 2x$. **C.** $f(x)=x-\sin 2x$. **D.** $f(x)=x+\sin 2x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'(x)=f'(x)+2\sin x\cos x=f'(x)+\sin 2x$.

Suy ra $y'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)+\sin 2x=1\Leftrightarrow f'(x)=1-\sin 2x$.

Đến đây ta lần lượt xét từng đáp án, ví dụ xét đáp án A ta có

$f'(x)=\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)'=x'+\frac{1}{2}(\cos 2x)'=1-\sin 2x$ (thỏa mãn)

Dạng 3: Giải phương trình $f'(x)=0$

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm $f'(x)$

✓ Để giải phương trình $f'(x)=0,$ ta áp dụng cách giải các phương trình lượng giác cơ bản và một số phương trình lượng giác thường gặp.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Với $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$ thì phương trình $y'=0$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{3}-k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=-\frac{\pi}{3}-k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)\Rightarrow y'=\frac{-1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$$

$$y'=0\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)=0\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}-k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2: Với $y=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)$ thì phương trình $y'=0$ có nghiệm là:

A. $x=-\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}.$ **B.** $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi.$ **C.** $x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}.$ **D.** $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$$y=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)\Rightarrow y'=-2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)$$

$$y'=0\Leftrightarrow\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)=0\Leftrightarrow\frac{2\pi}{3}+2x=k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x=-\frac{2\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3: Hàm số $y=\cot^2\frac{x}{4},$ nghiệm của phương trình $y'=0$ là:

A. $2\pi+k\pi.$ **B.** $\pi+k\pi.$

C. $2\pi+k4\pi.$ **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$$y=\cot^2\frac{x}{4}\Rightarrow y'=2\cot\frac{x}{4}.\left(-\frac{1}{4}\right).\frac{1}{\sin^2\frac{x}{4}}=-\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{4}}{\sin^3\frac{x}{4}}$$

$$y'=0\Leftrightarrow\cos\frac{x}{4}=0\Leftrightarrow x=2\pi+k4\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $f'(x)=0,$ biết $f(x)=\cos x-\sin x+x.$

A. $x=k2\pi;\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=k\pi;\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=k\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f'(x) = -\sin x - \cos x + 1.$

Vậy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right..$$

Ví dụ 5: Giả sử $f(x) = \frac{\sin 2x}{4} - \cos x + \frac{3}{2}x$. Khi đó tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \geq 0$ là:

A. $[-1;1]$. **B.** $\varnothing$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $f(x) = \frac{\sin 2x}{4} - \cos x + \frac{3}{2}x$

- $f'(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x + \frac{3}{2}.$
- $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x + \frac{3}{2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin x^2 + 2\sin x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x^2 - \sin x - 2 \leq 0 \qquad (*)$$

Đặt $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1$, phương trình trở thành: $t^2 - t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 2$ (so điều kiện ta được nghiệm $-1 \leq t \leq 1$).

Do đó $(*) \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow \forall x \in (-\infty;+\infty)$.

Ví dụ 6: Với $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3}\right)$ thì tập nghiệm của $f'(x) = 0$ là:

A. $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3}\right)$

$f'(x) = \cos 3x - \sin x - \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - \sin x - \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 3x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 3x = \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}-x+k2\pi \\ 3x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. ; k\in\mathbb{Z}.$$

3. Bài tập Trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số $y=\cos^2 x+\sin x.$ Phương trình $y'=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi).$

A. 1 nghiệm. **B.** 2 nghiệm.

C. 3 nghiệm. **D.** 4 nghiệm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y'=-2\cos x\sin x+\cos x=\cos x(1-2\sin x)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. ;(k\in\mathbb{Z})$$

Vì $x\in(0;\pi)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right\}$. Vậy có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

Câu 2: Cho hàm số $y=(m+1)\sin x+m\cos x-(m+2)x+1.$ Tìm giá trị của *m* để $y'=0$ có nghiệm?

A. $\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$. **B.** $m\ge 2.$

C. $-1\le m\le 3.$ **D.** $m\le -2.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$y'=(m+1)\cos x-m\sin x-(m+2)$

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow(m+1)\cos x-m\sin x=(m+2)$

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2+b^2\ge c^2$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2+m^2\ge(m+2)^2\Leftrightarrow m^2-2m-3\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)=0$ trên đường tròn lượng giác ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm.

C. 3 điểm. **D.** 4 điểm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$$f'(x)=\frac{-\sin x.\sqrt{\cos 2x}-\cos x\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)}{\cos 2x}=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

Ta biểu diễn được 2 điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=-\cos x+\sin x-\cos 2x$. Phương trình $f'(x)=1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin x=0$. **B.** $\sin x-1=0$.

C. $(\sin x-1)(\cos x-1)=0$. **D.** $\cos x=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$f'(x)=\sin x+\cos x+2\sin 2x$

$f'(x)=1\Leftrightarrow \sin x+\cos x+2\sin 2x=1$

Đặt $t=\sin x+\cos x\ \ (|t|\le\sqrt{2})\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 2t^2+t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{3}{2}\ \ (l)\end{array}\right.$

Với $t=1\Leftrightarrow \sin x+\cos x=1\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in Z)$

Nghiệm trên cũng là nghiệm của phương trình $(\sin x-1)(\cos x-1)=0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=2\frac{\cos^3 x}{3}+\sin^3 x-2\cos x-3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm.

C. 4 điểm. **D.** 6 điểm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$f'(x)=2\sin^3 x-3\cos^3 x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \tan^3 x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \tan x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Vậy có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

BÀI 4. VI PHÂN

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x\in(a;b)$. Giả sử Δx là số gia của x.

Ta gọi tích $f'(x)\Delta x$ là vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại x ứng với số gia Δx, kí hiệu là $df(x)$ hoặc dy, tức là : $\boxed{dy=df(x)=f'(x)\Delta x.}$

Chú ý:

Áp dụng định nghĩa trên vào hàm số $y=x$ ta có

$$dx=d(x)=x'\Delta x=1.\Delta x=\Delta x.$$

Do đó, với hàm số $y=f(x)$ ta có

$$dy=df(x)=f'(x)dx.$$

2. Ứng dụng phép tính gần đúng

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tìm vi phân của hàm số y=f(x)

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm y=f(x)
- ✓ Vi phân của hàm số y=f(x) tại x là $df(x)=f'(x)dx$
- ✓ Vi phân của hàm số y=f(x) tại x_0 là $df(x_0)=f'(x_0)dx$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Vi phân của hàm số $f(x)=3x^2-x$ tại điểm $x=2$, ứng với $\Delta x=0,1$ là:

A. –0,07. **B.** 10.

C. 1,1. **D.** –0,4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $f'(x)=6x-1\Rightarrow f'(2)=11$

$df(2)=f'(2)\Delta x=11.0,1=1,1$

Ví dụ 2: Vi phân của hàm số $y = 2x^5 - \frac{2}{x} + 5$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \left(10x^4 + \frac{2}{x^2} + 5\right)dx.$ **B.** $dy = \left(10x^4 - \frac{2}{x^2}\right)dx.$

C. $dy = \left(10x^4 + \frac{2}{x^2}\right)dx.$ **D.** $dy = \left(10x + \frac{2}{x^2}\right)dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y = 2x^5 - \frac{2}{x} + 5$ thì $y' = 10x^4 + \frac{2}{x^2}$. Vậy $dy = \left(10x^4 + \frac{2}{x^2}\right)dx.$

Ví dụ 3: Vi phân của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 5x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x}}dx.$ **B.** $dy = \frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x}}dx.$

C. $dy = -\frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}dx.$ **D.** $dy = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y = \sqrt{x^2 - 5x}$ thì $y' = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}$. Vậy $dy = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}dx.$

Ví dụ 4: Vi phân của hàm số $y = \frac{2x + 3}{2x - 1}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = -\frac{7}{(2x - 1)^2}dx.$ **B.** $dy = -\frac{8}{(2x - 1)^2}dx.$

C. $dy = -\frac{4}{(2x - 1)^2}dx.$ **D.** $dy = \frac{4}{(2x - 1)^2}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y = \frac{2x + 3}{2x - 1}$ thì $y' = -\frac{8}{(2x - 1)^2}$. Vậy $dy = -\frac{8}{(2x - 1)^2}dx$.

Ví dụ 5: Vi phân của hàm số $y = \tan 5x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \frac{5}{\cos^2 5x}dx.$ **B.** $dy = \frac{5x}{\cos^2 5x}dx.$

C. $dy = -\dfrac{5}{\cos^2 5x}dx.$ **D.** $dy = -\dfrac{5}{\sin^2 5x}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$y = \tan 5x$ thì $y' = \dfrac{5}{\cos^2 5x}$. Vậy $dy = \dfrac{5}{\cos^2 5x}dx.$

Ví dụ 6: Vi phân của hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\cos x}}dx.$ **B.** $dy = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}dx.$

C. $dy = \dfrac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx.$ **D.** $dy = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y = \sqrt{\cos x}$ thì $y' = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$. Vậy $dy = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}dx.$

Ví dụ 7: Vi phân của hàm số $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)dx.$ **B.** $dy = -2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)dx.$

C. $dy = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)dx.$ **D.** $dy = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$ thì $y' = -2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$. Vậy $dy = -2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)dx.$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = 5\sin 2x.$ Vi phân của hàm số tại $x = \dfrac{\pi}{3}$ là:

A. $dy = 5dx.$ **B.** $dy = 10\cos 2xdx.$

C. $dy = -10\cos 2xdx.$ **D.** $dy = -5dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y = 5\sin 2x \Rightarrow y' = 10\cos 2x.$

$dy = y'dx \Rightarrow dx = 10\cos 2xdx.$

Vi phân của hàm tại $x = \frac{\pi}{3}$: $dy = 10\cos\left(2.\frac{\pi}{3}\right)dx.$

$dy = -5dx.$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{1-2x}$. Vi phân của hàm số tại $x = -3$ là:

A. $dy = \frac{1}{7}dx.$ **B.** $dy = 7dx.$ **C.** $dy = -\frac{1}{7}dx.$ **D.** $dy = -7dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$y = \frac{x+3}{1-2x} \Rightarrow y' = \frac{7}{(1-2x)^2} \Rightarrow y'(-3) = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}.$

$\Rightarrow$ Vi phân của hàm số tại $x = -3$ là: $dy = \frac{1}{7}dx$.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = \sin(\sin x)$. Vi phân của hàm số tại x là:

A. $dy = \cos(\sin x)dx.$ **B.** $dy = \sin x(\cos x)dx.$

C. $dy = \cos(\sin x)\cos xdx.$ **D.** $dy = \cos(\sin x)\sin xdx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \tan\sqrt{x}$. Vi phân của hàm số tại x là:

A. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}dx.$ **B.** $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2 x}dx.$

C. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx.$ **D.** $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}dx}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y = \tan\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$

$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx.$

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = \cos^2 2x$. Vi phân của hàm số tại x là:

A. $dy = 4\cos 2x \sin 2x dx.$ **B.** $dy = 2\cos 2x \sin 2x dx.$

C. $dy = -4\cos 2x \sin 2dx.$ **D.** $dy = -2\cos 2x \sin 2x dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y = \cos^2 2x \Rightarrow y' = -2\cos 2x.2\sin 2x = -4\cos 2x \sin 2x.$

$dy = -4\cos 2x \sin 2dx.$

Ví dụ 13: Vi phân của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$ là:

A. $dy = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx.$ **B.** $dy = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx.$

C. $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx.$ **D.** $dy = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có:

$$y = \sqrt{x^2 + 3x - 1} \Rightarrow dy = \left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} \right)' dx = \frac{\left(x^2 + 3x - 1 \right)'}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx .$$

Ví dụ 14: Vi phân của hàm số $y = \sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1}$ là:

A. $dy = \left(\dfrac{3}{2\sqrt{3x + 1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x + 1}} \right) dx.$ **B.** $dy = \left(\dfrac{3}{\sqrt{3x + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}} \right) dx.$

C. $dy = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3x + 1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x + 1}} \right) dx.$ **D.** $dy = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3x + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}} \right) dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có:

$$y = \sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1} \Rightarrow dy = \left(\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1} \right)' dx = \left(\frac{\left(3x + 1 \right)'}{2\sqrt{3x + 1}} + \frac{\left(x + 1 \right)'}{2\sqrt{x + 1}} \right) dx$$

$$= \left(\frac{3}{2\sqrt{3x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} \right) dx$$

Ví dụ 15: Vi phân của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x + 1}$ là:

A. $dy=\dfrac{x-7}{(2x+1)^2\sqrt{x^2-2x+3}}dx.$ **B.** $dy=\dfrac{3x-7}{(2x+1)^2\sqrt{x^2-2x+3}}dx.$

C. $dy=\dfrac{3x-7}{(2x+1)^2}dx.$ **D.** $dy=\dfrac{(3x-7)\sqrt{x^2-2x+3}}{(2x+1)^2}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x+1}\Rightarrow dy=y'dx=\dfrac{3x-7}{(2x+1)^2\sqrt{x^2-2x+3}}dx$.

Ví dụ 16: Vi phân của hàm số $y=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{10}$ là:

A. $dy=\dfrac{5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^5}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ **B.** $dy=\dfrac{5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{10}}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

C. $dy=\dfrac{10\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^9}{\sqrt{x^2+1}}dx.$ **D.** $dy=\dfrac{10\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{10}}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{10}$

$$\Rightarrow dy=y'dx=10\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^9.\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)dx=\frac{10\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{10}}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}.$ Vi phân của hàm số tại x là:

A. $dy=\dfrac{-4}{(1+x^2)^2}dx.$ **B.** $dy=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}dx.$

C. $dy=\dfrac{-dx}{(1+x^2)^2}.$ **D.** $dy=\dfrac{-4}{1+x^2}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Câu 2: Vi phân của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ là:

A. $dy=\dfrac{-2x^2-2x-5}{\left(x^2+x-2\right)^2}dx.$ **B.** $dy=\dfrac{x^2-x-5}{\left(x^2+x-2\right)^2}dx.$

C. $dy=\dfrac{-2x^2+x-1}{\left(x^2+x-2\right)^2}dx.$ **D.** $dy=\dfrac{2x-5}{\left(x^2+x-2\right)}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $dy=y'dx=\dfrac{(2x+1)'\left(x^2+x-2\right)-(2x+1)\left(x^2+x-2\right)'}{\left(x^2+x-2\right)^2}=\dfrac{-2x^2-2x-5}{\left(x^2+x-2\right)^2}dx$.

Câu 3: Vi phân của hàm số $y=(5x-3)\sqrt{9x^2+1}$ là:

A. $dy=\dfrac{-2x+3}{2\sqrt{9x^2+1}}dx$. **B.** $dy=\dfrac{90x^2-27x+5}{\sqrt{9x^2+1}}dx$.

C. $dy=-\dfrac{5}{\sqrt{9x^2+1}}dx$. **D.** $dy=\dfrac{x^2-2x+2}{\sqrt{9x^2+1}}dx$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có:

$$dy=y'dx=\left[(5x-3)'\sqrt{9x^2+1}+(5x-3)\left(\sqrt{9x^2+1}\right)'\right]dx$$

$$=5\sqrt{9x^2+1}+(5x-3)\frac{\left(9x^2+1\right)'}{2\sqrt{9x^2+1}}=5\sqrt{9x^2+1}+(5x-3).\frac{18x}{2\sqrt{9x^2+1}}$$

$$=5\sqrt{9x^2+1}+(5x-3)\frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}$$

$$=\frac{5\left(9x^2+1\right)+(5x-3)9x}{\sqrt{9x^2+1}}=\frac{90x^2-27x+5}{\sqrt{9x^2+1}}$$

Câu 4: Vi phân của hàm số $y=\sin^2 x+\cos 2x-x$ là:

A. $dy=(1-\cos 2x)dx.$ **B.** $dy=(x+\sin 2x)dx.$

C. $dy=-\left(\sin 2x+1\right)dx.$ **D.** $dy=\left(\sin 2x+1\right)dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $dy=y'dx=\left[2\sin x\left(\sin x\right)'-\sin 2x.\left(2x\right)'-1\right]dx$

$=\left[2\sin x\cos x-2\sin 2x-1\right]dx=-\left(\sin 2x+1\right)dx$.

Câu 5: Vi phân của hàm số $y=\sqrt{1+2\tan x}$ là:

A. $dy=\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+2\tan x}}dx.$ **B.** $dy=\dfrac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{1+2\tan x}}dx.$

C. $dy=\dfrac{2\tan x}{\sqrt{1+2\tan x}}dx.$ **D.** $dy=\dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y=\sqrt{1+2\tan x}\Rightarrow dy=y'dx=\left(\sqrt{1+2\tan x}\right)'dx$

$=\left(\dfrac{\left(1+2\tan x\right)'}{2\sqrt{1+2\tan x}}\right)dx=\dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}dx$.

Câu 6: Vi phân của hàm số $y=\dfrac{2-2x+x^2}{x^2-1}$ là:

A. $dy=\dfrac{-2x^2-6x+2}{\left(x^2-1\right)^2}dx.$ **B.** $dy=\dfrac{-6x+2}{\left(x^2-1\right)^2}dx.$

C. $dy=\dfrac{-2x-3}{\left(x^2-1\right)^2}dx.$ **D.** $dy=\dfrac{-2x^2-x+1}{\left(x^2-1\right)^2}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y=\dfrac{2-2x+x^2}{x^2-1}\Rightarrow dy=y'dx=\left(\dfrac{2-2x+x^2}{x^2-1}\right)'dx=\dfrac{-2x^2-6x+2}{\left(x^2-1\right)^2}dx.$

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2$. Biểu thức nào sau đây chỉ vi phân của hàm số f?

A. $dy = 2(x-1)dx.$ **B.** $dy = (x-1)^2 dx.$

C. $dy = 2(x-1)dx.$ **D.** $dy = (x-1)dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi biểu thức $\sin y = \cos x$ và $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$. Chọn kết quả đúng:

A. $y' = \tan x.$ **B.** $y' = -\tan x.$ **C.** $y' = 1.$ **D.** $y' = -1.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$\cos y dy = -\sin x dx.$

$\Rightarrow y' = \frac{-\sin x}{\cos y} = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{|\sin x|} = -1$

Câu 9: Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{1+\cos^2 2x}$. Chọn câu đúng:

A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx.$ **B.** $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx.$

C. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx.$ **D.** $df(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$df(x) = \frac{\left(1+\cos^2 2x\right)'}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}} = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx.$

Câu 10: Vi phân của hàm số $y = 2x^3 - \sqrt{x} + 1$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $dy = \left(6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) dx.$ **B.** $dy = \left(6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx.$

C. $dy = \left(6x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx.$ **D.** $dy = \left(6x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y = 2x^3 - \sqrt{x} + 1 \Rightarrow y' = 6x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

Do đó: $dy = \left(6x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$

Câu 11: Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{1-2x}$. Vi phân của hàm số tại $x = -3$ là:

A. $dy = \dfrac{1}{7}dx.$ **B.** $dy = 7dx.$

C. $dy = -\dfrac{1}{7}dx.$ **D.** $dy = -7dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có $y' = \dfrac{7}{(1-2x)^2} \Rightarrow y'(-3) = \dfrac{1}{7}$. Do đó $dy = \dfrac{1}{7}dx.$

Câu 12: Vi phân của $y = \tan 5x$ là:

A. $dy = \dfrac{5x}{\cos^2 5x}dx.$ **B.** $dy = -\dfrac{5}{\sin^2 5x}dx.$

C. $dy = \dfrac{5}{\cos^2 5x}dx.$ **D.** $dy = -\dfrac{5}{\cos^2 5x}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y = \tan 5x \Rightarrow y' = \dfrac{5}{\cos^2 5x}$. Do đó $dy = \dfrac{5}{\cos^2 5x}dx$

Câu 13: Cho hàm số $y = \cos^2 2x$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy = 4\cos 2x \sin 2x dx.$ **B.** $dy = 2\cos 2x \sin 2x dx.$

C. $dy = -2\cos 2x \sin 2x dx.$ **D.** $dy = -2\sin 4x dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $dy = d\left(\cos^2 2x\right) = 2\cos 2x.(\cos 2x)'dx = -4\cos 2x.\sin 2x dx = -2\sin 4x dx.$

Câu 14: Cho hàm số $y = \tan\sqrt{x}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2 x}dx.$ **B.** $dy=\dfrac{1}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx.$

C. $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}dx.$ **D.** $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có : $dy=d\left(\tan\sqrt{x}\right)=\left(\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\right).(\sqrt{x})'dx=\dfrac{1}{2\sqrt{x}.\cos^2\sqrt{x}}dx.$

Câu 15 : Cho hàm số $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$ **B.** $dy=\dfrac{-4}{\left(1+x^2\right)^2}dx.$

C. $dy=\dfrac{-4}{1+x^2}dx.$ **D.** $dy=\dfrac{-dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có : $dy=d\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}dx.$

Dạng 2: Tính gần đúng giá trị của một biểu thức

1. Phương pháp

Lập hàm số $y=f\left(x\right)$ và chọn x_0, Δx một cách thích hợp

1. Tính đạo hàm $f'\left(x\right), f'\left(x_0\right)$ và $f\left(x_0\right)$
2. Giá trị gần đúng của biểu thức $P=f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt[3]{26,7}$ có giá trị là:

A. 2,999. **B.** 2,98. **C.** 2,97. **D.** 2,89.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Xét $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$ thì $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$. Cho $x_0=27,\ \Delta x=-0,3.$

Theo công thức gần đúng $f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f'\left(x_0\right).\Delta x+f\left(x_0\right)$

$\Rightarrow \sqrt[3]{27,3}\approx \sqrt[3]{27}+\frac{1}{27}\left(-0,3\right)\approx 2,999.$

Ví dụ 2: Dùng vi phân tính gần đúng $\sin 29°$ có giá trị là:

A. $0,4849.$ **B.** $0,5464.$ **C.** $0,4989.$ **D.** $0,4949.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Xét $f\left(x\right)=\sin x$ với $29°=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\quad \left(\text{rad}\right).$

Có $f'\left(x\right)=\cos x.$

Chọn $x_0=\frac{\pi}{6},$

$\Delta x=-\frac{\pi}{180}\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\right)\approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right).\left(-\frac{\pi}{180}\right)\approx 0,4849.$

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Dùng vi phân tính gần đúng $\frac{1}{0,9995}$ có giá trị là:

A. $1,0005.$ **B.** $1,005.$ **C.** $1,0015.$ **D.** $1,05.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}$

Ta có: $\frac{1}{0,9995}=f(1-0,0005)\approx f\left(1\right)-f'\left(1\right).0,0005=1+1.0,0005=1,0005.$

Câu 2: Dùng vi phân tính gần đúng $\cos 45^o30'$ có giá trị là:

A. $0,7.$ **B.** $0,7009.$ **C.** $0,7019.$ **D.** $0,8.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Xét hàm số $f\left(x\right)=\cos x\Rightarrow f'\left(x\right)=-\sin x.$

Khi đó

$\cos 45^o30'=f\left(45^o+30^o\right)\approx f\left(45^o\right)+f'\left(45^o\right).\frac{3,14}{6}=0,7009.$

Câu 3: Dùng vi phân tính gần đúng $\frac{1}{\sqrt{20,3}}$ có giá trị là:

A. $0,7$. **B.** $0,7009$. **C.** $0,7019$. **D.** $0,8$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

Khi đó: $\frac{1}{\sqrt{20,3}}=f\left(20,25\ +\ 0,05\right)\approx f\left(20,25\right)+f'\left(20,25\right).0,05=0,222.$

BÀI 5. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x\in(a,b)$. Khi đó, hệ thức $y'=f'(x)$ xác định một hàm số mới trên khoảng (a,b). Nếu hàm số $y'=f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm cấp hai của hàm số $y=f(x)$ tại x và kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Chú ý

- Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y=f(x)$ được định nghĩa tương tự và kí hiệu y''' hoặc $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$.
- Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp $n-1$, kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$ $(n\in\mathbb{N},n\ge 4)$. Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $y=f(x)$, kí hiệu $y^{(n)}$ hoặc $f^{(n)}(x)$.

$$\boxed{f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.}$$

II. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s=f(t)$ tại thời điểm t.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số $y=f(x)$

1. Phương pháp

- ✓ **Tính đạo hàm cấp 1:** $f'(x)$
- ✓ **Tính đạo hàm cấp 2:** $f''(x)=\left[f'(x)\right]'$
- ✓ **Tính đạo hàm cấp 3:** $f^{(3)}(x)=\left[f''(x)\right]'$
- ✓ **Tính đạo hàm cấp 4:** $f^{(4)}(x)=\left[f^{(3)}(x)\right]'$
- ✓ **Tính đạo hàm đến cấp được chỉ ra**

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)=\frac{4}{5}x^5-3x^2-x+4$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $16x^3-6$. **B.** $16x^3-6x$. **C.** $4x^3-6$. **D.** $16x^2-6$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$f(x)=\frac{4}{5}x^5-3x^2-x+4$ thì $f'(x)=4x^4-6x-1$, do đó: $f''(x)=16x^3-6$.

Ví dụ 2: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y=\cos 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-2\sin 2x$. **B.** $-4\cos 2x$. **C.** $-4\sin 2x$. **D.** $4\cos 2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y=\cos 2x$ thì $y'=-2\sin 2x$. Do đó $y''=-4\cos 2x$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Tập hợp các giá trị x để đạo hàm cấp 2 của $f(x)$ không âm là:

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1$ thì $f'(x)=x^2+x-12;\ f''(x)=2x+1$.

Do đó $f''(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=\frac{1}{x+1}$. Tính y''?

A. $y''=\frac{2}{(x+1)^4}$. **B.** $y''=\frac{2}{(x+1)^3}$. **C.** $y''=\frac{-2}{(x+1)^3}$. **D.** $y''=\frac{-2}{(x+1)^4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y'=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow y''=\frac{2}{(x+1)^3}$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\frac{x-3}{x+4}$. Tính $M=2(y')^2+(1-y).y''$.

A. $M=0$. **B.** $M=1$. **C.** $M=\frac{1}{x+4}$. **D.** $M=\frac{2x}{(x+4)^2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y'=\frac{7}{(x+4)^2}\Rightarrow y''=-\frac{14}{(x+4)^3}$

Lại có $1-y=1-\frac{x-3}{x+4}=\frac{7}{x+4}$

Vậy: $M=2(y')^2+(1-y).y''=2.\frac{49}{(x+4)^4}+\frac{7}{x+4}.\left(-\frac{14}{(x+4)^3}\right)=0$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$. Tính $y'^2-2y.y''$.

A. 0. **B.** 2. **C.** −1. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $y'=x+1\Rightarrow y''=1$.

Vậy: $y'^2 - 2y.y'' = (x+1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right).1 = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x - 2 = -1.$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x\sin x$. Tính $xy - 2(y' - \sin x) + xy''$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\sin x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y' = \sin x + \cos x \Rightarrow y'' = \cos x + (\cos x - x\sin x) = 2\cos x - x\sin x.$

Vậy:

$xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = x^2\sin x - 2(\sin x + x\cos x - \sin x) + 2x\cos x - x^2\sin x = 0.$ **Ví dụ 8:** Cho hàm số $y = A\sin(\omega x + \varphi)$. Tính $M = y'' + \omega^2.y$.

A. $M = 1.$ **B.** $M = -1.$

C. $M = \cos^2(\omega x + 4).$ **D.** $M = 0.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y' = A\omega\cos(\omega x + \varphi) \Rightarrow y' = -A\omega^2\sin(\omega x + \varphi)$

$\Rightarrow y'' + \omega^2 y = -A\omega^2\sin(\omega x + \varphi) + A\omega^2\sin(\omega x + \varphi) = 0.$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0$.

A. $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ **B.** $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y' = 2\cos 2x + 2\sin 2x \Rightarrow y'' = -4\sin 2x + 4\cos 2x.$

Phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow -4\sin 2x + 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 10: Cho hàm số: $y = (m-4)\frac{x^2}{2} + \cos x.$

Tìm m sao cho $y'' \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \le 3.$ **B.** $m \le 2.$ **C.** $m \ge 3.$ **D.** $m \ge 2.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = (m-4)x - \sin x \Rightarrow y'' = m - 4 - \cos x$

$y'' \le 0 \Leftrightarrow m - 4 - \cos x \le 0 \Leftrightarrow \cos x \ge m - 4 \quad (*)$

Vì $\cos x \ge -1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Vậy bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \ge m - 4 \Leftrightarrow m \le 3.$

Ví dụ 11: Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y''>0$.

A. $x>1$. **B.** $x<1$. **C.** $x\neq 1$. **D.** Vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y'=\dfrac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow y''=\dfrac{2}{(1-x)^3}$.

Vậy $y''>0\Leftrightarrow\dfrac{2}{(1-x)^3}>0\Leftrightarrow 1-x>0\Leftrightarrow x<1$.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=-3x^3+3x^2-x+5$; $y^{(3)}(3)$ bằng:

A. $y^{(3)}(3)=-162$. **B.** $y^{(3)}(3)=0$.

C. $y^{(3)}(3)=54$. **D.** $y^{(3)}(3)=-18$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y=-3x^3+3x^2-x+5\Rightarrow y'=-9x^2+6x-1$

$y''=-18x+6$

$y^{(3)}=-18\Rightarrow y^{(3)}(3)=-18.$

Ví dụ 13: Cho hàm số $y=\sin^2 x$. Đạo hàm cấp 4 của hàm số là:

A. $-\cos^2 2x.$ **B.** $8\cos 2x.$

C. $-8\cos 2x.$ **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y=\sin^2 x$

$y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$y''=2\cos 2x$

$y'''=-4\sin 2x$

$y^{(4)}=-8\cos 2x.$

Ví dụ 14: Cho hàm số $y=f(x)=\sin 2x.$ Hãy chọn câu đúng.

A. $4y-y''=0.$ **B.** $4y+y''=0.$ **C.** $y=y'\tan 2x.$ **D.** $y^2+(y')^2=4.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$\begin{cases}y'=2\cos 2x\\ y''=-4\sin 2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4y-y''=8\sin 2x\\ 4y+y''=0\end{cases}$.

Ví dụ 15: Cho hàm số $y=\sqrt{x^2+1}$. Xét hai quan hệ:

(I) $y.y'=2x;$

(II) $y^2.y''=y'.$

Quan hệ nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II).

C. Cả hai đều đúng. **D.** Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có:

$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ và $y'' = \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, suy ra $y.y' = x$ và $y^2.y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \neq y'$.

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f\left(x\right) = 2x^5 - \frac{4}{x} + 1$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $40x^3 - \frac{4}{x^3}$. **B.** $40x^3 + \frac{4}{x^3}$. **C.** $40x^3 - \frac{8}{x^3}$. **D.** $40x^3 + \frac{8}{x^3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$f\left(x\right) = 2x^5 - \frac{4}{x} + 1$ thì $f'\left(x\right) = 10x^4 + \frac{4}{x^2}$, do đó $f''\left(x\right) = 40x^3 - \frac{8}{x^3}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2}{1+x}$; $y^{(3)}\left(1\right)$ bằng:

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$.

C. $-\frac{4}{3}$. **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$y = \frac{2}{1+x} \Rightarrow y^{(3)} = \frac{-12}{\left(1+x\right)^4}$

$y^{(3)}\left(1\right) = \frac{-12}{16} = \frac{-3}{4}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \cos^2 x;;$ $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. 2. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $-2\sqrt{3}$. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y = \cos^2 x \Rightarrow y' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$

$y'' = -2\cos 2x$

$y''' = 4\sin 2x$

$y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4.\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}.$

Câu 4: Cho hàm số $y = \sin x + \cos x;$ $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng:

A. $\sqrt{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$.

C. 0. **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y = \sin x + \cos x \Rightarrow y' = \cos x - \sin x$

$y'' = -\sin x - \cos x$

$y''' = -\cos x + \sin x$

$y^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$

Câu 5: Với hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, $y^{(3)}(2)$ là:

A. $\frac{80}{27}$. **B.** $\frac{-80}{27}$. **C.** $\frac{40}{27}$. **D.** $\frac{-40}{27}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y = \frac{1}{x^2 - 1}$

$\Rightarrow y^{(3)} = -\frac{1}{2}.3!\left[\frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x+1)^4}\right]$

$y^{(3)} = -3\left[\frac{1}{(x-1)^4} - \frac{1}{(x+1)^4}\right]$

$y^{(3)}(2) = \frac{-80}{27}.$

Câu 6: Cho hàm số $y = \cos^2 2x$ và các đạo hàm y', y'', y'''. Giá trị của biểu thức $y''' + 16y' + y'' + 16y - 8$ là kết quả nào sau đây?

A. 0. **B.** 8. **C.** -8. **D.** $\cos 4x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$y = \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$

$\Rightarrow y' = -2\sin 4x;\ y'' = -8\cos 4x;\ y''' = 32\sin 4x.$

$\Rightarrow y''' + 16y' + y'' + 16y - 8 = 32\sin 4x - 32\sin 4x - 8\cos 4x + 8 + 8\cos 4x - 8 = 0.$

Câu 7: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\sin 2x$. **B.** $-4\sin x$. **C.** $-4\sin 2x$. **D.** $-2\sin 2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

$y = \sin 2x$ thì $y' = 2\cos 2x$. Do đó $y'' = -4\sin 2x$.

Câu 8: Xét hàm số $y = f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x) = -8$ có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. $x = \frac{\pi}{2}$. **B.** $x = 0;\ x = \frac{\pi}{6}$. **C.** $x = 0;\ x = \frac{\pi}{3}$. **D.** $x = 0;\ x = \frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Từ giả thiết ta có:

$16\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-8\Leftrightarrow\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$.**Câu 7:** Cho hàm số $y=\cos^2 x$.

Tính y''?

A. $y''=-2\cos 2x$. **B.** $y''=-4\cos 2x$. **C.** $y''=2\cos 2x$. **D.** $y''=4\cos 2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y'=-2\cos x\sin x=-\sin 2x\Rightarrow y''=-2\cos 2x$.

Câu 9: Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$. Tính $M=y^3.y''+1$.

A. -2. **B.** 0. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Rightarrow y''=\frac{1}{\left(2x-x^2\right)}.\left[-1.\sqrt{2x-x^2}-\frac{\left(1-x\right)^2}{\sqrt{2x-x^2}}\right]$

$=\frac{-1}{\left(2x-x^2\right)\sqrt{2x-x^2}}\Rightarrow y^3.y''=-1\Rightarrow y^3.y''+1=0$.

Câu 10: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^4$. Tính $f''\left(2\right)$.

A. 27. **B.** 81. **C.** 96. **D.** 108.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $f'\left(x\right)=4\left(x+1\right)^3\Rightarrow f''\left(x\right)=12\left(x+1\right)^2$. Vậy $f''\left(2\right)=108$.

Câu 11: Cho hàm số $y=\sin^3 x$. Tính $M=y''+9y$.

A. $\sin x$. **B.** $6\sin x$. **C.** $6\cos x$. **D.** $-6\sin x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $y'=3\sin^2 x\cos x\Rightarrow y''=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$.

Vậy:

$M=y''+9y=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x+9\sin^3 x=6\sin x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=6\sin x$.

Câu 12: Cho hàm số $y=x\tan x$. Tính $M=x^2y''-2\left(x^2+y^2\right)\left(1+y\right)$.

A. $\frac{x^2}{\cos^2 x}$. **B.** 1. **C.** $x^2-\tan^2 x$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y' = \tan x + \dfrac{x}{\cos^2 x} \Rightarrow y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x + 2x\sin x + \cos x}{\cos^4 x}$

Lại có $x^2 + y^2 = x^2 + x^2\tan^2 x = x^2\left(1 + \tan^2\right) = \dfrac{x^2}{\cos^2 x}$

$1 + y = 1 + x\tan x$.

Vậy $2\left(x^2 + y^2\right)\left(1 + y\right) = \dfrac{2x^2}{\cos^2 x}\left(1 + x\tan x\right) \quad (1)$

$x^2 y'' = x^2\left(\dfrac{\cos^2 x + \cos^2 x + 2x\sin x\cos x}{\cos^4 x}\right)$

$= \dfrac{2x^2\left(\cos^2 x + x\sin x\cos x\right)}{\cos^4 x} = \dfrac{2x^2}{\cos^2 x}\left(1 + x\tan x\right) \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M = x^2 y'' - 2\left(x^2 + y^2\right)\left(1 + y\right) = 0.$

Câu 13: Cho hàm số $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

A. $x \in \left(-\infty;1\right) \setminus \left\{0\right\}$. **B.** $x \in \left(1;+\infty\right)$.

C. $x \in \left(-1;1\right)$. **D.** $x \in \left(-2;2\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = 15x^4 - 20x^3 + 3 \Rightarrow y'' = 60x^3 - 60x^2$.

$y'' < 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x^2 < 0 \Leftrightarrow 60x^2\left(x - 1\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}.$

Câu 14: Cho hàm số $y = \dfrac{1}{\left(x+1\right)^3}$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

A. $x < -1$. **B.** $x > -1$. **C.** $x \neq 1$. **D.** Vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có: $y' = \dfrac{-3}{\left(x+1\right)^4} \Rightarrow y'' = \dfrac{12}{\left(x+1\right)^5}.$

Vậy $y'' < 0 \Leftrightarrow \dfrac{12}{\left(x+1\right)^5} < 0 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$

Câu 15: Cho hàm số $y = f\left(x\right) = \sin x$. Hãy chọn câu **sai**.

A. $y' = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $y'' = \sin\left(x + \pi\right)$.

C. $y''' = \sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$. **D.** $y^{(4)} = \sin\left(2\pi - x\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y^{(4)} = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x.$

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 2 của f là:

A. $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$. **B.** $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$.

C. $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$. **D.** $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

$y = 2x - 1 + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(1-x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{x}$. Xét hai mệnh đề:

(I) $y'' = f''(x) = \frac{2}{x^3}$.

(II) $y''' = f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II).

C. Cả hai đều đúng. **D.** Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$y' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$ (do đó (I) sai).

$\Rightarrow y''' = 2.\frac{3x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}$ (do đó (II) sai).

Câu 18: Cho hàm số: $y = (2-m)x^4 + 2x^3 + 2mx^2 + 2m - 1.$

Tìm m để phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}.$ **B.** $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}.$

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}.$ **D.** $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y' = 4(2-m)x^3 + 6x^2 + 4mx \Rightarrow y'' = 12(2-m)x^2 + 12x + 4m.$

Phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay phương trình: $3(2-m)x^2 + 3x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m\neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m\neq 0 \\ 4m^2-8m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} m<\frac{1}{2} \\ m>\frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Dạng 2: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số y=f(x)

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$.
- ✓ Dự đoán công thức đạo hàm cấp n của hàm số.
- ✓ Chứng minh công thức dự đoán bằng quy nạp toán học.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=\sin x$, dự đoán công thức $y^{(n)}(x)$ bằng:

A. $y^{(n)}=\sin(x+n\pi)$. **B.** $y^{(n)}=\cos(x+n\pi)$.

C. $y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $y^{(n)}=\cos\left(x-n.\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta chứng minh bằng quy nạp

- Với n = 1, ta có $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ đúng.
- Giả sử công thức đúng với n = k, tức là $y^{(k)}=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$.
- Ta chứng minh công thức đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$y^{(k+1)}=\sin\left(x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)$. Thật vậy:

$y^{(k+1)}=\left[y^{(k)}\right]'=\left[\sin(x+k\frac{\pi}{2})\right]'=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)$. Vậy, ta được $y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{2x+1}$, dự đoán công thức $y^{(n)}(x)$ bằng:

A. $y^{(n)}=\sin(x+n\pi)$. **B.** $y^{(n)}=\cos(x+n\pi)$.

C. $y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $y^{(n)}=\cos\left(x-n.\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

$y'=-\frac{2}{(2x+1)^2}$; $y''=\frac{2^2.2}{(2x+1)^3}$ và $y'''=-\frac{2^3.2.3}{(1+x)^4}$.

Dự đoán:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n.2^n.n!}{(2x+1)^{n+1}}.$$

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp.

- Với n = 1, ta có:

$$y' = \frac{(-1).2.1!}{(2x+1)^{1+1}} = -\frac{2}{(2x+1)^2} \text{ đúng.}$$

- Giả sử công thức đúng với n = k, tức là $y^{(k)} = \frac{(-1)^k.2^k.k!}{(2x+1)^{k+1}}$. (*)

- Ta đi chứng minh (2) đúng với n = k + 1, tức là chứng minh:

$$y^{(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}.2^{k+1}.(k+1)!}{(2x+1)^{k+2}}.$$

Thật vậy:

$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = \left[\frac{(-1)^k.2^k.k!}{(2x+1)^{k+1}}\right]' = (-1)^k.2^k.k!\left[\frac{1}{(2x+1)^{k+1}}\right]'$$

$$= (-1)^k.2^k.k!\left[-\frac{2(k+1)}{(2x+1)^{k+2}}\right] = \frac{(-1)^{k+1}.2^{k+1}.(k+1)!}{(2x+1)^{k+2}}, \text{ đpcm.}$$

Vậy, ta được: $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.2^n.n!}{(2x+1)^{n+1}}$.

3. Bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 19: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$.

A. $y^{(n)} = \frac{(2)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

B. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^{n+1}.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

C. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^n} - \frac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^n}$.

D. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $2x+1 = 7(x-2) - 5(x-3)$; $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Suy ra $y = \frac{7}{x-3} - \frac{5}{x-2}$.

Mà $\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.1^n.n!}{(x-2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}, \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(x-3)^{n+1}}$

Nên $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.7.n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n.5.n!}{(x-3)^{n+1}}$.

Câu 20: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \cos 2x$.

A. $y^{(n)} = (-1)^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

B. $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

C. $y^{(n)} = 2^{n+1} \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

D. $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải:

ĐÁP ÁN D

Ta có $y' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), y'' = 2^2 \cos\left(2x + 2\frac{\pi}{2}\right)$,

$y''' = 2^3 \cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right)$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 21: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sqrt{2x+1}$.

A. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}.3.5...(3n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

B. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

C. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n+1}}}$.

D. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}, y''' = \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}.3.5...(2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

Câu 22: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2 - 3x + 2}$.

A. $y^{(n)} = \frac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$.

B. $y^{(n)}=\frac{5.(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}-\frac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}.$

C. $y^{(n)}=\frac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}:\frac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}.$

D. $y^{(n)}=\frac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có: $y=\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x-1}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $y^{(n)}=\frac{5.(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{3.(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}.$

Câu 23: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y=\frac{x}{x^2+5x+6}$

A. $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}}+\frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}.$

B. $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n}}-\frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n}}.$

C. $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}}-\frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}.$

D. $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n-1}}-\frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n-1}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $x=3(x+2)-2(x+3)$; $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

Suy ra $y=\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x+2}.$

Mà $\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.1^n.n!}{(x+2)^{n+1}}=\frac{(-1)^n.n!}{(x+2)^{n+1}}$, $\left(\frac{1}{x+3}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.n!}{(x+)^{n+1}}$

Nên ta có: $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.3.n!}{(x+3)^{n+1}}-\frac{(-1)^n.2.n!}{(x+2)^{n+1}}.$

Câu 24: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y=\cos 2x.$

A. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

B. $y^{(n)}=2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$

C. $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right).$

D. $y^{(n)} = 2^{n+1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có :

$y' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), y'' = 2^2\cos\left(2x + 2\frac{\pi}{2}\right), y''' = 2^3\cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right)$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)} = 2^n\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Dạng 3: Ý nghĩa vật lý của đạo hàm cấp hai

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2$
(t: tính bằng giây, s: tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 12m/s$.

B. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 24m/s$.

C. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 18m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 9m/s^2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

- $S = t^3 - 3t^2 \Rightarrow v(t) = S' = 3t^2 - 6t$

$\Rightarrow v(3) = 3.3^2 - 18 = 9(m/s)$.

- $S = t^3 - 3t^2 \Rightarrow a = S'' = 6t - 6$

$a_{(t=4s)} = 6.4 - 6 = 18\left(m/s^2\right)$.

Ví dụ 2: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

A. $24\left(m/s^2\right)$. **B.** $17\left(m/s^2\right)$. **C.** $14\left(m/s^2\right)$. **D.** $12\left(m/s^2\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ bằng $S''(3)$.

$S'(t) = 3t^2 - 6t + 5; S''(t) = 6t - 6$ nên $S''(3) = 18 - 6 = 12\left(m/s^2\right)$.

3. bài tập rèn luyện tốc độ

Câu 25: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t: tính bằng giây, s tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ hoặc $t = 3$.

B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=1$ là $a=12m/s^2$.

C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=3$ là $a=12m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

- $S=t^3-3t^2-9t+2$

$\Rightarrow v(t)=S3t^2-6t-9$

$v(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-6t-9=0\Leftrightarrow t^2-2t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.$

- $S=t^3-3t^2-9t+2$

$\Rightarrow a=S''=6t-6$

$\Rightarrow a_{(t=3s)}=6.3-6=12(m/s^2)$.

Câu 26: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S=t^3-2t^2+4t+1$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=2$ là:

A. $12(m/s^2)$. **B.** $8(m/s^2)$. **C.** $7(m/s^2)$. **D.** $6(m/s^2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Gia tốc của chuyển động khi $t=2$ bằng $S''(2)$.

$S'(t)=3t^2-4t+4;\ S''(t)=6t-4$ nên $S''(2)=12-4=8(m/s^2)$.

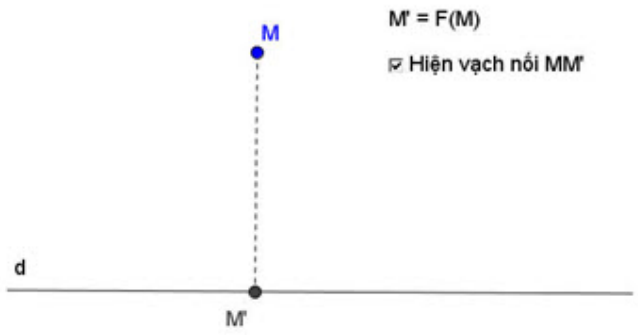
CHƯƠNG I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

BÀI 1. PHÉP BIẾN HÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Đặt vấn đề: Trong mặt phẳng cho đường thẳng d và điểm M. Dựng hình chiếu vuông góc M' của điểm M lên đường thẳng d.
Ta đã biết rằng với mỗi điểm M có một điểm M' duy nhất là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng d cho trước (hình 1.1).



Hình 1.1

Ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa: *Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.*

Nếu kí hiệu phép biến hình là F thì ta viết F(M) = M' hay M' = F(M) và gọi điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F.

Nếu H là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu H ' = F(H) là tập các điểm $M' = F(M)$, với mọi điểm M thuộc H. Khi đó ta nói F biến hình H thành hình H ', hay hình H ' là ảnh của hình H qua phép biến hình F.

Phép biến hình biến mỗi điểm M thành chính nó được gọi là phép đồng nhất.

2. Biểu thức tọa độ

Gọi $M(x;y)$ là điểm nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta có: $M' = f(M)$.

Với $M'(x';y')$ sao cho: $\begin{cases} x' = g(x;y) \\ y' = h(x;y) \end{cases}$ (1)

Hệ (1) được gọi là biểu thức tọa độ của phép biến hình f.

3. Điểm bất động của phép biến hình

- Một điểm $M \in (P)$ gọi là điểm bất động đối với phép biến hình f nếu $f(M) = M$.

- Nếu $f(M)=M$ với mọi điểm $M\in(P)$ thì f được gọi là phép đồng nhất.

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua một phép biến hình

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa hoặc biểu thức tọa độ của phép biến hình.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(1;-2)$, M' là ảnh của M qua phép biến hình f có biểu thức tọa độ: $\begin{cases}x'=2x+y-1\\y'=x-y+2\end{cases}$. Tìm tọa độ $(x';y')$ của M'.

Giải

Thay tọa độ điểm M vào biểu thức tọa độ của M', ta được: $\begin{cases}x'=2.1+(-2)-1=-1\\y'=1-(-2)+2=5\end{cases}$

Vậy $M'(-1;5)$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $x-y+1=0$. Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép biến hình có biểu thức tọa độ là: $\begin{cases}x'=2x-y\\y'=3x-2y\end{cases}$.

Giải

Ta có: $\begin{cases}x'=2x-y\\y'=3x-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2x'-y'\\y=3x'-2y'\end{cases}\qquad(*)$

Thay (*) vào phương trình của d, ta được: $2x'-y'-3x'+2y'+1=0\Leftrightarrow x'-y'-1=0$.

Do đó, phương trình của d', ảnh của đường thẳng d là: $x-y-1=0$.

Dạng 2. Tìm điểm bất động của phép biến hình

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa hoặc biểu thức tọa độ của phép biến hình.

Ví dụ: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép biến hình f có biểu thức tọa độ là: $\begin{cases}x'=2x+y-1\\y'=x+2y-1\end{cases}$.

Tìm các điểm bất động của phép biến hình f.

Giải

$M(x;y)$ là điểm bất động khi $M'=f(M)=M$. Do đó, nếu $M'(x';y')$ thì $\begin{cases}x'=x\\y'=y\end{cases}$.

Thay vào biểu thức tọa độ, ta được: $\begin{cases}x=2x+y-1\\y=x+2y-1\end{cases}$ hay $x+y-1=0$.

Vậy các điểm bất động của f nằm trên đường thẳng có phương trình $x+y-1=0$.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Gọi f là phép biến hình biến điểm M thành điểm M' được xác định bởi: $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ với O là điểm cố định. Hỏi f có mấy điểm sao cho $M = f(M)$

A. Duy nhất 1 điểm

B. Ít nhất một

C. Ít nhất là hai

D. không có điểm nào

Hướng dẫn giải

Đáp án A

$M = f(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{0} \Leftrightarrow O \equiv M$.

Vậy có duy nhất 1 điểm có ảnh là chính nó, đó là gốc tọa độ O.

Câu 2. Gọi f là phép biến hình biến điểm M thành điểm M' được xác định bởi $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ ($\vec{v}$ là vectơ cho sẵn khác $\vec{0}$). Hỏi điểm nào nằm trên đoạn thẳng AB có ảnh qua f là chính nó

A. A

B. B

C. trung điểm của AB

D. không có điểm nào

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Gọi M thuộc đoạn thẳng AB có ảnh qua f là chính nó, ta có $M = f(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}\left(\neq \vec{0}\right) \Leftrightarrow$ không có điểm M nào.

Câu 3. Cho đường thẳng Δ cố định. Gọi f là phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\begin{cases} MM' \perp \Delta \text{ tai } H \\ \overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{M'H} \end{cases}$ Giả sử $A' = f(A), B' = f(B)$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. $AB > A'B'$ **B.** $AB < A'B'$ **C.** $AB = A'B'$ **D.** Chỉ A đúng

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Vì $A' = f(A)$ và $B' = f(B)$ nên Δ là đường trụng trực của AA' và BB'. Trong hình thang ABB'A', ta có $A'B' = AB$.

Câu 4. Trong hệ trục tọa độ Oxy, $\vec{a} = (1;2); M(x,y); M'(x',y')$. Biểu thức tọa độ của phép biến hình f biến M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ có công thức nào sau đây:

A. $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x - 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Vì $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ nên $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

Câu 5. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$. Điểm nào sau đây có ảnh qua f là chính nó

A. $(0;0)$ **B.** $(1;0)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(x \in \mathbb{R}, 0)$

Hướng dẫn giải

Đáp án D

M là ảnh qua f chính là $M \Leftrightarrow M = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$

Câu 6. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$. Ảnh của $\Delta : x + y = 0$ qua f có phương trình là:

A. $y = \frac{1}{2}x$ **B.** $(1;0)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $(x \in \mathbb{R}, 0)$

Hướng dẫn giải

Đáp án C

Từ $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$ thay vào $x + y = 0$

Ta có: $x' - y' = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$

Câu 7. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$. Gọi $A(1;2)$ và $B(-1;3)$. Tính độ dài của $A'B'$ ta được:

A. 10 **B.** 3 **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{10}$

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Vì $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ nên A' có tọa độ $\begin{cases} x_{A'} = 1 - 2 = -1 \\ y_{A'} = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

Tương tự ta tìm được $B(-4;2)$. Do đó: $A'B' = \sqrt{10}$

Câu 8. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$. Ảnh của elip $(E): \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ qua f là (E') có phương trình

A. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ **C.** $\frac{x^2}{4} + 2y^2 = 1$ **D.** $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$

Hướng dẫn giải

Đáp án A

Vì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$ nên $\begin{cases} x = x' \\ y = -\frac{y'}{2} \end{cases}$ thay vào $(E): \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ta được $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$

Câu 9. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$. Ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4 = 0$ qua f có phương trình

A. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ **C.** $x^2 + 2y^2 = 1$ **D.** $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$

Hướng dẫn giải

Đáp án D

Vì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$ nên $\begin{cases} x = x' \\ y = -\frac{y'}{2} \end{cases}$ thay vào $(C): x^2 + y^2 - 4 = 0$ ta được $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$

Câu 10. Trong hệ trục tọa độ Oxy, phép biến hình f biến $M(x,y)$ thành $M'(x',y')$ được xác định bởi $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$. Gọi $M''(x'',y'')$ là ảnh của M' qua f. Tọa độ của M'' tính theo (x,y) của M là:

A. $\begin{cases} x'' = 4x \\ y'' = y \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x'' = 2x \\ y'' = y \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x'' = 3x \\ y'' = y \end{cases}$

Hướng dẫn giải

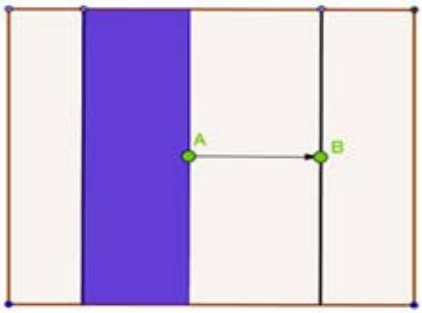
Đáp án A

Vì $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$ nên $\begin{cases} x'' = 2x' \\ y'' = y' \end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases} x'' = 2(2x) = 4zx \\ y'' = y \end{cases}$

BÀI 2. PHÉP TỊNH TIẾN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Khi đẩy một cánh cửa trượt sao cho chốt cửa dịch chuyển từ vị trí A đến vị trí B ta thấy từng điểm của cánh cửa cũng được dịch chuyển một đoạn bằng AB và theo hướng từ A đến B (h.1.2). Khi đó ta nói cánh cửa được tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

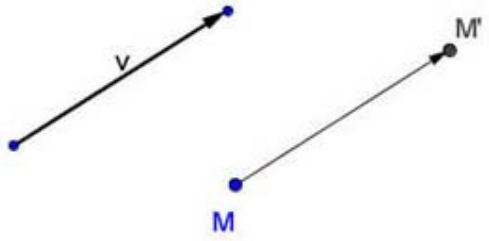


Hình 1.2

I. Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được ký hiệu là $T_{\vec{v}}, \vec{v}$ được gọi là vectơ tịnh tiến.



Hình 1.3

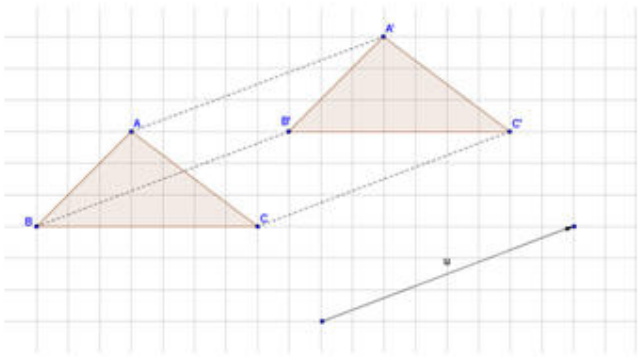
Như vậy: $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

Phép tịnh tiến theo vectơ – không chính là phép đồng nhất.

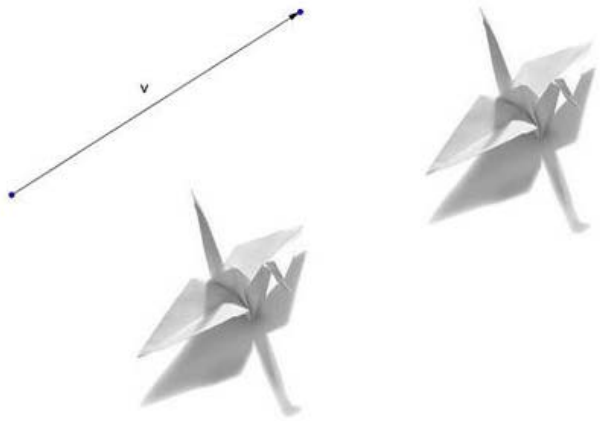
Ví dụ:

a)Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến các điểm A, B, C tương ứng thành các điểm A', B', C' (H.1.4a)

b) Phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến hình H thành hình H' (h.1.4b).



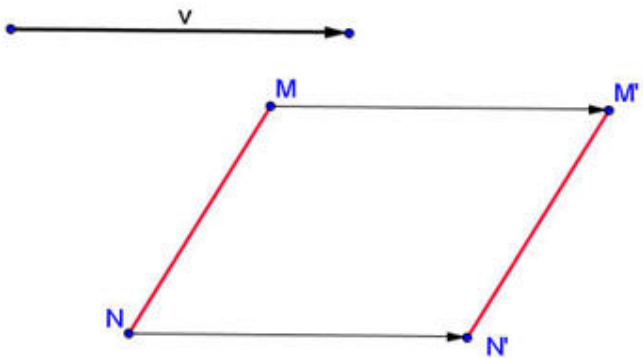
Hình 1.4 a



Hình 1.4 b

II. Tính chất

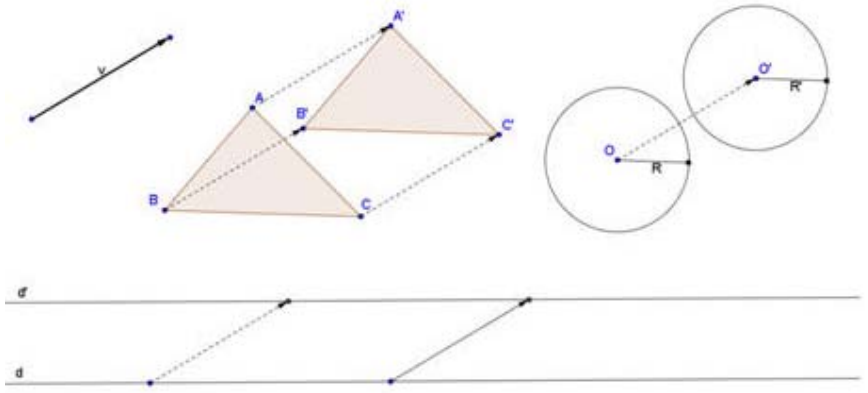
Tính chất 1. Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M',\ T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra $M'N' = MN$



Nói cách khác, phép tính tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ. Từ tính chất 1 ta chứng minh được tính chất sau.

Tính chất 2

Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (h.1.7).



Hình 1.7

III. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x;y)$ và vectơ $\vec{v}=(a;b)$. Gọi $M'(x';y')=T_{\vec{v}}(M)$. Ta có:

$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$$

Đây là biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua một phép tịnh tiến

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa, tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}=(2;-1)$ và đường thẳng d có phương trình $5x+3y-1=0$. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Giải

Cách 1. Vì $d'=T_{\vec{v}}(d)$ nên $d'\parallel d$. Do đó $d':5x+3y+c=0$. Lấy $M(-1;2)\in d$. Khi đó $M'=T_{\vec{v}}(M)=(-1+2;2-1)=(1;1)$. Mà $M'\in d'$ nên: $5.1+3.1+c=0\Leftrightarrow c=-8$. Vậy $d':5x+3y-8=0$.

Cách 2. Ta có: $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'+1 \end{cases}$

Thế x, y vào phương trình của d', ta được: $5.(x'-2)+3.(y'+1)-1=0 \Leftrightarrow 5x'+3y'-8=0$.

Vậy phương trình đường thẳng $d': 5x+3y-8=0$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-4x+2y-4=0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}=(3;2)$.

Giải

Cách 1. Biểu thức tọa độ của $T_{\vec{v}}$ là: $\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'-3 \\ y = y'-2 \end{cases}$.

Thay vào phương trình của (C) ta được:

$$(x'-3)^2+(y'-2)^2-4(x'-3)+2(y'-2)-4=0 \Leftrightarrow x'^2+y'^2-10x'-2y'+17=0$$

Vậy ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$ là: $(C'): x^2+y^2-10x-2y+17=0$.

Cách 2. Đường tròn có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $r=3$. Ảnh $I'=T_{\vec{v}}(I)$ có tọa độ $(x'=2+3; y'=1)=(5;1)$. Đường tròn ảnh (C') có tâm $I'(5;1)$ và bán kính $r'=r=3$ nên có phương trình: $(x-5)^2+(y-1)^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2-10x-2y+17=0$.

Dạng 2. Dùng phép tịnh tiến để tìm tập hợp điểm di động

Phương pháp giải: Chứng minh tập hợp điểm phải tìm là ảnh của một hình đã biết qua một phép tịnh tiến.

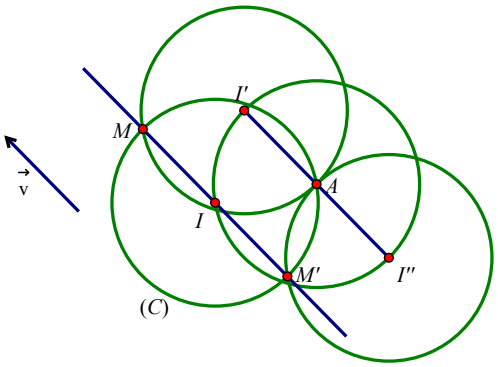
Ví dụ: Cho đường tròn (C) qua điểm A cố định và có bán kính R không đổi. Một đường thẳng d có phương không đổi đi qua tâm I của (C). Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm M và M'. Tìm tập hợp các điểm M và M'.

Giải

Tập hợp các điểm I là đường tròn (I), tâm A, bán kính R.

Vì IM có phương không đổi (phương của d) và $IM=R$ (không đổi) nên $\overrightarrow{IM}=\vec{v}$ (vectơ hằng). Do đó: $M=T_{\vec{v}}(I)$. Vậy, tập hợp điểm M là đường tròn (I'), ảnh của (I) qua $T_{\vec{v}}$.

Tương tự, $\overrightarrow{IM'}=-\vec{v}$ nên $M'=T_{-\vec{v}}(I)$. Vậy tập hợp những điểm M' là đường tròn (I'') ảnh của (I) qua $T_{-\vec{v}}$.



Dạng 3. Dùng phép tịnh tiến để dựng hình

Phương pháp giải: Muốn dựng một điểm, N chẳng hạn, ta thực hiện các bước sau:

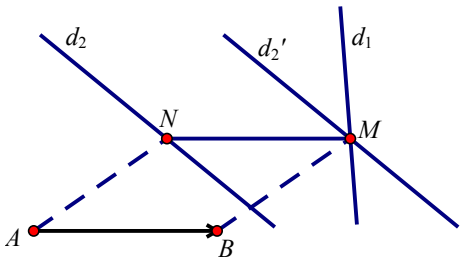
Bước 1. Xác định điểm M và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ sao cho $T_{\vec{v}}(M)=N$.

Bước 2. Tìm cách dựng điểm M rồi suy ra N.

Ví dụ: Cho hai điểm cố định A, B phân biệt và hai đường thẳng $d_1; d_2$ không song song với nhau. Giả sử điểm M thuộc d_1 và điểm N thuộc d_2 sao cho ABMN là hình bình hành. Hãy dựng điểm N.

Giải

Giả sử bài toán đã giải xong, ta có $M\in d_1, N\in d_2$ và ABMN là hình bình hành.



Vì ABMN là hình bình hành nên $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}$, suy ra $M=T_{\overrightarrow{AB}}(N)$.

Gọi d_2' là ảnh của d_2 qua $T_{\overrightarrow{AB}}$ thì $M=d_1\cap d_2'$.

Cách dựng M:

- Dựng $d_2'=T_{\overrightarrow{AB}}(d_2)$.
- Gọi $d_2'\cap d_1=M$, M là điểm phải dựng.

Vì d_1 không song song với d_2 (giả thiết) nên d_2' cắt d_1 tại một điểm duy nhất. Bài toán luôn luôn có một lời giải.

Để dựng N, ta dựng ảnh của M trong $T_{\overrightarrow{BA}}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường thẳng d. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng d thành chính nó?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép

D. Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Vectơ tịnh tiến có giá song song với d.

Câu 2. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Vì phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó.

Câu 3. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Vectơ tịnh tiến có giá không song song với d.

Câu 4. Cho hai đường thẳng song song a và a', một đường thẳng c không song song với chúng. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng a' và biến đường thẳng c thành chính nó?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Giả sử c cắt a và a' tại A và A'. Vectơ tịnh tiến phải là $\overrightarrow{AA'}$.

Câu 5. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a \parallel a', b \parallel b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng a' và biến mỗi đường thẳng b và b' thành chính nó?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Giả sử b cắt a và a' tại A và A'. Vectơ tịnh tiến phải là $\overrightarrow{AA'}$.

Câu 6. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a \parallel a', b \parallel b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến các đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Giả sử a và b cắt nhau tại M, a' và b' cắt nhau tại M'. Vectơ tịnh tiến phải là $\overrightarrow{MM'}$.

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đồ thị của hàm số $y=\sin x$. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đồ thị đó thành chính nó?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Các phép tịnh tiến theo vectơ $2k\pi$, với k là số nguyên.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{u}(3;-1)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến điểm $M(1;-4)$ thành:

A. điểm $M'(4;-5)$ **B.** điểm $M'(-2;-3)$ **C.** điểm $M'(3;-4)$ **D.** điểm $M'(4;5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phải có $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(3;2)$ thành điểm $A'(2;3)$ thì nó biến điểm $B(2;5)$ thành:

A. điểm $B'(5;2)$ **B.** điểm $B'(1;6)$ **C.** điểm $B'(5;5)$ **D.** điểm $B'(1;1)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phải có $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $M(4;2)$ thành điểm $M'(4;5)$ thì nó biến điểm $A(2;5)$ thành:

A. điểm $A'(5;2)$ **B.** điểm $A'(1;6)$ **C.** điểm $A'(2;8)$ **D.** điểm $A'(2;5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Phải có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$.

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(4;6)$ biến đường thẳng a có phương trình $x + y - 1 = 0$ thành:

A. đường thẳng $x + y + 9 = 0$ **B.** đường thẳng $x + y - 9 = 0$

C. đường thẳng $x - y + 9 = 0$ **D.** đường thẳng $-x + y + 9 = 0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến đó biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x' - x = 4$ và $y' - y = 6$ hay $x = x' + 4$ và $y = y' + 6$. Nếu $M \in a$ thì $x + y + 1 = 0$ nên $x' + 4 + y' + 6 - 1 = 0$ hay $x' + y' + 9 = 0$. Vậy M' nằm trên đường thẳng $x + y + 9 = 0$.

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(2;-1)$ thành điểm $A'(3;0)$ thì nó biến đường thẳng nào sau đây thành chính nó?

A. $x + y - 1 = 0$ **B.** $x - y - 100 = 0$ **C.** $2x + y - 4 = 0$ **D.** $2x - y - 1 = 0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Vectơ tịnh tiến là $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = (1;1)$, đường thẳng biến thành chính nó khi và chỉ khi nó có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(2;-1)$ thành điểm $A'(1;2)$ thì nó biến đường thẳng a có phương trình $2x - y + 1 = 0$ thành đường thẳng có phương trình:

A. $2x - y + 1 = 0$ **B.** $2x - y = 0$ **C.** $2x - y + 6 = 0$ **D.** $2x - y - 1 = 0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Lấy điểm $M(0;1)$ nằm trên a, M biến thành $M'(-1;4)$ mà M' nằm trên đường thẳng có phương trình $2x - y + 6 = 0$ nên đó là đường thẳng ảnh của a.

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và a' lần lượt có phương trình $3x-2y=0$ và $3x-2y+1=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ nào sau đây biến đường thẳng a thành đường thẳng a'?

A. $\vec{u}(-1;-1)$ **B.** $\vec{u}(1;-1)$ **C.** $\vec{u}(1;-2)$ **D.** $\vec{u}(-1;2)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Lấy điểm $O(0;0)$ nằm trên a, một điểm $M(x;y)$ nằm trên a' nếu $3x-2y+1=0$.

Vectơ tịnh tiến là $\vec{u}=\overrightarrow{OM}=(x;y)$ với điều kiện $3x-2y+1=0$. Vectơ $\vec{u}(-1;-1)$ ở phương án A thỏa mãn điều kiện đó.

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và a' lần lượt có phương trình $2x-3y-1=0$ và $2x-3y+5=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ nào sau đây **không** biến đường thẳng a thành đường thẳng a'?

A. $\vec{u}(0;2)$ **B.** $\vec{u}(-3;0)$ **C.** $\vec{u}(3;4)$ **D.** $\vec{u}(1;-1)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Nếu vectơ tịnh tiến là $\vec{u}(a;b)$ thì điểm $M(x;y)$ biến thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'=x+a$, $y'=y+b$ hay $x=x'-a, y=y'-b$. Vậy đường thẳng $2x-3y-1=0$ biến thành đường thẳng $2(x'-a)-3(y'-b)-1=0$ hay $2x'-3y'-2a+3b-1=0$. Muốn đường thẳng này trùng với đường thẳng $a':2x-3y+5=0$ ta phải có $-2a+3b-1=5$ hay $-2a+3b=6$. Vectơ $\vec{u}$ ở phương án D không thỏa mãn điều kiện đó.

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và a' lần lượt có phương trình $3x-4y+5=0$ và $3x-4y=0$. Phép tịnh tiến theo $\vec{u}$ biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Khi đó độ dài bé nhất của vectơ $\vec{u}$ bằng bao nhiêu?

A. 5 **B.** 4 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng a và a'.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng a có phương trình $3x-2y-5=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(1;-2)$ biến đường thẳng đó thành đường thẳng a' có phương trình:

A. $3x-2y-4=0$ **B.** $3x+2y=0$ **C.** $3x-2y+10=0$ **D.** $3x-2y-7=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến có biểu thức tọa độ $x'=x+1; y'=y-2$. Như vậy $x=x'-1; y=y'+2$, thay vào phương trình của a ta được phương trình của a' là $3(x'-1)-2(y'-2)-5=0$, vậy a' có phương trình $3x-2y-4=0$.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol có đồ thị $y=x^2$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(2;-3)$ biến parabol đó thành đồ thị của hàm số:

A. $y=x^2+4x+1$ **B.** $y=x^2-4x+1$ **C.** $y=x^2-4x-1$ **D.** $y=x^2+4x-1$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép tịnh tiến biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ mà $x=x'-2; y=y'+3$ nếu M thuộc parabol đã cho thì $y'+3=(x'-2)^2$ hay $y'=x'^2-4x'+1$. Vậy M thuộc parabol có đồ thị như phương án B.

Câu 19. Cho hai đường thẳng song song a và b. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Không tồn tại phép tịnh tiến nào biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

B. Có duy nhất một phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

C. Có đúng hai phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

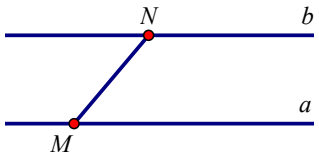
D. Có vô số phép tịnh tiến biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trên các đường thẳng a và b ta lần lượt lấy các điểm M và N bất kì.

Ta thấy ngay phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{MN}$ biến đường thẳng a thành đường thẳng b.



Câu 20. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Hợp của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $-\vec{u}$ là một phép đồng nhất.

B. Hợp của hai phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}+\vec{v}$.

C. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ là một phép dời hình không có điểm bất động.

D. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ luôn biến đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Giả sử ta có phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến điểm M thành điểm M_1 và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến điểm M_1 thành điểm M_2. Ta có: $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v}$.

Do đó $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_2} = \vec{u} + \vec{v}$.

Như thế phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ biến M thành M_2.

Vậy: Hợp của hai phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$.

+ Hợp của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và phép tịnh tiến theo vectơ $-\vec{u}$ theo kết quả trên là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \left(-\vec{u}\right) = \vec{0}$, đó là một phép đồng nhất.

+ Câu D sai vì: Nếu Δ là đường thẳng song song với giá của vectơ $\vec{u}$ thì ảnh của Δ là chính nó.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , ta xét phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = (a;b)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến này là:

A. $\begin{cases} x' = x + b \\ y' = y + a \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x' = y + a \\ y' = x + b \end{cases}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 22. Trong hệ tọa độ Oxy, cho phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x' = 2x;\ y' = -y + 2$. Phép biến hình f biến đường thẳng $\Delta : x + 3y + 5 = 0$ thành đường thẳng d có phương trình là:

A. $x + 2y - 4 = 0$ **B.** $x - 6y + 22 = 0$ **C.** $2x - 4y + 5 = 0$ **D.** $3x + 2y - 4 = 0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Từ giả thiết suy ra: $x = \dfrac{x'}{2}$ và $y = -y' + 2$.

Thế vào phương trình của Δ ta được: $\dfrac{x'}{2} + 3\left(-y' + 2\right) + 5 = 0 \Leftrightarrow x' - 6y' + 22 = 0$.

Vậy ảnh của Δ là đường thẳng có phương trình $x - 6y + 22 = 0$.

Câu 23. Trong hệ tọa độ Oxy, cho phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'=x+2y;\ y'=-2x+y+1$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC với $A(1;2), B(-2;3), C(4;1)$.

Phép biến hình f biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(5;1)$ **B.** $(-3;4)$ **C.** $(8;3)$ **D.** $(0;6)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trọng tâm của ΔABC là $G(1;2)$. Gọi G' là ảnh của G ta có: $G'(1+2.2;-2.1+2+1)=(5;1)$.

Câu 24. Trong hệ tọa độ Oxy, cho phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ sao cho $x'=x+2y;\ y'=-2x+y+1$. Xét hai điểm $A(-1;2)$ và $B(5;4)$. Phép biến hình f biến trung điểm I của đoạn thẳng AB thành điểm I' có tọa độ là:

A. $(8;0)$ **B.** $(-3;2)$ **C.** $(6;-8)$ **D.** $(-8;2)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trung điểm của đoạn thẳng AB là $I(2;3)$. Gọi I' là ảnh của I ta có: $I'=(2+2.3;-2.2+3+1)=(8;0)$.

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $4x-y+3=0$. Ảnh của đường thẳng qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=(2;-1)$ có phương trình là:

A. $4x-y+5=0$ **B.** $4x-y+10=0$ **C.** $4x-y-6=0$ **D.** $x-4y-6=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases}x'=x+2\\y'=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-2\\y=y'+1\end{cases}$

Thế vào phương trình của Δ ta được: $4(x'-2)-(y'+1)+3=0\Leftrightarrow 4x'-y'-6=0$.

Vậy ảnh của Δ là đường thẳng Δ' có phương trình: $4x-y-6=0$.

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, parabol (P) có phương trình $y=x^2$. Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=(3;2)$ biến (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=x^2-6x+11$ **B.** $y=x^2-4x+3$ **C.** $y=x^2+4x+6$ **D.** $y=x^2+2x-4$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

Thế vào phương trình của (P) ta được: $y' - 2 = (x' - 3)^2 \Leftrightarrow y' = x'^2 - 6x' + 11$.

Vậy ảnh của (P) là parabol (P') có phương trình: $y = x^2 - 6x + 11$.

Câu 27. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho T là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ với biểu thức tọa độ là: $x = x' + 3;\ y = y' - 5$. Tọa độ của vectơ tịnh tiến $\vec{u}$ là:

A. $(5;-3)$ **B.** $(3;5)$ **C.** $(-3;5)$ **D.** Một kết quả khác

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết ta có: $(x = x' + 3;\ y = y' - 5) \Leftrightarrow (x' = x - 3;\ y' = y + 5)$.

Suy ra: $\vec{u} = (-3;5)$.

Câu 28. Cho hai hình vuông H_1 và H_2 bằng nhau. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Luôn có thể thực hiện được một phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

B. Có duy nhất một phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

C. Có nhiều nhất hai phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

D. Có vô số phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Gọi I và J là tâm của H_1 và H_2.

+ Nếu H_1 và H_2 có các cạnh không song song thì không tồn tại phép tịnh tiến nào biến hình vuông này thành hình vuông kia.

+ Nếu H_1 và H_2 có các cạnh tương ứng song song thì các phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{IJ}$ và $\vec{JI}$ sẽ biến hình vuông này thành hình vuông kia.

+ Không thể có nhiều hơn hai phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

Câu 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai parabol: $(P): y = x^2$ và $(Q): y = x^2 + 2x + 2$. Để chứng minh có một phép tịnh tiến T biến (Q) thành (P), một học sinh lập luận qua ba bước như sau:

1. Gọi vectơ tịnh tiến là $\vec{u}=(a;b)$, áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến:

$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-a \\ y=y'-b \end{cases}$$

2. Thế vào phương trình của (Q) ta được:

$$y'-b=(x'-a)^2+2(x'-a)+2 \Leftrightarrow y'=x'^2+2(1-a)x'+a^2-2a+b+2$$

Suy ra ảnh của (Q) qua phép tịnh tiến T là parabol (R) $y=x^2+2(1-a)x+a^2-2a+b+2$

3. Buộc (R) trùng với (P) ta được hệ: $\begin{cases} 2(1-a)=0 \\ a^2-2a+b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

Vậy có duy nhất một phép tịnh tiến biến (Q) thành (P), đó là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(1;-1)$.

Hỏi lập luận trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Lập luận hoàn toàn đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, ta xét phép biến hình f biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ định bởi: $\begin{cases} x'=-y+a \\ y'=x+b \end{cases}$, trong đó a và b là các hằng số.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. f biến gốc tọa độ O thành điểm $A(a;b)$.

B. f biến điểm $I(b;-a)$ thành gốc tọa độ O.

C. f là một phép biến hình không có gì đặc sắc.

D. f là một phép dời hình.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta thấy ngay hai câu (A) và (B) đều đúng.

Gọi $M(\alpha;\beta)$ và $N(u;v)$ là hai điểm bất kì; $M'(\alpha';\beta')$ và $N'(u';v')$ là các ảnh của M, N qua phép biến hình f.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}\alpha' = -\beta + a \\ \beta' = \alpha + b\end{cases}$ và $\begin{cases}u' = -v + a \\ v' = u + b\end{cases}$

Do đó: $M'N'^2 = \left[\left(-v+a\right)-\left(-\beta+a\right)^2\right]+\left[\left(u+b\right)-\left(\alpha+b\right)^2\right]$

$$M'N'^2 = \left(\beta - v\right)^2 + \left(u-\alpha\right)^2 = \left(u-\alpha\right)^2 + \left(v-\beta\right)^2 = MN^2$$

Suy ra: $M'N' = MN$

Vậy f là một phép dời hình.

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $3x-4y+1=0$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải một đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $3x-4y+5=0$ **B.** $3x-4y-2=0$ **C.** $3x-4y+3=0$ **D.** $3x-4y-10=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải một đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{i} = \left(1;0\right)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $3\left(x-1\right)-4y+1=0 \Leftrightarrow 3x-4y-2=0$.

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-y+3=0$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên trái hai đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $2x-y+7=0$ **B.** $2x-y-2=0$ **C.** $2x-y+8=0$ **D.** $2x-y-6=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên trái 2 đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \left(-2;0\right)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $2\left(x+2\right)-y+3=0 \Leftrightarrow 2x-y+7=0$.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $y=5x-3$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía trên 3 đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $y=5x+4$ **B.** $y=5x-12$ **C.** $y=5x$ **D.** $y=5x-7$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía trên 3 đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(0;3)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $y-3=5x-3\Leftrightarrow y=5x$.

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $y=-4x+3$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía dưới 4 đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $y=-4x+14$ **B.** $y=-4x+1$ **C.** $y=-4x-2$ **D.** $y=-4x-1$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía dưới 4 đơn vị, tức là thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(0;-4)$. Do đó đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình: $y+4=-4x+3\Leftrightarrow y=-4x-1$.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $5x-y+1=0$. Thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về phía trái 2 đơn vị, sau đó tiếp tục thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía trên 3 đơn vị, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $5x-y+14=0$ **B.** $5x-y-7=0$ **C.** $5x-y+5=0$ **D.** $5x-y-12=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Từ giả thiết suy ra Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(-2;3)$.

Do đó đường thẳng Δ' có phương trình là: $5(x+2)-(y-3)+1=0\Leftrightarrow 5x-y+14=0$.

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $y=-3x+2$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{u}=(-1;2)$ và $\vec{v}=(3;1)$, đường thẳng Δ biến thành đường thẳng d có phương trình là:

A. $y=-3x+1$ **B.** $y=-3x-5$ **C.** $y=-3x+9$ **D.** $y=-3x+15$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra d là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$.

Ta có: $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}=(-1+3;2+1)\Rightarrow\vec{a}=(2;3)$

Do đó đường thẳng có phương trình là: $y-3=-3(x-2)\Leftrightarrow y=-3x+9$.

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = x^2 - 2x + 3$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (-1;2)$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y = x^2 + 4$ **B.** $y = x^2 + 4 - 3$ **C.** $y = x^2 + 2x + 2$ **D.** $y = x^2 - 4x + 5$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến, ta có: $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

Thế vào phương trình của (P) ta được: $y' - 2 = (x' + 1)^2 - 2(x' + 1) + 3 \Leftrightarrow y' = x'^2 + 4$.

Vậy phương trình của (P') là: $y = x^2 + 4$.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = -2x^2 + x - 1$. Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải 2 đơn vị, biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y = -2x^2 + 9x - 11$ **B.** $y = -2x^2 - x + 3$ **C.** $y = -2x^2 + 3x + 2$ **D.** $y = -2x^2 - 5x + 6$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải 2 đơn vị, tức là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (2;0)$. Do đó phương trình của (P') là: $y = -2(x - 2)^2 + (x - 2) - 1 \Leftrightarrow y = -2x^2 + 9x - 11$.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = -x^2 + 2x + 3$. Phép tịnh tiến theo phương của trục tung về dưới 3 đơn vị, biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y = -x^2 + 2x$ **B.** $y = -x^2 + 5x - 2$ **C.** $y = -x^2 - 3x + 4$ **D.** $y = -x^2 + 7x + 5$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến theo phương của trục tung về bên dưới 3 đơn vị, tức là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (0;-3)$.

Do đó phương trình của (P') là: $y + 3 = -x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow y = -x^2 + 2x$.

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$. Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về phía trái 3 đơn vị, sau đó tiếp tục thực hiện phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía dưới 1 đơn vị. Ảnh của (P) là một parabol (Q) có phương trình là:

A. $y = x^2 + 4x - 3$ **B.** $y = x^2 + 6x + 8$ **C.** $y = x^2 - 2x + 3$ **D.** $y = x^2 - 8x + 5$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Từ giả thiết suy ra: (Q) là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (-3;-1)$.

Do đó phương trình của (P') là: $y + 1 = (x+3)^2 \Leftrightarrow y = x^2 + 6x + 8$.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = x^2 - x + 1$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{u} = (1;-2)$ và $\vec{v} = (2;3)$, parabol (P) biến thành parabol (Q) có phương trình là:

A. $y = x^2 - 7x + 14$ **B.** $y = x^2 + 3x + 2$ **C.** $y = x^2 + 5x + 2$ **D.** $y = x^2 - 9x + 5$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Từ giả thiết ta suy ra, (Q) là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$.

Ta có: $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} = (3;1)$.

Do đó phương trình của (Q) là: $y - 1 = (x-3)^2 - (x-3) + 1 \Leftrightarrow y = x^2 - 7x + 14$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai parabol (P) và (Q) có phương trình lần lượt là $y = x^2$ và $y = x^2 - 2x + 3$. Chọn câu **sai** trong các câu sau:

A. Không thể thực hiện được một phép tịnh tiến nào biến parabol này thành parabol kia.

B. Có duy nhất một phép tịnh tiến biến parabol này thành parabol kia.

C. Có đúng hai phép tịnh tiến biến parabol này thành parabol kia.

D. Có vô số phép tịnh tiến biến parabol này thành parabol kia.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Theo giả thiết (P): $y = x^2$ và (Q): $y = x^2 - 2x + 3$.

Phương trình của (Q) có thể viết lại thành: $y = (x-1)^2 + 2$

Parabol (P) có đỉnh là gốc tọa độ O và parabol (Q) có đỉnh là $I(1;2)$. Như thế, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ biến (P) thành (Q) và phép tịnh tiến theo vectơ $-\vec{u} = \overrightarrow{IO}$ biến (Q) thành (P).

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-2x-8=0$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(3;-1)$, biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-8x+2y+8=0$ **B.** $x^2+y^2+4x-y-5=0$

C. $x^2+y^2-4x+4y-3=0$ **D.** $x^2+y^2+6x-4y+2=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến: $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-3 \\ y=y'+1 \end{cases}$

Thế vào phương trình của (T) ta có: $(x'-3)^2+(y'+1)^2-2(x'-3)-8=0 \Leftrightarrow x'^2+y'^2-8x'+2y'+8=0$.

Vậy phương trình của (T') là: $x^2+y^2-8x+2y+8=0$.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-4x-2y=0$. Gọi I là tâm của (T). Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(5;-1)$ biến điểm I thành điểm I' có tọa độ là:

A. $(-7;2)$ **B.** $(7;0)$ **C.** $(3;-2)$ **D.** $(5;3)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phương trình đường tròn (T) viết lại: $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

Như thế (T) có tâm $I(2;1)$.

Suy ra, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(5;-1)$ biến điểm I thành điểm $I'(7;0)$.

Câu 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (T_1) và (T_2) bằng nhau có phương trình lần lượt là $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ và $(x+3)^2+(y-4)^2=16$. Giả sử f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến (T_1) thành (T_2), khi đó tọa độ của $\vec{u}$ là:

A. $(-4;6)$ **B.** $(4;-6)$ **C.** $(3;-5)$ **D.** $(8;-10)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Hai đường tròn (T_1) và (T_2) có tâm lần lượt là: $I_1(1;-2)$ và $I_2(-3;4)$.

Vậy phép tịnh tiến T biến (T_1) thành (T_2) là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{I_1I_2} = (-4;6)$.

Câu 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2 + y^2 - x - 2y - 3 = 0$. Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải 4 đơn vị, biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 - 9x - 2y + 17 = 0$ **B.** $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

C. $x^2 + y^2 + 5x - 4y - 5 = 0$ **D.** $x^2 + y^2 + 7x - 2y + 1 = 0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép tịnh tiến theo phương của trục hoành về bên phải 4 đơn vị, tức là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (4;0)$. Phép tịnh tiến này biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình: $(x-4)^2 + y^2 - (x-4) - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 9x - 2y + 17 = 0$.

Câu 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2 + y^2 - x - 2y - 3 = 0$. Phép tịnh tiến theo phương của trục tung về dưới 2 đơn vị, biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$ **B.** $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 2 = 0$

C. $x^2 + y^2 + x - 4y - 5 = 0$ **D.** $x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Phép tịnh tiến theo phương của trục tung về phía dưới 2 đơn vị, tức là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (0;-2)$. Phép tịnh tiến này biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình: $x^2 + (y+2)^2 + 2x - 4(y+2) - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0$.

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 5 = 0$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{u} = (1;-2)$ và $\vec{v} = (1;-1)$. Đường tròn (T) biến thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 - 18 = 0$ **B.** $x^2 + y^2 - x + 8y + 2 = 0$

C. $x^2 + y^2 + x - 6y - 5 = 0$ **D.** $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{u}=(1;-2)$ và $\vec{v}=(1;-1)$ tức là thực hiện theo phép tịnh tiến vectơ $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$.

Ta có: $\vec{a}=\vec{u}+\vec{v}=(1+1;-2-1)=(2;-3)$.

Phép tịnh tiến này biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình: $(x-2)^2+(y+3)^2+4(x-2)-6(y+3)-5=0\Leftrightarrow x^2+y^2-18=0$.

Câu 49. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai điểm A, B phân biệt. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Khi đó tập hợp các điểm N sao cho $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ là tập nào sau đây?

A. Tập $\varnothing$.

B. Đường tròn tâm A bán kính R.

C. Đường tròn tâm B bán kính R.

D. Đường tròn tâm I bán kính R với $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải

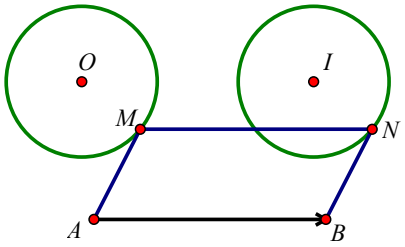
ĐÁP ÁN D.

Từ giả thiết ta có:

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$

Như thế phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ biến điểm M thành điểm N.

Vậy khi M thay đổi trên đường tròn $(O;R)$ thì quỹ tích của N là đường tròn $(I;R)$ với $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{AB}$.



Câu 50. Cho đoạn thẳng AB và đường thẳng Δ không song song với đường thẳng AB. Một điểm M thay đổi trên Δ. Khi đó tập hợp các điểm N sao cho $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}$ là tập nào sau đây?

A. Tập $\varnothing$.

B. Đường thẳng qua A song song với Δ.

C. Đường thẳng qua B song song với Δ.

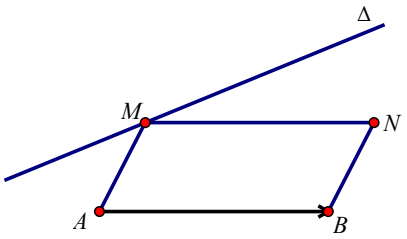
D. Đường thẳng ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Từ giả thiết ta có:

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$



Như thế phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ biến điểm M thành điểm N.

Vậy khi M thay đổi trên đường thẳng Δ thì quỹ tích của N là đường thẳng Δ' ảnh của Δ qua phép tịnh tiến trên.

Câu 51. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu có hai đoạn thẳng AB và CD bằng nhau thi luôn tồn tại một phép tịnh tiến biến đoạn thẳng này thành đoạn thẳng kia.

B. Nếu có hai tam giác đều ABC và DEF bằng nhau thì luôn tồn tại một phép tịnh tiến biến tam giác này thành tam giác kia.

C. Nếu có hai hình vuông ABCD và MNPQ bằng nhau thì luôn tồn tại một phép tịnh tiến biến hình vuông này thành hình vuông kia.

D. Nếu có hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ bằng nhau thì luôn tồn tại một phép tịnh tiến biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

+ Nếu hai đoạn thẳng AB và CD bằng nhau và nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì mới thực hiện được một phép tịnh tiến biến đoạn thẳng này thành đoạn thẳng kia.

+ Nếu có hai tam giác đều ABC và DEF bằng nhau và có các cặp cạnh nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì mới thực hiện được phép tịnh tiến biến tam giác này thành tam giác kia.

+ Trường hợp hai hình vuông bằng nhau cũng giống như hai tam giác bằng nhau.

+ Với hai đường tròn bằng nhau $(O;R)$ và $(O';R)$ ta luôn thực hiện được hai phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$ hoặc vectơ $\overrightarrow{O'O}$ biến đường tròn này thành đường tròn kia.

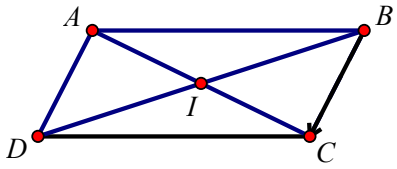
Câu 52. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD với $A(1;4)$, $B(-2;1)$, $C(7;-1)$. Nếu T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD thì vectơ $\vec{u}$ có tọa độ là:

A. $(-9;3)$ **B.** $(5;-4)$ **C.** $(9;-2)$ **D.** $(8;5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Dễ thấy phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{BC}=(9;-2)$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD.



Câu 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành ABCD với $A(1;-4), B(8;2)$ và giao điểm của hai đường chéo AC và BD là $I(3;-2)$. Nếu T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD thì vectơ $\vec{u}$ có tọa độ là:

A. $(3;12)$ **B.** $(5;3)$ **C.** $(-3;-2)$ **D.** $(7;-5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Do I là trung điểm của AC nên ta có: $\begin{cases}x_C=2x_I-x_A=6-1=5\\ y_C=2y_I-y_A=-4+4=0\end{cases}\Rightarrow C(5;0)$

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{BC}=(-3;-2)$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD.

Câu 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng song song a và b có phương trình lần lượt là $2x-y+4=0$ và $2x-y-1=0$. Nếu phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=(m;-3)$ biến đường thẳng a thành đường thẳng b thì giá trị của m bằng:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trên đường thẳng a ta lấy điểm $A(0;4)$. Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=(m;-3)$ biến điểm A thành điểm A' định bởi: $\begin{cases}x'=0+m\\ y'=4+(-3)\end{cases}\Rightarrow A'(m;1)$.

Vì T biến a thành b nên: $A'\in b\Leftrightarrow 2m-2=0\Leftrightarrow m=1$.

BÀI 3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Định nghĩa

1. – Cho đường thẳng d. Phép đối xứng qua đường thẳng d, kí hiệu là $Đ_d$, là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua d (Khi đó d là đường trung trực của đoạn MM').

- Phép đối xứng qua đường thẳng còn gọi đơn giản là phép đối xứng trục.
- Đường thẳng d gọi là trục của phép đối xứng, hay đơn giản là trục đối xứng.
- Gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên d. Ta có: $Đ_d(M)=M' \Rightarrow \overrightarrow{M_0M'}=-\overrightarrow{M_0M}$.

2. Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình (H) nếu $Đ_d$ biến (H) thành chính nó. Khi đó (H) gọi là hình có trục đối xứng.

II. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng Oxy, gọi $M(x;y)$ và $M'=Đ_d(M)=(x';y')$.

- Nếu d là trục Ox thì: $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$.
- Nếu d là trục Oy thì: $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$.

III. Tính chất

Phép đối xứng trục:

1. Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
2. Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm tương ứng.
3. Biến một đường thẳng thành đường thẳng.
4. Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
5. Biến một đường tròn thành đường tròn có bán kính bằng bán kính của đường tròn đã cho.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua phép đối xứng trục

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa, tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $M(-4;3)$ và đường thẳng d có phương trình: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \end{cases}$. Tìm ảnh của M và d qua phép đối xứng trục có trục đối xứng là d_1 là đường thẳng $2x+y-1=0$.

Giải

- Gọi $d' = Đ_{d_1}(d)$. Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (2;1)$, vectơ chỉ phương của d_1 là $\overrightarrow{u_1} = (-1;2)$.

Ta có: $\vec{u}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Rightarrow d \perp d_1$.

Vậy: $d' \perp d_1$ và d' trùng với d.

- Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với $d_1 : 2x + y - 1 = 0$, thì $\Delta : x - 2y + c = 0$.

Cho Δ qua $M(-4;3)$, ta có: $x = 10$. Vậy $\Delta : x - 2y + 10 = 0$.

Gọi I là giao điểm của Δ và d_1 thì tọa độ của I là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y + 10 = 0 \end{cases}$.

Suy ra $I\left(-\frac{8}{5};\frac{21}{5}\right)$. Mà I là trung điểm của MM' nên $M'\left(\frac{4}{5};\frac{27}{5}\right)$.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và đường elip $(E): x^2 + 4y^2 = 1$.

a. Tìm ảnh của (C) qua $Đ_d$ với $d : x + y = 0$.

b. Tìm ảnh của (E) qua $Đ_{Oy}$.

Giải

a. Ảnh của (C) qua $Đ_d$: Gọi Δ là đường thẳng qua $I(-1;2)$ và vuông góc với $d : x + y = 0$, ta có $\Delta : x - y + 3 = 0$.

Tọa độ giao điểm H của Δ và d là: $H\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Gọi $I' = Đ_d(I)$, ta có: $\begin{cases} x' = 2x_H - x \\ y' = 2y_H - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Do đó: $I'(-2;1)$.

Mặt khác, (C') có bán kính $R' = 3$ nên $(C'): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

b. Ảnh (E') của (E) qua $Đ_{Oy}$: Biểu thức tọa độ của $Đ_{Oy}$ là: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$.

Do đó, $(E'): (-x')^2 + 4y'^2 = 1$ hay $x^2 + 4y^2 = 1$.

Cách khác: (E) có trục đối xứng là Oy, nên (E) không đổi qua $Đ_{Oy}$. Do đó $(E'): x^2 + 4y^2 = 1$.

Dạng 2. Tìm trục đối xứng của một hình

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa trục đối xứng của một hình, ta thực hiện các bước sau:

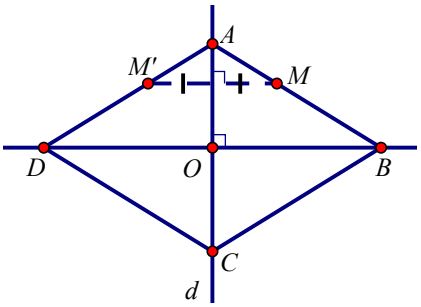
Bước 1. Chỉ ra một đường thẳng d là trục đối xứng của hình (H).

Bước 2. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc hình (H), ảnh M' của M qua $Đ_d$ cũng thuộc (H).

Ví dụ 1: Tìm các trục đối xứng của hình thoi.

Giải

Cho hình thoi ABCD. Đặt ABCD là (H) và đường thẳng AC là d, ta có:



Với mọi điểm M thuộc cạnh AB thì $M \in (H)$.

Vì d là trung trực của đoạn thẳng BD nên ảnh M' của M qua $Đ_d$ thuộc cạnh AD. Do đó, $M' \in (H)$.

Tương tự,, nếu $M \in BC \Rightarrow M' \in DC \Rightarrow M' \in (H)$.

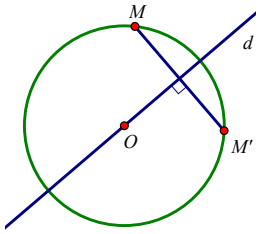
Tóm lại với mọi M thuộc hình thoi ABCD thì ảnh M' của M qua $Đ_{AC}$ thuộc hình thoi ABCD. Vậy, AC là trục đối xứng của hình thoi ABCD.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh BD là trục đối xứng của hình thoi ABCD.

Tóm lại, hình thoi có hai trục đối xứng, đó là hai đường chéo của nó.

Ví dụ 2. Tìm các trục đối xứng của một hình tròn.

Giải



Gọi d là một đường thẳng đi qua tâm đường tròn. Với mọi điểm M thuộc đường tròn ta vẽ dây $MM' \perp d$ thì M' là ảnh của M qua $Đ_d$. Suy ra, d là trục đối xứng của đường tròn.

Dạng 3. Tìm tập hợp điểm

Phương pháp giải:

Bước 1. Chọn $Đ_d : M \mapsto M'$.

Bước 2. Xác định tập hợp điểm M, suy ra tập hợp điểm M'.

Ví dụ: Cho hình vuông ABCD có A và C cố định, B di động trên một đường tròn (C) cho trước. Tìm tập hợp những điểm D.

Giải

Ta có: $Đ_{AC} : B \mapsto D$. Mà $B \in (C)$ nên $D \in (C')$, ảnh của (C) qua $Đ_{AC}$.

Vậy tập hợp những điểm D là đường tròn (C'), ảnh của (C) qua $Đ_{AC}$.

Dạng 4. Dùng phép đối xứng trục để dựng hình

Phương pháp giải:

Bước 1. Xác định $Đ_d : M \mapsto M'$.

Bước 2. Xác định M, suy ra M’ (hoặc ngược lại) bằng $Đ_d$.

Ví dụ: Trong mặt phẳng cho đường thẳng d cố định và hai điểm A, B cố định, phân biệt nằm hai bên đường thẳng d. Hãy dựng điểm M trên d sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

Giải

Gọi $B' = Đ_d(B)$. Với điểm M tùy ý trên d, ta có: $|MA - MB| = |MA - MB'| \le AB'$.

Do đó: $|MA - MB|_{max} \Leftrightarrow |MA - MB| = AB' \Leftrightarrow$ A, M, B' thẳng hàng.

Cách dựng: - Dựng $B' = Đ_d(B)$.

- Giao điểm của d và AB’ là điểm phải dựng.

Bài toán có một nghiệm duy nhất khi AB’ không song song với d.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến một đường thẳng d cho trước thành chính nó?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trục của phép đối xứng là d hoặc bất kì đường thẳng nào vuông góc với d.

Câu 2. Cho hai đường thẳng song song d và d’. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trục đối xứng là bất kì đường thẳng nào vuông góc với d và d’.

Câu 3. Cho hai đường thẳng song song d và d’. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng d thành đường thẳng d’?

A. Không có phép nào **B.** Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép **D.** Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Trục đối xứng là đường thẳng song song và cách đều d và d'.

Câu 4. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép

D. Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng d và d'.

Câu 5. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c vuông góc với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép

D. Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép đối xứng qua đường thẳng d.

Câu 6. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c vuông góc với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến a thành b và biến c thành chính nó?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép

D. Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Trục đối xứng là đường thẳng song song, cách đều d và d'.

Câu 7. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c không vuông góc với chúng cũng không song song với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép

D. Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 8. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c không vuông góc và cũng không song song với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến a thành b và biến c thành chính nó?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép

D. Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 9. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a \parallel a', b \parallel b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến các đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'?

A. Không có phép nào

B. Có một phép duy nhất

C. Chỉ có hai phép

D. Có vô số phép

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Chỉ có một phép đối xứng trục biến a thành a', nhưng phép đó không biến b thành b'.

Câu 10. Trong các hình dưới đây, hình nào có một và chỉ một trục đối xứng?

A. Đường elip.

B. Đường tròn.

C. Đường hypebol.

D. Đường parabol.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 11. Trong các hình dưới đây, hình nào có ba trục đối xứng?

A. Đoạn thẳng.

B. Đường tròn.

C. Tam giác đều.

D. Hình vuông.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 12. Trong các hình dưới đây, hình nào có bốn trục đối xứng?

A. Hình bình hành.

B. Hình chữ nhật.

C. Hình thoi.

D. Hình vuông.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 13. Trong các hình dưới đây, hình nào **không** có trục đối xứng?

A. Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau.

B. Hình gồm một đường tròn và một đoạn thẳng tùy ý.

C. Hình gồm một đường tròn và một đường thẳng tùy ý.

D. Hình gồm một tam giác cân và đường tròn nội tiếp.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 14. Trong các hình dưới đây hình nào **không** có vô số trục đối xứng?

A. Đường tròn.

B. Đường thẳng.

C. Hình gồm hai đường thẳng song song.

D. Hình đa giác đều n cạnh.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Hình đa giác đều n cạnh có n trục đối xứng.

Câu 15. Trong các hình dưới đây hình nào **không** có trục đối xứng?

A. Đồ thị của hàm số $y=\sin x$.

B. Đồ thị của hàm số $y=\cos x$.

C. Đồ thị của hàm số $y=\tan x$.

D. Đồ thị của hàm số $y=|x|$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng trục biến điểm $A(2;1)$ thành $A'(2;5)$ có trục đối xứng là:

A. Đường thẳng $y=3$.

B. Đường thẳng $x=3$.

C. Đường thẳng $y=6$.

D. Đường thẳng $x+y-3=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trục đối xứng là trung trực của AA'.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $M(1;-4)$ thành điểm $M'(-4;1)$ thì nó có trục đối xứng là:

A. Đường thẳng $x+y=0$.

B. Đường thẳng $x-y=0$.

C. Đường thẳng $x+y-1=0$.

D. Đường thẳng $x-y-1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Trục đối xứng là trung trực của MM'.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $M(2;3)$ thành điểm $M'(3;2)$ thì nó biến điểm $C(1;-6)$ thành điểm:

A. $C'(6;1)$.

B. $C'(1;6)$.

C. $C'(-6;-1)$.

D. $C'(-6;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trục của phép đối xứng là đường thẳng $y=x$. Phép đối xứng đó biến điểm $M(a;b)$ thành điểm $M'(b;a)$.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $M(3;1)$ thành điểm $M'(-1;-3)$ thì nó biến điểm $N(-3;-4)$ thành điểm:

A. $N'(3;4)$.

B. $N'(3;-4)$.

C. $N'(4;-3)$.

D. $N'(4;3)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trục của phép đối xứng là đường thẳng $y=-x$. Phép đối xứng đó biến điểm $M(a;b)$ thành điểm $M'(-b;-a)$.

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng trục biến điểm $A(0;1)$ thành điểm $A'(-1;0)$ thì nó biến điểm $B(-5;5)$ thành điểm:

A. $B(-5;5)$.

B. $B'(5;5)$.

C. $B'(5;-5)$.

D. $B'(-1;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng qua đường thẳng $x+y=0$ biến đường thẳng $4x-5y+1=0$ thành đường thẳng có phương trình:

A. $-4x+5y+1=0$.

B. $5x-4y+1=0$.

C. $5x+4y+1=0$.

D. $4x+5y+1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua đường thẳng $x+y=0$ là $x'=-y$ và $y'=-x$. Bởi vậy từ phương trình $4x-5y+1=0$ ta suy ra $-4y'+5x'+1=0$.

Vậy đường thẳng $4x-5y+1=0$ biến thành đường thẳng $5x-4y+1=0$.

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng qua đường thẳng $x-y=0$ biến đường tròn có phương trình $x^2+y^2-2x-1=0$ thành đường tròn có phương trình:

A. $x^2+y^2-2y-1=0$.

B. $x^2+y^2+2x-1=0$.

C. $x^2+y^2+2y-1=0$.

D. $x^2+y^2-2x-1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng đã cho là $x'=y$ và $y'=x$. Bởi vậy, từ phương trình $x^2+y^2-2x-1=0$ ta suy ra $y'^2+x'^2-2y'-1=0$, đó là tập hợp những điểm $(x';y')$ thỏa mãn phương trình đường tròn $x^2+y^2-2y-1=0$.

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+3y-1=0$. Phép đối xứng qua trục Ox biến đường tròn đó thành đường tròn (C') có phương trình:

A. $x^2+y^2-2x+3y-1=0$.

B. $x^2+y^2-2x-3y-1=0$.

C. $x^2+y^2+2x+3y-1=0$.

D. $x^2+y^2-2x+3y+1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Chỉ việc thay y bằng $-y$ trong phương trình đường tròn đã cho.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+3y-1=0$. Phép đối xứng qua trục Oy biến đường tròn đó thành đường tròn (C') có phương trình:

A. $x^2+y^2-2x+3y-1=0$.

B. $x^2+y^2-2x-3y-1=0$.

C. $x^2+y^2+2x+3y-1=0$.

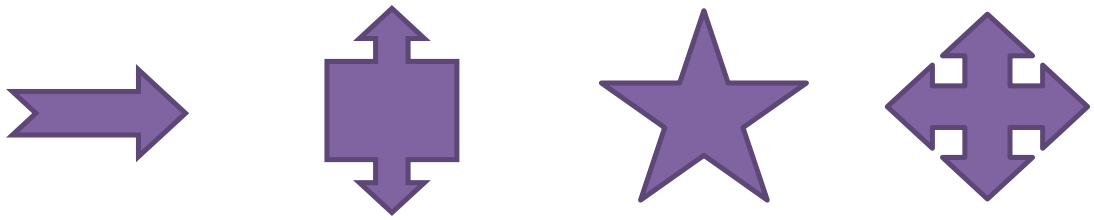
D. $x^2+y^2-2x+3y+1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Chỉ việc thay x bằng $-x$ trong phương trình đường tròn đã cho.

Câu 25. Quan sát các hình dưới đây, hãy cho biết kết luận nào là đúng?



H1 H2 H3 H4

A. Hình H_1 không có trục đối xứng, hình H_2 có 1 trục đối xứng, hình H_3 có 5 trục đối xứng và hình H_4 có 2 trục đối xứng.

B. Hình H_1 có 1 trục đối xứng, hình H_2 có 2 trục đối xứng, hình H_3 có 5 trục đối xứng và hình H_4 có 2 trục đối xứng.

C. Hình H_1 có 1 trục đối xứng, hình H_2 có 2 trục đối xứng, hình H_3 có 5 trục đối xứng và hình H_4 có 4 trục đối xứng.

D. Hình H_1 không có trục đối xứng, hình H_2 có 2 trục đối xứng, hình H_3 có 5 trục đối xứng và hình H_4 có 4 trục đối xứng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 26. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

B. Phép đối xứng trục có vô số điểm bất động.

C. Một tam giác nào đó có thể có đúng hai trục đối xứng.

D. Một hình có thể không có trục đối xứng nào, có thể có một hay nhiều trục đối xứng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta thấy ngay các câu A, B, D đều đúng.

Câu C sai vì: Một tam giác thường không có trục đối xứng nào, một tam giác cân (không đều) chỉ có 1 trục đối xứng, một tam giác đều có 3 trục đối xứng.

Câu 27. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ảnh của đường thẳng d là đường thẳng d' song song với d.

B. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ảnh của tam giác đều aBC có tâm $O \in a$ (tâm đường tròn ngoại tiếp) là chính nó.

C. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ảnh của một đường tròn là chính nó.

D. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ảnh của đường thẳng d vuông góc với a là chính nó.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

- Qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ảnh của đường thẳng d là đường thẳng d' song song với d, điều này chỉ đúng khi $d \parallel a$.

- Câu B chỉ đúng khi a đi qua đường cao của tam giác đều ABC.

- Câu C chỉ đúng khi a đi qua tâm của đường tròn.

- Câu D đúng. Vì nếu lấy M là một điểm bất kì thuộc d thì ảnh của M qua phép đối xứng $Đ_a$ là điểm $M' \in d$. Vậy ảnh của d là chính nó.

Câu 28. Ta xem các mẫu tự in **I, J, H, L, P** như các hình. Những hình nào có đúng hai trục đối xứng?

A. I, J **B. I, H** **C. J, L** **D. H, P**

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 29. Chọn câu **sai** trong các câu sau:

A. Đường tròn có vô số trục đối xứng.

B. Đa giác đều n cạnh có đúng n trục đối xứng.

C. Hình thoi có hai trục đối xứng.

D. Một tam giác nào đó có thể có đúng hai trục xứng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

- Ta thấy ngay các câu A, B, C đều đúng.

- Theo câu 2, không có tam giác nào có hai trục đối xứng.

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-3y-6=0$. Đường thẳng đối xứng của Δ qua trục hoành có phương trình là:

A. $2x+3y+6=0$. **B.** $2x+3y-6=0$. **C.** $4x-y-6=0$. **D.** $3x+2y-6=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(x;-y)$ thì đối xứng với nhau qua trục hoành. Do đó đường thẳng đối xứng của $\Delta: 2x-3y+6=0$ qua trục hoành có phương trình là: $2x+3y+6=0$.

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $5x+y-3=0$. Đường thẳng đối xứng của Δ qua trục tung có phương trình là:

A. $5x+y+3=0$. **B.** $5x-y+3=0$. **C.** $x+5y+3=0$. **D.** $x-5y+3=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-x;y)$ thì đối xứng với nhau qua trục tung. Do đó đường thẳng đối xứng của $\Delta: 5x+y-3=0$ qua trục tung có phương trình là: $-5x+y-3=0 \Leftrightarrow 5x-y+3=0$

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x-y+1=0$ và điểm $A(3;2)$. Trong các điểm dưới đây, điểm nào là điểm đối xứng của A qua đường thẳng Δ?

A. $M(-1;4)$. **B.** $N(-2;5)$. **C.** $P(6;-3)$. **D.** $Q(1;6)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Đường thẳng $\Delta: 2x-y+1=0$ có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;2)$. Gọi d là đường thẳng qua $A(3;2)$ vuông góc với Δ thì $\vec{a}$ là vectơ pháp tuyến của d. Phương trình của d là: $1(x-3)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-7=0$.

Tọa độ của điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ nghiệm đúng hệ phương trình: $\begin{cases}2x-y+1=0\\x+2y-7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=3\end{cases} \Rightarrow H(1;3)$.

Gọi B là điểm đối xứng của A qua Δ, thì H là trung điểm của AB nên: $\begin{cases}x_B=2x_H-x_A=-1\\y_B=2y_H-y_A=4\end{cases} \Rightarrow B(-1;4)$.

Chú ý: Vì đây là bài tập trắc nghiệm, nên để chọn câu đúng cho nhanh ta chỉ cần kiểm tra các lựa chọn. Ví dụ nếu chọn $M(-1;4)$ ta thấy ngay trung điểm của AM là $I(1;3)\in\Delta$, sau đó chỉ cần kiểm tra vectơ $\overrightarrow{AM}$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;2)$ của Δ.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2-2x+3$. Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=x^2-2x-3$. **B.** $y=x^2+2x-3$. **C.** $y=-x^2+2x-3$. **D.** $y=-x^2+4x-3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Lí luận như câu 2 phương trình của (P') là: $y=-x^2+2x-3$.

Chú ý: Có thể dùng kiến thức sau: đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=-f(x)$ thì đối xứng với nhau qua trục hoành.

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=2x^2+x+5$. Phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=-2x^2+x-5$. **B.** $y=2x^2-x+5$. **C.** $y=-2x^2-x-5$. **D.** $y=-2x^2+x-5$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-x;y)$ thì đối xứng với nhau qua trục tung. Do đó phương trình của (P') là: $y=2(-x)^2+(-x)+5\Leftrightarrow y=2x^2-x+5$.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-2x+y-5=0$. Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-2x-y-5=0$. **B.** $x^2+y^2+2x+y-5=0$.

C. $x^2+y^2+2x-y-5=0$. **D.** $x^2+y^2-x-2y+5=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay y bởi $-y$ ta được phương trình của đường tròn (T') là: $x^2+y^2-2x-y-5=0$.

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (T) có phương trình $(x-2)^2+(y+3)^2=16$. Phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=16$.

B. $(x+2)^2+(y+3)^2=16$.

C. $(x+2)^2+(y-3)^2=16$.

D. $(x-2)^2+(y-3)^2=16$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Thay x bởi $-x$ ta được phương trình của đường tròn (T') là:

$(-x-2)^2+(y+3)^2=16 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=16$

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm $A(4;3)$ thành điểm A' có tọa độ là:

A. $(-4;-3)$.

B. $(4;-3)$.

C. $(-4;3)$.

D. $(3;4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta có thể chứng minh được rằng: hai điểm $M(x;y)$ và $M'(y;x)$ thì đối xứng nhau qua a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ Oxy.

Suy ra: $A'(3;4)$.

Ghi chú: Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là đường thẳng có phương trình $y=x$.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm $P(5;-2)$ thành điểm P' có tọa độ là:

A. $(5;2)$.

B. $(-5;2)$.

C. $(2;-5)$.

D. $(-2;5)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có thể chứng minh được rằng: Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-y;-x)$ thì đối xứng qua b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai của hệ tọa độ Oxy.

Suy ra: $P'(2;-5)$.

Ghi chú: Đường phân giác của góc phần tư thứ hai là đường thẳng có phương trình $y=-x$.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Ta xét đường tròn (T) có phương trình $(x-2)^2+(y+3)^2=9$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$.

B. $(x+2)^2+(y-3)^2=9$.

C. $(x-3)^2+(y+2)^2=9$.

D. $(x+3)^2+(y+2)^2=9$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay x bởi y và y bởi x ta được phương trình của (T') là:

$(y-2)^2+(x+3)^2=9\Leftrightarrow(x+3)^2+(y-2)^2=9$.

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Ta xét đường thẳng Δ có phương trình $3x-4y+5=0$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $4x-3y-5=0$.

B. $3x+4y-5=0$.

C. $4x-3y+5=0$.

D. $3x+4y+5=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay x bởi y và y bởi x ta được phương trình của Δ' là: $3y-4x+5=0\Leftrightarrow 4x-3y-5=0$.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai. Ta xét đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2-6x+4y-2=0$. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2+6x-4y-2=0$.

B. $x^2+y^2+4x-6y-2=0$.

C. $x^2+y^2-6x+2y+2=0$.

D. $x^2+y^2-4x+6y-2=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Thay x bởi $-y$ và y bởi $-x$ ta được phương trìn của (T') là:

$(-y)^2+(-x)^2-6(-y)+4(-x)-2=0\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+6y-2=0$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi b là đường phân giác của góc phần tư thứ hai. Ta xét đường thẳng Δ có phương trình $y=5x+3$. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$. **B.** $y=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$. **C.** $y=-5x+3$. **D.** $y=5x-3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay x bởi $-y$ và y bởi $-x$ ta được phương trình của Δ' là: $(-x)=5(-y)+3\Leftrightarrow y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi a là đường thẳng có phương trình $x+2=0$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm $M(4;-3)$ thành điểm M' có tọa độ là:

A. $(-6;-3)$. **B.** $(-8;-3)$. **C.** $(8;3)$. **D.** $(6;3)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Trước hết ta nhận thấy rằng: hai điểm $M(x;y)$ và $M'(2x_0-x;y)$ thì đối xứng qua đường thẳng có phương trình $x=x_0$.

Phương trình của a viết lại: $x=-2\Leftrightarrow x_0=-2$.

Do đó, với điểm $M(4;-3)$ thì điểm M' đối xứng của M qua a có hoành độ là $x'=2(-2)-4=-8$.

Suy ra: $M'(-8;-3)$.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi b là đường thẳng có phương trình $y-3=0$. Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm $P(-2;5)$ thành điểm P' có tọa độ là:

A. $(-2;-5)$. **B.** $(2;-5)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Trước hết ta nhận thấy rằng: hai điểm $M(x;y)$ và $M'(x;2y_0-y)$ thì đối xứng qua đường thẳng có phương trình $y=y_0$.

Phương trình của b viết lại: $y=3$.

Do đó, với điểm $P(-2;5)$ thì điểm M' đối xứng của M qua b có tung độ là: $y'=2.3-5=1$.

Suy ra: $M'(-2;1)$.

Câu 45. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $x=x_1$ và $x=x_2\ (x_1\neq x_2)$; $M(x;y)$ là một điểm bất kì. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm M

thành điểm M' và phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm M' thành điểm M''. Như thế phép biến hình biến điểm M thành điểm M'' là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là:

A. $\left(2\left(x_1+x_2\right);0\right)$. **B.** $\left(2\left(x_2-x_1\right);0\right)$. **C.** $\left(\left(x_1+x_2\right);0\right)$. **D.** $\left(\left(x_2-x_1\right);0\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Gọi $I\left(x_1;0\right)$ và $J\left(x_2;0\right)$ là các giao điểm của hai đường thẳng a và b với trục hoành.

Như thế phép biến hình biến điểm M thành điểm M'' là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=2\vec{IJ}$.

Ta có: $\vec{u}=2\vec{IJ}=\left(2\left(x_2-x_1\right);0\right)$.

Câu 46. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $y=y_1$ và $y=y_2\ \left(y_1\neq y_2\right)$; $M\left(x;y\right)$ là một điểm bất kì. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm M thành điểm M' và phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm M' thành điểm M''. Như thế phép biến hình biến điểm M thành điểm M'' là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là:

A. $\left(0;2\left(y_2-y_1\right)\right)$. **B.** $\left(0;2\left(y_2+y_1\right)\right)$. **C.** $\left(0;y_2+y_1\right)$. **D.** $\left(0;y_2-y_1\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Lí luận như câu 45 ta được $\vec{u}=\left(0;2\left(y_2-y_1\right)\right)$.

Câu 47. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $x=2$ và $x=5$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự). Điểm $M\left(-2;6\right)$ biến thành điểm N có tọa độ là:

A. $\left(-4;6\right)$. **B.** $\left(5;6\right)$. **C.** $\left(4;6\right)$. **D.** $\left(9;6\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Theo bài 46 thì phép biến hình biến điểm M thành điểm N là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=\left(2.\left(5-2\right);0\right)\Rightarrow\vec{u}=\left(6;0\right)$.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến ta được $N\left(4;6\right)$.

Câu 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $y=-1$ và $y=3$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự). Điểm $P(7;1)$ biến thành điểm Q có tọa độ là:

A. $(7;6)$. **B.** $(7;-5)$. **C.** $(7;3)$. **D.** $(7;9)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Phép biến hình biến điểm P thành điểm Q là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=(0;2.(3+1))\Rightarrow\vec{u}=(0;8)$

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến ta được: $Q(7;9)$.

Câu 49. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $x=-2$ và $x=3$; Δ là đường thẳng có phương trình $2x+y=0$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự), đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $2x+y-10=0$. **B.** $2x+y+5=0$. **C.** $2x+y-20=0$. **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Phép biến hình biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=(2.(3+2);0)\Rightarrow\vec{u}=(10;0)$.

Phép tịnh tiến này biến Δ thành Δ' có phương trình: $2(x-10)+y=0\Leftrightarrow 2x+y-20=0$.

Câu 50. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $y=2$ và $y=3$; Δ là đường thẳng có phương trình $3x-2y+1=0$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự), đường thẳng Δ biến thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $3x-2y+5=0$. **B.** $3x-2y-5=0$. **C.** $3x-2y+10=0$. **D.** Một kết quả khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép biến hình biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=(0;2.(3-2))\Rightarrow\vec{u}=(0;2)$.

Phép tịnh tiến này biến Δ thành Δ' có phương trình: $3x-2(y-2)+1=0\Leftrightarrow 3x-2y+5=0$.

Câu 51. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $x=4$ và $x=2$; (T) là đường tròn có phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2=4$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự), đường tròn (T) biến thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $(x-3)^2+(y-2)^2=4$.

B. $(x+3)^2+(y+2)^2=4$.

C. $(x+1)^2+(y+4)^2=4$.

D. $(x+5)^2+(y+1)^2=4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép biến hình biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=(2.(2-4);0)\Rightarrow\vec{u}=(-4;0)$.

Phép tịnh tiến này biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình:

$(x+4-1)^2+(y+2)^2=4\Leftrightarrow(x+3)^2+(y+2)^2=4$.

Câu 52. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $y=1$ và $y=-2$; (T) là đường tròn có phương trình $x^2+y^2-2x-6y+1=0$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ (theo thứ tự), đường tròn (T) biến thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-2x+6y+1=0$.

B. $x^2+y^2-2x+8y+4=0$.

C. $x^2+y^2-2x+12y-4=0$.

D. $x^2+y^2+4x+12y-1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép biến hình biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') là phép tịnh tiến theo vectơ: $\vec{u}=(0;2.(-2-1))\Rightarrow\vec{u}=(0;-6)$.

Phép tịnh tiến này biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình:

$x^2+(y+6)^2-2x-6(y+6)+1=0\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+6y+1=0$.

Câu 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;6)$, $B(-1;2)$, $C(6;1)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $\left(\frac{2}{3};4\right)$. **B.** $(3;-3)$. **C.** $\left(\frac{7}{3};-3\right)$. **D.** $\left(\frac{4}{3};-4\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra: $G\left(\frac{7}{3};3\right)\Rightarrow G'\left(\frac{7}{3};-3\right)$.

Câu 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;5)$, $B(-1;2)$, $C(6;-4)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(-2;-1)$. **B.** $(2;-4)$. **C.** $(0;-3)$. **D.** $(-2;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Từ giả thiết suy ra: $G(2;1)\Rightarrow G'(-2;1)$.

Câu 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(0;4)$, $B(-2;3)$, $C(6;-4)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC và a là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $\left(\frac{4}{3};1\right)$. **B.** $\left(-\frac{4}{3};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{4}{3}\right)$. **D.** $\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $G\left(\frac{4}{3};1\right)\Rightarrow G'\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, các đường có phương trình sau đây, đường nào nhận trục hoành làm trục đối xứng:

A. $y=x^2-2x$. **B.** $y=-4x+3$.

C. $x^2+y^2-4x+1=0$. **D.** $x^2+y^2+4x+12y-1=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Khi thay y bởi $-y$ thì phương trình $x^2+y^2-4x+1=0\,(*)$ không thay đổi nên đường tròn có phương trình (*) nhận trục hoành làm trục đối xứng.

Câu 57. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

A. $y=5x-3$. **B.** $y=x^2-4x+5$. **C.** $y=x^4-x^2+1$. **D.** $y=\sin x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Do phương trình $y=x^4-x^2+1$ không thay đổi khi ta thay x bởi $-x$ nên đồ thị của hàm số này nhận trục tung làm trục đối xứng.

Câu 58. Cho hai điểm B và C cố định trên đường tròn $(O;R)$. Điểm A thay đổi trên $(O;R)$. Gọi H là trực tâm của ΔABC và H' là điểm đối xứng của H qua đường thẳng BC. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. H' luôn nằm trên đường tròn $(O';R)$ đối xứng của $(O;R)$ qua đường thẳng BC.

B. H' luôn nằm trên một đường thẳng cố định song song với BC.

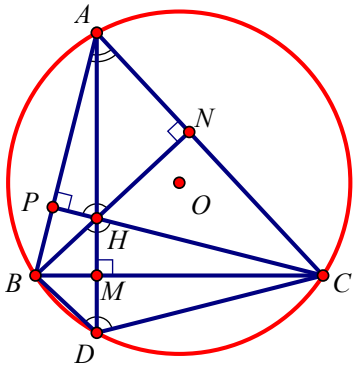
C. H' luôn nằm trên đường trung trực của cạnh BC.

D. H' luôn nằm trên đường tròn $(O;R)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trong một tam giác, điểm đối xứng của trực tâm H qua một cạnh của nó thì nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Đây là một kiến thức cơ bản. Tuy nhiên ta có thể chứng minh lại bài toán này như sau:



Kẻ các đường cao AM, BN, CP và gọi D là điểm đối xứng của H qua BC.

Ta có tứ giác ANHP là một tứ giác nội tiếp, suy ra: $\overset{\frown}{PAN}+\overset{\frown}{PHN}=180^o$ hay $\overset{\frown}{BAC}+\overset{\frown}{BHC}=180^o$.

Mặt khác, có D là điểm đối xứng của H qua BC nên $\overset{\frown}{BDC}=\overset{\frown}{BHC}$.

Do đó: $\overset{\frown}{BAC}+\overset{\frown}{BDC}=180^o$.

Suy ra D nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC.

Câu 59. Trong mặt phẳng cho đường thẳng Δ và hai điểm A, B phân biệt nằm cùng một bên đường thẳng Δ. Một điểm M thay đổi trên Δ, khi đó vị trí của M để $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. M trùng với hình chiếu vuông góc của A trên Δ.

B. M trùng với hình chiếu vuông góc của B trên Δ.

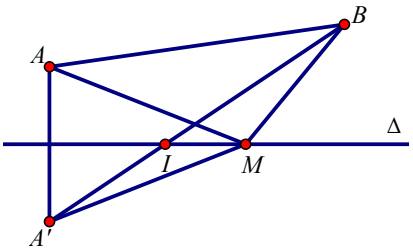
C. M trùng với giao điểm của Δ và đường trung trực của AB.

D. M trùng với giao điểm của Δ và đường thẳng BA' với A' là điểm đối xứng của A qua Δ.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Đây là bài toán cơ bản về giá trị nhỏ nhất.



Do A' là điểm đối xứng của A qua Δ nên: $MA = MA'$

Do đó: $MA + MB \geq MA' + MB \geq A'B$

Như thế: $\min(MA + MB) = A'B$

Xảy ra khi: A', B, M thẳng hàng, khi đó M trùng với điểm I là giao điểm của A'B và Δ.

Câu 60. Cho đoạn thẳng AB và Δ là đường thẳng cố định song song với BC. Trên Δ lấy điểm M bất kì. Khi đó vị trí của điểm M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. M trùng với hình chiếu vuông góc của A trên Δ.

B. M trùng với hình chiếu vuông góc của B trên Δ.

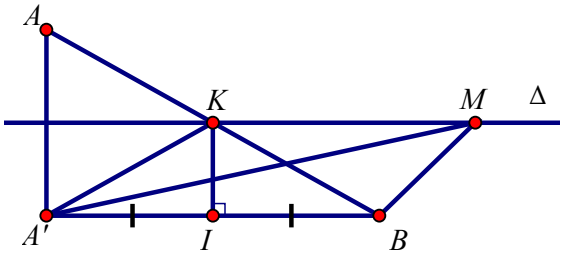
C. M trùng với hình chiếu vuông góc của I trên Δ với I là trung điểm của AB.

D. Không thể xác định được vị trí của M.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Chu vi của ΔMAB là: $p = MA + MB + AB$.



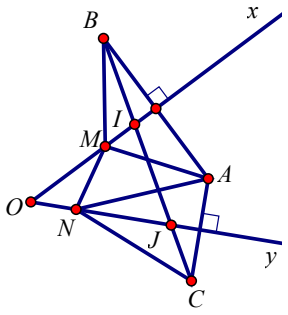
Mà AB cố định nên p đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Theo bài 59, khi đó M ở vị trí K với K là giao điểm của Δ và A'B, A' là điểm đối xứng của A qua Δ.

Câu 61. Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Một điểm M thay đổi trên tia Ox và một điểm N thay đổi trên tia Oy. Để xác định vị trí của M và N sao cho ΔAMN có chu vi nhỏ nhất, một học sinh chứng minh qua ba bước như sau:

Bước 1: Gọi p là chu vi tam giác AMN ta có:

$$p = AM + AN + MN$$



Bước 2: Thực hiện phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ điểm A biến thành điểm B. Suy ra $AM = BM$, và thực hiện phép đối xứng trục $Đ_{Oy}$ điểm A biến thành điểm C. Suy ra $AN = CN$.

Do đó: $p = BM + MN + CN$

Bước 3: Như thế p đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi các điểm B, M, N, C thẳng hàng. Khi đó M trùng với điểm I giao điểm của Ox và BC, N trùng với điểm J giao điểm của Oy và BC.

Hỏi cách chứng minh trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Chứng minh chính xác.

B. Sai từ bước 1.

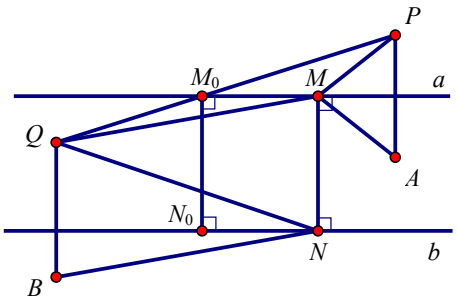
C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 62. Cho hai đường thẳng song song a và b; A và B là hai điểm hai bên đường thẳng b trong đó điểm A nằm trong dãy định bởi a và b (A và B đều không nằm trên a và b). Muốn dựng một đoạn thẳng MN vuông góc với cả a, b với $M \in a$ và $N \in b$ sao cho $AM + MN + NB$ có độ dài nhỏ nhất. Một học sinh lập luận qua ba bước như sau:



Bước 1: Trước hết ta thấy rằng MN có độ dài không đổi, nên ta chỉ cần xác định vị trí của M, N để $AM + BN$ nhỏ nhất.

Bước 2: Thực hiện phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{NM}$, điểm B biến thành điểm Q; suy ra $BN = QM$. Thực hiện phép đối xứng trục $Đ_a$ điểm A biến thành điểm P, suy ra $AM = PM$.

Do đó: $AM + BN = PM + QM \geq PQ$.

Bước 3: Đẳng thức xảy ra khi điểm M nằm trên đoạn thẳng PQ, như thế M trùng với điểm M_0 là giao điểm của PQ và đường thẳng a; khi đó N trùng với điểm N_0 là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng b.

Để ý rằng khi thực hiện phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{NM}$ mà điểm Q trùng với điểm A thì ta kết luận ngay vị trí của điểm M cần xác định là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng a.

Tóm lại bài toán luôn thực hiện được.

Hỏi cách chứng minh trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Chứng minh chính xác.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 63. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O. Nhận định nào sau đây là đúng?

A. Không có phép đối xứng trục nào biến a thành b.

B. Có duy nhất một phép đối xứng trục biến a thành b.

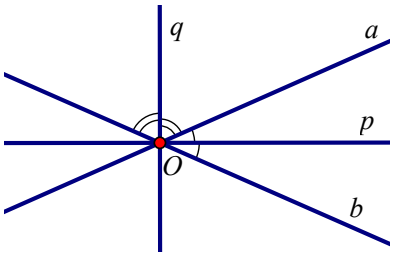
C. Có đúng hai phép đối xứng trục biến a thành b.

D. Có vô số phép đối xứng trục biến a thành b.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Gọi p và q là phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng a và b. Ta thấy ngay có hai phép đối xứng trục biến a thành b là các phép đối xứng trục $Đ_p$ và $Đ_q$.



BÀI 4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Phép đối xứng tâm

1. Định nghĩa

- Phép đối xứng qua điểm O là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua O, có nghĩa là $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\vec{0}$.

$$Đ_O(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\vec{0}$$

- Điểm O gọi là tâm của phép đối xứng, hay đơn giản là tâm đối xứng.
- Phép đối xứng qua một điểm còn gọi đơn giản là phép đối xứng tâm.

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm

Trong hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(a;b)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ thì: $\begin{cases}x'=2a-x\\y'=2b-y\end{cases}$.

Công thức này gọi là biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $Đ_I$.

3. Tâm đối xứng của một hình

Điểm O gọi là tâm đối xứng của một hình H nếu phép đối xứng $Đ_O$ biến hình H thành chính nó, nghĩa là $Đ_O(H)=H$.

Ví dụ:

a. Các hình như hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi đề có tâm đối xứng. Đó là giao điểm của hai đường chéo của mỗi hình.

b. Đường tròn có một tâm đối xứng, đó là tâm của nó.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. tìm ảnh của 1 điểm, một đường qua phép đối xứng tâm

1 Tìm ảnh của các điểm sau qua phép đối xứng tâm I :

1) A(−2;3) , I(1;2) $\Rightarrow A'(4;1)$

2) B(3;1) , I(−1;2) $\Rightarrow B'(-5;3)$

3) C(2;4) , I(3;1) $\Rightarrow C'(4;-2)$

Giải :

a) Gỉa sử : $A'=Đ_I(A)\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow (x'-1;y'-2)=-(-3;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x'-1=3\\y'-2=-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x'=4\\y'=1\end{cases}\Rightarrow A'(4;1)$

2 Tìm ảnh của các đường thẳng sau qua phép đối xứng tâm I :

1) $(\Delta): x+2y+5=0, I(2;-1)$ $\Rightarrow (\Delta'): x+2y-5=0$

2) $(\Delta): x-2y-3=0, I(1;0)$ $\Rightarrow (\Delta'): x-2y+1=0$

3) $(\Delta): 3x+2y-1=0, I(2;-3)$ $\Rightarrow (\Delta'): 3x+2y+1=0$

Giải

PP : Có 3 cách

Cách 1 : Dùng biểu thức toạ độ

Cách 2 : Xác định dạng $\Delta' // \Delta$, rồi dùng công thức tính khoảng cách $d(\Delta;\Delta') \to \Delta'$.

Cách 3 : Lấy bất kỳ $A,B \in \Delta$, rồi tìm ảnh $A',B' \in \Delta' \Rightarrow \Delta' \equiv A'B'$

1) Cách 1 : Ta có : $M(x;y) \xmapsto{Đ_I} M' \begin{cases} x' = 4-x \\ y' = -2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4-x' \\ y = -2-y' \end{cases}$

Vì $M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow x+2y+5=0 \Leftrightarrow (4-x')+2(-2-y')+5=0 \Leftrightarrow x'+2y'-5=0$

$\Leftrightarrow M'(x';y') \in \Delta' : x+2y-5=0$

Vậy : $(\Delta) \xrightarrow{Đ_I} (\Delta') : x+2y-5=0$

Cách 2 : Gọi $\Delta' = Đ_I(\Delta) \Rightarrow \Delta'$ song song $\Delta \Rightarrow \Delta'$: x + 2y + m = 0 (m ≠ 5) .

Theo đề : $d(I;\Delta) = d(I;\Delta') \Leftrightarrow \dfrac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{|m|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Leftrightarrow 5 = |-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \text{ (loại)} \\ m = -5 \end{array}\right.$

$\to (\Delta') : x+2y-5=0$

Cách 3 : Lấy : $A(-5;0), B(-1;-2) \in \Delta \Rightarrow A'(9;-2), B'(5;0) \Rightarrow \Delta' \equiv A'B' : x+2y-5=0$

3 Tìm ảnh của các đường tròn sau qua phép đối xứng tâm :

1) $(C): x^2+(y-2)^2=1, E(2;1)$ $\Rightarrow (C'): (x-4)^2+y^2=1$

2) (C) : $x^2+y^2+4x+2y=0, F(1;0)$ $\Rightarrow (C'): x^2+y^2-8x-2y+12=0$

3) (P) : $y = 2x^2 - x + 3$, tâm O(0;0) $\Rightarrow (P'): y = -2x^2 - x - 3$

HD : *a) Có* 2 cách giải :

Cách 1 : Dùng biểu thức toạ độ .

Cách 2 : Tìm tâm I $\xrightarrow{Đ_E} I', R' = R = (đã \text{ cho})$.

b) Tương tự .

Dạng 2. Chứng minh một hình H có tâm đối xứng

Phương pháp giải:

Bước 1. Xác định điểm cố định O.

Bước 2. Chứng minh rằng, với mọi điểm M thuộc H, điểm $M' = Đ_O(M)$ cũng thuộc H.

Ví dụ 1: Trong hệ tọa độ Oxy, gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{x}$. Chứng minh rằng (C) có tâm đối xứng là O, gốc của hệ tọa độ Oxy.

Giải

Gọi $M(x;y)\in(C)$ thì có: $y=\frac{1}{x}$.

Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M qua $Đ_O$ thì từ $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OM'}=\vec{0}$, ta có: $\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OM'}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-x'\\y=-y'\end{cases}$

Thay vào (1) ta được: $-y'=\frac{1}{-x'}\Leftrightarrow y'=\frac{1}{x'}$. Hệ thức này chứng tỏ $M'\in(C)$.

Tóm lại, với mọi điểm M thuộc (C), M' là ảnh của M qua $Đ_O$ cũng thuộc (C). Vậy, (C) có tâm đối xứng là O.

Ví dụ 2: Cho hai điểm cố định A và B có $AB=2$. Tìm tập hợp những điểm M' sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MM'}$, biết rằng $MA^2+MB^2=4$.

Giải

Đề tìm tập hợp những điểm M' ta phải tìm tập hợp những điểm M.

Ta có $MA^2+MB^2=4$. Gọi O là trung điểm của AB thì O cố định. Mà $MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{AB^2}{2}$ nên $2MO^2=4-\frac{AB^2}{2}=2\Leftrightarrow MO=1$. Do đó, tập hợp những điểm M là đường tròn (C) tâm O có bán kính $R=1$.

Bây giờ ta tìm tập hợp những điểm M'.

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MM'}$ (giả thiết) (1)

Mà O là trung điểm của AB nên: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MO}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\vec{0}$.

Do đó $M'=Đ_O(M)$.

Theo trên, M thuộc (C) nên M' thuộc (C') là ảnh của (C) qua $Đ_O$. Mà (C') chính là (C). Vậy tập hợp những điểm M' là đường tròn tâm O, trung điểm của AB, bán kính $R=1$.

Dạng 3. Dùng phép đối xứng tâm để dựng hình

Phương pháp giải: Muốn dựng điểm N, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Xác định hai điểm M và O sao cho $N=Đ_O(M)$.

Bước 2. Tìm các dựng điểm M suy ra N.

Ví dụ: Dựng hình bình hành ABCD, biết rằng hai đỉnh B và D cố định, đỉnh A thuộc một đường tròn (I) đã cho và đỉnh C thuộc một đường thẳng d đã cho.

Giải

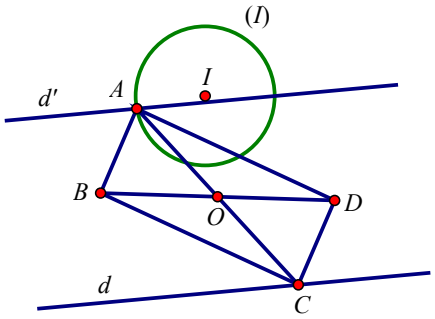
Gọi O là trung điểm của BD thì O cố định và $Đ_O(A)=C$.

Ta dựng A trước. Vì $C=Đ_O(A)$ nên $A=Đ_O(C)$. Mà $C\in d$ nên $A\in d'$, ảnh của d qua $Đ_O$. Do đó: $A=(I)\cap d'$.

Đã có A, ta dựng $C=Đ_O(A)$.

Tóm lại: Hình bình hành ABCD đã dựng xong.

Bài toán có 2; 1; 0 lời giải tùy theo d' và (I) có 2; 1; 0 giao điểm.



C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến một đường thẳng a cho trước thành chính nó?

A. Không có phép nào.

B. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép.

D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tâm đối xứng là điểm bất kì nằm trên a.

Câu 2. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào.

B. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép.

D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Tâm đối xứng phải nằm trên cả d và d' nên không có.

Câu 3. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến d thành d'?

A. Không có phép nào.

B. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép.

D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tâm đối xứng là các điểm cách đều d và d'.

Câu 4. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Tâm đối xứng là giao điểm của d và d'.

Câu 5. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến đường thẳng d thành d'?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Vì phép đối xứng tâm biến d thành đường thẳng song song hoặc trùng với d.

Câu 6. Cho hai đường thẳng song song a và b, một đường thẳng c không song song với chúng. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến đường thẳng a thành đường thẳng b và biến đường thẳng c thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Giả sử c cắt a và b lần lượt tại A và B. Phép đối xứng tâm cần tìm là phép đối xứng qua trung điểm của AB.

Câu 7. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a \parallel a', b \parallel b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép đối xứng tâm biến các đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Đó là phép đối xứng qua tâm hình bình hành tạo thành bởi bốn đường thẳng đã cho.

Câu 8. Trong các hình dưới đây hình nào **không** có tâm đối xứng?

A. Đường elip.

B. Đường hypebol.

C. Đường parabol.

D. Đồ thị của hàm số $y=\sin x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 9. Trong các hình dưới đây, hình nào **không** có tâm đối xứng?

A. Hình gồm một đường tròn và một hình chữ nhật nội tiếp.

B. Hình gồm một đường tròn và một tam giác đều nội tiếp.

C. Hình lục giác đều.

D. Hình gồm một đường tròn và một hình vuông nội tiếp.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 10. Trong các hình dưới đây, hình nào **không** có vô số tâm đối xứng?

A. Đồ thị của hàm số $y=\sin x$.

B. Đồ thị của hàm số $y=\sin x+1$.

C. Đồ thị của hàm số $y=\tan x$.

D. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{x}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ là đường hypebol, chỉ có duy nhất một tâm đối xứng là điểm gốc tọa độ.

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nếu phép đối xứng tâm biến điểm $A(5;2)$ thành điểm $A'(-3;4)$ thì nó biến điểm $B(1;-1)$ thành điểm:

A. $B'(1;7)$

B. $B'(1;6)$

C. $B'(2;5)$

D. $B'(1;-5)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Trung điểm của BB' phải là trung điểm của AA'.

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép đối xứng tâm có tâm là điểm gốc tọa độ. Khi đó nó biến đường thẳng $3x-4y+13=0$ thành đường thẳng:

A. $3x+4y+13=0$ **B.** $3x+4y-13=0$ **C.** $3x-4y-13=0$ **D.** $-3x+4y+13=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Phép đối xứng qua O biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(-x;-y)$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép đối xứng tâm với tâm là điểm $I(1;-1)$. Khi đó nó biến đường thẳng $2x-3y+5=0$ thành đường thẳng:

A. $2x-3y-7=0$ **B.** $2x-3y+7=0$ **C.** $2x+3y+7=0$ **D.** $2x-3y+4=0$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Điểm I phải cách đều đường thẳng đã cho và ảnh của nó.

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng song song a và b lần lượt có phương trình $3x+4y-1=0$ và $3x+4y+5=0$. Nếu phép đối xứng tâm biến a thành b thì tâm đối xứng phải là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $I(2;-2)$ **B.** $I(2;2)$ **C.** $I(-2;2)$ **D.** $I(2;0)$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Tâm đối xứng phải cách đều hai đường thẳng đã cho.;

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $I(a;b)$. Thực hiện phép đối xứng tâm I biến điểm $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm này là:

A. $\begin{cases} x'=2b-x \\ y'=2a-y \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x'=a-2x \\ y'=b-2y \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x'=a-2y \\ y'=b-2x \end{cases}$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2+x$. Phương trình của parabol (Q) đối xứng với (P) qua gốc tọa độ O là:

A. $y=-x^2+x$. **B.** $y=x^2-x$. **C.** $y=-x^2-x$. **D.** $y=x^2-2x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(-x;-y)$ thì đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O. Do đó phương trình của parabol (Q) là: $-y=(-x)^2+(-x)\Leftrightarrow y=-x^2+x$.

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và đường thẳng Δ có phương trình $x+2y-2=0$. Ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm $Đ_I$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x+2y+2=0$. **B.** $x-2y+3=0$. **C.** $x+2y+6=0$. **D.** $2x-y+4=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta có: $\begin{cases}x'=4-x\\y'=-2-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-x'\\y=-2-y'\end{cases}$

Thế vào phương trình của Δ ta được: $(4-x')+2(-2-y')-2=0\Leftrightarrow -x'-2y'-2=0\Leftrightarrow x'+2y'+2=0$

Vậy phương trình ảnh của Δ là: $x+2y+2=0$.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2=9$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-8x+4y+11=0$. **B.** $x^2+y^2+4x+6y+5=0$.

C. $x^2+y^2-2x+4y=0$. **D.** $x^2+y^2-6x+2y-2=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta có: $\begin{cases}x'=4-x\\y'=-2-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-x'\\y=-2-y'\end{cases}$

Thế vào phương trình của (T) ta được: $(4-x')^2+(-2-y')^2=9\Leftrightarrow x'^2+y'^2-8x'+4y'+11=0$.

Vậy phương trình của (T') là: $x^2+y^2-8x+4y+11=0$.

Câu 19. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng?

A. $y=2x^2-3x+1$. **B.** $y=x^3+x-5$. **C.** $y=x^3\tan x$. **D.** $y=\sin x\sqrt{x^2+1}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta đã biết đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng. Trong các hàm số dưới đây chỉ có hàm số $y = \sin x\sqrt{x^2+1}$ là hàm số lẻ, nên đồ thị của hàm số này nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 32 = 0$. Phương trình của đường tròn (C') đối xứng của (C) qua gốc tọa độ O có phương trình là:

A. $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 9$.

B. $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16$.

C. $(x+4)^2 + (y+5)^2 = 4$.

D. Một phương trình khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thay x bởi $-x$ và y bởi $-y$ ta được phương trình của (C') là:

$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-5)^2 = 9$.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = x^2 - 2x$ và điểm $I(-3;1)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y = -x^2 - 14x - 46$. **B.** $y = -x^2 + 14x - 5$. **C.** $y = -x^2 - 7x + 12$. **D.** $y = -x^2 + 6x + 3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta có: $\begin{cases} x' = -6 - x \\ y' = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$

Thế vào phương trình của (P) ta được: $2 - y' = (-6 - x')^2 - 2(-6 - x') \Leftrightarrow y' = -x'^2 - 14x' - 46$.

Vậy phương trình của (P') là: $y = -x^2 - 14x - 46$.

Câu 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(2;-1)$ và tam giác ABC với $A(1;4)$, $B(-2;3)$, $C(7;2)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến trọng tâm G của tam giác ABC thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(-2;5)$.

B. $(2;-5)$.

C. $(-1;-4)$.

D. $(0;-5)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trọng tâm của ΔABC là $G(2;3)$.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm, ta được $G'(0;-5)$.

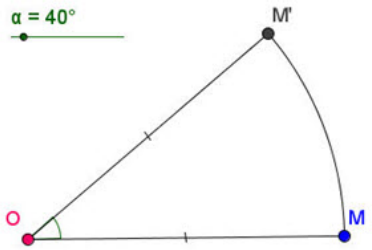
BÀI 5. PHÉP QUAY

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM' = OM và góc lượng giác (OM' OM') bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α (h.1.27).

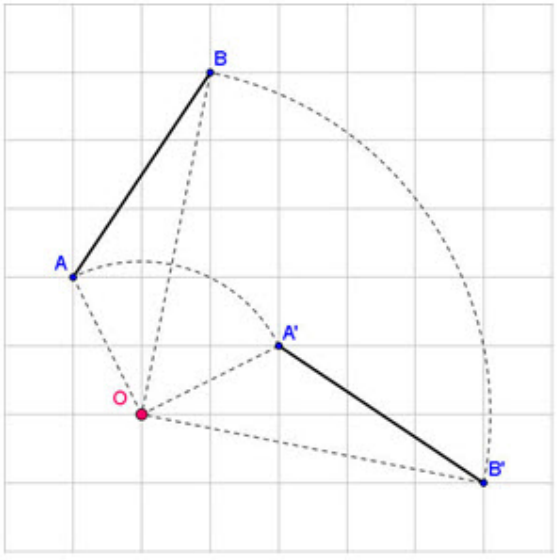


Hình 1.27

Điểm O được gọi là tâm quay còn α được gọi là góc quay của phép quay.

Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q(O;\alpha)$

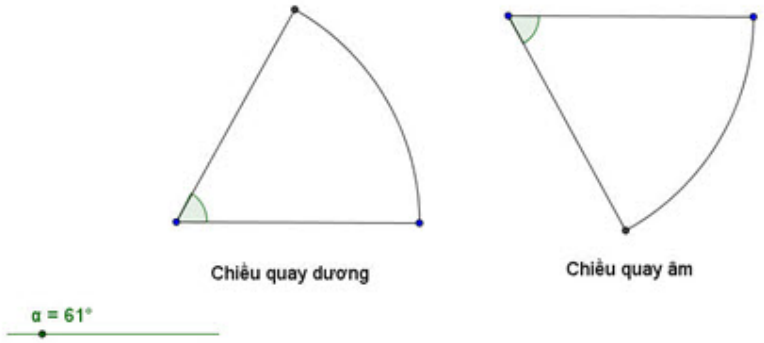
Ví dụ 1. Trên hình 1.28 ta có các điểm A', B', O tương ứng là ảnh của các điểm A, B, O qua phép quay tâm O, và góc quay $-\frac{\pi}{2}$



Hình 1.28

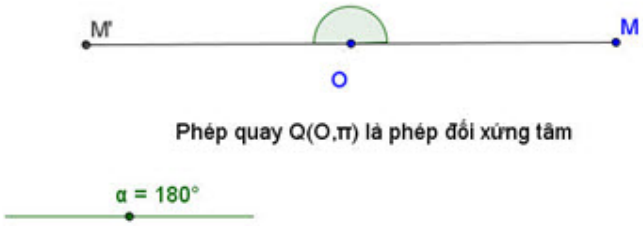
Nhận xét:

1) Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác nghĩa là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



Hình 1.30

2) Với k là số nguyên ta luôn có phép quay $Q_{(O,\,2k\pi)}$ là phép đồng nhất.
Phép quay $Q_{(O,\,(2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm O (h. 1.32).



Hình 1.32

II. TÍNH CHẤT

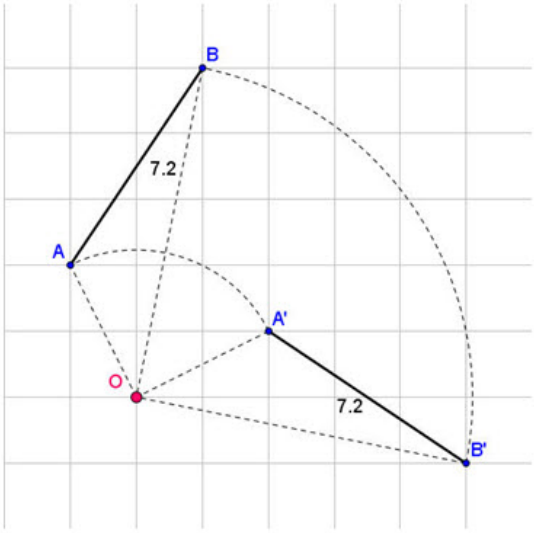
Quan sát chiếc tay lái (vô lăng) trên tay người lái xe ta thấy khi người lái xe quay tay lái một góc nào đó thì hai điểm A và B trên tay lái cũng quay theo. (h.1.34). Tuy vị trí A và B thay đổi nhưng khoảng cách giữa chúng không thay đổi. Điều đó được thể hiện trong tính chất sau của phép quay.



Hình 1.34

Tính chất 1.

Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.



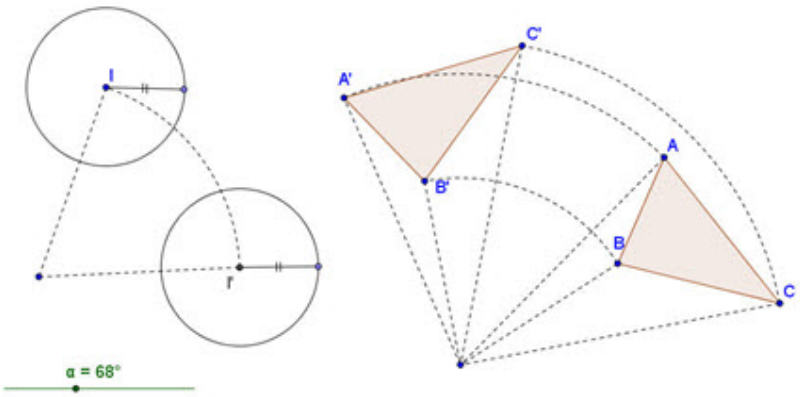
Hình 1.35

(Phép quay tâm O, góc (OA; OA') biến điểm A thành A', B thành B'.

Khi đó, ta có: A'B' = AB)

Tính chất 2.

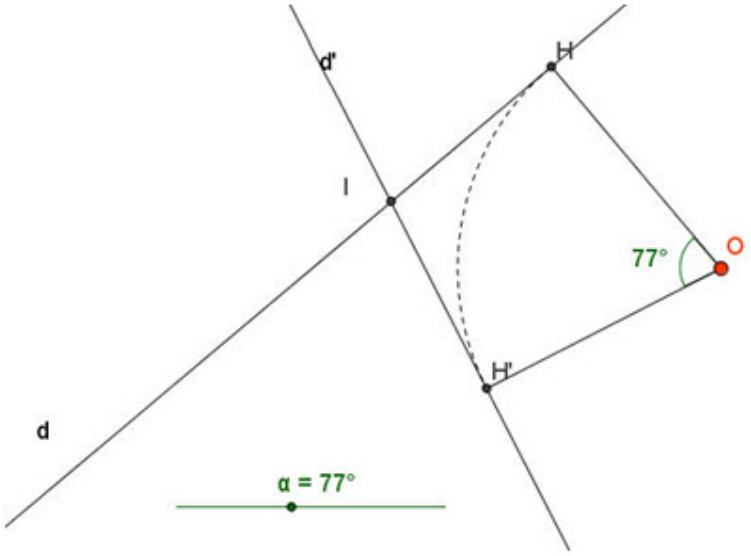
Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (h.1.36).



Hình 1.36

Nhận xét

Phép quay góc α với $0 < \alpha < \pi$, biến đường thẳng d thành đường thẳng d' sao cho góc giữa d và d' bằng α ($0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), hoặc bằng π - α (nếu $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$) (h.1.37).



Hình 1.37

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh điểm M' là ảnh của điểm M trong một phép quay

Phương pháp giải: Ta thực hiện các bước sau:

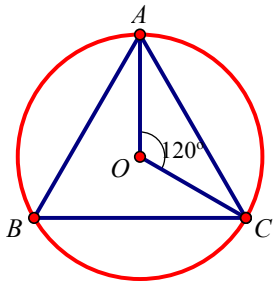
Bước 1. Tìm một điểm cố định O và một góc φ không đổi.

Bước 2. Chứng minh: $\begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = \varphi \end{cases}$

Ví dụ 1: Cho ABC là tam giác đều (các đỉnh được ghi theo chiều dương). Hãy xác định phép quay biến C thành A).

Giải

- Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có: $\begin{cases} OA = OC \\ (OC, OA) = 120^o \end{cases}$

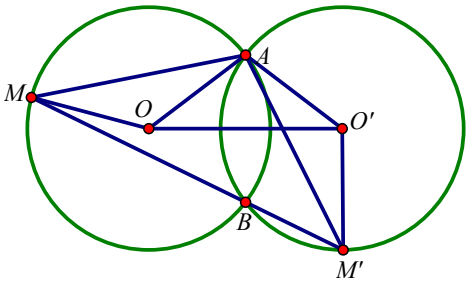


Vậy $Q\left(O;120^o\right): C \mapsto A$.

- Ta còn có phép quay $Q\left(B;60^o\right): C \mapsto A$.

Ví dụ 2: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$ cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng qua B, cắt $(O;R)$ tại M cắt $(O';R)$ tại M'. Chứng minh rằng M' là ảnh của M trong phép quay tâm A, góc quay $\varphi = \widehat{OAO'}$.

Giải



Xét tam giác MAM' ta có: $\widehat{M_1} = \widehat{O_1}$; $\widehat{M_1'} = \widehat{O_1'}$ (góc nội tiếp và nửa góc ở tâm cùng chắn một cung). Mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_1'}$ (vì $\Delta OAO'$ cân tại A), suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{M_1'}$.

Vậy, tam giác MAM' cân tại A, suy ra: $AM = AM' \quad (1)$

Mặt khác: $\Delta OMA = \Delta O'M'A\ (c.c.c)$, suy ra $\widehat{MAO} = \widehat{M'AO'}$. Mà:

$\widehat{MAM'} = \widehat{MAO} + \widehat{OAM'} = \widehat{M'AO'} + \widehat{OAM'} = \widehat{OAO'}$.

Do đó: $\widehat{MAM'} = \varphi \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} AM = AM' \\ (AM, AM') = \varphi \end{cases}$

Vậy M’ là ảnh của M trong phép quay tâm A, góc quay $\varphi = \widehat{OAO'}$.

Dạng 2. Tìm ảnh của một đường thẳng, đường tròn qua một phép quay

Phương pháp giải:

- Tìm ảnh của một đường thẳng qua một phép quay $Q(I;\alpha)$.

Bước 1. Lấy trên đường thẳng một điểm cố định M_0 và điểm di động M.

Bước 2. Gọi M_0' và M’ lần lượt là ảnh của M_0 và M trong phép quay $Q(I;\alpha)$.

Bước 3. Chứng minh rằng M’ thuộc một đường thẳng d’ cố định.

Kết luận: d’ chính là ảnh của d qua phép quay $Q(I;\alpha)$.

- Tìm ảnh của một đường tròn qua một phép quay $Q(I;\alpha)$.

Bước 1. Gọi O’ là ảnh của O, tâm đường tròn đã cho, qua $Q(I;\alpha)$, ta có O’ cố định.

Bước 2. Lấy điểm M tùy ý trên đường tròn (O). Gọi M’ là ảnh của M qua $Q(I;\alpha)$, chứng minh rằng $O'M' = OM$.

Bước 3. Chứng minh rằng M’ thuộc đường tròn $(O';R)$.

Kết luận: $(O';R)$ chính là ảnh của $(O;R)$ qua $Q(I;\alpha)$.

Ví dụ 1: Cho phép quay tâm O, góc quay $\varphi = 60^o$ và đường thẳng d. Tìm ảnh của d qua $Q(I;\alpha)$.

Giải

Gọi H là hình chiếu của O lên d, ta có H cố định. Gọi H’ là ảnh của H qua $Q(O;60^o)$. Ta có:

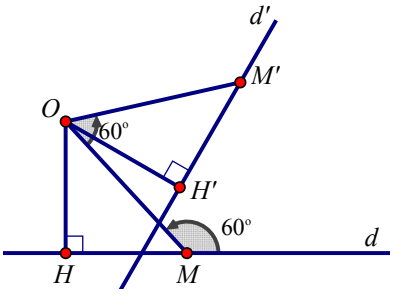
$$\begin{cases} OH' = OH \\ (OH, OH') = 60^o \end{cases} \quad (1)$$

Mặt khác, gọi M là điểm di động trên d và M’ là ảnh của M qua $Q(O;60^o)$, ta có:

$$\begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = 60^o \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$\left.\begin{array}{l} OH = OH' \\ OM = OM' \\ \widehat{HOM} = \widehat{H'OM'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OH'M' = \Delta OHM \ (c.g.c)$$



Do đó: $\widehat{OH'M'} = 90^o$

Vậy tập hợp điểm M’ là đường thẳng d’ vuông góc với

OH’ tại H’.

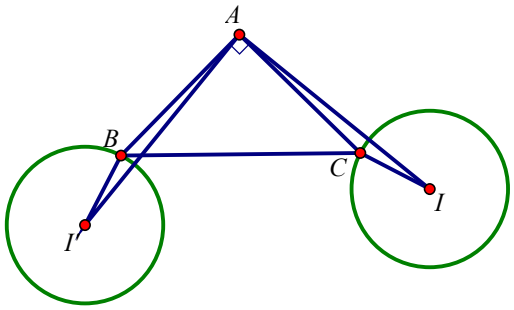
Lưu ý:

1. Góc của d và d’ bằng 60^o.
2. $\begin{cases} HM = H'M' \\ (HM, H'M') = 60^o \end{cases}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có A cố định (các đỉnh được vẽ theo chiều dương). Biết rằng C thuộc đường tròn $(I;R)$ cho sẵn. Tìm ảnh của đường tròn $(I;R)$ qua phép quay $Q(A;-90^o)$.

Giải

Vì tam giác ABC vuông cân tại A, có các đỉnh ghi theo chiều dương nên: $\begin{cases} AC = AB \\ (AC, AB) = -90^o \end{cases}$



Suy ra B là ảnh của C qua $Q(A;-90^o)$.

Gọi I’ là ảnh của I qua phép quay $Q(A;-90^o)$, ta có I’ cố định và: $\begin{cases} AI = AI' \\ (AI, AI') = -90^o \end{cases}$

Mặt khác: $Q(A;-90^o): \begin{matrix} I \mapsto I' \\ C \mapsto B \end{matrix} \Rightarrow I'B = IC$. Do đó $I'B = R$ (bán kính của $(I;R)$)

Tóm lại, ta có: I’ cố định, $I'B = R$ (không đổi) nên tập hợp những điểm B là đường tròn tâm I’, bán kính R. Đó là ảnh của đường tròn $(I;R)$.

Dạng 3. Dựng hình bằng phép quay

Phương pháp giải: Muốn dựng điểm N qua phép quay, ta thực hiện các bước sau:

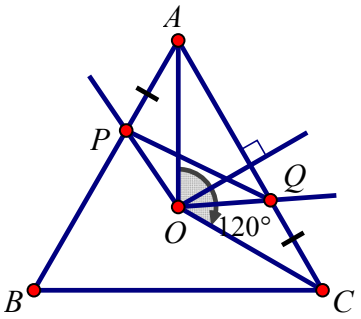
Bước 1. Xác định điểm M và phép quay $Q(O;\varphi): M \mapsto N$.

Bước 2. Tìm cách dựng điểm M, suy ra điểm N bằng phép quay trên.

Ví dụ: Cho tam giác đều ABC có các đỉnh được vẽ theo chiều dương. Lấy điểm P trên cạnh AB. Hãy dựng điểm Q trên cạnh CA sao cho $|\overrightarrow{CQ}| = |\overrightarrow{AP}|$.

Giải

Giả sử bài toán đã dựng xong ta có: $Q \in AC$ sao cho $\left|\overrightarrow{CQ}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right|$.



Trước hết ta phải xác định phép quay biến C thành A và Q thành P. Ta có: $\left|\overrightarrow{CQ}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right| \Rightarrow CQ = AP \qquad (1)$

Mặt khác, $P \in AB$ và $Q \in CA$ nên:

$\left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{AP}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = 120^o \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} CQ = AP \\ \left(CQ, AP\right) = 120^o \end{cases}$

Gọi O là tâm của phép quay biến C thành A và Q thành P, ta có: $\begin{cases} OC = OA & (3) \\ \left(OC, OA\right) = 120^o & (4) \end{cases}$

Từ (3) suy ra O thuộc đường trung trực của CA; từ (4) suy ra O thuộc cung chứa góc 120^o vẽ trên dây CA. Mà ABC là tam giác đều nên O chính là trọng tâm của nó.

Tóm lại, ta đã xác định được phép quay tâm O, góc quay 120^o, biến C thành A, biến Q thành P. Suy ra $Q\left(O; -120^o\right) : P \mapsto Q$ và $O \mapsto O$, nên biến OP thành OQ. Vậy Q là giao điểm của cạnh CA và OQ là ảnh của đường thẳng OP qua phép quay $Q\left(O; -120^o\right)$. Bài toán chỉ có một nghiệm hình.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai đường thẳng bất kì d và d'. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. Không có phép nào.

B. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép.

D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tâm của phép quay là điểm cách đều hai đường thẳng d và d'.

Câu 2. Cho hai đường thẳng song song a và a', một đường thẳng c không song song với chúng. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng a thành đường thẳng a' và biến đường thẳng c thành chính nó?

A. Không có phép nào.

B. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép.

D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay góc quay 180^o, tâm quay là trung điểm của đoạn thẳng do a và a' chắn ra trên c.

Câu 3. Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó $a \parallel a', b \parallel b'$ và a cắt b. Có bao nhiêu phép quay biến các đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'?

A. Không có phép nào.

B. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép.

D. Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay góc quay 180^o, tâm quay là tâm hình bình hành tạo bởi bốn đường thẳng đã cho.

Câu 4. Cho tam giác đều ABC với trọng tâm G. Phép quay tâm G với góc quay nào dưới đây biến tam giác ABC thành chính nó?

A. 30^o.

B. 45^o.

C. 60^o.

D. 120^o.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 5. Cho hình vuông ABCD có tâm O. Phép quay tâm O với góc quay nào dưới đây biến hình vuông ABCD thành chính nó?

A. 30^o.

B. 45^o.

C. 90^o.

D. 120^o.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép quay tâm O biến điểm $A(1;0)$ thành điểm $A'(0;1)$. Khi đó nó biến điểm $M(1;-1)$ thành điểm:

A. $M'(-1;-1)$.

B. $M'(1;1)$.

C. $M'(-1;1)$.

D. $M'(1;0)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 7. Khi nào thì hợp thành của hai phép quay $Q(O;\varphi)$ và $Q(O;\phi)$ là phép đồng nhất?

A. Khi $\varphi = \phi = 90^o$.

B. Khi $\varphi = \phi = k\pi$, với k nguyên.

C. Khi $\varphi + \phi = 2k\pi$, với k nguyên.

D. Không khi nào.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Hợp thành là phép quay tâm O góc quay $\varphi+\phi$.

Câu 8. Khi nào thì hợp thành của hai phép quay $Q(O;\varphi)$ và $Q(O;\phi)$ là phép đối xứng tâm?

A. Khi $\varphi=\phi=0^o$.

B. Khi $\varphi=\phi=k\pi$, với k nguyên.

C. Khi $\varphi+\phi=2k\pi$, với k nguyên.

D. Không khi nào.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hợp thành là phép quay tâm O góc quay $\varphi+\phi$.

Câu 9. Cho phép quay $Q(O;\varphi)$ biến điểm A thành điểm A' và biến điểm M thành điểm M'. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}$.

B. $(OA,OA')=(OM,OM')=\varphi$.

C. $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'M'}\right)=\varphi$.

D. $AM=A'M'$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, ta xét phép quay $Q(O;\varphi)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Nếu $\varphi=90^o$ thì Q biến trục hoành x'Ox thành trục tung y'Oy.

B. Nếu $\varphi=270^o$ thì Q biến trục tung y'Oy thành trục hoành x'Ox.

C. Nếu $\varphi=-90^o$ thì Q biến trục tung y'Oy thành trục hoành x'Ox.

D. Nếu $\varphi=180^o$ thì Q biến trục hoành x'Ox thành chính nó.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta thấy ngay các câu A, B, C đều đúng.

Nếu $\varphi=180^o$ thì Q biến trục hoành x'Ox thành trục ngược hướng với trục x'Ox.

Câu 11. Trong câu này ta chỉ xét các phép quay với góc quay φ thỏa điều kiện $0^o<\varphi<180^o$. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Không tồn tại phép quay nào biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

B. Có duy nhất một phép quay biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

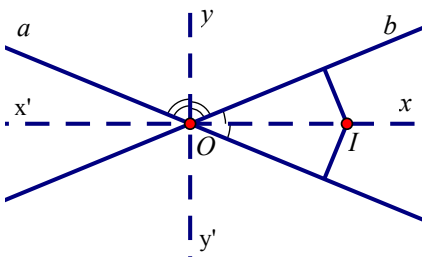
C. Có đúng hai phép quay biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

D. Có vô số phép quay biến đường thẳng a thành đường thẳng b.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Giả sử a và b ở vị trí như hình vẽ.



Gọi α là góc tạo bởi a và b.

+ Ta thấy phép quay $Q\left(O;\alpha\right)$ biến a thành b và phép quay $Q\left(O;180^o-\alpha\right)$ biến b thành a.

+ Mặt khác, chẳng hạn như trên tia Ox ta lấy một điểm I bất kì nào đó, thì phép quay $Q\left(I;180^o-\alpha\right)$ sẽ biến b thành a.

Như thế, với hai đường thẳng a và b cắt nhau sẽ có vô số phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia.

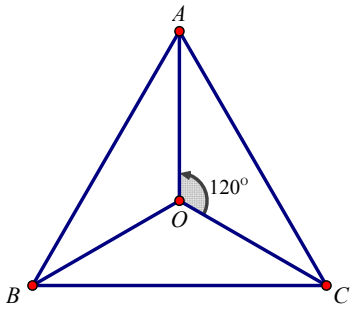
Câu 12. Cho tam giác ABC đều tâm O (O là tâm của đường tròn ngoại tiếp). Ta thực hiện phép quay tâm O biến tam giác ABC thành chính nó. Một số đo của góc quay φ là:

A. 45^o. **B.** 60^o. **C.** 90^o. **D.** 120^o.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Trong tam giác đều ABC tâm O, ta có: $\widehat{COA}=120^o$.



Như vậy phép quay tâm O với góc quay $\varphi=120^o$ sẽ biến tam giác ABC thành chính nó.

Dĩ nhiên phép quay tâm O với góc quay bằng $k180^o$ cũng biến tam giác ABC thành chính nó.

Câu 13. Cho hình vuông ABCD tâm O. Ta xét các mệnh đề sau:

1. Phép quay $Q\left(O;45^o\right)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.
2. Phép quay $Q\left(O;60^o\right)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.
3. Phép quay $Q\left(O;90^o\right)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.
4. Phép quay $Q\left(O;180^o\right)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.

Trong các mệnh đề trên:

A. Có duy nhất một mệnh đề đúng. **B.** Có hai mệnh đề đúng.

C. Có ba mệnh đề đúng. **D.** Tất cả bốn mệnh đề đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hai đường chéo của hình vuông vuông góc với nhau tại O. Dễ thấy các phép quay $Q\left(O;k90^o\right)$ biến hình vuông ABCD thành chính nó.

Câu 14. Cho ngũ giác đều ABCDE tâm O. Ta xét các mệnh đề sau:

1. Phép quay $Q\left(O;72^o\right)$ biến hình vuông ABCDE thành chính nó.
2. Phép quay $Q\left(O;90^o\right)$ biến hình vuông ABCDE thành chính nó.
3. Phép quay $Q\left(O;144^o\right)$ biến hình vuông ABCDE thành chính nó.
4. Phép quay $Q\left(O;216^o\right)$ biến hình vuông ABCDE thành chính nó.

Trong các mệnh đề trên:

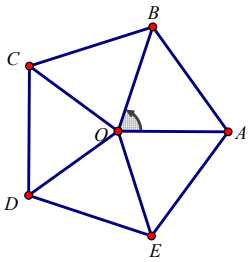
A. Có duy nhất một mệnh đề đúng. **B.** Có hai mệnh đề đúng.

C. Có ba mệnh đề đúng. **D.** Tất cả bốn mệnh đề đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{COD}=\widehat{DOE}=\widehat{EOA}=72^o$.



Do đó các phép quay tâm O với góc quay bằng $k72^o$ đều biến ngũ giác đều ABCDE thành chính nó.

Như thế các câu 1, 3, 4 đều đúng,, câu 2 sai.

Câu 15. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Ta xét các mệnh đề sau:

1. Phép quay $Q\left(O;60^o\right)$ biến hình vuông ABCDEF thành chính nó.
2. Phép quay $Q\left(O;120^o\right)$ biến hình vuông ABCDEF thành chính nó.
3. Phép quay $Q\left(O;180^o\right)$ biến hình vuông ABCDEF thành chính nó.
4. Phép quay $Q\left(O;240^o\right)$ biến hình vuông ABCDEF thành chính nó.

Trong các mệnh đề trên:

A. Có duy nhất một mệnh đề đúng. **B.** Có hai mệnh đề đúng.

C. Có ba mệnh đề đúng. **D.** Tất cả bốn mệnh đề đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tương tự như câu 38; do đó các phép quay tâm O với góc quay bằng $k60^o$ đều biến lục giác đều ABCDEF thành chính nó.

Như thế tất cả các câu 1, 2, 3, 4 đều đúng.

Câu 16. Cho phép quay $Q(O;\varphi)$ biến điểm M thành điểm M'. Chọn câu **sai** trong các câu sau:

A. Phép quay $Q(O;\varphi)$ là một phép dời hình.

B. Phép quay $Q(O;\varphi)$ có O là một điểm bất động.

C. Ta luôn có $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}$ và $\widehat{MOM'}=\varphi$.

D. Ta luôn có $OM=OM'$ và $(OM,OM')=\varphi$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, có hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $2x+y+5=0$ và $x-2y-3=0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay φ là:

A. 45^o. **B.** 60^o. **C.** 90^o. **D.** 120^o.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta thấy ngay hai đường thẳng a và b có phương trình $2x+y+5=0$ và $x-2y-3=0$ là vuông góc với nhau. Suy ra $\varphi=90^o$.

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, có hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $4x+3y+5=0$ và $x+7y-4=0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay φ là:

A. 45^o. **B.** 60^o. **C.** 90^o. **D.** 120^o.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Đường thẳng $a: 4x+3y+5=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{u}=(4;3)$.

Đường thẳng $b: x+7y-4=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{v}=(1;7)$.

Gọi α là góc tạo bởi a và b ta có: $\cos\alpha=\left|\cos(\vec{u},\vec{v})\right|=\dfrac{|4.1+3.7|}{\sqrt{4^2+3^2}.\sqrt{1^2+7^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $\alpha=45^o$.

Vậy $\varphi=45^o$.

Câu 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(4;1)$. Phép quay $Q(O;90^o)$ biến điểm M thành điểm M' có tọa độ là:

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;-4)$. **D.** $(-1;-4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Nhận thấy:

+ $OM=OM'=\sqrt{17}$.

+ $\overrightarrow{OM}=(4;1)$, $\overrightarrow{OM'}=(-1;4)\Rightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}=0$

Do đó $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{OM'}$.

Vậy, phép quay $Q(O;90^o)$ biến điểm M thành điểm $M'(-1;4)$.

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(x;y)$. Phép quay $Q(O;\alpha)$ biến điểm M thành điểm M' có tọa độ là:

A. $(x\cos\alpha;y\sin\alpha)$. **B.** $(y\cos\alpha;x\sin\alpha)$.

C. $(x\cos\alpha-y\sin\alpha;x\sin\alpha+y\cos\alpha)$. **D.** $(x\cos\alpha+y\sin\alpha;x\sin\alpha-y\cos\alpha)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

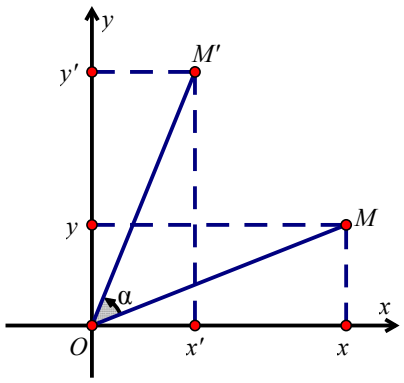
Theo tính chất của phép quay ta có: $OM = OM'$.

Đặt $(Ox, OM) = \beta$, thế thì: $x = OM\cos\beta, y = OM\sin\beta$.

Ta có; $(Ox, OM') = \alpha + \beta$.

Do đó:

$$\begin{aligned} + \; x' &= OM'\cos(\alpha+\beta) \\ &= OM(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ + \; y' &= OM'\sin(\alpha+\beta) \\ &= OM(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$



Vậy: $M'(x\cos\alpha - y\sin\alpha; x\sin\alpha + y\cos\alpha)$.

Câu 21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;4)$, $B(-2;2)$, $C(7;-9)$. Phép quay $Q(O;90^o)$ biến trọng tâm G của ΔABC thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(1;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;-1)$. **D.** $(-3;1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta có $G(2;-1)$. Suy ra $G'(1;2)$.

Câu 22. Cho tam giác đều ABC có tâm O và các đường cao AA', BB', CC' (các đỉnh của tam giác ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của đường cao AA' qua phép quay $Q(O;240^o)$ là:

A. AA'. **B.** BB'.

C. CC'. **D.** Một đoạn thẳng qua O song song với BC.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay $Q(O;240^o)$ biến A thành B; A' thành B'.

Vậy ảnh của AA' là BB'.

Câu 23. Cho hình vuông ABCD tâm O (các đỉnh ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của cạnh AB qua phép quay $Q(O;270^o)$ là:

A. AB. **B.** BC. **C.** CD. **D.** DA.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay $Q\left(O;270^o\right)$ biến A thành B, B thành C.

Vậy ảnh của AB là BC.

Câu 24. Cho hình thoi ABCD có góc $\widehat{ABC}=60^o$ (các đỉnh của hình thoi ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của cạnh CD qua qua phép quay $Q\left(A;60^o\right)$ là:

A. AB. **B.** BC. **C.** CD. **D.** DA.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép quay $Q\left(A;60^o\right)$ biến C thành B; D thành C.

Vậy ảnh của CD là BC.

Câu 25. Cho tam giác ABC vuông tại B và góc tại A bằng 60^o (các đỉnh của tam giác ghi theo chiều kim đồng hồ). Về phía ngoài tam giác vẽ tam giác đều ACD. Ảnh của cạnh BC qua phép quay $Q\left(A;60^o\right)$ là:

A. AD. **B.** AI với I là trung điểm của CD.

C. CJ với J là trung điểm của AD. **D.** DK với K là trung điểm của AB.

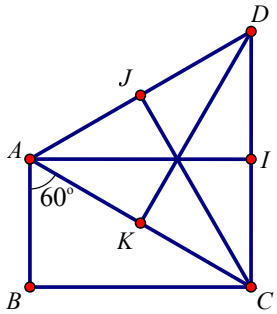
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Từ giả thiết suy ra ABC là nửa tam giác đều, do đó $AC=2AB$.

Phép quay $Q\left(A;60^o\right)$ biến B thành K; C thành D.

Vậy ảnh của BC là DK.



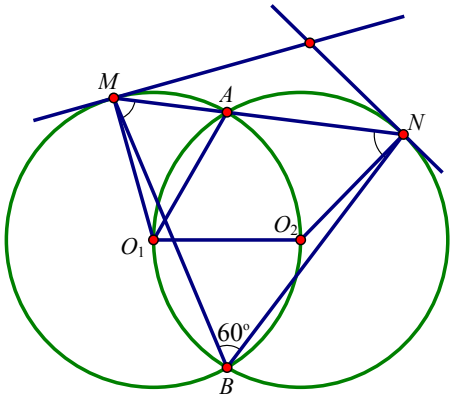
Câu 26. Cho hai đường tròn $\left(O_1\right),\left(O_2\right)$ bằng nhau; mỗi đường tròn đi qua tâm của đường tròn kia, cắt nhau tại hai điểm A và B. Đường cát tuyến đi qua giao điểm A của chúng cắt một đường tròn ở M và cắt đường tròn kia ở N. Góc tạo bởi hai tiếp tuyến tại M, N của hai đường tròn bằng:

A. 45^o. **B.** 60^o. **C.** 90^o. **D.** 120^o.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

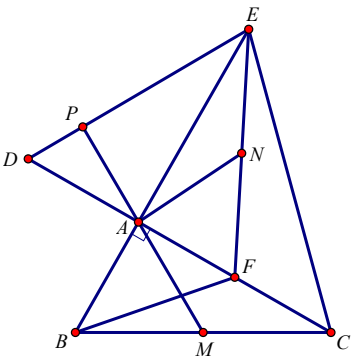
Từ giả thiết ta thấy ΔBO_1O_2 là tam giác đều, do đó $\widehat{O_1BO_2} = 60^o$, suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{IO_1B} = 60^o$ và $\widehat{ANB} = \widehat{IO_2B} = 60^o$. Như thế ΔBMN đều và $\widehat{MBN} = 60^o$.



Thực hiện phép quay Q tâm B với góc quay $\varphi = 60^o$. Phép quay này biến O_2 thành O_1 nên biến đường tròn (O_2) thành đường tròn (O_1); biến N thành M, nên biến tiếp tuyến tại N của (O_2) thành tiếp tuyến tại M của (O_1).

Suy ra góc hợp bởi hai tiếp tuyến tại M và N là 60^o.

Câu 27. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ta vẽ các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE; gọi M là trung điểm của BC. Để chứng minh đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng DE, một học sinh lập luận qua ba bước như sau:



Bước 1: Thực hiện phép quay Q tâm A góc quay . Phép quay này biến B thành F là trung điểm của AC; biến C thành E; do đó Q biến BC thành FE.

Bước 2: Như thế Q biến trung điểm M của BC thành trung điểm N của FE. Suy ra $\widehat{MAN} = 90^o$ hay $AM \perp AN$.

Bước 3: Mặt khác AN là đường trung bình của ΔDEF nên $AN \parallel DE$; do vậy $AM \perp DE$.

Hỏi cách chứng minh trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Chứng minh hoàn toàn đúng. **B.** Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

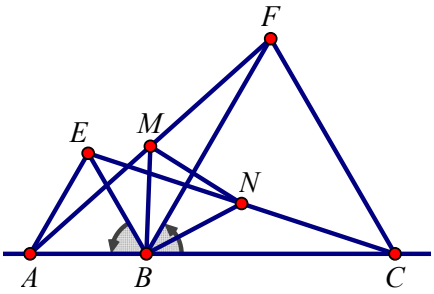
ĐÁP ÁN A.

Câu 28. Biết B nằm giữa A và C; trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC dựng các tam giác đều ABE, BCF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AF, CE. Để chứng minh tam giác AMN đều, một học sinh chứng minh qua ba bước như sau:

Bước 1: Thực hiện phép quay Q tâm B với góc quay $\varphi = 60^o$.

Phép quay Q biến E thành A; biến C thành F.

Bước 2: Do đó Q biến đoạn thẳng EC thành đoạn thẳng AF. Như thế Q biến trung điểm N của EC thành trung điểm M của AF.



Bước 3: Từ kết quả trên suy ra: $BN = BM$ và $\widehat{NBM} = 60^o$.

Kết luận: Tam giác BMN là tam giác đều.

Hỏi cách chứng minh trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Chứng minh hoàn toàn đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

BÀI 6. KHÁI NIỆM PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Khái niệm về phép dời hình

Các phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều có một tính chất chung là bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ. Người ta dùng tính chất đó để định nghĩa phép biến hình sau đây.

Định nghĩa

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Nếu phép dời hình F biến các điểm M, N lần lượt thành các điểm M', N' thì MN = M'N'.

Nhận xét

1) Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình.

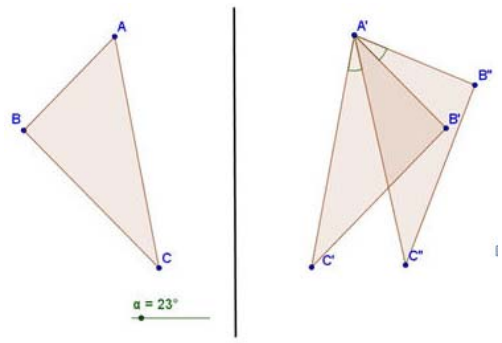
2) Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.

Ví dụ 1.

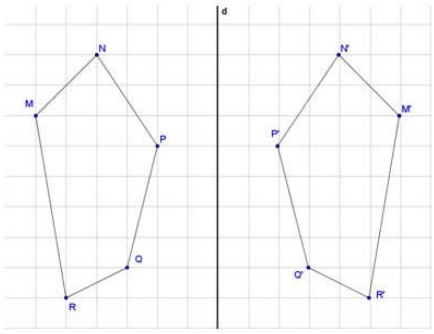
a) Tam giác A'B''C'' là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình (h.1.39a).

b) Ngũ giác MNPQR là ảnh của ngũ giác M'N'P'Q'R' qua phép dời hình (h.1.39b).

c) Hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua phép dời hình (h.1.40)



Hình 1.39 a

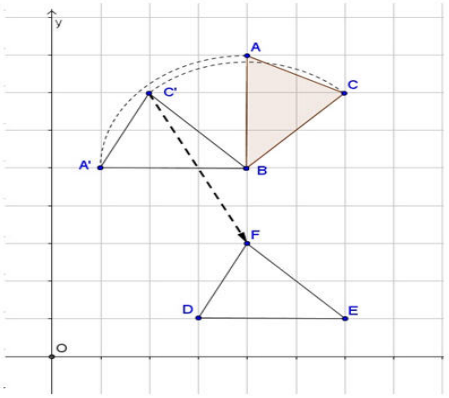


Hình 1.39 b

Ví dụ 2.

Trong hình 1.42 tam giác DEF là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm B góc 90^0và phép tịnh tiến theo vectơ

$\vec{v} = \overrightarrow{C'F} = (2; -4)$.



Hình 1.42

II. Tính chất

Phép dời hình:

1) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm;

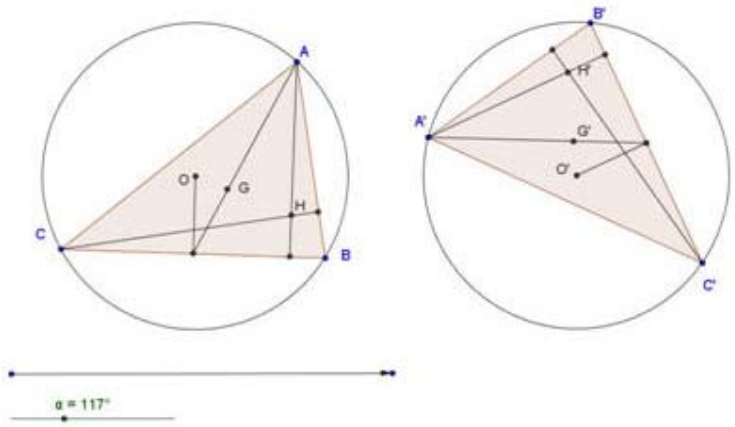
2) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;

3)Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.

4) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Chú ý.

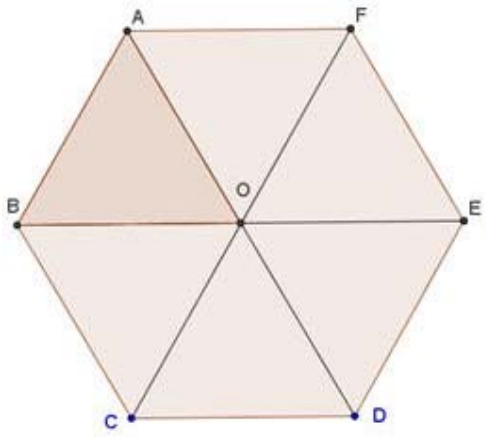
a) Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì nó cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác A'B'C' (h.1.44).



Hình 1.44

b) Phép dời hình biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, biến cạnh thành cạnh.

Ví dụ 3. Cho lục giác đều ABCDEF, O là tâm đường tròn ngoại tiếp của nó (h.1.45). Tìm ảnh của tam giác OAB qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc 60^0 và phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OE}$.

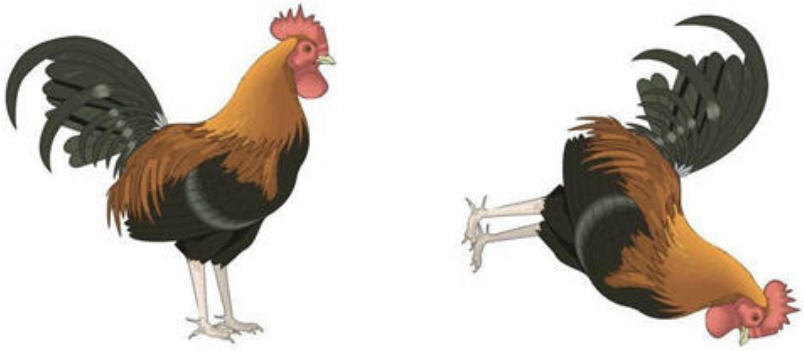


Hình 1.45

Giải

Gọi phép dời hình đã cho là F. Chỉ cần xác định ảnh của các đỉnh của tam giác OAB qua phép dời hình F. Ta có phép quay tâm O, góc 60^0biến O, A và B lần lượt thành O, B, C. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OE}$. biến O, B và C lần lượt thành E, O và D. Từ đó suy ra F(O) = E, F(A) = O, F(B)=D. Vậy ảnh của tam giác OAB qua phép dời hình F là tam giác EOD.

II. Khái niệm hai hình bằng nhau



Hình 1.47

Quan sát hình hai con gà trong tranh dân gian (h.1.47), vì sao có thể nói hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ bằng nhau?

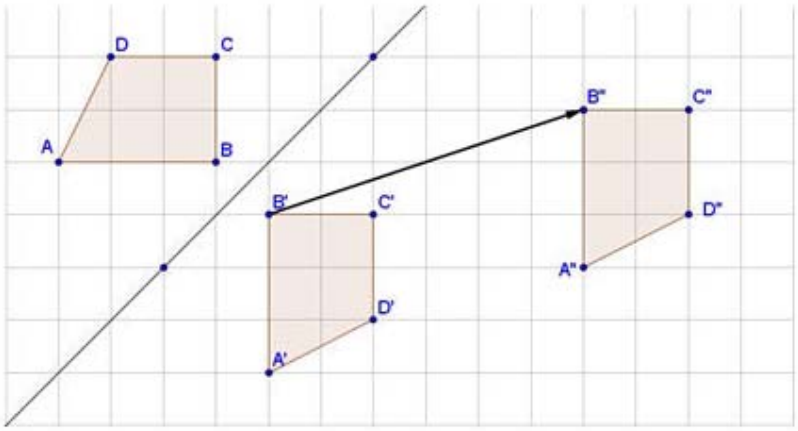
Chúng ta đã biết phép dời hình biến một tam giác thành tam giác bằng nó. Người ta cũng chứng minh được rằng với hai tam giác bằng nhau luôn có một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia. Vậy hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi có một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia. Người ta dùng tiêu chuẩn đó để định nghĩa hai hình bằng nhau.

Định nghĩa

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

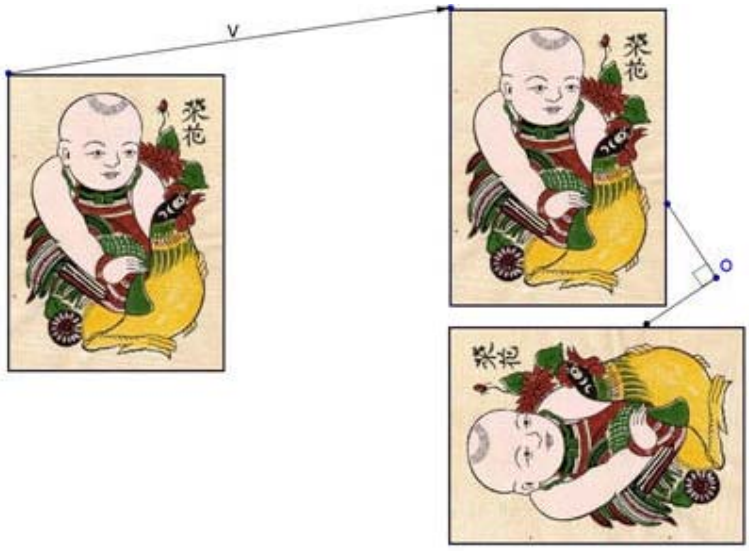
Ví dụ 4

a) Trên hình 1.48, hai hình thang ABCD và A''B''C''D'' bằng nhau vì có một phép dời hình biến hình thang ABCD thành hình thang A''B''C''D''.



Hình 1.48

b) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{B}$, phép quay tâm O góc 90^0 biến hình $\mathscr{B}$ thành hình $\mathscr{C}$. Do đó phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và phép quay tâm O góc 90^0 biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{C}$. Từ đó suy ra hai hình $\mathscr{A}$ và $\vec{v}$ bằng nhau (h.1.49).



Hình 1.49

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai đường thẳng song song là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Vectơ tịnh tiến là $2\overrightarrow{HK}$ có H, K lần lượt nằm trên trục của phép thứ nhất và phép thứ hai sao cho HK vuông góc với các trục đó.

Câu 2. Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai đường thẳng cắt nhau là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tâm quay là giao điểm của hai trục d và d' của hai phép đối xứng trục, góc quay bằng hai lần góc (d,d').

Câu 3. Hợp thành của hai phép đối xứng qua hai đường thẳng vuông góc với nhau là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép đối xứng qua giao điểm của hai trục đối xứng.

Câu 4. Hợp thành của hai phép tịnh tiến là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Vectơ tịnh tiến bằng tổng hai vectơ tịnh tiến của hai phép đã cho.

Câu 5. Hợp thành của hai phép đối xứng tâm là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OO'}$, trong đó O là tâm của phép đối xứng thứ nhất, O' là tâm của phép đối xứng thứ hai.

Câu 6. Khi nào thì hợp thành của hai phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và $T_{\vec{v}}$ là phép đồng nhất?

A. Không khi nào.

B. Khi $\vec{u}=\vec{v}=\vec{0}$.

C. Khi $\vec{u}=\vec{v}$.

D. Khi $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Vì hợp thành là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}+\vec{v}$.

Câu 7. Khi nào thì hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ là phép đồng nhất?

A. Khi hai đường thẳng a và b trùng nhau.

B. Khi hai đường thẳng a và b song song.

C. Khi hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau.

D. Không khi nào.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Khi a và b trùng nhau, nếu $Đ_a$ biến điểm M thành điểm N thì $Đ_b$ biến điểm N thành điểm M.

Câu 10. Cho hình vuông ABCD. Gọi phép biến hình F là hợp thành của hai phép đối xứng trục D_{AC} và D_{BD}. Khi đó F là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AC}$.

B. Phép quay tâm D với góc quay $\frac{\pi}{2}$.

C. Phép đối xứng qua giao điểm của AC và BD.

D. Phép đối xứng qua đường thẳng BD.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Nhận xét rằng F biến A thành C và B thành D.

Câu 11. Gọi F là hợp thành của hai phép đối xứng tâm D_O và $D_{O'}$. Khi đó F là:

A. phép đối xứng qua trung điểm của OO'.

B. phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OO'}$.

C. phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$.

D. phép đối xứng qua trung trực của OO'.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Hãy xác định ảnh của điểm O qua phép F.

Câu 12. Cho hình chữ nhật ABCD với M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi F là hợp thành của phép tịnh tiến T theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ và phép đối xứng qua đường thẳng BC. Khi đó F là phép nào trong các phép sau đây?

A. Phép đối xứng qua điểm M.

B. Phép đối xứng qua điểm N.

C. Phép đối xứng qua tâm O của hình chữ nhật.

D. Phép đối xứng qua đường thẳng MN.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Bằng cách tìm ảnh của các điểm A và D qua phép F sẽ thấy các phương án A, B, C đều không đúng.

Câu 13. Cho hình vuông ABCD. Gọi Q là phép quay tâm A biến điểm B thành điểm D, Đ là phép đối xứng qua đường thẳng AD. Khi đó hợp thành của hai phép Q và Đ là:

A. Phép đối xứng qua tâm hình vuông. **B.** Phép đối xứng qua đường thẳng AC.

C. Phép đối xứng qua đường thẳng AB. **D.** Phép đối xứng qua điểm C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép hợp thành đó biến B thành D, biến D thành B và biến A thành A nên các phương án A, C, D đều không đúng.

Câu 14. Cho hình vuông ABCD. Gọi Q là phép quay tâm A biến B thành D, Q' là phép quay tâm C biến D thành B. Hợp thành của hai phép Q và Q' là:

A. Phép đối xứng qua điểm B. **B.** Phép đối xứng qua đường thẳng AC.

C. Phép đối xứng qua đường thẳng AB. **D.** Phép đối xứng qua điểm C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép hợp thành đó biến điểm B thành điểm B nên phương án B và D không đúng. Nó lại không biến điểm A thành điểm A nên phương án C không đúng.

Câu 15. Cho hình vuông ABCD. Gọi Q là phép quay tâm A biến B thành D, Q' là phép quay tâm C biến B thành D. Hợp thành của hai phép Q và Q' là:

A. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$. **B.** Phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AD}$.

C. Phép đối xứng qua đường thẳng AB. **D.** Phép đối xứng qua điểm C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép hợp thành đó biến điểm A thành điểm A', đối xứng với A qua D nên phương án B đúng.

Câu 16. Cho hình vuông ABCD, I là trung điểm cạnh AB. Gọi phép biến hình F là hợp thành của hai phép: Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$ và phép đối xứng tâm D_I. Khi đó F là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng qua điểm A. **B.** Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AC}$.

C. Phép quay tâm D với góc quay $\frac{\pi}{2}$. **D.** Phép đối xứng qua đường thẳng BD.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép hợp thành đó biến điểm A thành điểm A, nên chỉ có phương án A đúng.

Câu 17. Cho hình vuông ABCD. Gọi phép biến hình F là hợp thành của hai phép đối xứng trục D_{AB} và D_{CD}. Khi đó F là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng qua điểm A.

B. Phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AD}$.

C. Phép đối xứng qua điểm B.

D. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 18. Cho tam giác cân ABC đỉnh A, đường cao AH, với $\widehat{BAC}=\varphi$. Gọi phép biến hình F là hợp thành của hai phép đối xứng trục D_{AB} và D_{AH}. Khi đó F là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép quay $Q(A;\varphi)$.

B. Phép đối xứng qua đường thẳng AC.

C. Phép đối xứng qua điểm A.

D. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép hợp thành đó biến điểm A thành điểm A, và biến B thành D.

Câu 19. Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Nếu phép dời hình biến điểm B thành điểm C và biến điểm A thành chính nó thì đó là:

A. Phép đối xứng qua trung trực của BC.

B. Phép quay tâm A góc quay (AB,AC).

C. Phép đối xứng qua trung trực của BC hoặc phép quay tâm A góc quay (AB,AC).

D. Phép đối xứng qua trung điểm cạnh BC.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Có thể xảy ra phương áng A hoặc phương án B.

Câu 20. Cho tam giác cân ABC đỉnh A. Nếu phép dời hình biến điểm B thành điểm C, biến điểm C thành B thì đó là:

A. Phép đối xứng qua trung trực của BC.

B. Phép đối xứng qua trung điểm cạnh BC.

C. Phép quay tâm A góc quay (AB,AC).

D. Phép đối xứng qua trung trực của BC hoặc đối xứng qua trung điểm BC.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Có thể xảy ra phương án A hoặc phương án B.

Câu 21. Cho hình thoi ABCD có góc A bằng 60^o . Nếu phép dời hình biến điểm A thành điểm B và điểm B thành điểm D thì nó biến điểm D thành:

A. Điểm C.

B. Điểm A.

C. Điểm C hoặc điểm A.

D. Điểm đối xứng với D qua C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Nếu phép dời hình đó biến điểm D thành điểm D' thì hai tam giác ABD và BDD' phải bằng nhau. Vậy D' phải trùng với C hoặc A.

Câu 22. Cho hình chữ nhật ABCD, tâm O với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Nếu phép dời hình biến điểm A thành điểm N, M thành O và O thành P thì nó biến điểm Q thành:

A. Điểm D.

B. Điểm C.

C. Điểm Q.

D. Điểm B.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Nếu phép dời hình đó biến điểm Q thành điểm Q' thì hai hình chữ nhật AMOQ và tứ giác NOPQ' phải bằng nhau. Vậy Q phải trùng với C.

Câu 23. Cho hình vuông ABCD, tâm O với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Nếu phép dời hình biến điểm A thành M, B thành P thì nó biến điểm M thành:

A. Điểm O.

B. Điểm C.

C. Điểm Q.

D. Điểm B.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Nếu phép dời hình đó biến điểm M thành điểm M' thì vì M là trung điểm AB nên M' là trung điểm MP, nên M trùng với O.

Câu 24. Cho hình chữ nhật ABCD, tâm O với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Nếu phép dời hình biến tam giác AMQ thành tam giác NOP thì nó biến điểm O thành:

A. Điểm D.

B. Điểm B.

C. Điểm Q.

D. Điểm C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Nếu phép dời hình đó biến điểm O thành điểm O' thì vì bốn điểm A, M, Q, O là bốn đỉnh của hình chữ nhật nên bốn điểm N, O, P, O' cũng là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Suy ra O' trùng với đỉnh C.

Câu 25. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Phép quay $Q(O;\varphi)$ với $\varphi = 180^o$ là phép đối xứng tâm $Đ_O$.

B. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ là một phép dời hình.

C. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ có một điểm bất động duy nhất là điểm O.

D. Phép đối xứng tâm $Đ_O$ nếu biến điểm M thành điểm M' thì ta có $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta thấy ngay các câu A, B, Cđều đúng.

Phép đối xứng tâm $Đ_O$ nếu biến điểm M thành điểm M' thì ta có $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$.

Câu 26. Chọn mệnh đề đúng:

A. Hợp của hai phép quay là một phép quay.

B. Hợp của hai phép đối xứng tâm là một phép đối xứng tâm.

C. Một phép đối xứng tâm không thể có nhiều hơn một điểm bất động.

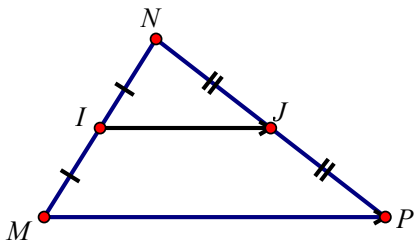
D. Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ trong trường hợp nào đó có thể là một phép đối xứng tâm.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

- Hợp của hai phép quay là một phép quay, chỉ đúng khi hai phép quay này có cùng tâm quay.

- Ta hãy xét hai phép đối xứng tâm $Đ_I$ và $Đ_J$ với I và J khác nhau.



Với M là một điểm bất kì, ta gọi: $Đ_I(M) = N$ và $Đ_J(N) = P$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{NJ}$.

Suy ra: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = 2\left(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NJ}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$: không đổi.

Như thế phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{IJ}$ biến điểm M thành điểm P.

Vậy: hợp của hai phép đối xứng tâm $Đ_I$ và $Đ_J$ với I và J khác nhau là một phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = 2\vec{IJ}$.

- Phép đối xứng tâm $Đ_O$ có một điểm bất động duy nhất là O.

- Phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ không thể là một phép đối xứng tâm.

Câu 27. Ta xét các mệnh đề:

1. Tam giác đều có 3 trục đối xứng và 1 tâm đối xứng.
2. Hình vuông có 4 trục đối xứng và 1 tâm đối xứng.
3. Ngũ giác đều có 5 trục đối xứng và 1 tâm đối xứng.
4. Lục giác đều có 6 trục đối xứng và 1 tâm đối xứng.

Trong các mệnh đề trên:

A. Có 1 mệnh đề đúng.

B. Có 2 mệnh đề đúng.

C. Có 3 mệnh đề đúng.

D. Cả 4 mệnh đề đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

+ Đa giác đều n cạnh thì có n trục đối xứng.

+ Đa giác đều nếu số cạnh n chẵn thì có một tâm đối xứng, và nếu số cạnh n lẻ thì không có tâm đối xứng.

Như thế trong 4 câu trên có hai câu 4 và 4 là đúng.

Câu 28. Một hình H được gọi là có một tâm đối xứng nếu:

A. Tồn tại một phép tịnh tiến biến H thành chính nó.

B. Tồn tại một phép quay biến H thành chính nó.

C. Tồn tại một một phép đối xứng trục biến H thành chính nó.

D. Tồn tại phép đối xứng tâm biến H thành chính nó.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 29. Cho hai điểm phân biệt I và J. Thực hiên phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành điểm M', sau đó tiếp tục thực hiện phép đối xứng tâm $Đ_J$ biến điểm M' thành điểm M''. Như vậy phép biến hình biến điểm M thành M'' là:

A. Một phép tịnh tiến.

B. Một phép đối xứng tâm.

C. Một phép quay.

D. Một phép đối xứng trục.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Theo cách chứng minh trong câu 29 thì hợp của hai phép đối xứng tâm với hai tâm phân biệt là một phép tịnh tiến.

Câu 30. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Ta thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục, phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm M thành điểm M' và phép đối xứng trục $Đ_b$ biến điểm M' thành điểm M''. Như vậy phép biến hình biến điểm M thành điểm M'' là:

A. Một phép tịnh tiến.

B. Một phép đối xứng tâm.

C. Một phép quay.

D. Một phép đối xứng trục.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Gọi α là góc tạo bởi a và b, I và J lần lượt là trung điểm của MM' và M'M".

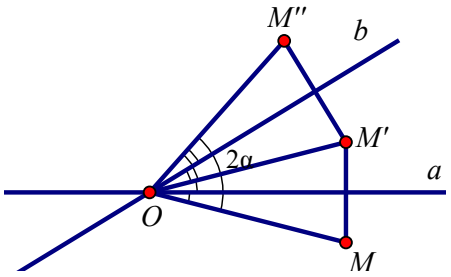
Theo tính chất của phép quay ta có:

+ $OM = OM'$ và $\widehat{MOM'} = 2\widehat{IOM'}$.

+ $OM' = OM''$ và $\widehat{M'OM''} = 2\widehat{M'OJ}$.

Suy ra $OM = OM''$ và $\widehat{MOM''} = 2\widehat{IOJ} = 2\alpha$.

Như vậy phép biến hình biến M thành M" là phép quay tâm O với góc quay 2α; tức là hợp của hai phép đối xứng trục với hai trục cắt nhau là một phép quay.



Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình H gồm có hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $y = 2x$ và $y = -2x$.

Ta xét các mệnh đề sau:

1. Trục hoành là trục đối xứng của hình H.
2. Trục tung là trục đối xứng của hình H.
3. Gốc tọa độ O là tâm đối xứng của hình H.

Trong các mệnh đề trên:

A. Không có mệnh đề nào đúng.

B. Có một mệnh đề đúng.

C. Có hai mệnh đề đúng.

D. Tất cả ba mệnh đề đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta thấy hai đường thẳng $a: y = 2x$ và $b: y = -2x$ thì đối xứng với nhau qua trục hoành và trục tung và đi qua gốc tọa độ O. Suy ra cả ba mệnh đề 1, 2, 3 đều đúng.

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $I(-1;2)$ và $J(2;4)$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_I$ và $Đ_J$ (theo thứ tự), điểm $M(1;-3)$ biến thành điểm M' có tọa độ là:

A. $(2;-7)$. **B.** $(4;-1)$. **C.** $(7;1)$. **D.** $(0;-8)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_I$ và $Đ_J$ (theo thứ tự) ta được phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=2\vec{IJ}$. Suy ra $\vec{u}=(6;4)$.

Do đó: $M'=(6+1;4-3)=(7;1)$. Vậy $M'(7;1)$.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;1)$ và $B(2;-1)$ và parabol (P) có phương trình $y=x^2$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự), parabol (P) biến thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=x^2-8x+12$. **B.** $y=x^2-4x+8$. **C.** $y=x^2+6x+4$. **D.** $y=x^2+4x-10$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự) ta được phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}$. Suy ra $\vec{u}=(4;-4)$.

Do đó: Phương trình (P') là $y+4=(x-4)^2\Leftrightarrow y=x^2-8x+12$.

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$, $B(2;3)$ và đường thẳng a có phương trình $y=-4x+1$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự), đường thẳng a biến thành đường thẳng a' có phương trình là:

A. $y=4x+5$. **B.** $y=-4x+17$. **C.** $y=4x-12$. **D.** $y=-4x-4$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự) ta được phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}$. Suy ra $\vec{u}=(2;8)$.

Do đó: Phương trình (a') là $y-8=-4(x-2)+1\Leftrightarrow y=-4x+17$.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-1;0)$, $B(1;1)$ và đường tròn (T) có phương trình $x^2+y^2+4x=0$. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự), đường tròn (T) biến thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.

B. $x^2+y^2-4x-4y+4=0$.

C. $x^2+y^2+6x-2y-1=0$.

D. $x^2+y^2+4y-8=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm $Đ_A$ và $Đ_B$ (theo thứ tự) ta được phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}$. Suy ra $\vec{u}=(4;2)$.

Do đó: Phương trình của đường tròn (T') là:

$(x-4)^2+(y-2)^2+4(x-4)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+4=0$.

Câu 36. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Đường thẳng đi qua tâm của một hình tròn thì chia hình tròn đó thành hai hình bằng nhau.

B. Đường thẳng đi qua tâm của một hình vuông thì chia hình vuông đó thành hai hình bằng nhau.

C. Đường thẳng đi qua tâm của một tam giác đều thì chia tam giác đều đó thành hai hình bằng nhau.

D. Đường thẳng đi qua tâm của một hình bình hành thì chia hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

+ Câu A hiển nhiên đúng.

+ Tâm O của hình vuông cũng là tâm đối xứng của nó, nên mọi đường thẳng qua tâm O của hình vuông đều chia hình vuông thành hai hình bằng nhau.

+ Trường hợp hình bình hành cũng tương tự như hình vuông.

+ Nếu ΔABC đều có tâm O, thì O không phải là tâm đối xứng của nó. Như thế những đường thẳng đi qua O không chứa các đường cao của ΔABC sẽ chia tam giác này thành hai hình không bằng nhau.

Câu 37. Cho hình H gồm có hình bình hành ABCD tâm I và hình bình hành EFGK tâm J. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Không tồn tại đường thẳng nào chia H thành hai hình bằng nhau.

B. Có vô số đường thẳng chia H thành hai hình bằng nhau.

C. Đường trung trực của đoạn thẳng IJ chia H thành hai hình bằng nhau.

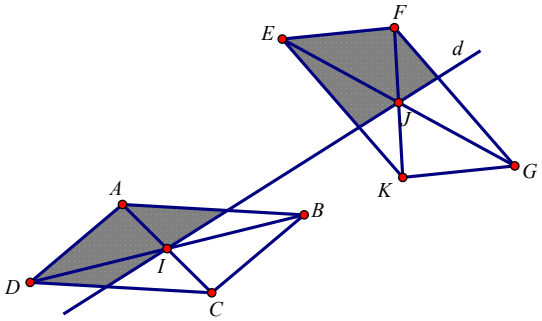
D. Đường thẳng qua I và J chia H thành hai hình bằng nhau.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Ta đã biết, giao điểm của hai đường chéo của một hình bình hành cũng là tâm đối xứng của hình bình hành đó. Do đó, bất kì đường thẳng nào đi qua tâm của một hình bình hành đều chia hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

Thế nên với hai hình bình hành ABCD và EFGK bất kì, nếu gọi I và J là các tâm đối xứng của chúng thì đường thẳng đi qua I và J sẽ chia mỗi hình bình hành ABCD và EFGK thành hai hình bằng nhau.



Câu 38. Cho hình H gồm có lục giác đều ABCDEF tâm I và hình thoi MNPQ tâm J. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Không tồn tại đường thẳng nào chia H thành hai hình bằng nhau.

B. Có vô số đường thẳng chia H thành hai hình bằng nhau.

C. Đường trung trực của đoạn thẳng IJ chia H thành hai hình bằng nhau.

D. Đường thẳng qua I và J chia H thành hai hình bằng nhau.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Lý luận tương tự như câu 37.

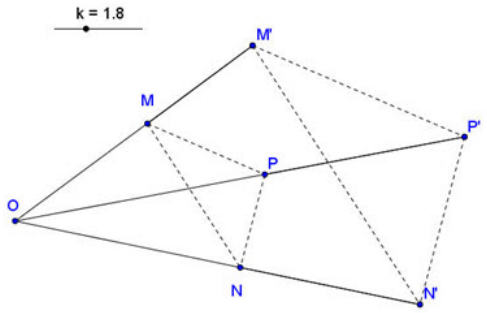
BÀI 7. PHÉP VỊ TỰ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

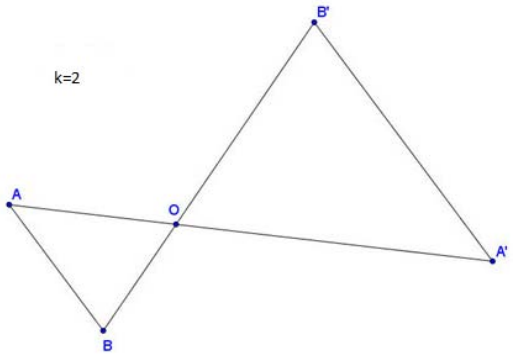
Định nghĩa

Cho điểm O và số $k \neq 0$ *.Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho* $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k (h.1.50).*

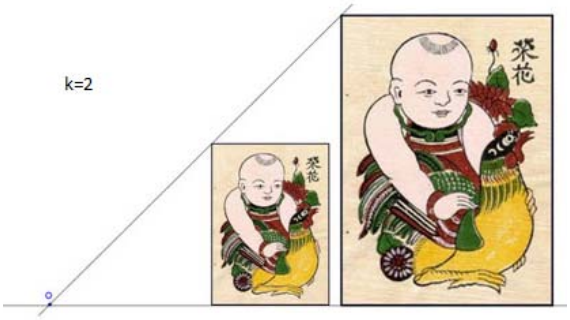


Hình 1.50

Phép vị tự tâm O, tỉ số k thường được kí hiệu là $V_{(O;k)}$



Hình 1.51 a



Hình 1.51b

Ví dụ 1

a) Trên hình 1.51a các điểm A', B', O lần lượt là ảnh của các điểm A, B, O qua phép vị tự tâm O tỉ số -2.

b) Trong hình 1.51b phép vị tự tâm O, tỉ số 2 biến hình H thành hình H '.

1. Cho tam giác ABC. Gọi E và F tương ứng là trung điểm AB và AC. Tìm một phép tự biến B và C tương ứng thành E và F.

Nhận xét

1) Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.

2) Khi k = 1, phép vị tự là phép đồng nhất

3) Khi k = -1, phép vị tự là phép đối xứng qua tâm vị tự.

4) $M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{(O,\frac{1}{k})}(M')$.

II. TÍNH CHẤT

Tính chất 1

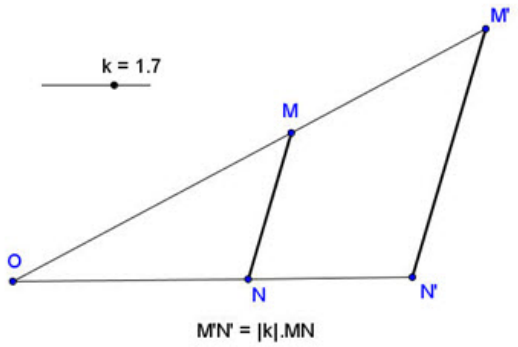
Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ *và* $M'N' = |k|.MN$.

Chứng minh

Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k. Theo định nghĩa của phép vị tự ta có: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$ (h.1.52). Do đó:

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{ON} - k\overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k\overrightarrow{MN}$$

Từ đó suy ra M'N' = |k|.MN.



Hình 1.52

Ví dụ 2. Gọi A', B', C' theo thứ tự là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tỉ số k. Chứng minh $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$, t ∈ R $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{A'C'}$

Giải

Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k, ta có: $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$.

Do đó: $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'} = t\frac{1}{k}\overrightarrow{A'C'} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{A'C'}$

Tính chất 2

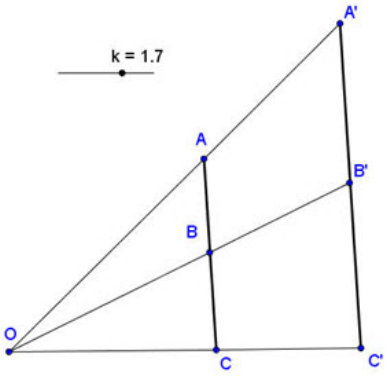
Phép vị tự tỉ số k:

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy (h.1.53).

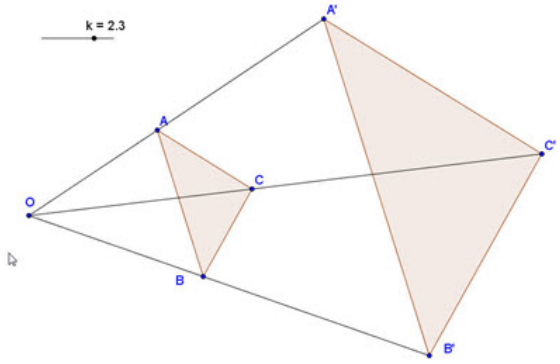
b)Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó (h.1.54).

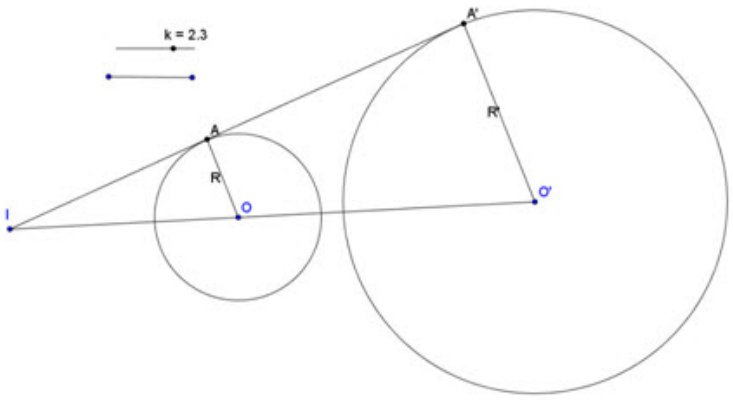
d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$ (h.1.55)



Hình 1.53



Hình 1.54



Hình 1.55

II. TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Ta đã biết phép vị tự biến đường tròn thành đường tròn. Ngược lại, ta có định lý sau:

Định lý

Với hai đường tròn bất kỳ luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Tâm của phép vị tự đó được gọi là *tâm vị tự của hai đường tròn.*

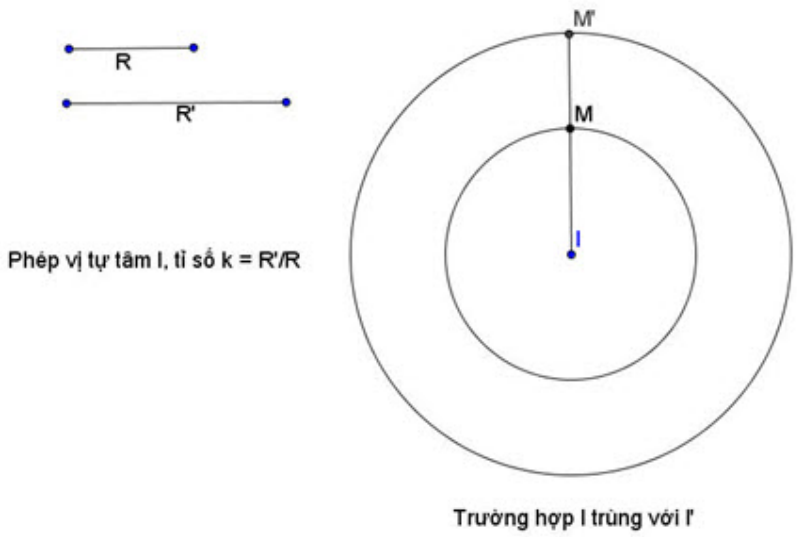
Cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (I; R) và (I';R').

Có ba trường hợp xảy ra:

+ Trường hợp I trùng với I'

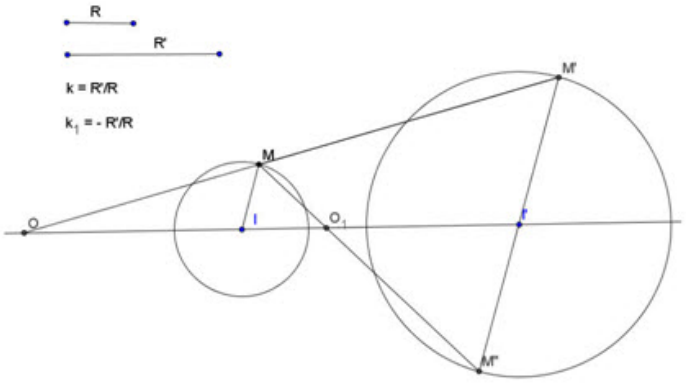
Khi đó, phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm I tỉ số $-\frac{R'}{R}$ biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I; R') (h.1.58).



Hình 1.58

+ *Trường hợp I khác I' và* $R \neq R'$

Lấy điểm M bất kỳ thuộc đường trong (I; R). đường thẳng qua I' song song với IM cắt đường tròn (I'; R') tại M' và M''. Giả sử M, M' nằm cùng phía đối với đường thẳng II' còn M, M'' nằm khác phía đối với đường thẳng II'. Giả sử đường thẳng MM' cắt đường thẳng II' tại điểm O nằm ngoài đoạn thẳng II', còn đường thẳng MM'' cắt đường thẳng II' tại điểm O_1 nằm trong đoạn thẳng II'.



Hình 1.59

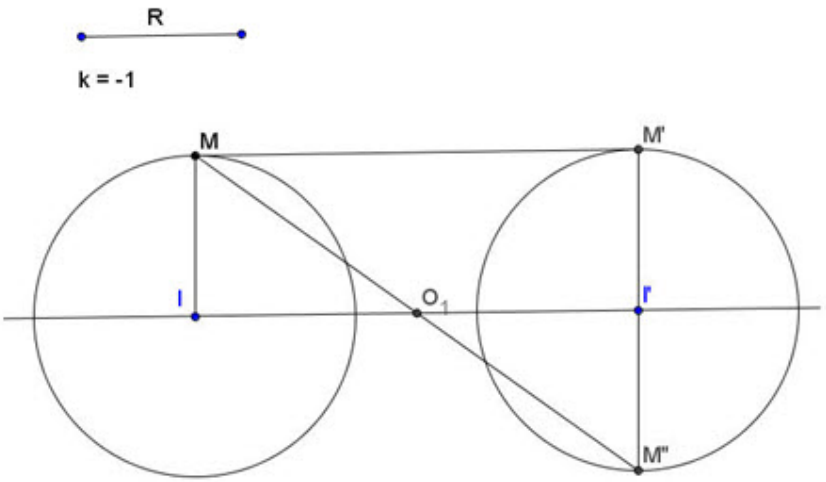
Khi đó phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = -\frac{R'}{R}$

sẽ biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I'; R'). Ta gọi O là tâm vị tự ngoài còn O_1 là *tâm vị tự trong của hai đường tròn nói trên.*

+ *Trường hợp I khác I' và R = R'.*

Khi đó $MM' // II'$ nên chỉ có phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k = -\frac{R}{R} = -1$

biến đường tròn (I;R) thành đường tròn (I'; R'). Nó chính là phép đối xứng tâm O_1.



Hình 1.60

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định phép vị tự biến điểm M cho sẵn thành điểm M' cho sẵn

Phương pháp giải: Ta có các trường hợp sau:

a. Nếu cho sẵn tâm O, ta tìm tỉ số k bằng $\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}}$.

b. Nếu cho sẵn k, ta tìm O là điểm chia đoạn MM' theo tỉ số k.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Hãy xác định tâm phép vị tự có tỉ số $k=3$ biến G thành A.

Giải

Gọi O là trung điểm của cạnh BC. Ta có: $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OG}$ (tính chất trọng tâm). Hệ thức này chứng tỏ $V(O;3):G\mapsto A$. Vậy, tâm của phép vị tự phải tìm là trung điểm O của BC.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G, tâm đường tròn ngoại tiếp O. Tìm tỉ số của phép vị tự tâm G biến H thành O.

Giải

Theo định lí Ơ-le, ta có O, G, H thẳng hàng và $\overrightarrow{GO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. Hệ thức này chứng tỏ $V\left(G,-\frac{1}{2}\right)(H)=O$. Vậy, tỉ số của phép vị tự phải tìm là $-\frac{1}{2}$.

Dạng 2. Dùng phép vị tự để tìm tập hợp điểm

Phương pháp giải: Để tìm tập hợp những điểm N, ta thực hiện các bước sau:

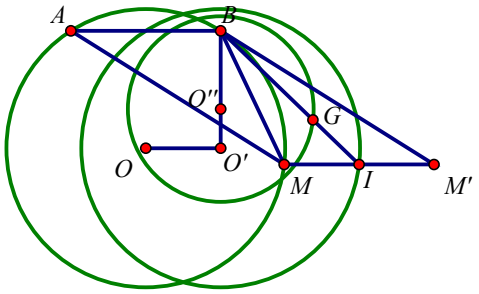
Bước 1. Xác định phép vị tự $V(O;k):M\mapsto N$.

Bước 2. Tìm tập hợp H những điểm M, suy ra tập hợp những điểm N là H', ảnh của H qua phép vị tự $V(O;k)$.

Ví dụ 1: Cho đường tròn cố định (O), tâm O, bán kính R. Trên (O) lấy hai điểm cố định và phân biệt A, B. Gọi M là điểm di động trên (O) và M' là điểm sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$. Tìm tập hợp các trọng tâm G của tam giác BMM'.

Giải

Gọi I là trung điểm của MM'. Ta có: $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Mà G là trọng tâm của tam giác BMM' nên $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$, suy ra $V\left(B;\frac{2}{3}\right):I\mapsto G$. Do đó ta tìm tập hợp những điểm I trước. Vì $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, nên $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(M)=I$. Từ đó, tập hợp



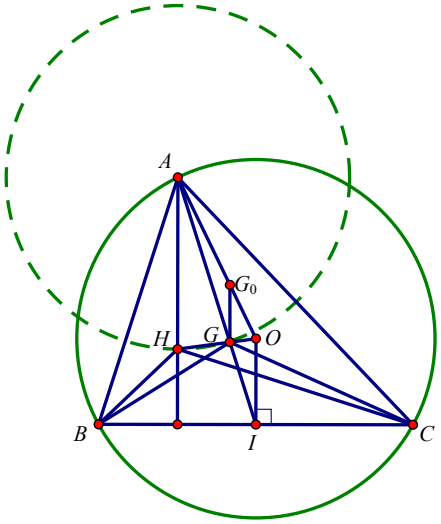
(O') của những điểm I là đường tròn tâm O', với $\overrightarrow{OO'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và bán kính R. Mà $V\left(B;\frac{2}{3}\right):I\mapsto G$ nên tập hợp những điểm G là đường tòn tâm O'', ảnh của (O') qua phép vị tự $V\left(B;\frac{2}{3}\right)$ với $\overrightarrow{BO''}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO'}$ và bán kính $R'=\frac{2}{3}R$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O) cố định, tâm O, bán kính R. Gọi A là điểm cố định trên (O); B và C là hai điểm di động trên (O) sao cho $\widehat{BAC}=\alpha\left(0^o<\alpha<90^o\right)$. Tìm tập hợp các trực tâm H của tam giác ABC.

Giải

Tam giác ABC nội tiếp trong (O) có bán kính R nên $BC=2R\sin\alpha$.

Gọi I là trung điểm của BC thì $OI=R\cos\alpha$. Tập hợp các điểm I là đường tròn $(O;R\cos\alpha)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, suy ra $G=V\left(A;\frac{2}{3}\right)(I)$. Do đó, tập hợp những điểm G là đường tròn tâm G_0, với $G_0=V\left(A;\frac{2}{3}\right)(O)$ hay $\overrightarrow{AG_0}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$ $(*)$ và bán kính $r=\frac{2}{3}R\cos\alpha$.



Mặt khác, theo định lí Ơ-le trong tam giác ABC, ta có $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ nên $H=V(O;3)(G)$.

Gọi H_0 là ảnh của G_0 thì $\overrightarrow{OH_0}=3\overrightarrow{OG_0}$, suy ra: $\overrightarrow{OH_0}=3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OG_0}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AO}\left(\text{do }(*)\right)=\overrightarrow{OA}$.

Do đó $H_0 \equiv A$. Vậy, tập hợp những điểm H là đường tròn tâm A, bán kính $r' = 3r = 2R\cos\alpha$

Chú ý:

a. Kết quả bài toán này cho thấy $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$.

b. Nếu dùng kết quả $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$ (đã chứng minh trong bài phép đối xứng, phép tịnh tiến) thì ta có ngay $AH = 2OI = 2R\cos\alpha$ và suy ra tập hợp các điểm H như trên.

Dạng 3. Dùng phép vị tự để dựng hình

Phương pháp giải: Ta thực hiện các bước sau:

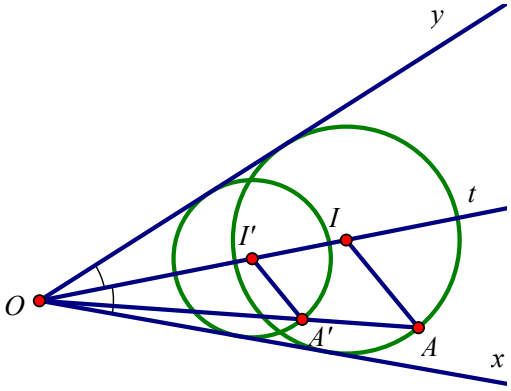
Bước 1. Xác định phép vị tự biến hình H phải dựng thành hình H'.

Bước 2. Dựng hình H' rồi suy ra hình H.

Ví dụ 1. Cho góc nhọn xOy trong đó có điểm A cho sẵn. Hãy dựng đường tròn qua A, tiếp xúc với Ox và Oy.

Giải

Giả sử bài toán đã giải xong, ta có đường tròn (I), tâm I đi qua A, tiếp xúc với Ox và Oy.



Phân tích:

Vì (I) tiếp xúc với Ox và Oy nên I thuộc phân giác Ot của $\widehat{xOy}$. Gọi A' là ảnh của A qua $V(O;k)$ với $k > 0$ và $I' = V(O;k)(I)$ thì $I'A' \parallel IA$. Do đó, I' thuộc đường thẳng qua A' và song song với AI.

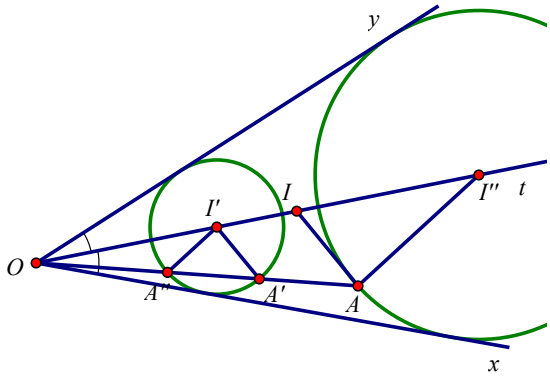
Cách dựng:

- Ta dựng (I') trước: Dựng (I') tiếp xúc với Ox và Oy, có tâm I'.

- Đường thẳng OA cắt (I') tại A'.

- Đường thẳng qua A song song với A'I', cắt Ot tại I.

- Đường tròn tâm I, đi qua A là đường tròn phải dựng.



Chứng minh: Vì (I) là ảnh của (I') đi qua A' và tiếp xúc với Ox và Oy nên (I) qua A và tiếp xúc với Ox và Oy.

Biện luận: Vì OA cắt (I') tại 2 điểm phân biệt A' và A'' nên có đường thẳng d đi qua A và song song với A''I'. Đường thẳng d cắt Ot tại I''. Ta có đường tròn (I'') đi qua A và tiếp xúc với Ox và Oy. Bài toán có 2 nghiệm hình.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nhọn. Hãy dựng hình chữ nhật MNPQ có $MN = MQ\sqrt{2}$ sao cho M, N thuộc cạnh BC, P thuộc cạnh CA và Q thuộc cạnh AB.

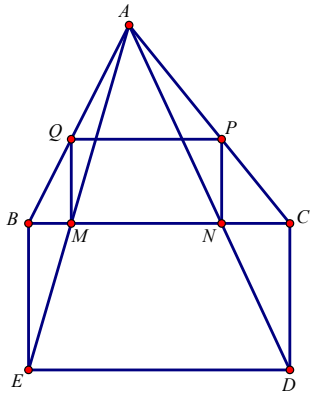
Giải

Giả sử bài toán đã giải xong, ta có hình chữ nhật MNPQ thỏa đề bài.

Phân tích:

Đặt: $\frac{AQ}{AB} = \frac{AM}{AE} = k > 0$, thì phép vị tự $V(A;k)$ biến hình chữ nhật MNPQ thành hình chữ nhật EDCB với $ED = EB\sqrt{2}$

(vì $MN = MQ\sqrt{2}$).



Cách dựng:

- Dựng hình chữ nhật EDCB khác phía với tam giác ABC đối với đường thẳng BC sao cho $ED = EB\sqrt{2}$.

- AD cắt BC tại N, AE cắt BC tại M.

- Qua M và N lần lượt dựng các đường thẳng vuông góc với BC, cắt AC tại P và AB tại Q.

- MNPQ là hình chữ nhật phải dựng.

Bài toán chỉ có một nghiệm hình.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho phép vị tự tỉ số $k = 2$ biến điểm A thành điểm B và biến điểm C thành điểm D. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. **B.** $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. **C.** $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 2. Cho hình thang ABCD có hai cạnh đáy là AB và CD mà $AB = 3CD$. Phép vị tự biến điểm A thành điểm C và biến điểm B thành điểm D có tỉ số là:

A. $k = 3$. **B.** $k = -\frac{1}{3}$. **C.** $k = \frac{1}{3}$. **D.** $k = -3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Tâm vị tự là giao điểm hai đường chéo của hình thang.

Câu 3. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự biến d thành d'?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phép vị tự biến d thành d' thì d' phải song song hoặc trùng với d.

Câu 4. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự biến mỗi đường thẳng đó thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Tâm vị tự là giao điểm của d và d'. Tỉ số vị tự là số k tùy ý khác 0.

Câu 5. Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số $k = 100$ biến mỗi đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Lấy hai điểm tùy ý A và A' lần lượt nằm trên d và d', rồi lấy điểm O sao cho $\overrightarrow{OA'} = 100\overrightarrow{OA}$. Phép vị tự tâm O tỉ số $k = 100$ sẽ biến d thành d'.

Câu 6. Cho hai đường thẳng song song d và d' và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Lấy đường thẳng a bất kì đi qua O cắt d và d' lần lượt tại A và A'. Gọi k là số sao cho $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, số k không phụ thuộc đường thẳng a. Phép vị tự tâm O tỉ số k biến đường thẳng d thành đường thẳng d'.

Câu 7. Cho hai đường tròn bằng nhau $(O;R)$ và $(O';R)$ với tâm O và O' phân biệt. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O;R)$ thành $(O';R)$?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Đó là phép vị tự có tâm là trung điểm OO', tỉ số vị tự bằng -1.

Câu 8. Cho đường tròn $(O;R)$. Có bao nhiêu phép vị tự với tâm O biến $(O;R)$ thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Tỉ số vị tự là 1 hoặc -1.

Câu 9. Cho đường tròn $(O;R)$. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O;R)$ thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Phép vị tự tỉ số 1 với tâm I bất kì.

Câu 10. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Với giá trị nào của k thì phép vị tự $V(G;k)$ biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'?

A. $k=2$. **B.** $k=-2$. **C.** $k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 11. Cho hai đường tròn (C) và (C') không bằng nhau và không đồng tâm, cùng tiếp xúc với đường thẳng d. Có bao nhiêu phép vị tự biến (C) thành (C') và biến d thành chính nó?

A. Không có phép nào. **B.** Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có hai phép. **D.** Có vô số phép.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Tâm vị tự là giao điểm của d với đường thẳng đi qua hai tâm của hai đường tròn.

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tâm $I(3;-1)$ có tỉ số $k=-2$. Khi đó nó biến điểm $M(5;4)$ thành điểm:

A. $M'(-1;-11)$. **B.** $M'(-7;11)$. **C.** $M'(1;9)$. **D.** $M'(1;-9)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta phải có: $\overrightarrow{IM'}=-2\overrightarrow{IM}$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tỉ số $k=2$ và biến điểm $A(1;-2)$ thành điểm $A'(-5;1)$. Khi đó nó biến điểm $B(0;1)$ thành điểm:

A. $B'(0;2)$. **B.** $B'(12;-5)$. **C.** $B'(-7;7)$. **D.** $B'(11;6)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta phải có $\overrightarrow{A'B'}=2\overrightarrow{AB}$.

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tâm $I(1;1)$ tỉ số $k=-\frac{1}{3}$. Khi đó nó biến đường thẳng $5x-y+1=0$ thành đường thẳng có phương trình:

A. $15x+3y+10=0$. **B.** $15x-3y-23=0$. **C.** $15x+3y-23=0$. **D.** $5x-3y-8=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Điều kiện cần là hai đường thẳng phải có cùng vectơ chỉ phương nên có thể loại ngay ba phương án A, C, D.

Câu 15. Cho hai đường thẳng song song a và b lần lượt có phương trình: $x+4y-1=0$ và $x+4y+3=0$. Phép vị tự có tâm $O(0;0)$ biến đường thẳng a thành đường thẳng b phải có tỉ số vị tự k bằng bao nhiêu?

A. $k=\frac{1}{3}$. **B.** $k=-\frac{1}{3}$. **C.** $k=3$. **D.** $k=-3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Đường thẳng Ox cắt a và b lần lượt tại $A(1;0)$ và $B(-3;0)$. Nếu k là tỉ số vị tự thì $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$. Vậy $k=-3$.

Câu 16. Cho phép vị tự V tâm O tỉ số 2 và phép vị tự V' tâm O tỉ số $\frac{1}{2}$. Hợp thành của V và V' là:

A. Phép đối xứng qua trung điểm của OO'.

B. Phép đối xứng qua đường thẳng trung trực của OO'.

C. Phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$.

D. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Lấy điểm M bất kì, M' là ảnh của M qua V, M'' là ảnh của M' qua V' thì $\overrightarrow{MM''}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$.

Câu 17. Cho hình bình hành ABCD. Gọi phép biến hình F là hợp thành của phép vị tự $V(A;2)$ và phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{CD}}$. Khi đó F là phép nào trong các phép sau đây?

A. Phép vị tự $V(B;2)$. **B.** Phép vị tự $V(C;2)$.

C. Phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{CD}$. **D.** Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DC}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Thấy ngay rằng hợp thành của hai phép đó biến điểm B thành chính nó.

Câu 18. Cho tam giác đều ABC, với A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Nếu phép đồng dạng biến A thành B', B thành C thì nó biến điểm C' thành:

A. Điểm A'. **B.** Trung điểm B'C. **C.** Điểm C'. **D.** Trung điểm BA'.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Nếu phép đồng dạng biến C' thành M thì vì C' là trung điểm của AB nên M phải là trung điểm B'C.

Câu 19. Cho tam giác đều ABC, với A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Nếu phép đồng dạng biến A thành B', B thành C thì nó biến điểm C thành:

A. Điểm A'. **B.** Điểm C'.

C. Điểm đối xứng với C' qua B'. **D.** Điểm A' hoặc điểm đối xứng với C' qua B'.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Nếu phép đồng dạng biến C thành M thì vì tam giác ABC là tam giác đều nên tam giác B'CM là tam giác đều.

Câu 20. Cho hình chữ nhật ABCD với P và Q lần lượt là trung điểm của AB và BC. Nếu phép đồng dạng biến tam giác ADC thành tam giác QBP thì nó biến điểm D thành:

A. Tâm của hình chữ nhật. **B.** Trung điểm cạnh AD.

C. Trung điểm cạnh DC. **D.** Điểm C.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Nếu phép đồng dạng biến B thành M thì vì bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của hình chữ nhật, nên Q, M, P, B cũng là bốn đỉnh của hình chữ nhật.

Câu 21. Phép vị tự tâm O với tỉ số k $(k \neq 0)$ là một phép biến hình biến điểm M thàn điểm M' sao cho:

A. $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$. **B.** $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. **C.** $OM' = kOM$. **D.** $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 22. Trong các phép biến hình sau đây, phép biến hình nào không có tính chất: Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó?

A. Phép đối xứng tâm. **B.** Phép tịnh tiến.

C. Phép đối xứng trục. **D.** Phép vị tự.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Giả sử ta có phép đối xứng trục $Đ_a$ và a là một đường thẳng cho trước. Ta xét đường thẳng Δ và gọi Δ' là ảnh của Δ qua phép đối xứng trục $Đ_a$.

- Nếu $\Delta \parallel a$ thì $\Delta' \parallel a$.

- Nếu $\Delta \equiv a$ thì $\Delta' \equiv a$.

- Nếu $\Delta \perp a$ thì $\Delta' \equiv \Delta$.

- Nếu Δ cắt a tại điểm I thì Δ' cắt a tại I.

Như thế nói chung: Phép đối xứng trục không có tính chất biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

Câu 23. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) sao cho tâm của đường tròn này nằm trên đường tròn kia. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Tồn tại duy nhất một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

B. Tồn tại hai phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

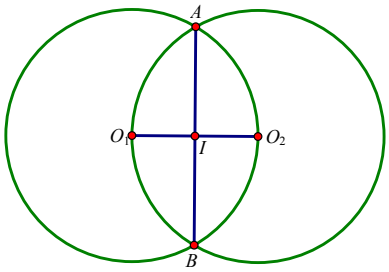
C. Tồn tại một phép đối xứng trục biến đường tròn này thành đường tròn kia.

D. Tồn tại một phép đối xứng tâm biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Từ giả thiết suy ra hai đường tròn (O_1) và (O_2) bằng nhau. Ta thấy ngay:



- Có duy nhất một phép vị tự biến (O_1) thành (O_2), đó là phép vị tự trong.

- Có hai phép đối xứng trục biến đường tròn này thành đường tròn kia, với trục đối xứng là đường thẳng O_1O_2 hoặc đường thẳng qua hai giao điểm A, B của hai đường tròn.

- Gọi I là giao điểm của O_1O_2 và AB thì $Đ_I$ là phép đối xứng tâm duy nhất biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Câu 24. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác MNP là phép vị tự:

A. Tâm A, tỉ số $k = 2$.

B. Tâm O, tỉ số $k = \frac{1}{2}$ với O là tâm của ΔABC.

C. Tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ với G là trọng tâm của ΔABC.

D. Tâm H, tỉ số $k = -2$ với H là trực tâm của ΔABC.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Theo tính chất của trọng tâm ta có: $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

Do đó phép vị tự $V\left(G; -\frac{1}{2}\right)$ biến ΔABC thành ΔMNP nên biến đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP.

Ghi chú: Nhận thấy H là trực tâm tam giác ABC và O là trực tâm ΔMNP, nên H và O là hai điểm đối xứng với nhau qua phép vị tự $V\left(G; -\frac{1}{2}\right)$. Từ đó ta suy ra phép vị tự $V\left(H; \frac{1}{2}\right)$ biến đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thành đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

Câu 25. Chọn câu **sai** trong các câu sau:

A. Phép vị tự $V(O;k)$ với $k \neq \pm 1$ luôn có một điểm bất động duy nhất.

B. Một phép vị tự có thể có vô số điểm bất động.

C. Phép vị tự là một phép dời hình.

D. Phép vị tự $V(O;k)$ nếu biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $M'N' = |k|MN$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 26. Cho đường thẳng Δ và điểm $O \notin \Delta$. Một điểm M thay đổi trên Δ. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng OM. Khi M thay đổi trên Δ tập hợp các điểm N là:

A. Một đường thẳng qua O.

B. Một đường thẳng a song song với Δ mà $d(O;a) = \frac{1}{2}d(O;\Delta)$.

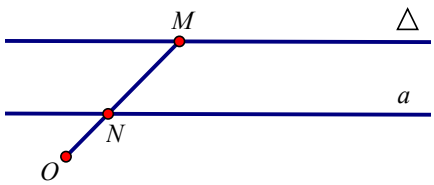
C. Một đường thẳng b song song với Δ mà $d(O;b) = 2d(O;\Delta)$.

D. Một đường thẳng c song song với Δ mà $d(O;c) = \frac{1}{3}d(O;\Delta)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Từ giả thiết suy ra $ON=\frac{1}{2}OM$.



Như thế phép vị tự $V\left(O;\frac{1}{2}\right)$ biến điểm M thành điểm N.

Vậy khi M thay đổi trên Δ thì quỹ tích của N là đường

a ảnh của Δ qua phép vị tự trên.

Dễ thấy $d(O;a)=\frac{1}{2}d(O;\Delta)$.

Câu 27. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I và Δ là đường thẳng song song với đường thẳng AB. Một điểm M thay đổi trên Δ, gọi G là trọng tâm của ΔMAB. Khi M thay đổi trên Δ tập hợp các điểm G là:

A. Một đường thẳng đi qua I.

B. Một đường thẳng a song song với Δ mà $d(I;a)=\frac{1}{2}d(I;\Delta)$.

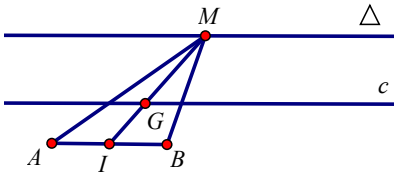
C. Một đường thẳng b song song với Δ mà $d(I;b)=\frac{2}{3}d(I;\Delta)$.

D. Một đường thẳng c song song với Δ mà $d(I;c)=\frac{1}{3}d(I;\Delta)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Theo tính chất của trọng tâm ta có: $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$.



Như thế phép vị tự $V\left(I;\frac{1}{3}\right)$ biến điểm M thành điểm G.

Vậy khi M thay đổi trên Δ thì quỹ tích của G là đường thẳng c, ảnh của Δ qua phép vị tự trên.

Dễ thấy: $d(I;c)=\frac{1}{3}d(I;\Delta)$.

Câu 28. Để chứng minh rằng phép vị tự biến một đường tròn thành một đường tròn, một học sinh lập luận qua ba bước như sau:

Bước 1: Giả sử $V(O;k)$ là phép vị tự tâm O tỉ số k. Ta xét đường tròn $(I;R)$.

Xác định điểm I' là ảnh của I qua phép vị tự $V(O;k)$, tức là $\overrightarrow{OI'}=k\overrightarrow{OI}$, thì I' là một điểm cố định.

Bước 2: Với M là một điểm bất kì, ta xác định điểm M' là ảnh của M qua phép vị tự $V(O;k)$, tức là $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. Suy ra: $I'M' = kIM$.

Bước 3: Do đó:

$M \in (I;R) \Leftrightarrow I'M' = kR \Leftrightarrow M'$ thuộc đường tròn $(I';kR)$.

Hỏi cách chứng minh trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Chứng minh hoàn toàn đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta thấy lập luận sai từ bước 2: Từ $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, suy ra $I'M' = |k|IM$.

Câu 29. Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định. Một điểm M thay đổi trên $(O;R)$, gọi N là trung điểm của đoạn thẳng AM. Khi M thay đổi trên $(O;R)$, tập hợp các điểm N là:

A. Đường tròn tâm A bán kính R.

B. Đường tròn tâm O bán kính 2R.

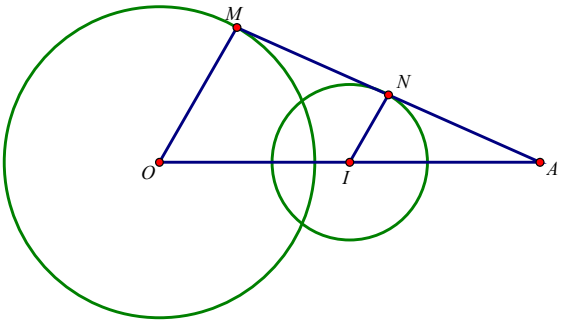
C. Đường tròn tâm I bán kính $\frac{R}{2}$ với I là trung điểm của AO.

D. Đường tròn đường kính AO.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.



Như thế phép vị tự $V\left(A;\frac{1}{2}\right)$ biến điểm M thành điểm N.

Vậy khi M thay đổi trên đường tròn $(O;R)$ thì quỹ tích điểm N là đường tròn (T) ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép vị tự trên.

Ta thấy (T) là đường tròn có tâm I là trung điểm của AO và bán kính là $\frac{R}{2}$.

Câu 30. Cho đường tròn $(O;R)$ và A là một điểm cố định trên đường tròn. Một điểm M di động trên đường tròn, gọi A' là điểm đối xứng của A qua M. Tập hợp các điểm A' khi M thay đổi trên $(O;R)$ là:

A. Đường tròn tâm A bán kính R.

B. Đường tròn tâm O bán kính 2R.

C. Đường tròn tâm B bán kính $2R$ với AB là đường kính của đường tròn $(O;R)$.

D. Đường tròn tâm B bán kính $\frac{2R}{3}$ với AB là đường kính của đường tròn $(O;R)$.

Hướng dẫn giải

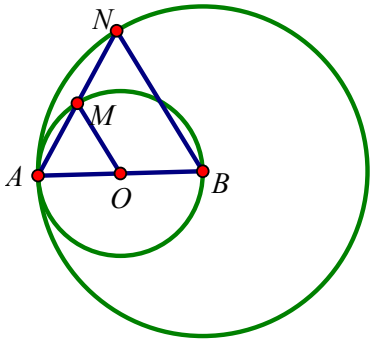
ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra: $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AM}$.

Như thế phép vị tự $V(A;2)$ biến điểm M thành điểm N.

Vậy khi M thay đổi trên đường tròn $(O;R)$ thì quỹ tích của N là đường tròn (T) ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép vị tự trên.

Ta thấy (T) là đường tròn có tâm B với AB là đường kính của đường tròn $(O;R)$ và bán kính là 2R.



Câu 31. Cho đoạn thẳng AB với trung điểm I và đường tròn $(O;R)$ sao cho đường thẳng AB và đường tròn $(O;R)$ không có điểm chung. Một điểm M thay đổi trên $(O;R)$, gọi G là trọng tâm tam giác MAB. Khi M thay đổi trên $(O;R)$, tập hợp các điểm G là:

A. Một cung tròn qua hai điểm A và B.

B. Đường tròn tâm I bán kính $\frac{R}{3}$.

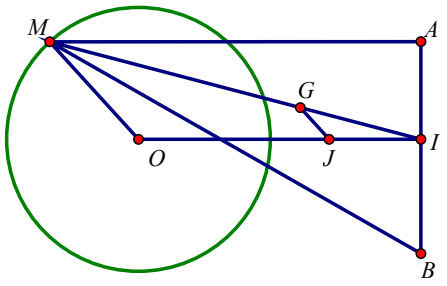
C. Đường tròn tâm J bán kính $\frac{R}{3}$ với $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$.

D. Đường tròn đường kính IO.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Từ giả thiết suy ra: $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$.



Như thế phép vị tự $V\left(I;\frac{1}{3}\right)$ biến điểm M thành điểm G.

Vậy khi M thay đổi trên đường tròn $(O;R)$ thì quỹ tích của G là đường tròn (T) ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép vị tự trên.

Ta thấy (T) là đường tròn tâm J bán kính $\frac{R}{3}$ với $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$.

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(-2;5)$. Phép vị tự $V(O;3)$ biến điểm A thành điểm A' có tọa độ là:

A. $(-6;15)$. **B.** $(15;6)$. **C.** $(-15;6)$. **D.** $(-6;-15)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$.

Mà $A(-2;5)$, suy ra $\overrightarrow{OA'}=(-6;15)$.

Vậy $A'(-6;15)$.

Câu 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-1;4)$, $B(-3;2)$, $C(7;0)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Phép vị tự $V(O;-2)$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(4;6)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-2;-4)$. **D.** $(6;-8)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $G(1;2)$.

Suy ra: $\overrightarrow{OG'}=-2\overrightarrow{OG}=(-2;-4)$.

Vậy $G'(-2;-4)$.

Câu 34. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y=x^2+2x+4$. Phép vị tự $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y=2x^2+x+4$. **B.** $y=-2x^2-x+2$. **C.** $y=-x^2+4x-2$. **D.** $y=-4x^2+x$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Giả sử phép vị tự $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$.

Ta có: $\overrightarrow{OM'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=-2\overrightarrow{OM'}$.

Suy ra: $\begin{cases}x=-2x'\\y=-2y'\end{cases}$

Thay vào phương trình của (P) ta được:

$-2y'=(-2x')^2+(-2x')+3\Leftrightarrow -2y'=4x'^2-2x'+4\Leftrightarrow y'=2x'^2-x'+2$.

Vậy phương trình của parabol (P) là: $y=2x^2-x+2$.

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng Δ có phương trình $2x+4y-1=0$. Phép vị tự $V(O;2)$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có phương trình là:

A. $x+2y-1=0$. **B.** $x-2y+1=0$. **C.** $3x+6y+5=0$. **D.** $2x+4y+7=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Giả sử phép vị tự $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$.

Ta có: $\overrightarrow{OM'}=2\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OM'}$

Suy ra: $\begin{cases}x=\frac{x'}{2}\\y=\frac{y'}{2}\end{cases}$

Thay vào phương trình của Δ ta được: $2.\frac{x'}{2}+4.\frac{y'}{2}-1=0\Leftrightarrow x'+2y'-1=0$.

Vậy phương trình của Δ' là $x+2y-1=0$.

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tòn (T) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2=4$. Phép vị tự $V(O;4)$ biến đường tròn (T) thành đường tròn (T') có phương trình là:

A. $(x-8)^2+(y+4)^2=64$.

B. $(x-4)^2+(y+2)^2=16$.

C. $(x-12)^2+(y+8)^2=16$.

D. $(x+8)^2+(y-4)^2=64$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Nếu phép vị tự $V(O;4)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$.

Ta có: $\overrightarrow{OM'}=4\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OM'}$

Suy ra: $\begin{cases}x=\frac{x'}{4}\\ y=\frac{y'}{4}\end{cases}$

Thay vào phương trình của (T) ta được: $\left(\frac{x'}{4}-2\right)^2+\left(\frac{y'}{4}+1\right)^2=4\Leftrightarrow(x'-8)^2+(y'+4)=64$.

Vậy phương trình của (T') là: $(x-8)^2+(y+4)^2=64$.

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y^2=8x$, gọi F là tiêu điểm của (P). Phép vị tự $V(O;-4)$ biến F thành điểm F' có tọa độ là:

A. $(8;0)$.

B. $(-4;0)$.

C. $(-8;0)$.

D. $(-1;0)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Phương trình $y^2=8x$ có dạng $y^2=2px$. Suy ra $p=4$.

Do đó tiêu điểm của (P) là: $F(2;0)$.

Phép vị tự $V(O;-4)$ biến điểm F thành F' nên: $\overrightarrow{OF'}=-4\overrightarrow{OF}$. Suy ra $F'(-8;0)$.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai parabol (P) và (Q) có phương trình $y^2=12x$ và $y^2=-4x$. Nếu $V(O;k)$ là phép vị tự biến (P) thành (Q) thì tỉ số k của phép vị tự này bằng:

A. $k=-\frac{1}{2}$.

B. $k=-\frac{1}{3}$.

C. $k=-2$.

D. $k=-3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

+ $(P): y^2 = 12x \Rightarrow$ tiêu điểm của (P) là $F(3;0)$.

+ $(Q): y^2 = -4x \Rightarrow$ tiêu điểm của (Q) là $F'(-1;0)$.

Suy ra: $\overrightarrow{OF'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$.

Vậy phép vị tự tâm O biến (P) thành (Q) có tỉ số vị tự là $k = -\frac{1}{3}$.

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;-2)$. Phép vị tự $V(I;3)$ biến điểm $M(-3;2)$ thành điểm M' có tọa độ là:

A. $(-11;10)$. **B.** $(6;-8)$. **C.** $(11;-10)$. **D.** $(-6;2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Ta có: $\overrightarrow{IM'} = 3\overrightarrow{IM}$.

Do đó: $\begin{cases} x'-1 = 3(-3-1) \\ y'+2 = 3(2+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -11 \\ y' = 10 \end{cases}$

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;2)$ và tam giác ABC với $A(0;7)$, $B(-3;2)$, $C(9;3)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Phép vị tự $V\left(I;-\frac{1}{2}\right)$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là:

A. $(-2;4)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};4\right)$. **D.** $(1;-4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Trọng tâm của tam giác ABC là $G(2;4)$.

Ta có: $\overrightarrow{IG'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IG}$

Do đó: $\begin{cases} x'-1 = -\frac{1}{2}(2-1) \\ y'-2 = -\frac{1}{2}(4-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2} \\ y' = 1 \end{cases}$

Vậy $G'\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;0)$ và parabol (P) có phương trình $y^2 = 4x$. Phép vị tự $V(I;2)$ biến parabol (P) thành parabol (P') có phương trình là:

A. $y^2 = 8(x+1)$. **B.** $y^2 = 2(x-1)$. **C.** $y^2 = 4x+3$. **D.** $y^2 = -4(x+1)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Nếu phép vị tự $V(I;2)$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ thì ta có: $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IM'}$.

Do đó: $\begin{cases} x-1 = \frac{1}{2}(x'-1) \\ y-0 = \frac{1}{2}(y'-0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{2} + \frac{1}{2} \\ y = \frac{y'}{2} \end{cases}$

Thay vào phương trình của (P) ta được: $\left(\frac{y'}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{x'}{2} + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y'^2 = 8(x'+1)$.

Vậy phương trình của (P') là: $y^2 = 8(x+1)$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(5;-2)$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$. Phép vị tự $V(A;-2)$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') có phương trình là:

A. $(x-9)^2 + (y+4)^2 = 100$. **B.** $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 64$.

C. $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 36$. **D.** $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 25$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Phương trình của (C) viết lại là: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Suy ra (C) có tâm $I(3;-1)$ bán kính $R = 5$.

Phép vị tự $V(A;-2)$ biến điểm I thành điểm $I'(a;b)$ với $\overrightarrow{AI'} = -2\overrightarrow{AI}$.

Suy ra: $\begin{cases} a-5 = -2(3-5) \\ b+2 = -2(-1+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -4 \end{cases}$

Bán kính của (C') là: $R' = |-2|.5 = 10$.

Vậy phương trình của (C') là: $(x-9)^2+(y+4)^2=100$.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C) và (T) định bởi $(C):(x-1)^2+(y+5)^2=25, (T):x^2+y^2+6x-2y-15=0$. Tâm vị tự trong của (C) và (T) là điểm E có tọa độ là:

A. $(1;2)$. **B.** $(4;-1)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(-1;-2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(1;-5)$ bán kính $R=5$.

+ Phương trình đường tròn (T) viết lại: $(x+3)^2+(y-1)^2=25$.

Suy ra (T) có tâm $J(-3;1)$, bán kính $r=5$.

Như thế hai đường tròn (C) và (T) bằng nhau, do đó chỉ có một phép vị tự biến (C) thành (T), đó là phép vị tự trong. Tâm vị tự trong là trung điểm A của IJ. Ta có: $A(-1;-2)$.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C) và (T) định bởi $(C):(x-2)^2+(y+1)^2=4, (T):(x+3)^2+(y-3)^2=16$. Tâm vị tự ngoài của (C) và (T) là điểm P có tọa độ là:

A. $(6;5)$. **B.** $(7;-5)$. **C.** $(5;-7)$. **D.** $(4;3)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

+ Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=2$.

+ Đường tròn (T) có tâm $J(-3;3)$, bán kính $r=4$.

Nếu P là tâm vị tự ngoài của (C) và (T) thì ta có: $\overrightarrow{PJ}=\frac{r}{R}\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{PI}$. Tọa độ của P là:

$$\begin{cases} x_P=\dfrac{-3-2.2}{1-2}=7 \\ y_P=\dfrac{3-2.(-1)}{1-2}=-5 \end{cases}$$

Câu 45. Cho hai đường tròn (C) và (T) tiếp xúc với nhau tại điểm A. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Điểm A là một tâm vị tự của hai đường tròn.

B. Nếu (C) và (T) tiếp xúc ngoài thì A là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn.

C. Nếu (C) và (T) tiếp xúc trong thì A là tâm vị tự trong của hai đường tròn.

D. Hai đường tròn (C) và (T) luôn có hai tâm vị tự (trong và ngoài).

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

+ Hiển nhiên A là một tâm vị tự của hai đường tròn.

+ Nếu (C) và (T) tiếp xúc ngoài thì A là tâm vị tự trong của hai đường tròn.

+ Nếu (C) và (T) tiếp xúc ngoài trong thì A là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn.

+ Nếu (C) và (T) tiếp xúc ngoài và bán kính của hai đường tròn bằng nhau thì không có tâm vị tự ngoài.

BÀI 8. PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Phép biến hình f gọi là phép đồng dạng với tỉ số k $(k>0)$ nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có: $M'N' = kMN$.

2. Định lí: Mọi phép đồng dạng f tỉ số k $(k>0)$ đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

3. Tính chất của phép đồng dạng

Phép đồng dạng:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với k (k là tỉ số đồng dạng);
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k;
- Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $R' = kR$;
- Biến một góc thành một góc bằng nó.

4. Hai hình đồng dạng

Định nghĩa: Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định các yếu tố cơ bản của phép đồng dạng

Phương pháp giải: Sử dụng định lí: "Mọi phép đồng dạng f tỉ số k $(k>0)$ đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình".

Ví dụ: Cho phép đồng dạng f là hợp thành của phép quay tâm O, góc quay φ và phép vị tự cùng tâm O, tỉ số vị tự k $(k>0)$. Chứng minh rằng ảnh M' của điểm M xác định bởi: $\begin{cases} OM' = kOM \\ (OM, OM') = \varphi \end{cases}$.

Giải

Gọi M_1 là ảnh của M trong phép quay tâm O, góc quay φ. Ta có: $\begin{cases} OM = OM_1 & (1) \\ (OM, OM_1) = \varphi & (2) \end{cases}$

Gọi M' là ảnh của M_1 trong phép vị tự tâm O, tỉ số k $(k>0)$, ta có:

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM_1} \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = kOM_1 & (3) \\ (OM_1, OM') = 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có: $OM' = kOM$.

Từ (2) và (4) ta có: $(OM,OM')=\varphi$.

Tóm lại, phép đồng dạng f là hợp thành của phép quay $Q(O;\varphi)$ và phép vị tự $V(O;k),(k>0)$ biến điểm M thành điểm M' xác định bởi: $\begin{cases}OM'=kOM\\(OM,OM')=\varphi\end{cases}$.

Dạng 2. Tìm ảnh của một điểm M qua một phép đồng dạng

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa của phép đồng dạng.

Ví dụ: Chứng minh rằng, nếu một phép đồng dạng f biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC lần lượt biến thành trọng tâm, trực tâm của tam giác A'B'C'.

Giải

- Gọi D là trung điểm của cạnh BC, thì: $f:D\mapsto D'$, D' là trung điểm của cạnh B'C'.

Do đó: f biến trung tuyến AD thành trung tuyến A'D'.

Tương tự, f biến trung tuyến BE thành trung tuyến B'E'.

Vậy: $f:G=AD\cap BE\mapsto G'=A'D'\cap B'E'$, tức là f biến trọng tâm G của tam giác ABC thành trọng tâm G' của tam giác A'B'C'.

- Gọi AA_1 là đường cao của tam giác ABC thì: $f:BC\mapsto B'C';f:AA_1\mapsto A'A_1'$.

Mà $AA_1\perp BC$ nên $A'A_1'\perp B'C'$. Như thế f biến đường cao AA_1 của tam giác ABC thành đường cao $A'A_1'$ của tam giác A'B'C'.

Tương tự, f biến đường cao BB_1 của tam giác ABC thành đường cao $B'B_1'$ của tam giác A'B'C'.

Do đó f biến $H=AA_1\cap BB_1$ thành $H'=A'A_1'\cap B'B_1'$, tức là f biến trực tâm H của tam giác ABC thành trực tâm H' của tam giác A'B'C'.

Tương tự, ta cũng chứng minh được f biến tâm O của đường tròn (ABC) thành tâm O' của đường tròn (A'B'C').

Dạng 3. Chứng minh hai hình H và H' đồng dạng

Phương pháp giải: Ta chứng minh có một phép đồng dạng f biến H thành H'.

Ví dụ: Chứng minh rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

Giải

Cho hai n – giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ có cùng số cạnh là n và có tâm lần lượt là O và O'.

Hai tam giác câu A_1OA_2 và $B_1O'B_2$ có góc ở đỉnh $\widehat{A_1OA_2}=\widehat{B_1O'B_2}=\dfrac{2\pi}{n}$ nên đồng dạng. Do đó,

đặt: $k=\dfrac{B_1B_2}{A_1A_2}=\dfrac{O'B_1}{OA_1}$ (1)

Gọi $V(O;k)$ là phép vị tự tâm O, tỉ số k, thì $V(O;k)$ biến đa giác đều $A_1A_2...A_n$ thành đa giác đều $C_1C_2...C_n$, và ta có: $\frac{C_1C_2}{A_1A_2}=k$ (2)

Từ (1) và (2) cho ta: $C_1C_2=B_1B_2$.

Vậy, hai n – giác đều $C_1C_2...C_n$ và $B_1B_2...B_n$ có cạnh bằng nhau, nên có một phép dời hình D biến $C_1C_2...C_n$ thành $B_1B_2...B_n$.

Nếu gọi f là hợp thành của $V(O;k)$ và D, thì f là một phép đồng dạng biến n – giác đều $A_1A_2...A_n$ thành n – giác đều $B_1B_2...B_n$. Vậy hai n – giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ đồng dạng với nhau.

Dạng 4. Tìm tập hợp các điểm M' là ảnh của điểm M qua một phép đồng dạng

Phương pháp giải:

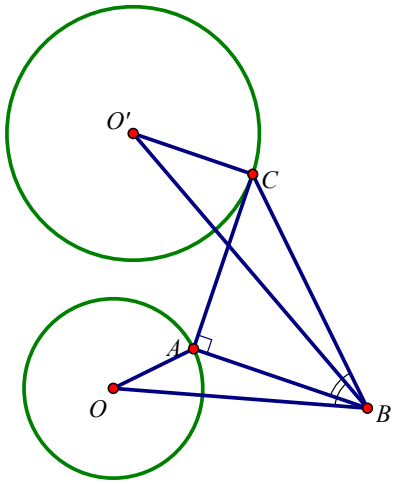
- Xác định phép đồng dạng $f: M \mapsto M'$.
- Tìm tập hợp H của các điểm M. Suy ra tập hợp các điểm M' là H', ảnh của H qua phép đồng dạng f.

Ví dụ: Cho tam giác ABC vuông cân ở A (các đỉnh vẽ theo chiều dương, tức ngược chiều quay của kim đồng hồ). Biết đỉnh B cố định, đỉnh A di động trên đường tròn $(O;R)$. Tìm tập hợp các đỉnh C.

Giải

Tam giác ABC vuông cân ở A nên $BC=AB\sqrt{2}$. Xét phép vị tự tâm B tỉ số $k=\sqrt{2}$ biến A thành A', với $\overrightarrow{BA'}=\sqrt{2}\overrightarrow{BA}$. Ta có A' thuộc nửa đường thẳng BA và $BA'=BA\sqrt{2}$. Từ đó suy ra: $\begin{cases}BC=BA'\\(\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC})=-45^o\end{cases}$

Do đó C là ảnh của A' trong phép quay tâm B, góc -45^o, suy ra C là ảnh của A qua phép hợp thành của phép vị tự $V(B;\sqrt{2})$ và phép quay $Q(B;-45^o)$. Vậy, C là ảnh của A qua một phép đồng dạng tỉ số $k=\sqrt{2}$.



Theo giả thiết, A di động trên đường tròn $(O;R)$, nên tập hợp của C là đường tròn $(O';R\sqrt{2})$, ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua phép đồng dạng đó. Tâm O' được xác định bởi: $\begin{cases}(BO,BO')=-45^o\\BO'=BO\sqrt{2}\end{cases}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Phép vị tự với tỉ số $k > 0$ là một phép đồng dạng.

B. Phép đồng dạng là một phép dời hình.

C. Phép vị tự với tỉ số $k \neq \pm 1$ không phải là một phép dời hình.

D. Phép quay là một phép đồng dạng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Phép đồng dạng nói chung không phải là một phép dời hình. Thật vậy:

Nếu phép đồng dạng với tỉ số k biến điểm M, N thành M', N' thì ta có: $M'N' = kMN$.

Do đó, nếu $k \neq 1$ thì $M'N' \neq MN$, trong trường hợp này phép đồng dạng không phải là một phép dời hình.

Câu 2. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Phép vị tự với tỉ số k là một phép đồng dạng với tỉ số $|k|$.

B. Phép đồng dạng là một phép vị tự.

C. Nếu ta thực hiện liên tiếp một phép vị tự và một phép dời hình thì ta được một phép đồng dạng.

D. Nếu hai đa giác đồng dạng thì tỉ số các cạnh tương ứng của chúng bằng tỉ số đồng dạng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $P(3;-1)$. Thực hiện liên tiếp hai phép vị tự $V(O;4)$ và $V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ điểm P biến thành điểm P' có tọa độ là:

A. $(4;-6)$. **B.** $(6;-2)$. **C.** $(-6;2)$. **D.** $(12;-4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Giả sử ta có: Phép vị tự $V(I;k_1)$ biến điểm M thành điểm N và phép vị tự $V(I;k_2)$ biến điểm N thành điểm P. Khi đó ta có: $\overrightarrow{ON} = k_1\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OP} = k_2\overrightarrow{ON}$. Suy ra $\overrightarrow{OP} = k_1k_2\overrightarrow{OM}$.

Như thế P là ảnh của M qua phép vị tự $V(O;k_1k_2)$.

Áp dụng kết quả trên phép vị tự biến điểm P thành điểm P' là phép vị tự V tâm I theo tỉ số $k = k_1k_2 = 4.\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$.

Ta được: $\overrightarrow{OP'} = -2\overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OP'} = (-6;2)$.

Vậy $P'(-6;2)$.

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Nếu có phép đồng dạng biến cạnh AB thành cạnh BC thì tỉ số k của phép đồng dạng đó bằng:

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Ta dễ thấy tỉ số đồng dạng là $k = \frac{BC}{AB} = \frac{AB\sqrt{2}}{AB} = \sqrt{2}$.

Câu 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-2;1), B(0;3), C(1;-3), D(2;4)$. Nếu có phép đồng dạng biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD thì tỉ số k của phép đồng dạng đó bằng:

A. 2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Ta có: $AB = 2\sqrt{2}, CD = 5\sqrt{2}$.

Suy ra tỉ số của phép đồng dạng là $k = \frac{CD}{AB} = \frac{5}{2}$.

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn: $(C): x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$, $(D): x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$. Nếu có phép đồng dạng biến đường tròn (C) thành đường tròn (D) thì tỉ số k của phép đồng dạng đó bằng:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

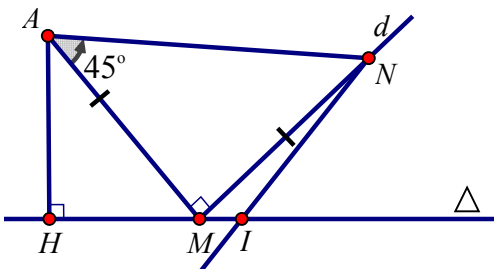
ĐÁP ÁN D.

+ Phương trình của $(C): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \Rightarrow (C)$ có tâm $I(-1;1)$, bán kính $R = 2$.

+ Phương trình của $(D): (x+6)^2 + (y-8)^2 = 100 \Rightarrow (T)$ có tâm $J(-6;8)$, bán kính $r = 10$.

Tỉ số của phép đồng dạng là $k = \frac{r}{R} = 5$.

Câu 7. Cho điểm A và đường thẳng Δ không đi qua A. Một điểm M thay đổi trên Δ. Vẽ tam giác AMN vuông cân tại M (các đỉnh của tam giác ghi theo chiều ngược kim đồng hồ). Đi tìm tập hợp các điểm N, một học sinh lập luận qua ba bước như sau:



Bước 1: Từ giả thiết suy ra $(AM;AN)=45^o$ và $AN=\sqrt{2}AM$.

Suy ra N là ảnh của M qua phép đồng dạng gồm hợp của hai phép vị tự $V\left(A;\sqrt{2}\right)$ và phép quay $Q\left(A;45^o\right)$.

Bước 2: Do đó khi M thay đổi trên Δ thì tập hợp các điểm N là ảnh đường thẳng d của Δ qua đồng dạng trên.

Bước 3: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ, vẽ tam giác vuông cân AHI (hình vẽ); ta thấy d là đường thẳng qua I và tạo với Δ một góc 45^o.

Kết luận: tập hợp các điểm N là đường thẳng d.

Hỏi lập luận trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Lập luận hoàn toàn đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai hình tròn bất kì thì đồng dạng.

B. Hai đa giác đều bất kì có cùng số cạnh thì đồng dạng.

C. Hai elip bất kì thì đồng dạng.

D. Hai parabol bất kì thì đồng dạng.

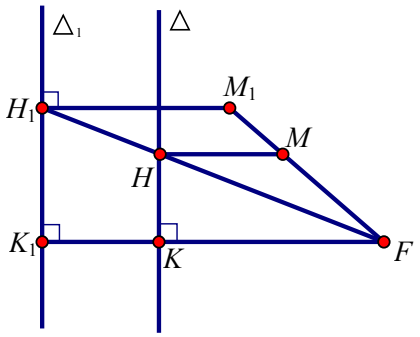
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

+ Dễ thấy hai câu A và B đều đúng.

+ Hai elip chỉ đồng dạng khi và chỉ khi tỉ số độ dài các trục lớn và tỉ số độ dài các trục nhỏ của hai elip bằng nhau.

+ Hai parabol bất kì thì đồng dạng.



Thật vậy, ta hãy xem cách chứng minh bài toán tổng quát hơn sau đây: "Hai cô-nic có cùng tâm sai thì đồng dạng".

Ta xét hai cô-nic có cùng tâm sai e:

- Cô-nic (C) có tiêu điểm F, đường chuẩn Δ.

- Cô-nic (C') có tiêu điểm F', đường chuẩn Δ'.

Ta có thể thực hiện liên tiếp một phép tịnh tiến và một phép quay (tức là thực hiện một phép dời hình) để biến F' thành F và biến Δ' thành Δ_1 song song với Δ. Phép dời hình này biến (C') thành cô-nic (C_1) bằng với (C'), (C_1) có tâm sai e.

Theo đề bài, ta sẽ chứng minh (C) và (C_1) đồng dạng với nhau.

Gọi K và K_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của F trên Δ và Δ_1. Đặt $k = \dfrac{Fk_1}{Fk}$.

Thực hiện phép vị tự V tâm F tỉ số k, phép vị tự này biến Δ thành Δ_1.

Trên (C) lấy điểm M bất kì, gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ.

Phép vị tự V biến M thành M_1 và H thành H_1, H_1 là hình chiếu vuông góc của M_1 trên Δ_1.

Hai tam giác FMH và FM_1H_1 đồng dạng cho: $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{M_1F}{M_1H_1} = e$.

Do đó M_1 nằm trên cô-nic (C_1). Suy ra phép vị tự V biến (C) thành cô-nic (C_1), nên hai cô-nic (C) và (C_1) đồng dạng.

Vậy bài toán được chứng minh.

Trở lại bài toán: Hai parabol bất kì thì đồng dạng vì chúng có cùng tâm sai $e = 1$.

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

Các câu hỏi trắc nghiệm sau đây đều sử dụng trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Câu 1. Cho đường thẳng d và qua điểm $A(3;1)$, có vectơ phép tuyến $\vec{n}=(2;3)$. Ảnh d' của d trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-6;4)$ có phương trình là:

A. $2x-3y-9=0$. **B.** $2x+3y-9=0$. **C.** $2x-3y+9=0$. **D.** $2x+3y+9=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 2. Đường thẳng d qua $A(-4;3)$ với vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(1;\frac{1}{2}\right)$ có ảnh d' trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;-2)$ là:

A. $x-2y+10=0$. **B.** $x+2y-10=0$. **C.** $x+2y+8=0$. **D.** $2x+y-8=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 3. Phương trình trục đối xứng của $Đ_d: A\mapsto B$, với $A(2;1)$ và $B(-2;3)$ là:

A. $x-y-2=0$. **B.** $x+y-2=0$. **C.** $2x-y+2=0$. **D.** $2x+y+2=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 4. Cho hai điểm $A(-1;\sqrt{3})$ và $B(5;\sqrt{3})$. Trục đối xứng d của $Đ_d$ có phương trình:

A. $y=x\sqrt{3}+1$. **B.** $y=x\sqrt{3}-1$. **C.** $x=\sqrt{2}$. **D.** $y=3$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 5. Cho đường thẳng $d: x+4y-5=0$. Ảnh của d trong phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(-8;2)$ là d' có phương trình:

A. $x-4y-5=0$. **B.** $x-4y+5=0$. **C.** $2x+3y-6=0$. **D.** Một phương trình khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 6. Đường thẳng $d: 2x - y - 2 = 0$ có ảnh qua $Đ_d$ có phương trình:

A. $2x + y + 2 = 0$. **B.** $2x - y - 0 = 0$. **C.** $x - 2y + 2 = 0$. **D.** $x + 2y + 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 7. Trong phép $Đ_O$, ảnh của đường tròn tâm $I(3;-2)$, bán kính $R = 3$ có phương trình:

A. $(x-4)^2 + y^2 = 9$. **B.** $(x+4)^2 + y^2 = 9$.

C. $(x-4)^2 + y^2 = 8$. **D.** Một phương trình khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 8. Trong phép đối xứng $Đ_O$, ảnh của đường tròn có đường kính AB với $A(-3;1)$ và $B(2;-5)$ có phương trình:

A. $x^2 + y^2 - x - 4y + 13 = 0$. **B.** $x^2 + y^2 - x - 4y - 11 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - x + 4y + 11 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 - x + 4y - 11 = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Câu 9. Ảnh của đường tròn đường kính AB với $A(-9;2)$ và $B(3;6)$ qua phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 15 = 0$. **B.** $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 15 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 15 = 0$. **D.** Một phương trình khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 10. Ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 = 0$ qua $Đ_{Oy}$ có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 5 = 0$. **B.** $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 5 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 5 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 11. Cho phép quay tâm $I(1;2)$ biến $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$. Điểm bất biến của phép quay có tọa độ là:

A. $(2;1)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;-2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 12. Cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(3;0)$. Tìm tâm I của phép quay có góc quay 90^o biến A thành B.

A. $I(1;2)$. **B.** $I(2;2)$. **C.** $I(-2;2)$. **D.** $I(-1;2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 13. Cho hai điểm $M(2;-2)$ và $N(2;2)$. Tìm tâm của phép quay có góc quay -90^o biến M thành N.

A. $(0;0)$. **B.** $(4;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(4;4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 14. Cho phép quay tâm $I(2;0)$ có góc quay -90^o biến O thành O' có tọa độ là:

A. $O'(2;-2)$. **B.** $O'(2;1)$. **C.** $O'(2;2)$. **D.** $O'(-2;-2)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 15. Phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{3}{4}$, biến điểm B thành điểm C, thỏa mãn hệ thức:

A. $4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. **B.** $4\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{AB}$. **C.** $4\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CB}$. **D.** $4\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 16. Hệ thức $4\overrightarrow{OA}=5\overrightarrow{OB}$ biệt thị phép vị tự tâm O, biến điểm A thành điểm B có tỉ số k bằng:

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 17. Nếu có hệ thức $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{AB}$ thì phép vị tự tâm I biến điểm A thành điểm B có tỉ số k bằng:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** Một số khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 18. Nếu có hệ thức $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ thì phép vị tự tâm I biến điểm A thành điểm B có tỉ số k bằng:

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -2. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 19. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=2$ biến điểm $M(-1;2)$ thành điểm M có tọa độ:

A. $(-2;-4)$. **B.** $(-2;4)$. **C.** $(2;-4)$. **D.** $(2;4)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 20. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=\sqrt{2}$ biến điểm trực tâm của tam giác ABC với $A(1;4)$, $B(4;0)$, $C(-2;-2)$ thành điểm nào sau đây?

A. $(2;\sqrt{2})$. **B.** $(2\sqrt{2};\sqrt{2})$. **C.** $(-2\sqrt{2};\sqrt{2})$. **D.** $(\sqrt{2};2\sqrt{2})$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 21. Phép vị tự tâm O, tỉ số $k=-2$ biến đường tròn tâm $A(1;-4)$, bán kính $R=3$ thành đường tròn có phương trình:

A. $x^2+y^2-2x+4y+8=0$. **B.** $x^2+y^2+4x-16y+32=0$.

C. $x^2+y^2+2x-4y-8=0$. **D.** Một phương trình khác.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 22. Trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;4)$, đường tròn $(C):x^2+y^2+4x+6y-3=0$ có ảnh là đường tròn:

A. $x^2+y^2+2x+2y+14=0$.

B. $x^2+y^2-2x+2y-14=0$.

C. $x^2+y^2-2x-2y-14=0$.

D. $x^2+y^2+2x-2y+14=0$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 23. Cho đường tròn $(C):x^2+y^2=4$. Phép đồng dạng f biến (C) thành $(C'):x^2+y^2=9$ có tỉ số đồng dạng bằng:

A. 2.

B. 3.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Câu 24. Phép đồng dạng tâm O, tỉ số $k=\sqrt{2}$, góc 45^o biến đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-1=0$ thành đường tròn (C') có phương trình:

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=3$.

B. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=9$.

D. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

Câu 25. Trong phép đồng dạng tâm I, tỉ số k. Câu nào sau đây đúng?

A. Biến một đường thẳng d thành đường thẳng d' song song với d.

B. Biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng A'B' có độ dài bằng $\frac{AB}{k}$.

C. Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

D. Biến góc α thành góc β có số đo bằng $k\alpha$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

CHƯƠNG II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

QUAN HỆ SONG SONG

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. LÝ THUYẾT

1. Mở đầu về hình học không gian

Hình học không gian có các đối tượng cơ bản là điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

Quan hệ thuộc: Trong không gian:

a. Với một điểm A và một đường thẳng d có thể xảy ra hai trường hợp:

- Điểm A thuộc đường thẳng d, kí hiệu $A \in d$.
- Điểm A không thuộc đường thẳng, kí hiệu $A \notin d$.

b. Với một điểm A và một mặt phẳng (P) có thể xảy ra hai trường hợp:

- Điểm A thuộc mặt thẳng (P), kí hiệu $A \in (P)$.
- Điểm A không thuộc đường thẳng, kí hiệu $A \notin (P)$.

2. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Tính chất thừa nhận 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Tính chất thừa nhận 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Tính chất thừa nhận 3: Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Tính chất thừa nhận 4: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Tính chất thừa nhận 5: Trong mỗi mặt phẳng, các kết đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Định lí: Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

3. Điều kiện xác định mặt phẳng

Có bốn cách xác định trong một mặt phẳng:

Cách 1: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC).

Cách 2: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng d và một điểm A không thuộc d, kí hiệu (A,d).

Cách 3: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b cắt nhau, kí hiệu (a,b).

Cách 4: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b song song, kí hiệu (a,b).

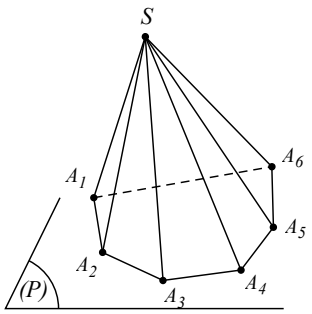
4. Hình chóp và tứ diện

Định nghĩa: Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n miền đa giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$.

Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2A_3...A_n$.

Trong đó:

- Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ gọi là các cạnh đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp.
- Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp.



Nếu đáy của hình chóp là một miền tam giác, tứ giác, ngũ giác,… thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác,…

Chú ý

a. Hình chóp tam giác còn được gọi là hình tứ diện.

b. Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều hay có tất cả các cạnh bằng nhau được gọi là hình tứ diện đều.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬPCÂ

Dạng 1: Dạng toán lý thuyết

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.

B. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

C. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.

D. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn C

• A sai. Qua 2 điểm phân biệt, tạo được 1 đường thẳng, khi đó chưa đủ điều kiện để lập một mặt phẳng xác định. Có vô số mặt phẳng đi qua 2 điểm đã cho.

• B sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì chỉ tạo được đường thẳng, khi đó có vô số mặt phẳng đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng.

• D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Câu 2: Trong không gian, cho 4 điểm không đồng phẳng. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

A. 6. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định.

Khi đó, với 4 điểm không đồng phẳng ta tạo được tối đa $C_4^3 = 4$ mặt phẳng.

Câu 3: Trong mặt phẳng (α), cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Điểm S không thuộc mặt phẳng (α). Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và 2 trong 4 điểm nói trên?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Với điểm S không thuộc mặt phẳng (α) và 4 điểm A, B, C, D thuộc mặt phẳng (α), ta có C_4^2 cách chọn 2 trong 4 điểm A, B, C, D cùng với điểm S lập thành 1 mặt phẳng xác định. Vậy số mặt phẳng tạo được là 6.

Câu 4: Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?

A. 10. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

Với 3 điểm phân biệt không thẳng hàng, ta luôn tạo được 1 mặt phẳng xác định.

Ta có C_5^3 cách chọn 3 điểm trong 5 điểm đã cho để tạo được 1 mặt phẳng xác định. Số mặt phẳng tạo được là 10.

Câu 5: Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

A. Ba điểm phân biệt. **B.** Một điểm và một đường thẳng.

C. Hai đường thẳng cắt nhau. **D.** Bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Chọn C

• A sai. Trong trường hợp 3 điểm phân biệt thẳng hàng thì sẽ có vô số mặt phẳng chứa 3 điểm thẳng hàng đã cho.

• B sai. Trong trường hợp điểm thuộc đường thẳng đã cho, khi đó ta chỉ có 1 đường thẳng, có vô số mặt phẳng đi qua đường thẳng đó.

• D sai. Trong trường hợp 4 điểm phân biệt thẳng hàng thì có vô số mặt phẳng đi qua 4 điểm đó hoặc trong trường hợp 4 điểm mặt phẳng không đồng phẳng thì sẽ tạo không tạo được mặt phẳng nào đi qua cả 4 điểm.

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các định của tứ giác $ABCD$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

4 điểm A, B, C, D tạo thành 1 tứ giác, khi đó 4 điểm A, B, C, D đã đồng phẳng và tạo thành 1 mặt phẳng duy nhất là mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 7: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) thì A, B, C thẳng hàng.

B. Nếu A, B, C thẳng hàng và (P), (Q) có điểm chung là A thì B, C cũng là 2 điểm chung của (P) và (Q).

C. Nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt thì A, B, C không thẳng hàng.

D. Nếu A, B, C thẳng hàng và A, B là 2 điểm chung của (P) và (Q) thì C cũng là điểm chung của (P) và (Q).

Lời giải

Chọn D

Hai mặt phẳng phân biệt không song song với nhau thì chúng có duy nhất một giao tuyến.

• A sai. Nếu (P) và (Q) trùng nhau thì 2 mặt phẳng có vô số điểm chung. Khi đó, chưa đủ điều kiện để kết luận A, B, C thẳng hàng.

• B sai. Có vô số đường thẳng đi qua A, khi đó B, C chưa chắc đã thuộc giao tuyến của (P) và (Q).

• C sai. Hai mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt giao nhau tại 1 giao tuyến duy nhất, nếu 3 điểm A, B, C là 3 điểm chung của 2 mặt phẳng thì A, B, C cùng thuộc giao tuyến.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.

B. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

D. Hai mặt phẳng cùng đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng thì hai mặt phẳng đó trùng nhau.

Lời giải

Chọn B

Nếu 2 mặt phẳng trùng nhau, khi đó 2 mặt phẳng có vô số điểm chung và chung nhau vô số đường thẳng.

Câu 9: Cho 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 không cùng thuộc một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. 3 đường thẳng trên đồng quy. **B.** 3 đường thẳng trên trùng nhau.

C. 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác. **D.** Các khẳng định ở A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn A

• B sai. Nếu 3 đường thẳng trùng nhau thì chúng sẽ cùng thuộc 1 mặt phẳng.

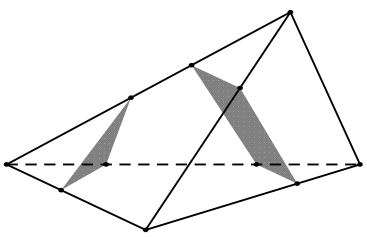
• C sai. Nếu 3 đường thẳng trên chứa 3 cạnh của một tam giác khi đó sẽ tạo được 3 điểm phân biệt không thẳng hàng (là 3 đỉnh của tam giác), chúng lập thành 1 mặt phẳng xác định, 3 đường thẳng sẽ cùng thuộc 1 mặt phẳng.

Câu 10: Thiết diện của 1 tứ diện có thể là:

A. Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Tam giác hoặc tứ giác.

Lời giải

Chọn D



Khi thiết diện cắt 3 mặt của tứ diện thì sẽ tạo thành 3 giao tuyến. Ba giao tuyến lập thành 1 hình tam giác.

Khi thiết diện cắt cả 4 mặt của tứ diện thì sẽ tạo thành 4 giao tuyến. Bốn giao tuyến lập thành 1 hình tứ giác.

Thiết diện không thể là ngũ giác vì thiết diện có 4 mặt, số giao tuyến tối đa là 4.

Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt ta tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng qua hai điểm chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

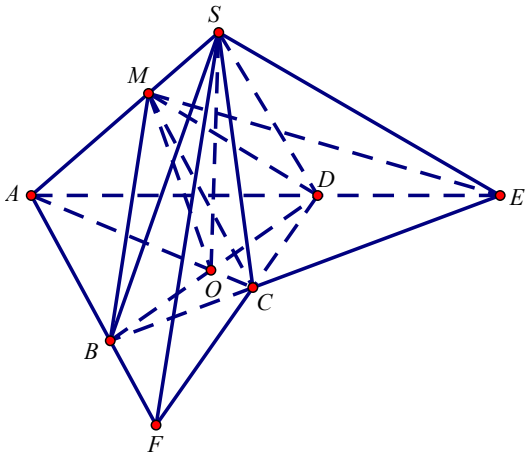
Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là tứ giác lồi ABCD có các cạnh đối không song song với nhau. Gọi M là điểm trên cạnh SA. Tìm giao điểm của các cặp mặt phẳng:

a. (SAC) và (SBD) b. (SAB) và (SCD)

c. (SBC) và (SAD) d. (BCM) và (SAD)

e. (CDM) và (SAB) f. (BDM) và (SAC)

Giải



a. Trong mp (ABCD):

$$\left.\begin{array}{l} AC\cap BD=\{O\} \\ AC\subset (SAC) \\ BD\subset (SBD) \end{array}\right\}\Rightarrow O\in (SAC)\cap (SBD)$$

Mà $S\in (SAC)\cap (SBD)$ nên $SO=(SAC)\cap (SBD)$.

b. Trong (ABCD) ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AB\cap CD=\{F\} \\ AB\subset (SAB) \\ CD\subset (SCD) \end{array}\right\}\Rightarrow F\in (SAB)\cap (SCD)$$

Mà $S\in (SAB)\cap (SCD)$ nên $SF=(SAB)\cap (SCD)$.

c. Trong (ABCD) ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BC\cap AD=\{E\} \\ BC\subset (SBC) \\ AD\subset (SAD) \end{array}\right\}\Rightarrow E\in (SAD)\cap (SBC)$$

Mà $S\in (SAD)\cap (SBC)$ nên $SE=(SAD)\cap (SBC)$.

d. Ta có: $M\in (MBC)\cap (SAD)$

$E \in BC \cap AD \Rightarrow E \in (MBC) \cap (SAD)$

Nên $ME = (MBC) \cap (SAD)$.

e. Ta có: $M \in (MCD) \cap (SAB)$

$F = AB \cap CD \Rightarrow F \in (MCD) \cap (SAB)$

Vậy $MF = (MCD) \cap (SAB)$.

f. Ta có: $M \in (BDM) \cap (SAC)$

$O \in (BDM) \cap (SAC)$

Do đó $MO = (BDM) \cap (SAC)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, AD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

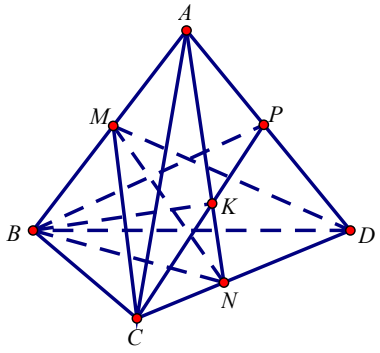
a. (ABN) và (CDM); b. (ABN) và (BCP).

Giải

a. Ta có M và N là hai điểm chung của hai mặt phẳng (ABN) và (CDM), nên giao tuyến của hai mặt phẳng này chính là đường thẳng MN.

b. Trong mặt phẳng (ACD): AN cắt CP tại K. Do đó K là điểm chung của hai mặt phẳng (BCP) và (ABN).

Mà B cũng là điểm chung của hai mặt phẳng này nên giao tuyến của chúng là đường thẳng BK.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.

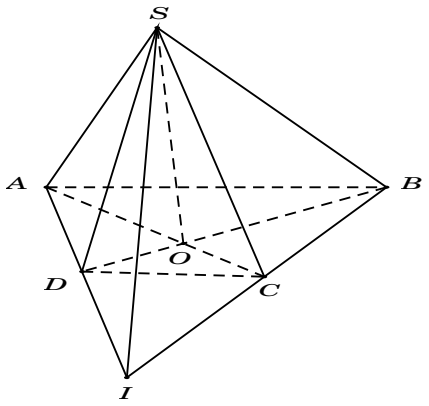
B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

Lời giải

Chọn D



- Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên: $(SAB),(SBC),(SCD),(SAD)$. Do đó A đúng.

- S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

$\longrightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO.$ Do đó B đúng.

- Tương tự, ta có $(SAD) \cap (SBC) = SI$. Do đó C đúng.

- $(SAB) \cap (SAD) = SA$ mà SA không phải là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Do đó D sai.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:

A. AM (M là trung điểm của AB).

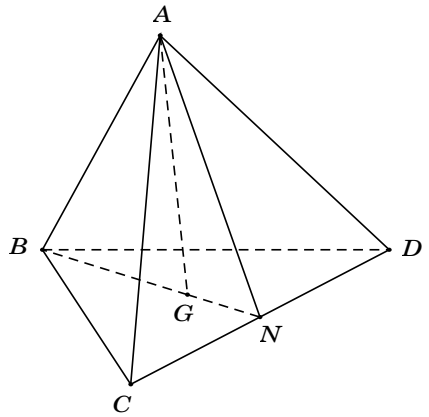
B. AN (N là trung điểm của CD).

C. AH (H là hình chiếu của B trên CD).

D. AK (K là hình chiếu của C trên BD).

Lời giải

Chọn B



- A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

• Ta có $BG \cap CD = N \longrightarrow \begin{cases} N \in BG \subset (ABG) \Rightarrow N \in (ABG) \\ N \in CD \subset (ACD) \Rightarrow N \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow N$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

Vậy $(ABG) \cap (ACD) = AN$.

Câu 3: Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD. Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC. Khi EF và BC cắt nhau tại I, thì I không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

A. (BCD) và (DEF).

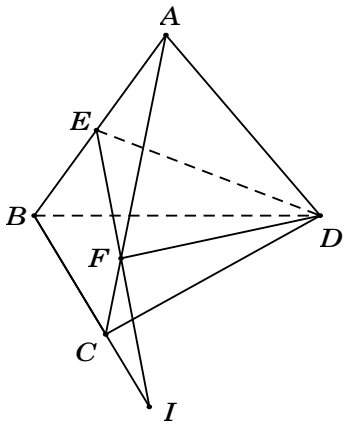
B. (BCD) và (ABC).

C. (BCD) và (AEF).

D. (BCD) và (ABD).

Lời giải

Chọn D



Điểm I là giao điểm của EF và BC mà $\begin{cases} EF \subset (DEF) \\ EF \subset (ABC) \\ EF \subset (AEF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = (BCD) \cap (DEF) \\ I = (BCD) \cap (ABC). \\ I = (BCD) \cap (AEF) \end{cases}$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là:

A. đường thẳng MN.

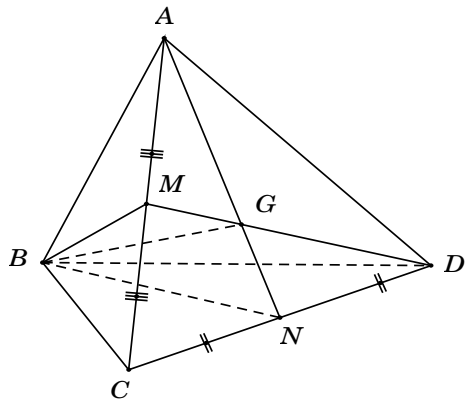
B. đường thẳng AH (H là trực tâm tam giác ACD).

C. đường thẳng BG (G là trọng tâm tam giác ACD).

D. đường thẳng AM.

Lời giải

Chọn C



- B là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).

- Vì M,N lần lượt là trung điểm của $AC,\ CD$ nên suy ra $AN,\ DM$ là hai trung tuyến của tam giác ACD. Gọi $G = AN \cap DM$

$\Rightarrow \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \Rightarrow G \in (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \Rightarrow G \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow G$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).

Vậy $(ABN) \cap (MBD) = BG$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:

A. SD.

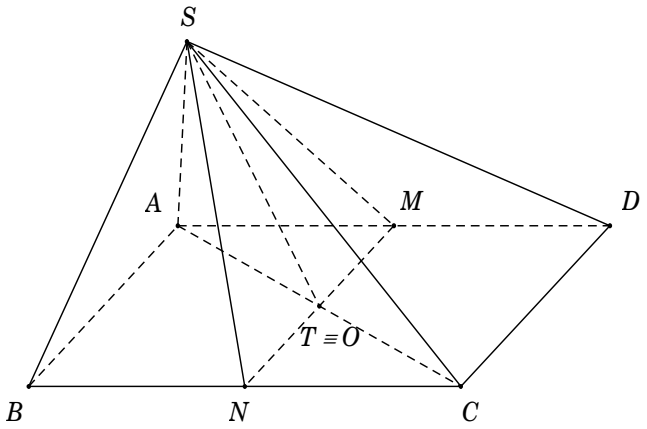
B. SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).

C. SG (G là trung điểm AB).

D. SF (F là trung điểm CD).

Lời giải

Chọn B



- S là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).

• Gọi $O = AC \cap BD$ là tâm của hình hình hành.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $T = AC \cap MN$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in MN \subset (SMN) \Rightarrow O \in (SMN) \end{cases} \Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).

Vậy $(SMN) \cap (SAC) = SO.$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm $SA, SB.$ Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $IJCD$ là hình thang.

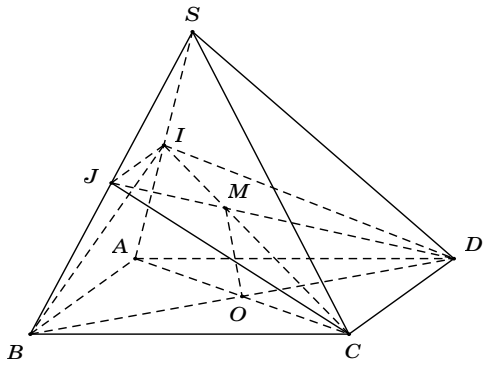
B. $(SAB) \cap (IBC) = IB.$

C. $(SBD) \cap (JCD) = JD.$

D. $(IAC) \cap (JBD) = AO$ (O là tâm $ABCD$).

Lời giải

Chọn D



• Ta có IJ là đường trung bình của tam giác $SAB \Rightarrow IJ \parallel AB \parallel CD \Rightarrow IJ \parallel CD$

$\Rightarrow IJCD$ là hình thang. Do đó A đúng.

• Ta có $\begin{cases} IB \subset (SAB) \\ IB \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (IBC) = IB.$ Do đó B đúng.

• Ta có $\begin{cases} JD \subset (SBD) \\ JD \subset (JBD) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \cap (JBD) = JD.$ Do đó C đúng.

• Trong mặt phẳng $(IJCD)$, gọi $M = IC \cap JD \Rightarrow (IAC) \cap (JBD) = MO.$ Do đó D sai.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AD \parallel BC).$ Gọi M là trung điểm $CD.$ Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

A. SI (I là giao điểm của AC và BM).

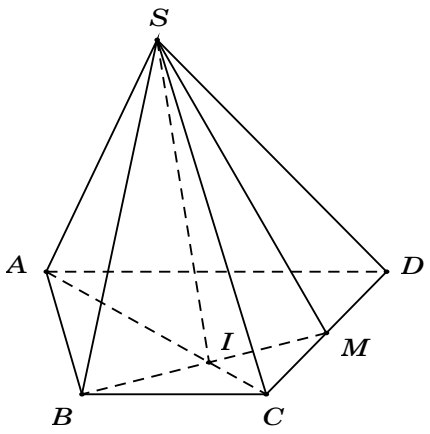
B. SJ (J là giao điểm của AM và BD).

C. SO (O là giao điểm của AC và BD).

D. SP (P là giao điểm của AB và CD).

Lời giải

Chọn A



- S là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MSB) và (SAC).
- Ta có $\begin{cases} I \in BM \subset (SBM) \Rightarrow I \in (SBM) \\ I \in (AC) \in (SAC) \Rightarrow I \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow I$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MSB) và (SAC).

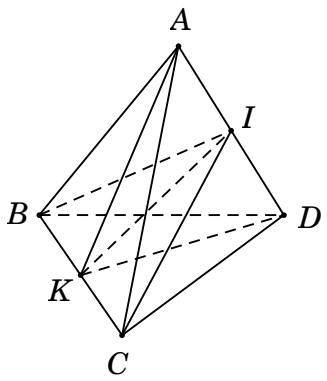
Vậy $(MSB) \cap (SAC) = SI$.

Câu 8: Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là:

A. IK. **B.** BC. **C.** AK. **D.** DK.

Lời giải

Chọn A



Điểm K là trung điểm của BC suy ra $K \in (IBC) \Rightarrow IK \subset (IBC)$.

Điểm I là trung điểm của AD suy ra $I \in (KAD) \Rightarrow IK \subset (KAD)$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) là IK.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Trên cạnh SB lấy điểm M. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ADM) và (SAC).

A. SI.

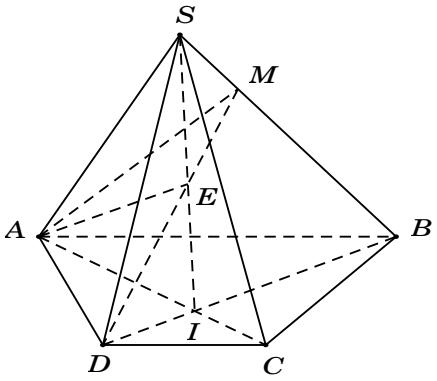
B. AE (E là giao điểm của DM và SI).

C. DM.

D. DE (E là giao điểm của DM và SI).

Lời giải

Chọn B



Ta có A là điểm chung thứ nhất của (ADM) và (SAC). Trong mặt phẳng (SBD), gọi $E = SI \cap DM$.

Ta có:

- $E \in SI$ mà $SI \subset (SAC)$ suy ra $E \in (SAC)$.
- $E \in DM$ mà $DM \subset (ADM)$ suy ra $E \in (ADM)$.

Do đó E là điểm chung thứ hai của (ADM) và (SAC).

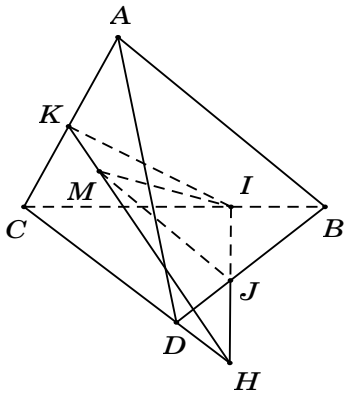
Vậy AE là giao tuyến của (ADM) và (SAC).

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc miền trong của tam giác ACD. Gọi I và J lần lượt là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Gọi H, K lần lượt là giao điểm của IJ với CD của MH và AC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (IJM) là:

A. KI. **B.** KJ. **C.** MI. **D.** MH.

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng (BCD), IJ cắt CD tại $H \Rightarrow H \in (ACD)$.

Điểm $H \in IJ$ suy ra bốn điểm M, I, J, H đồng phẳng.

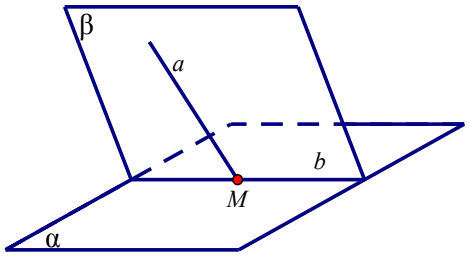
Nên trong mặt phẳng (IJM), MH cắt IJ tại H và $MH \subset (IJM)$.

Mặt khác $\begin{cases} M \in (ACD) \\ H \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow MH \subset (ACD)$. Vậy $(ACD) \cap (IJM) = MH$.

Dạng 3. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Muốn tìm giao điểm của một đường thẳng a và mặt phẳng (α), ta tìm giao điểm của a và một đường thẳng b nằm trong (α).



$$\left.\begin{array}{l} a \cap b = M \\ b \subset (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow M = a \cap (\alpha)$$

Phương pháp:

- Bước 1: Xác định mp(β) chứa a.

- Bước 2: Tìm giao tuyến $b = (\alpha) \cap (\beta)$.

- Bước 3: Trong $(\beta): a \cap b = M$, mà $b \subset (\alpha)$, suy ra $M = a \cap (\alpha)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho tứ giác ABCD (không có cặp cạnh đối nào song song) nằm trong mặt phẳng (α). S là điểm không nằm trên (α).

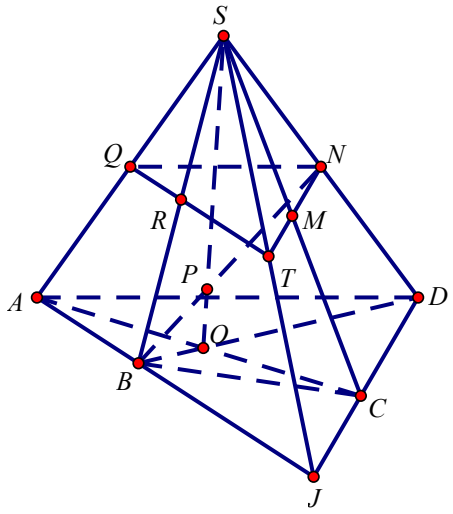
a. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).
b. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC và SD. Tìm giao điểm P của đường thẳng BN với mặt phẳng (SAC).

c. Gọi Q và R lần lượt là trung điểm của SA và SB. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng.

Giải

a. * Giao tuyến của mặt mp(SAC) và mp(SBD): Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow S \in (SAC) \cap (SBD)$$



Từ (1) suy ra S là điểm chung thứ nhất của mp(SAC) và mp(SBD).

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} O \in AC \\ AC \subset (SAC) \end{array}\right\} \Rightarrow O \in (SAC) \\ \left.\begin{array}{l} O \in BD \\ BD \subset (SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow O \in (SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (2) suy ra O là điểm chung thứ hai của mp(SAC) và mp(SBD).

Vậy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

* Giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD): Gọi E là giao điểm của AB và CD. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow S \in (SAB) \cap (SCD) \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra S là điểm chung thứ nhất của mp(SAB) và mp(SCD).

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} E \in AB \\ AB \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow E \in (SAB) \\ \left.\begin{array}{l} E \in CD \\ CD \subset (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow E \in (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD) \qquad (4)$$

Từ (4) suy ra E là điểm chung thứ hai của mp(SAB) và mp(SCD).

Vậy: $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

b. Trong mp(SBD), hai đường thẳng SO, BN cắt nhau tại P, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} P \in BN \\ P \in SO \subset (SAC) \Rightarrow P \in (SAC) \end{array}\right. \Rightarrow$$ P là giao điểm của BN và (SAC).

Vậy P là giao điểm cần tìm.

c. Chứng minh bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng:

- Trong mp(SCD), gọi T là giao điểm của MN và SE. Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD nên $MN \parallel CD$. Xét tam giác SDE, ta có:

$\left.\begin{array}{l} MN \parallel CD \\ N \text{ là trung điểm của } SD \end{array}\right\} \Rightarrow$ T là trung điểm của SE.

- Tương tự, QR là đường trung bình của tam giác SAB nên $QR \parallel AB$. Xét tam giác SAE, ta có:

$\left.\begin{array}{l} QR \parallel AB \\ Q \text{ là trung điểm của } SA \end{array}\right\} \Rightarrow$ QR đi qua trung điểm T của SE.

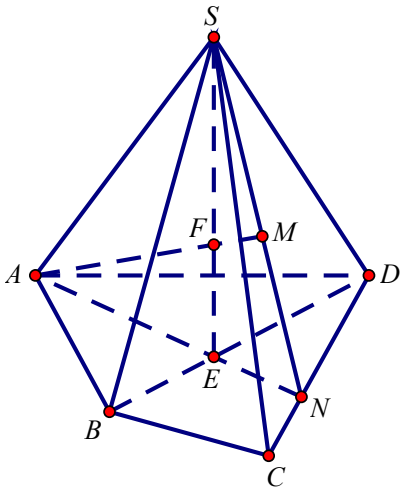
Như vậy, bốn điểm M, N, Q, R nằm trong mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau TN và TQ nên chúng đồng phẳng.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α), cho tứ giác ABCD. Gọi S là điểm không thuộc (α), M là điểm nằm trong tam giác SCD.

a. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD).
b. Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD).

Giải

a. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD): Gọi N là giao điểm của SM và CD, gọi E là giao điểm của aN và BD. Rõ ràng $mp(SAM) \equiv mp(SAN)$. Ta có:



$$\left.\begin{array}{l} E \in AN \Rightarrow E \in (SAM) \\ E \in BD \Rightarrow E \in (SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow E \in (SAM) \cap (SBD) \qquad (1)$$

Mặt khác: $S \in (SAM) \cap (SBD)$ $\qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $SE = (SAM) \cap (SBD)$.

b. Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD). Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} (SAM) \supset AM \\ (SAM) \cap (SBD) = SE \\ F \in AM \cap SE \subset (SAM) \end{array}\right\} \Rightarrow F = AM \cap (SBD)$$

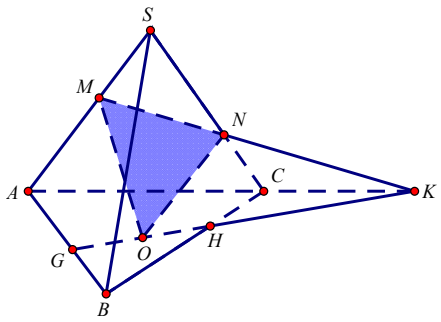
Ví dụ 3. Cho tứ diện SABC. Trên cạnh SA lấy điểm M, trên cạnh SC lấy điểm N, sao cho MN không song song với AC. Cho điểm O nằm trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của mặt phẳng (OMN) với các đường thẳng AC, BC và AB.

Giải

Trong mp(SAC): $MN \cap AC = \{K\}$, mà $MN \subset (OMN)$ nên $\{K\} = AC \cap (OMN)$.

Trong mp(ABC): $OK \cap BC = \{H\}$, mà $OK \subset (OMN)$ nên $\{H\} = BC \cap (OMN)$.

Ta có: $OK \cap AB = \{G\}$, mà $OK \subset (OMN)$ nên $\{G\} = AB \cap (OMN)$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD. Gọi E và F là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh SB và CD.

a. Tìm giao điểm của EF với mặt phẳng (SAC).
b. Tìm giao điểm của mặt phẳng (AEF) với các đường thẳng BC và SC.

Giải

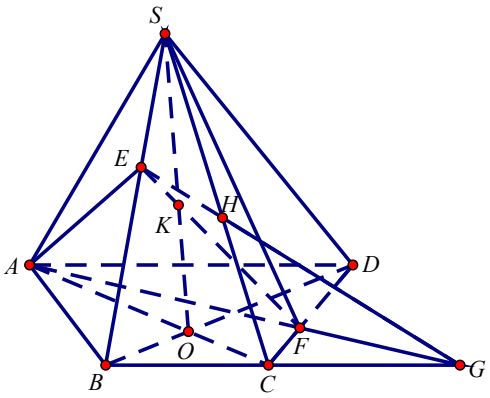
a. Ta có $EF \subset (SBF)$.

Trong mp(ABCD): $BF \cap AC = \{O\}$, suy ra $(SAC) \cap (SBF) = SO$.

Trong mp(SBF): $EF \cap SO = \{K\}$, mà $SO \subset (SAC)$, suy ra $\{K\} = EF \cap (SAC)$.

b. Trong mp(ABCD): $AF \cap BC = \{G\}$, mà $AF \subset (AEF)$, suy ra $\{G\} = BC \cap (AEF)$.

Khi đó: $(AEF) \equiv (AEG)$.



Trong mp(SBC): $EG \cap SC = \{H\}$, mà $EG \subset (AEF)$, suy ra $\{H\} = SC \cap (AEF)$.

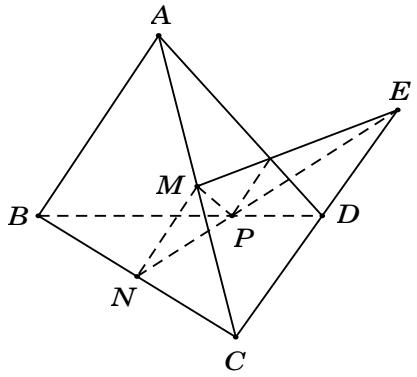
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

A. CD và NP. **B.** CD và MN. **C.** CD và MP. **D.** CD và AP.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Xét mặt phẳng BCD chứa CD. Do NP không song song CD nên NP cắt CD tại E.

Điểm $E \in NP \Rightarrow E \in (MNP)$. Vậy $CD \cap (MNP)$ tại E.

Cách 2. Ta có $\begin{cases} N \in BC \\ P \in BD \end{cases} \Rightarrow NP \subset (BCD)$ suy ra NP, CD đồng phẳng.

Gọi E là giao điểm của NP và CD mà $NP \subset (MNP)$ suy ra $CD \cap (MNP) = E$.

Vậy giao điểm của CD và $mp(MNP)$ là giao điểm E của NP và CD.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; G là trọng tâm tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là:

A. điểm F.

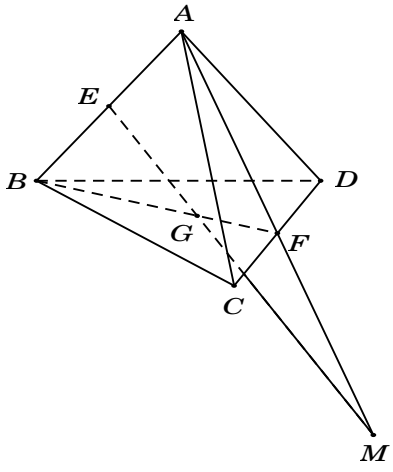
B. giao điểm của đường thẳng EG và AF.

C. giao điểm của đường thẳng EG và AC.

D. giao điểm của đường thẳng EG và CD.

Lời giải

Chọn B



Vì G là trọng tâm tam giác BCD, F là trung điểm của $CD \Rightarrow G \in (ABF)$.

Ta có E là trung điểm của $AB \Rightarrow E \in (ABF)$.

Gọi M là giao điểm của EG và AF mà $AF \subset (ACD)$ suy ra $M \in (ACD)$.

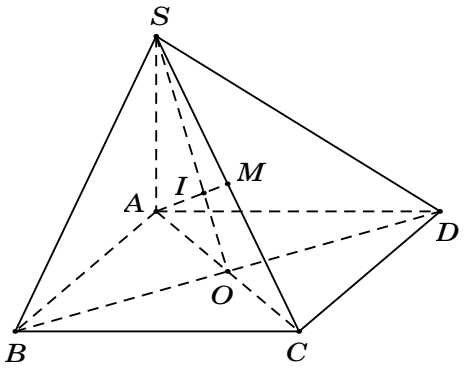
Vậy giao điểm của EG và $mp(ACD)$ là giao điểm $M = EG \cap AF$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC. Gọi I là giao điểm của AM với mặt phẳng (SBD). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IM}$. **B.** $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IM}$. **C.** $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IM}$. **D.** $IA = 2,5IM$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ suy ra O là trung điểm của AC.

Nối AM cắt SO tại I mà $SO \subset (SBD)$ suy ra $I = AM \cap (SBD)$.

Tam giác SAC có M, O lần lượt là trung điểm của SC, AC.

Mà $I = AM \cap SO$ suy ra I là trọng tâm tam giác $SAC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM \Leftrightarrow IA = 2IM$.

Điểm I nằm giữa A và M suy ra $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{MI} = -2\overrightarrow{IM}$.

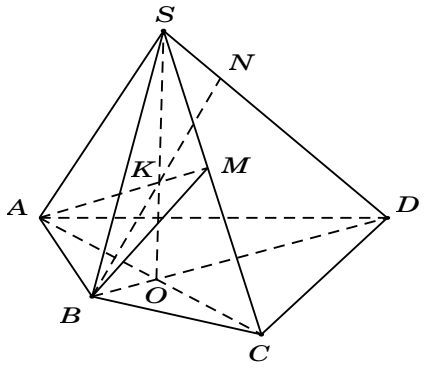
Câu 4: Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C. Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là:

A. giao điểm của SD và AB. **B.** giao điểm của SD và AM.

C. giao điểm của SD và BK (với $K = SO \cap AM$). **D.** giao điểm của SD và MK (với $K = SO \cap AM$).

Lời giải

Chọn C



● Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD.

● Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (ABM).

Ta có B là điểm chung thứ nhất của (SBD) và (ABM).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$. Trong mặt phẳng (SAC), gọi $K = AM \cap SO$. Ta có:

▪ $K \in SO$ mà $SO \subset (SBD)$ suy ra $K \in (SBD)$.

▪ $K \in AM$ mà $AM \subset (ABM)$ suy ra $K \in (ABM)$.

Suy ra K là điểm chung thứ hai của (SBD) và (ABM).

Do đó $(SBD) \cap (ABM) = BK$.

● Trong mặt phẳng (SBD), gọi $N = SD \cap BK$. Ta có:

▪ $N \in BK$ mà $BK \subset (ABM)$ suy ra $N \in (ABM)$.

▪ $N \in SD$.

Vậy $N = SD \cap (ABM)$.

Câu 5: Cho bốn điểm A, B, C, S không cùng ở trong một mặt phẳng. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB. Trên SC lấy điểm K sao cho IK không song song với AC (K không trùng với các đầu mút). Gọi E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK). Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. E nằm ngoài đoạn BC về phía B.

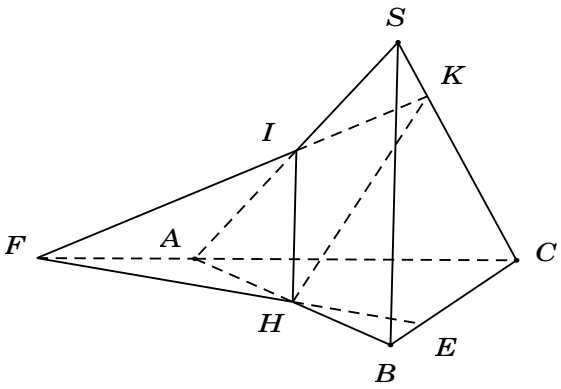
B. E nằm ngoài đoạn BC về phía C.

C. E nằm trong đoạn BC.

D. E nằm trong đoạn BC và $E \neq B, E \neq C$.

Lời giải

Chọn D



● Chọn mặt phẳng phụ (ABC) chứa BC.

● Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (IHK).

Ta có H là điểm chung thứ nhất của (ABC) và (IHK).

Trong mặt phẳng (SAC), do IK không song song với AC nên gọi $F = IK \cap AC$. Ta có

▪ $F \in AC$ mà $AC \subset (ABC)$ suy ra $F \in (ABC)$.

▪ $F \in IK$ mà $IK \subset (IHK)$ suy ra $F \in (IHK)$.

Suy ra F là điểm chung thứ hai của (ABC) và (IHK).

Do đó $(ABC) \cap (IHK) = HF$.

● Trong mặt phẳng (ABC), gọi $E = HF \cap BC$. Ta có

▪ $E \in HF$ mà $HF \subset (IHK)$ suy ra $E \in (IHK)$.

▪ $E \in BC$.

Vậy $E = BC \cap (IHK)$.

Dạng 4. Thiết diện

1. Phương pháp

Tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt cắt với hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó chính là thiết diện cần tìm. Mỗi đoạn giao tuyến là cạnh của thiết diện.

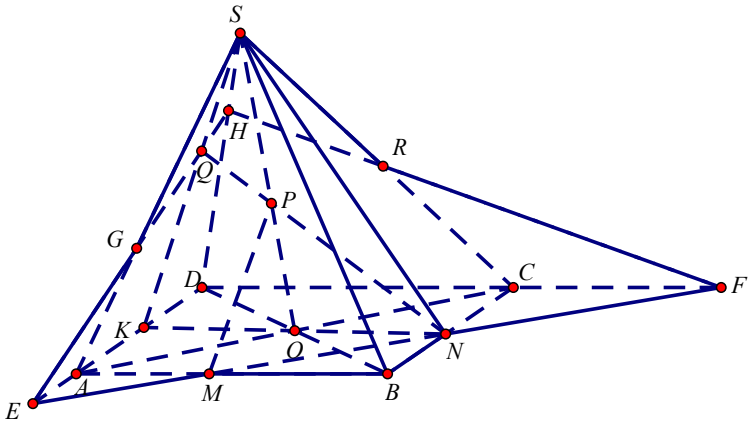
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P là ba điểm nằm trên AB, BC, SO. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Giải

Trong mp(ABCD):

$$\begin{cases} MN \cap AD = \{E\} \\ MN \cap CD = \{F\} \\ NO \cap AD = \{K\} \end{cases}$$



Trong mp(SKN): $NP \cap SK = \{Q\}$.

Trong mp(SAD):

$$\begin{cases} EQ \cap SA = \{G\} \\ EQ \cap SD = \{H\} \end{cases}$$

Khi đó: $(MNP) \equiv (HEF)$

Trong mp(SCD): $HF \cap SC = \{R\}$.

Vậy ta có các đoạn giao tuyến do mp(MNP) cắt các mặt của hình chóp là:

$(MNP) \cap (ABCD) = MN$; $(MNP) \cap (SAD) = GH$; $(MNP) \cap (SAB) = MG$;
$(MNP) \cap (SCD) = HR$; $(MNP) \cap (SBC) = RN$.

Do đó thiết diện cần tìm là ngũ giác MNRHG.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang với đáy lớn AD. Gọi M là một điểm trên cạnh SB. Tìm thiết diện của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng (AMD).

Giải

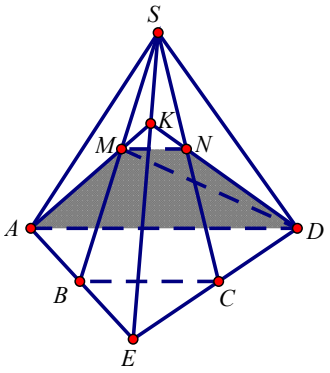
Trong mp(ABCD): $AB \cap CD = \{E\}$.

Trong mp(SAB): $AM \cap SE = \{K\}$.

Do đó $mp(AMD) \equiv mp(AKD)$.

Trong mp(SCD): $KD \cap SC = \{N\}$

Do đó $MN = (AMD) \cap (SBC)$, $ND = (AMD) \cap (SCD)$.



Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác AMND.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD, E là một điểm trên cạnh BC, F là một điểm trên cạnh SD.

a. Tìm giao điểm K của BF và mp(SAC).
b. Tìm giao điểm J của EF và mp(SAC).
c. Chứng minh ba điểm C, K, J thẳng hàng.
d. Xác định thiết diện của hình chóp được cắt bởi mặt phẳng (BCF).

Giải

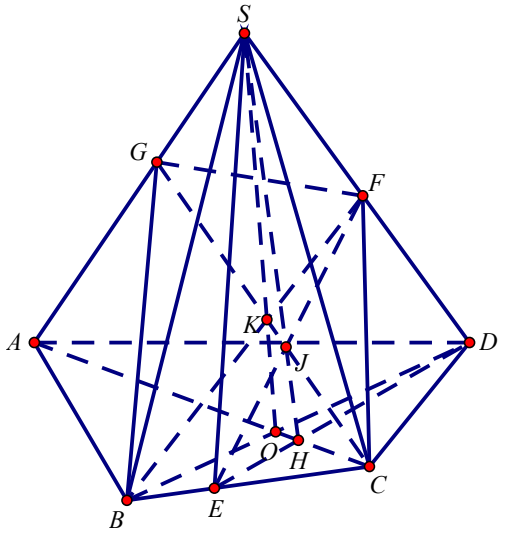
a. Ta có: $BF \subset (SBD)$.

Trong mp(ABCD): $AC \cap BD = \{O\}$

Do đó $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

Trong mp(SBD): $BF \cap SO = \{K\}$

Do đó $\{K\} = BF \cap (SAC)$.



b. Ta có $EF \subset (SED)$

Trong mp(ABCD): $AC \cap ED = \{H\}$

Trong mp(SED): $EF \cap SH = \{J\}$

Mà $SH \subset (SAC)$ nên $\{J\} = EF \cap (SAC)$.

c. Ta có:

$$\begin{cases} \{K\} = BF \cap (SAC) \\ \{J\} = EF \cap (SAC) \\ BF \subset (BCF), EF \subset (BCF) \end{cases} \Rightarrow K, J \in (BCF) \cap (SAC)$$

Mà $C \in (BCF) \cap (SAC)$, nên K, J, C là ba điểm chung của hai mặt phẳng (BCF) và (SAC), suy ra chúng thẳng hàng.

d. Trong mp(SAC): $CK \cap SA = \{G\}$, suy ra $mp(BCF) \equiv mp(BCFG)$.

Vậy ta có các đoạn giao tuyến của mp(BCF) với các mặt của hình chóp là: $BG = (BCF) \cap (SAB)$, $GF = (BCF) \cap (SAD)$, $FC = (BCF) \cap (SCD)$.

Do đó thiết diện cần tìm là tứ giác BCFG.

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AD; G là trọng tâm tam giác SAD. Đường thẳng BN cắt CD tại K.

a. Chứng minh ba điểm M, G, K thẳng hàng.
b. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MCG).

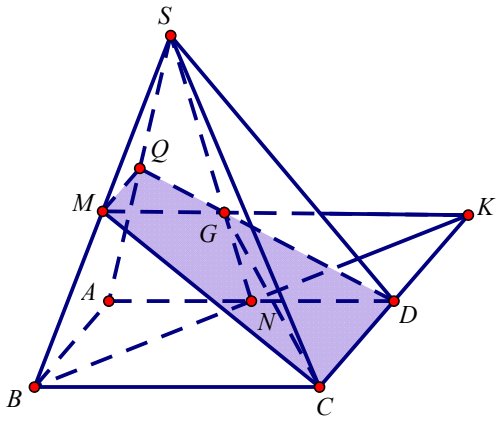
Tính tỉ số mà thiết diện chia đoạn SA. Từ đó cho biết thiết diện là hình gì?

Giải

a. Ta có SN là đường trung tuyến của tam giác SAD.

G là trọng tâm của tam giác SAD nên:

$\frac{SG}{SN}=\frac{2}{3}$.



Xét tam giác BCK có: $ND \parallel BC$ và $ND=\frac{1}{2}BC$ (do N là trung điểm của AD) nên SN là đường trung tuyến của tam giác SBK. Mà $\frac{SG}{SN}=\frac{2}{3}$ nên G cũng là trọng tâm của tam giác SBK.

Ta lại có MK là đường trung tuyến của tam giác SBK. Do đó KM đi qua trọng tâm G.

Vậy ba điểm M, G, K thẳng hàng.

b. Do ba điểm M, G, K thẳng hàng nên $mp(MCG)\equiv mp(MCK)$, suy ra $CD\subset(MCG)$ và $DG\subset(MCG)$.

Trong mp(SAD): $DG\cap SA=\{Q\}$, suy ra $DQ=(MCG)\cap(SAD)$ và $MQ=(MCG)\cap(SAB)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác MCDQ.

Vì G là trọng tâm tam giác SAD nên DG là đường trung tuyến của tam giác SAD. Do đó Q là trung điểm của SA.

Vậy thiết diện chia đoạn SA theo tỉ số $\frac{QS}{QA}=1$.

Như vậy MQ là đường trung bình của tam giác SAB.

Do đó $MQ \parallel AB$, mà $AB \parallel CD$ nên $MQ \parallel CD$.

Vậy thiết diện MCDQ là hình thang.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED=3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE.

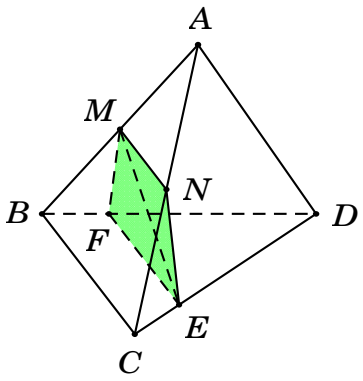
B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN // BC$.

Từ E kẻ đường thẳng d song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF // BC$.

Do đó $MN // EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Trên đường thẳng CD lấy điểm M nằm ngoài đoạn CD. Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) là:

A. Tứ giác $HKMN$ với $N \in AD$.

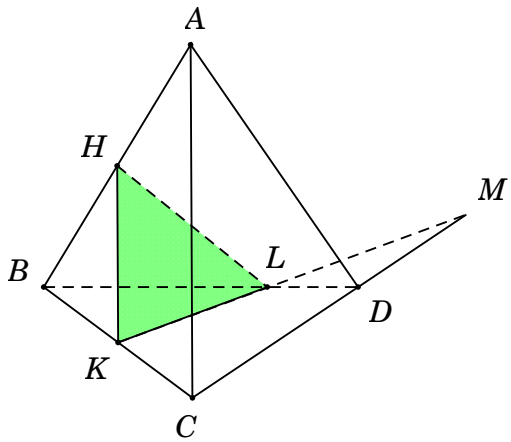
B. Hình thang $HKMN$ với $N \in AD$ và $HK // MN$.

C.Tam giác HKL với $L = KM \cap BD$.

D. Tam giác HKL với $L = HM \cap AD$.

Lời giải

Chọn C



Ta có HK, KM là đoạn giao tuyến của (HKM) với (ABC) và (BCD).

Trong mặt phẳng (BCD), do KM không song song với BD nên gọi $L = KM \cap BD$.

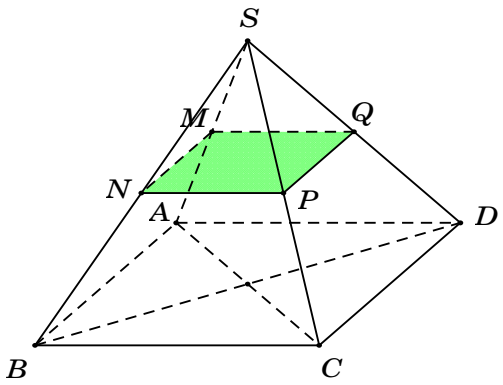
Vậy thiết diện là tam giác HKL.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a $(a>0)$. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng:

A. a^2. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2}{4}$. **D.** $\frac{a^2}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi Q là trung điểm của SD.

Tam giác SAD có M, Q lần lượt là trung điểm của SA, SD suy ra $MQ // AD$.

Tam giác SBC có N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC suy ra $NP // BC$.

Mặt khác $AD // BC$ suy ra $MQ // NP$ và $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.

Khi đó M, N, P, Q đồng phẳng $\Rightarrow (MNP)$ cắt SD tại Q và $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với $mp(MNP)$.

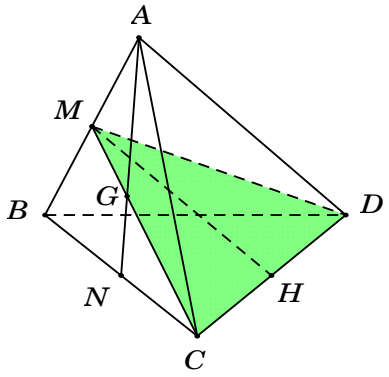
Vậy diện tích hình vuông $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{a^2}{4}$.

Câu 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC suy ra $AN \cap MC = G.$

Dễ thấy mặt phẳng (GCD) cắt đường thẳng AB tại điểm $M.$

Suy ra tam giác MCD là thiết diện của mặt phẳng (GCD) và tứ diện $ABCD.$

Tam giác ABD đều, có M là trung điểm AB suy ra $MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Tam giác ABC đều, có M là trung điểm AB suy ra $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow MH \perp CD \Rightarrow S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}.MH.CD$

Với $MH = \sqrt{MC^2 - HC^2} = \sqrt{MC^2 - \frac{CD^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

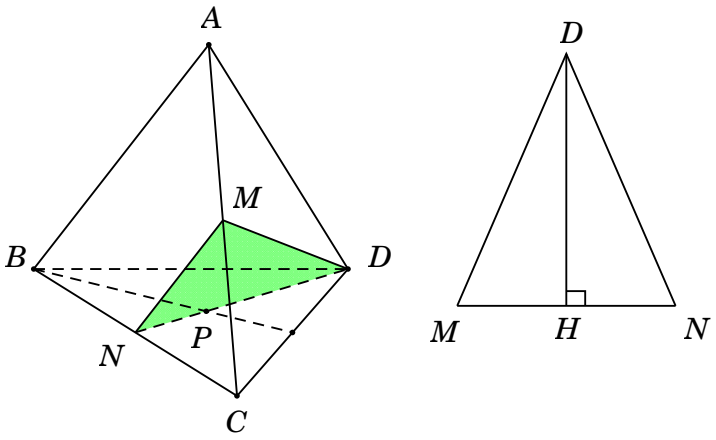
Vậy $S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}.$

Câu 5: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC; P là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{11}}{2}.$ **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}.$ **C.** $\frac{a^2\sqrt{11}}{4}.$ **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác BCD có: P là trọng tâm, N là trung điểm BC. Suy ra N, P, D thẳng hàng.

Vậy thiết diện là tam giác MND.

Xét tam giác MND, ta có $MN = \frac{AB}{2} = a$; $DM = DN = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do đó tam giác MND cân tại D.

Gọi H là trung điểm MN suy ra $DH \perp MN$.

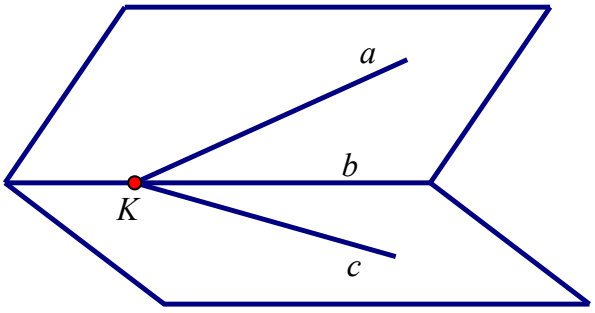
Diện tích tam giác $S_{\Delta MND} = \frac{1}{2}MN.DH = \frac{1}{2}MN.\sqrt{DM^2 - MH^2} = \frac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

Dạng 5. Ba điểm thẳng hàng ba đường thẳng đồng quy

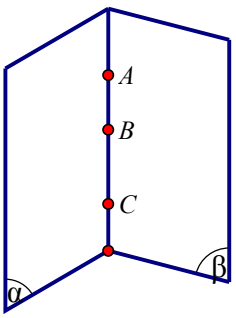
1. Phương pháp

- Muốn chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau và giao điểm đó nằm trên đường thẳng thứ 3 (Hình a).

- Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt (Hình b).



Hình a.



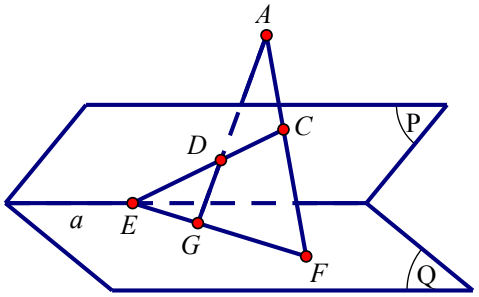
Hình b.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Gọi a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q); A là điểm không nằm trên cả hai mặt phẳng này; C và D là hai điểm nằm trên (P). Gọi E là giao điểm của a với CD; F và G lần lượt là giao điểm của AC, AD với (Q). Chứng minh rằng ba điểm E, F và G thẳng hàng.

Giải

Ta thấy D và C thuộc mp(P), A không thuộc mp(P) nên A, C và D không thẳng hàng. Do đó, tồn tại mặt phẳng (ACD). Ta có:



$$\left.\begin{array}{l} F \in AC \Rightarrow F \in (ACD) \\ F \in (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow F \in (ACD) \cap (Q) \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} G \in AD \Rightarrow G \in (ACD) \\ G \in (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow G \in (ACD) \cap (Q) \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} E \in CD \Rightarrow E \in (ACD) \\ E \in a \subset (Q) \Rightarrow E \in (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow E \in (ACD) \cap (Q) \quad (3)$$

Như vậy, F, G, E nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (Q) nên chúng thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng, sao cho chúng đôi một cắt nhau. Chứng minh chúng đồng quy.

Giải

Theo giả thiết a và b cắt nhau, giả sử tại O.

Ta chứng minh O thuộc c.

Do a và c cắt nhau nên tồn tại mp(a,c).

Do b và c cắt nhau nên tồn tại mp(b,c). Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} O \in a \Rightarrow O \in (a,c) \\ O \in b \Rightarrow O \in (b,c) \end{array}\right\} \Rightarrow O \in (a,c) \cap (b,c)$$

Mà $(a,c) \cap (b,c) = c$ nên $O \in c$.

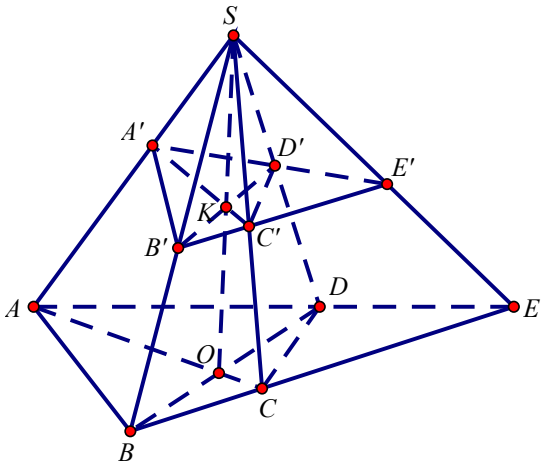
Vậy ba đường thẳng a, b, c đồng quy tại O.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD, AC và BD cắt nhau tại O. Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Giả sử AD cắt BC tại E; A'D' cắt B'C' tại E'. Chứng minh:

a. S, E, E' thẳng hàng.
b. A'C', B'D', SO đồng quy.

Giải

a. $\begin{cases} BC \cap AD = \{E\} \\ BC \subset (SBC) \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow E \in (SBC) \cap (SAD) \quad (1)$



$\begin{cases} B'C' \cap A'D' = \{E'\} \\ B'C' \subset (SB'C') \\ A'D' \subset (SA'D') \end{cases} \Rightarrow E' \in (SB'C') \cap (SA'D') \quad (2)$

Mà $S \in (SBC) \cap (SAD) \quad (3)$

Kết hợp (1), (2), (3) ta có ba điểm S, E, E' cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD). Do đó ba điểm đó thẳng hàng.

b. Trong mp(A'B'C'D'):

$\left.\begin{array}{l} A'C' \cap B'D' = \{K\} \\ A'C' \subset (SAC) \\ B'D' \subset (SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD) \quad (i)$

Mà $(SAC) \cap (SBD) = SO \quad (ii)$ nên từ (i), (ii) suy ra $K \in SO$.

Vậy ba đường thẳng SO, A'C', B'D' đồng quy.

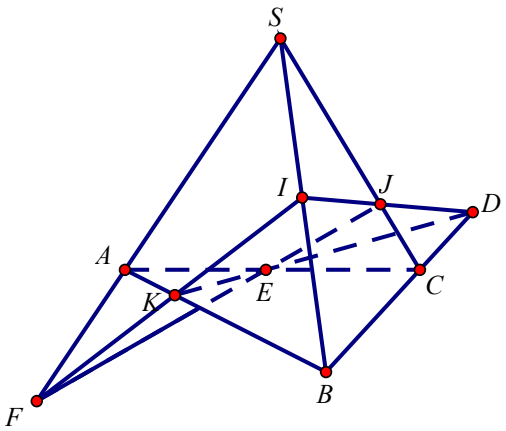
Ví dụ 4. Cho tứ diện SABC. Gọi I, J và K lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh SB, SC và AB, sao cho IJ không song song với BC, IK không song song với SA.

a. Tìm giao điểm D của (IJK) và BC.
b. Gọi E là giao điểm của DK và AC. Chứng minh ba đường thẳng SA, KI, EJ đồng quy.

Giải

a. Trong mp(SBC): $IJ \cap BC = \{D\}$ (do IJ không song song với BC).

Mà $IJ \subset (IJK)$ nên $D = (IJK) \cap BC$.



b. Ta có IK không song song với SA nên trong mp(ABC): $IK \cap SA = \{F\}$.

Ta có:

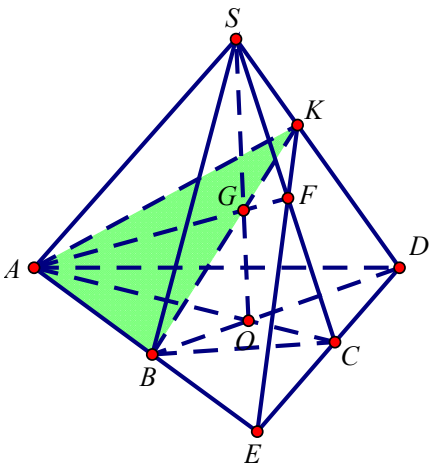
$\left.\begin{array}{l} IK \cap SA = \{F\} \\ IK \subset (IJK), SA \subset (SAC) \\ EJ = (IJK) \cap (SAC) \end{array}\right\} \Rightarrow F \in EJ.$

Vậy ba đường thẳng SA, IK, EJ đồng quy.

Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD không là hình thang. Gọi O là giao điểm của AC và BD, K là một điểm trên cạnh SD.

a. Tìm giao điểm E của mặt phẳng (ABK) với CD.
b. Tìm giao điểm F của mặt phẳng (ABK) với SC.
c. Chứng minh các đường thẳng AF, BK và SO đồng quy.

Giải



a. Trong mp(ABCD): $AB \cap CD = \{E\}$.

Mà $AB \subset (ABK)$ nên $E \in (ABK) \cap CD$.

b. Ta có: $(ABK) \equiv (AEK)$

Trong mp(SCD): $EK \cap SC = \{F\}$.

Mà $EK \subset (ABK)$ nên $F \in (ABK) \cap SC$.

c. Trong mp(ABK): $AF \cap BK = \{G\}$.

Mà $AF \subset (SAC)$, $BK \subset (SBD)$

nên $G \in (SAC) \cap (SBD) = SO$.

Vậy ba đường thẳng AF, BK và SO đồng quy.

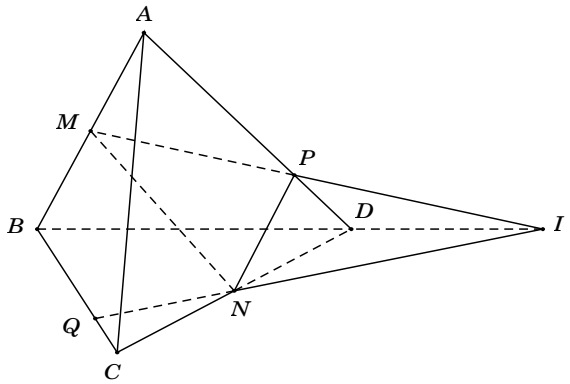
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q. Biết MP cắt NQ tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, C. **B.** I, B, D. **C.** I, A, B. **D.** I, C, D.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(ABD)\cap(BCD)=BD$.

Lại có $\begin{cases} I\in MP\subset(ABD) \\ I\in NQ\subset(BCD) \end{cases}\Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của (ABD) và (BCD)

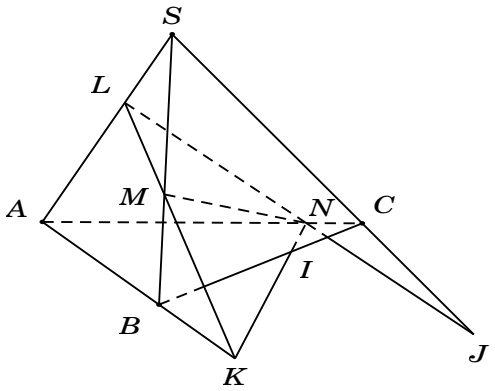
$\Rightarrow I\in BD\Rightarrow I,\ B,\ D$ thẳng hàng.

Câu 2: Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC. Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. $K, I, J.$ **B.** $M, I, J.$ **C.** $N, I, J.$ **D.** $M, K, J.$

Lời giải

Chọn B



Ta có

- $M\in SB$ suy M là điểm chung của (LMN) và (SBC).
- I là điểm chung của (LMN) và (SBC).
- J là điểm chung của (LMN) và (SBC).

Vậy M, I, J thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của (LMN) và (SBC).

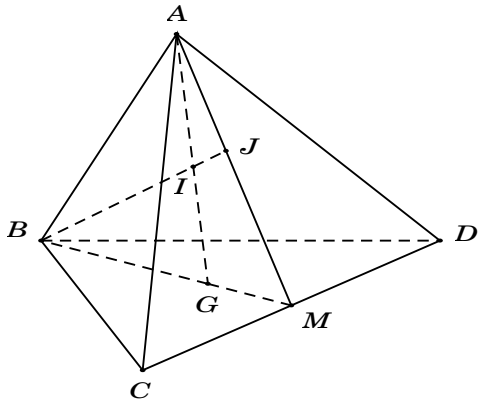
Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD, I là điểm ở trên đoạn thẳng AG, BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM=(ACD)\cap(ABG).$ **B.** A, J, M thẳng hàng.

C. J là trung điểm của $AM.$ **D.** $DJ=(ACD)\cap(BDJ).$

Lời giải

Chọn C



Ta có A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

Do $BG \cap CD = M \Rightarrow \begin{cases} M \in BG \subset (ABG) \Rightarrow M \in (ABG) \\ M \in CD \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow M$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

$\Rightarrow (ABG) \cap (ACD) = AM \longrightarrow$ A đúng.

Ta có $\begin{cases} BI \subset (ABG) \\ AM \subset (ABM) \\ (ABG) \equiv (ABM) \end{cases} \Rightarrow AM, BI$ đồng phẳng.

$\Rightarrow J = BI \cap AM \Rightarrow A, J, M$ thẳng hàng $\longrightarrow$ B đúng.

Ta có $\begin{cases} DJ \subset (ACD) \\ DJ \subset (BDJ) \end{cases} \Rightarrow DJ = (ACD) \cap (BDJ) \longrightarrow$ D đúng.

Điểm I di động trên AG nên J có thể không phải là trung điểm của AM

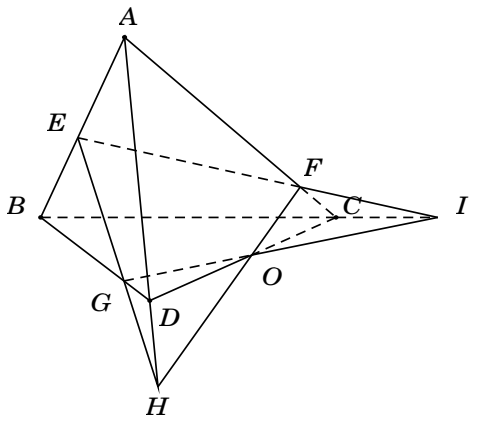
$\longrightarrow$ C sai.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Ba đường thẳng nào sau đây đồng quy?

A. CD, EF, EG. **B.** CD, IG, HF. **C.** AB, IG, HF. **D.** AC, IG, BD.

Lời giải

Chọn B



Phương pháp: Để chứng minh ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β); đồng thời d_3 là giao tuyến (α) và (β).

Gọi $O = HF \cap IG$. Ta có

- $O \in HF$ mà $HF \subset (ACD)$ suy ra $O \in (ACD)$.
- $O \in IG$ mà $IG \subset (BCD)$ suy ra $O \in (BCD)$.

Do đó $O \in (ACD) \cap (BCD)$. (1)

Mà $(ACD) \cap (BCD) = CD$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in CD$.

Vậy ba đường thẳng CD, IG, HF đồng quy.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M. Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB). Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một song song.

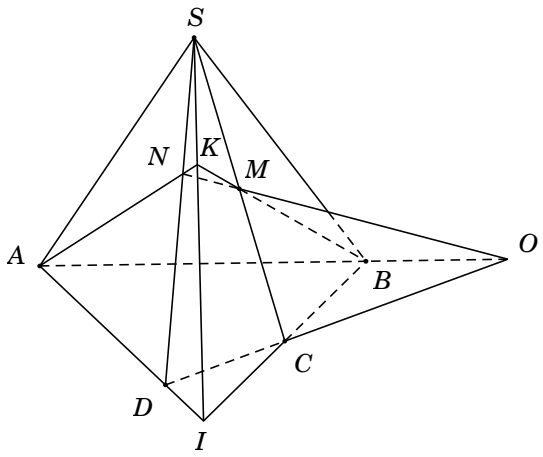
B. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một cắt nhau.

C. Ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.

D. Ba đường thẳng AB, CD, MN cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn C



Gọi $I = AD \cap BC.$ Trong mặt phẳng (SBC), gọi $K = BM \cap SI$. Trong mặt phẳng (SAD), gọi $N = AK \cap SD$.

Khi đó N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB).

Gọi $O = AB \cap CD$. Ta có:

- $O \in AB$ mà $AB \subset (AMB)$ suy ra $O \in (AMB)$.
- $O \in CD$ mà $CD \subset (SCD)$ suy ra IJ, MN, SE.

Do đó $O \in (AMB) \cap (SCD)$. (1)

Mà $(AMB) \cap (SCD) = MN$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in MN$. Vậy ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.

Dạng 5. Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng.

1. Phương pháp

Áp dụng kết quả: $\left.\begin{array}{l} \mathrm{I} = \mathrm{a} \cap \mathrm{b} \\ \mathrm{a} \subset (\mathrm{P}), \mathrm{b} \cap (\mathrm{Q}) \\ (\mathrm{P}) \cap (\mathrm{Q}) = \mathrm{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{I} \in \mathrm{c}$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện aBCD. Gọi K là trung điểm của cạnh BC, H là một điểm cố định trên cạnh AC. Mặt phẳng (P) di động chứa HK, cắt các cạnh BD và AD lần lượt tại M và N.

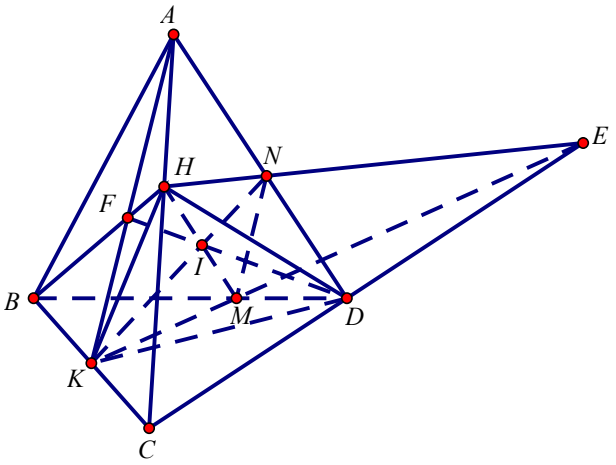
a. Giả sử cho trước điểm M không là trung điểm của BD, hãy xác định điểm N.
b. Tìm tập hợp giao điểm I của hai đường HM và KN khi M di động trên canh BD.

Giải

a. Trong mp(BCD): $KM \cap CD = \{E\}$.

Trong mp(ACD): $HE \cap AD = \{N\}$.

Mà $HE \subset (P)$ nên $N = AD \cap (P)$ là điểm cần tìm.



b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} I = HM \cap KN \\ HM \subset (HBD) \\ KN \subset (AKD) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (HBD) \cap (AKD) \quad (1)$$

Trong mp(ABC): $BH \cap AK = \{F\}$

$\Rightarrow F \in (HBD) \cap (AKD)$

Mà $D \in (HBD) \cap (AKD)$, nên $DF = (HBD) \cap (AKD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra I chạy trên đường thẳng cố định DF.

Giới hạn:

Cho $M \to D$ thì $N \to D$. Khi đó $I \to D$.

Cho $M \to B$ thì $N \to A$. Khi đó $I \to F$.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn DF.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và AC, sao cho MN không song song với BC. Mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F.

a. Chứng minh EF luôn đi qua điểm cố định.
b. Tìm tập hợp giao điểm của ME và NF.
c. Tìm tập hợp giao điểm của MF và NE.

Giải

a. Trong mp(ABC): $MN \cap BC = K$.

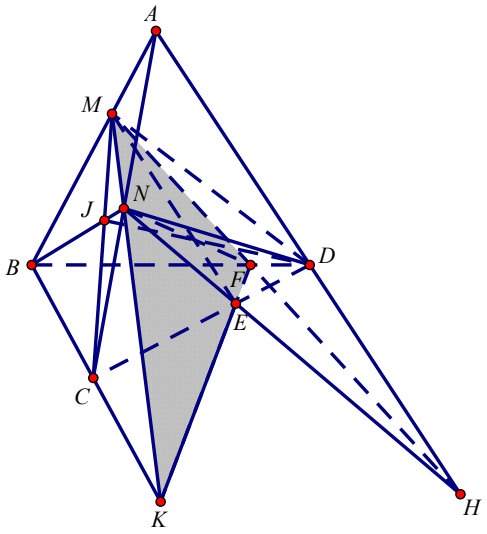
Khi đó K là điểm chung của (BCD) và (P), mà EF là giao tuyến của (BCD) và (P) nên EF đi qua điểm K cố định.

b. Gọi I là giao điểm của ME và NF thì I là điểm chung của (NBD) và (MCD), suy ra I thuộc giao tuyến DJ của mp(MCD) và (NBD).

Giới hạn: Tậm hợp cần tìm là đoạn DJ.

c. Gọi H là giao điểm của MF và NE thì H là điểm chung của (ABD) và (ACD), suy ra H thuộc giao tuyến AD của mp(ABD) và mp(ACD).

Giới hạn: Tập hợp điểm cần tìm là đường thẳng AD trừ đi đoạn AD.



BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng a và b. Căn cứ vào sự đồng phẳng và số điểm chung của hai đường thẳng ta có bốn trường hợp sau:

a. Hai đường thẳng song song: cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, tức là $a \parallel b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset (P); b \subset (P) \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$.

b. Hai đường thẳng cắt nhau: chỉ có một điểm chung.

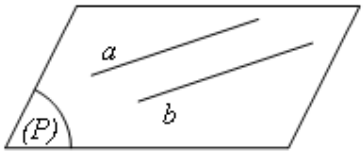
a cắt b khi và chỉ khi $a \cap b = I$.

c. Hai đường thẳng trùng nhau: có hai điểm chung phân biệt.

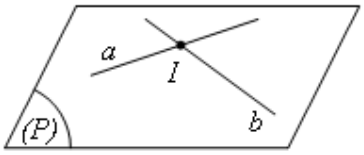
$a \cap b = \{A, B\} \Leftrightarrow a \equiv b$.

d. Hai đường thẳng chéo nhau: không cùng thuộc một mặt phẳng.

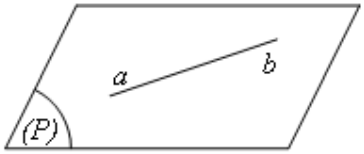
a chéo b khi và chỉ khi a, b không đồng phẳng.



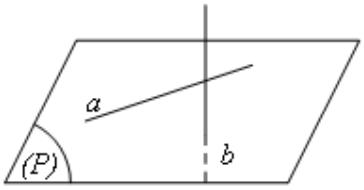
a song song với b



a cắt b tại giao điểm I



a và b cắt nhau tại vô số điểm (trùng)



a và b chéo nhau

2. Hai đường thẳng song song

Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lí (về giao tuyến của hai mặt phẳng): Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Lời giải

Chọn A

Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song (khi chúng đồng phẳng) hoặc chéo nhau (khi chúng không đồng phẳng).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.

B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.

C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Lời giải

Chọn D

• A sai. Trong trường hợp 2 đường thẳng cắt nhau thì chúng chỉ có 1 điểm chung.

• B và C sai. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.

C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.

D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Lời giải

Chọn C

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.

B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.

C. Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.

D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Lời giải

Chọn B

• A sai. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không có điểm chung.

• C sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó hoặc cắt nhau hoặc trùng nhau.

• D sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó song song.

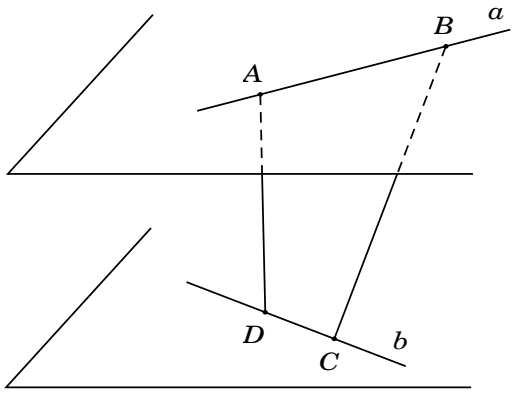
Câu 5: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b. Khẳng định nào sau đây **đúng** khi nói về hai đường thẳng AD và BC?

A. Có thể song song hoặc cắt nhau. **B.** Cắt nhau.

C. Song song với nhau. **D.** Chéo nhau.

Lời giải

Chọn D



Theo giả thiết, a và b chéo nhau $\Rightarrow$ a và b không đồng phẳng.

Giả sử AD và BC đồng phẳng.

• Nếu $AD \cap BC = I \Rightarrow I \in (ABCD) \Rightarrow I \in (a;b)$. Mà a và b không đồng phẳng, do đó, không tồn tại điểm I.

• Nếu $AD \parallel BC \Rightarrow$ a và b đồng phẳng (Mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy điều giả sử là sai. Do đó AD và BC chéo nhau.

Câu 6: Cho ba mặt phẳng phân biệt (α), (β), (γ) có $(\alpha)\cap(\beta) = d_1$; $(\beta)\cap(\gamma) = d_2$; $(\alpha)\cap(\gamma) = d_3$. Khi đó ba đường thẳng d_1, d_2, d_3:

A. Đôi một cắt nhau. **B.** Đôi một song song.

C. Đồng quy. **D.** Đôi một song song hoặc đồng quy.

Lời giải

Chọn D

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyền ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Câu 7: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c, biết $a \parallel b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c:

A. Trùng nhau hoặc chéo nhau. **B.** Cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Chéo nhau hoặc song song. **D.** Song song hoặc trùng nhau.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $b \parallel c \Rightarrow c \parallel a$ (mâu thuẫn với giả thiết).

Câu 8: Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a \parallel b$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu $a \parallel c$ thì $b \parallel c$.

B. Nếu c cắt a thì c cắt b.

C. Nếu $A \in a$ và $B \in b$ thì ba đường thẳng a, b, AB cùng ở trên một mặt phẳng.

D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b.

Lời giải

Chọn B

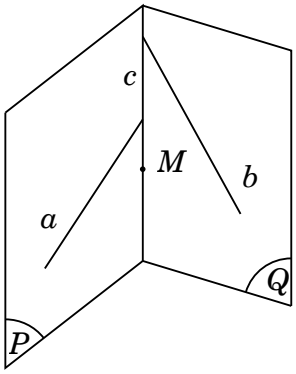
Nếu c cắt a thì c cắt b hoặc c chéo b.

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b và điểm M ở ngoài a và ngoài b. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng qua M cắt cả a và b?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A



Gọi (P) là mặt phẳng tạo bởi đường thẳng a và M ; (Q) là mặt phẳng tạo bởi đường thẳng b và M .

Giả sử c là đường thẳng qua M cắt cả a và b .

$\Rightarrow \begin{cases} c \in (P) \\ c \in (Q) \end{cases} \Rightarrow c = (P) \cap (Q)$.

Vậy chỉ có 1 đường thẳng qua M cắt cả a và b .

Câu 10: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng ấy?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là điểm bất kì nằm trên a .

Giả sử d là đường thẳng qua M cắt cả b và c . Khi đó, d là giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi M và b với mặt phẳng tạo bởi M và c .

Với mỗi điểm M ta được một đường thẳng d .

Vậy có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng a, b, c .

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng song song

1. Phương pháp

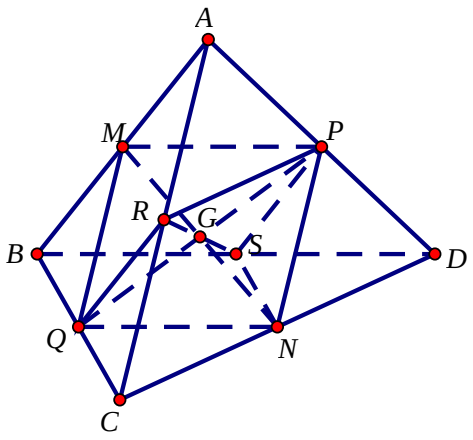
Cách 1. (Dùng định nghĩa) chứng minh hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
Cách 2. Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng.
Cách 3. Dùng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Chứng minh ba đoạn nối trung điểm các cạnh đối diện của một tứ diện đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

Giải

Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, CD, AD, BC, AC, BD. Ta cần chứng minh các đoạn MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm của chúng.



Ta có:

MP là đường trung bình của ΔABD nên

$MP \parallel BD$ và $MP = \frac{1}{2}BD$ (1)

NQ là đường trung bình của ΔBCD nên

$NQ \parallel BD$ và $NQ = \frac{1}{2}BD$ (2)

Vậy tứ giác MPNQ là hình bình hành.

Gọi G là giao điểm của hai đường chéo MN và PQ. Khi đó ta có G là trung điểm của MN và PQ.

Tương tự ta chứng minh được tứ giác PSQR là hình bình hành. Suy ra trung điểm G của đường chéo PQ cũng là trung điểm của đường chéo RS.

Vậy ba đoạn MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm G của mỗi đường.

Chú ý: Điểm G nói trên được gọi là trọng tâm của tứ diện.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và BD; E là một điểm trên cạnh AD nhưng không trùng với A và D.

a. Xác định thiết diện của tứ diện với mp(IJE).

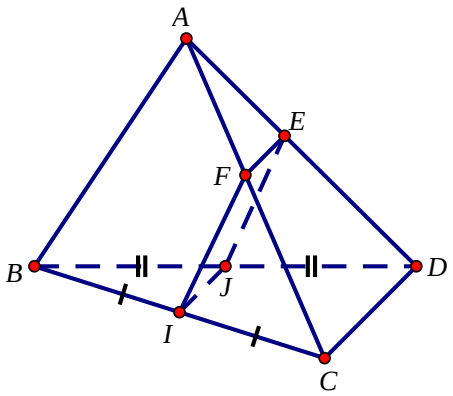
b. Xác định vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện đó là hình bình hành.

c. Tìm điều kiện của tứ diện ABCD và vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện đó là hình thoi.

Giải

a. Xác định thiết diện của tứ diện với mp (IJE): Ta có IJ là đường trung bình của ΔBCD nên: $IJ \parallel CD$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} IJ \subset (IJE) \\ CD \subset (ACD) \\ IJ \parallel CD \\ E \in (IJE) \cap (ACD) \end{array}\right\} \Rightarrow (IJE) \cap (ACD) = EF \parallel IJ \ (F \in AC) \quad (2)$$



Như vậy, mp(IJE) cắt các mặt của tứ diện theo các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau IJ, JE, EF và FI, nên thiết diện cần tìm là tứ giác IJEF có $EF \parallel IJ$ (theo (2)) nên thiết diện này là hình thang.

b. Xác định vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành: IJEF là hình bình hành khi và chỉ khi $JE \parallel IF \parallel AB$, tức là E là trung điểm của AD.

c. Tìm điều kiện của tứ diện ABCD và vị trí của điểm E trên AD để thiết diện là hình thoi: IJEF là hình thoi khi và chỉ khi IJEF là hình bình hành và $IJ = JE$, tức là E là trung điểm của AD và $AB = CD$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi E, F, G, H lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, AD, SD, SC sao cho $EH \parallel SB$, $EF \parallel AB, GH \parallel CD$.

a. Chứng minh 4 điểm E, F, G, H đồng phẳng.

b. Chứng minh $GF \parallel SA$.

c. Gọi I là giao điểm của EH và FG. Chứng minh rằng khi E di động trên BC thì I chạy trên một đường thẳng cố định.

Giải

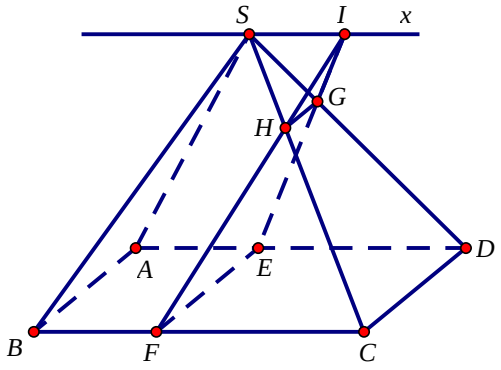
a. Chứng minh 4 điểm E, F, G, H đồng phẳng. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} EF \parallel AB \\ AB \parallel CD \end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel CD \quad (1)$$

Mặt khác: $GH \parallel CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $EF \parallel GH$ (3)

(3) chứng tỏ tồn tại duy nhất mặt phẳng qua hai đường thẳng song song EF và GH. Vậy bốn điểm E, F, G, H đồng phẳng (cùng thuộc $mp(EF,GH)$).



b. Chứng minh $GF \parallel SA$:

ΔSCD có $GH \parallel CD$ nên: $\frac{DG}{DS} = \frac{CH}{CS}$ (4)

ΔCBS có $EH \parallel SB$ nên: $\frac{CH}{CS} = \frac{CE}{CB}$ (5)

Hình bình hành ABCD có $EF \parallel AB \parallel CD$ nên: $\frac{CE}{CB} = \frac{DF}{DA}$ (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra: $\frac{DG}{DS} = \frac{DF}{DA} \Rightarrow GF \parallel SA$.

c. Chứng minh I chạy trên đường thẳng cố định. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} I \in EH \subset (SBC) \Rightarrow I \in (SBC) \\ I \in FG \subset (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (SBC) \cap (SAD)$$

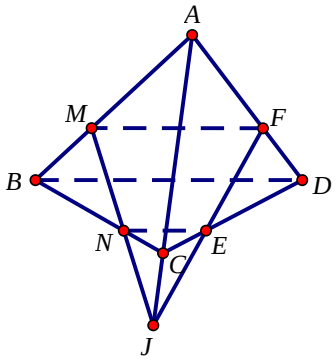
Điều này chứng tỏ I chạy trên giao tuyến cố định Sx của hai mặt phẳng cố định (SBC) và (SAD) khi E chạy trên BC.

Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD và DA. Giả sử MN cắt EF. Chứng minh rằng MN, AC và EF đồng quy.

Giải

Vì MN cắt EF nên bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

Giả sử MN cắt EF tại J. Áp dụng định lí 3 (định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng) cho ba mặt phẳng (ABC), (ACD) và (NJF), ta có ba giao tuyến MN, AJ và EF đồng quy tại J.



Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAB và SAD; E là trung điểm của cạnh BC.

a. Chứng minh $MN \parallel BD$.

b. Xác định thiết diện của hình chóp với mp(MNE).

c. Gọi H và L lần lượt là các giao điểm của mp(MNE) với các cạnh SB và SD. Chứng minh rằng $LH \parallel BD$.

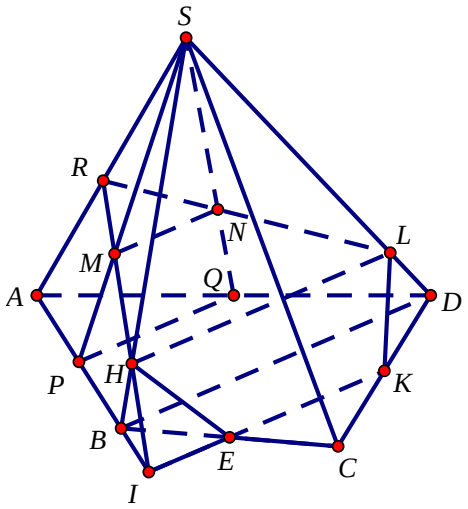
Giải

a. Chứng minh $MN \parallel BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và AD. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} M \in SP, N \in SQ \\ \dfrac{PM}{PS} = \dfrac{QN}{QS} = \dfrac{1}{3} \text{ (tính chất trọng tâm)} \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel PQ \qquad (1)$$

Mặt khác: PQ là đường trung bình của ΔABD nên: $PQ \parallel BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $MN \parallel BD$.



b. Xác định thiết diện của hình chóp với mp(MNE). Theo hệ quả của định lí 3, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} MN \subset (MNE) \\ BD \subset (ABCD) \\ MN \parallel BD \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (ABCD) \cap (MNE) = EK \parallel MN \parallel BD (K \in CD)$$

Trong mp(ABCD), gọi $I = AB \cap EK$.

Trong mp(SAB), gọi $R = IM \cap SA$, $H = IM \cap SB$.

Trong mp(SAD), gọi $L = RN \cap SD$.

Như vậy, mp(MNE) cắt các mặt (ABCD), (SBC), (SAB), (SAD), (SCD) lần lượt theo các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau KE, EH, HR, RL, LK. Do đó thiết diện cần tìm là ngũ giác KEHRL.

c. Chứng minh $LH \parallel BD$:

$$\left.\begin{array}{l} MN \subset (MNE) \\ BD \subset (SBD) \\ MN \parallel BD \\ (SBD) \cap (MNE) = HL \end{array}\right\} \Rightarrow LH \parallel BD.$$

Dạng 3. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Cách 1. Tìm hai điểm chung phân biệt (đã đề cập ở bài 1).

Cách 2. (Dùng hệ quả định lí về giao tuyến của hai mặt phẳng).

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ a \subset (P), b \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \end{array}\right\} \Rightarrow c \parallel a \parallel b}$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện SABC. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB, G là một điểm trên cạnh AC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a. (SAC) và (EFC).

b. (SAC) và (EFG).

Giải

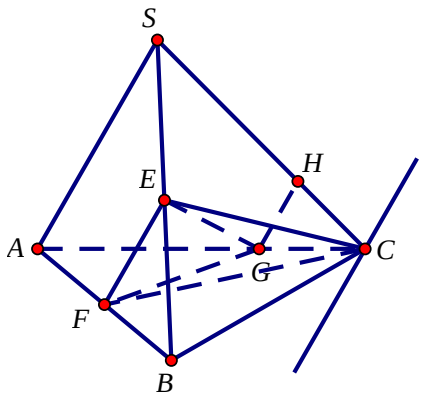
a. Ta có: EF là đường trung bình của tam giác SAB

$\Rightarrow EF \parallel SA$

Mà

$$\left.\begin{array}{l} EF \subset (EFC), SA \subset (SAC) \\ C \in (EFC) \cap (SAC) \end{array}\right\}$$

Suy ra $(EFC) \cap (SAC) = Cx \parallel EF \parallel SA$



b. Ta có: $EF \parallel SA$

Mà

$$\left.\begin{array}{l} EF \subset (EFG), SA \subset (SAC) \\ G \in (EFG) \cap (SAC) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (EFG) \cap (SAC) = Gy \parallel EF \parallel SA$

Trong mp(SAC): Gy cắt SC tại H. Vậy $GH = (EFG) \cap (SAC)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SB, P là một điểm trên cạnh BC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a. (SBC) và (SAD).

b. (SAB) và (SCD).

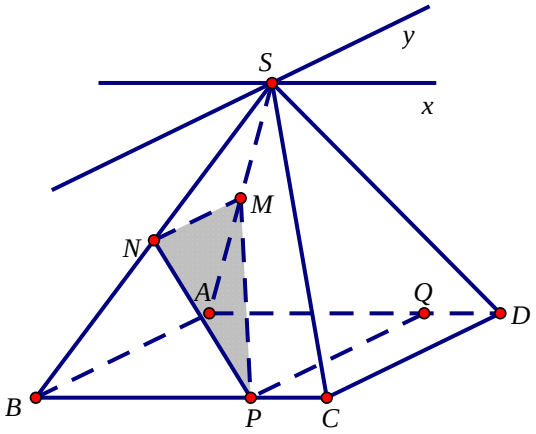
c. (MNP) và (ABCD).

Giải

a. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \\ S \in (SBC) \cap (SAD) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = Sx \parallel BC \parallel AD$.



b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sy \parallel AB \parallel CD$.

c. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AB \\ MN \subset (MNP), AB \subset (ABCD) \\ P \in (MNP) \cap (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow (MNP) \cap (ABCD) = PQ \parallel AB \parallel MN \ (Q \in AD).$$

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi G và J lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và tam giác ACD.

a. Chứng minh $GJ \parallel AB$.

b. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (GJD).

Giải

a. Gọi K là trung điểm của CD.

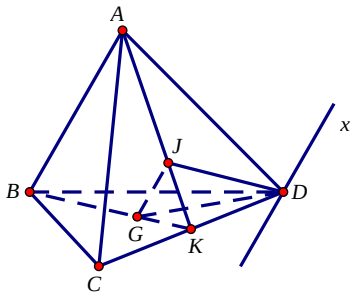
Theo tính chất trọng tâm tam giác ta có:

$$\frac{KG}{KB} = \frac{KJ}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GJ \parallel AB.$$

b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} GJ \parallel AB \\ GJ \subset (GJD), AB \subset (ABD) \\ D \in (GJD) \cap (ABD) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (GJD) \cap (ABD) = Dx \parallel AB \parallel GJ$$

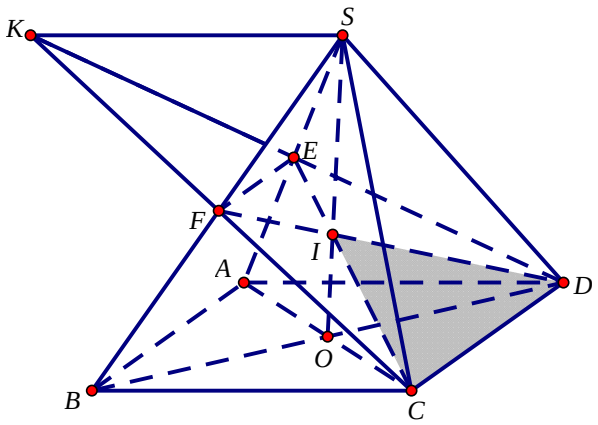


Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD tâm O và I là một điểm trên đoạn SO.

a. Tìm giao điểm E và F của mặt phẳng (ICD) lần lượt với các đường SA và SB. Chứng minh $EF \parallel AB$.

b. Gọi K là giao điểm của DE và CF. Chứng minh $SK \parallel BC$.

Giải



a. Trong mp(SAC): $IC \cap SA = \{E\}$

Trong mp(SBD): $ID \cap SB = \{F\}$

Mà $IC \subset (ICD), ID \subset (ICD)$

nên $E = (ICD) \cap SA, F = (ICD) \cap SB$.

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} EF = (SAB) \cap (ICD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow EF \parallel AB \parallel CD.$$

b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} CF \cap DE = \{K\} \\ CF \subset (SBC) \\ DE \subset (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow K \in (SBC) \cap (SAD).$$

Mà $S \in (SBC) \cap (SAD)$ nên $SK = (SBC) \cap (SAD)$.

Vậy:

$$\left.\begin{array}{l} SK = (SBC) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow SK \parallel BC \parallel AD.$$

Dạng 4. Bài tập ứng dụng

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. IJ song song với CD.

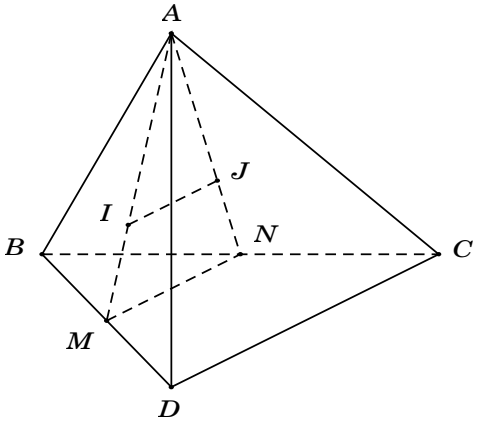
B. IJ song song với AB.

C. IJ chéo CD.

D. IJ cắt AB.

Lời giải

Chọn A



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $BC, BD.$

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow MN//CD \ (1)$

I,J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $ABD \Rightarrow \dfrac{AI}{AM}=\dfrac{AJ}{AN}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow IJ \parallel MN \ (2)$

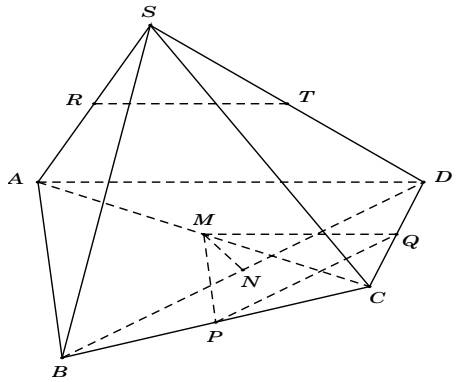
Từ (1) và (2) suy ra: $IJ \parallel CD.$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với $BC.$ Gọi $M,N,\ P,Q,R,T$ lần lượt là trung điểm $AC,BD,BC,CD,SA,SD.$ Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

A. MP và $RT.$ **B.** MQ và $RT.$ **C.** MN và $RT.$ **D.** PQ và $RT.$

Lời giải

Chọn B



Ta có: M,Q lần lượt là trung điểm của AC,CD

$\Rightarrow MQ$ là đường trung bình của tam giác $CAD \Rightarrow MQ \parallel AD \ (1)$

Ta có: R,T lần lượt là trung điểm của SA,SD

$\Rightarrow RT$ là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow RT \parallel AD \ (2)$

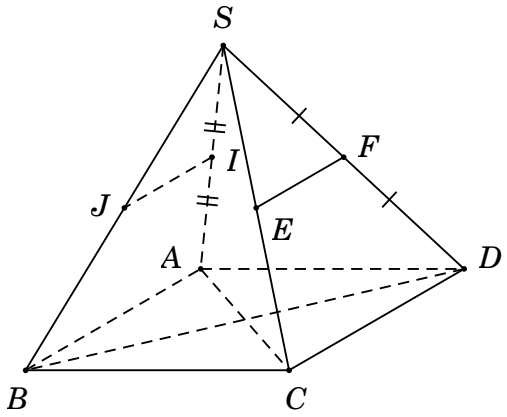
Từ $(1),(2)$ suy ra: $MQ \parallel RT$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I,J,E,F lần lượt là trung điểm SA,SB,SC,SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ?

A. EF. **B.** DC. **C.** AD. **D.** AB.

Lời giải

Chọn C



Ta có $IJ \parallel AB$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SAB) và $EF \parallel CD$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SCD).

Mà $CD \parallel AB$ (đáy là hình bình hành) $\longrightarrow CD \parallel AB \parallel EF \parallel IJ$.

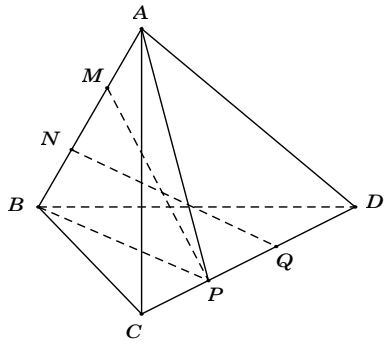
Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB; P,Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP,NQ.

A. $MP \parallel NQ$. **B.** $MP \equiv NQ$.

C. MP cắt NQ. **D.** MP,NQ chéo nhau.

Lời giải

Chọn D



Xét mặt phẳng (ABP).

Ta có: M,N thuộc $AB \Rightarrow M,N$ thuộc mặt phẳng (ABP).

Mặt khác: $CD \cap (ABP) = P$.

Mà: $Q \in CD \Rightarrow Q \notin (ABP) \Rightarrow M, N, P, Q$ không đồng phẳng.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. d qua S và song song với BC.

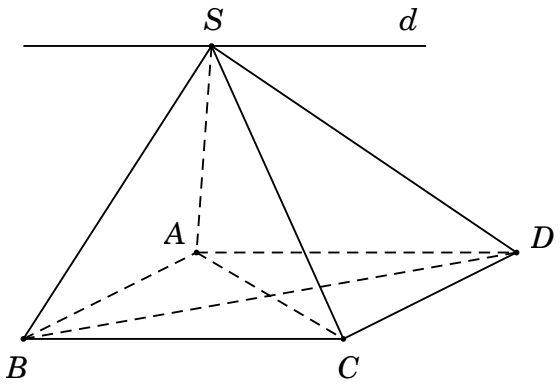
B. d qua S và song song với DC.

C. d qua S và song song với AB.

D. d qua S và song song với BD.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} (SAD) \cap (SBC) = S \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases} \longrightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC$ (với $d \equiv Sx$).

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC, G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng:

A. qua I và song song với AB.

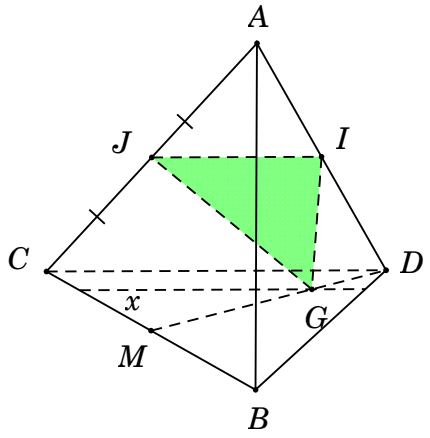
B. qua J và song song với BD.

C. qua G và song song với CD.

D. qua G và song song với BC.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(GIJ)\cap(BCD)=G\\ IJ\subset(GIJ),CD\subset(BCD)\\ IJ\parallel CD\end{cases}\longrightarrow (GIJ)\cap(BCD)=Gx\parallel IJ\parallel CD.$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB. Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

A. SC.

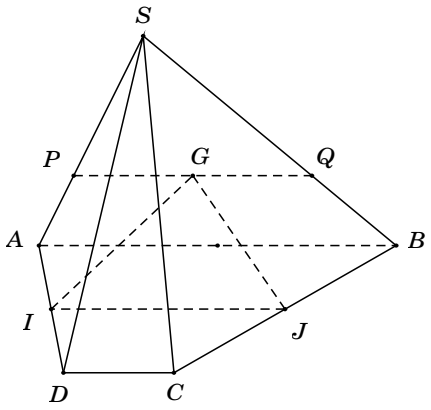
B. đường thẳng qua S và song song với AB.

C. đường thẳng qua G và song song với DC.

D. đường thẳng qua G và cắt BC.

Lời giải

Chọn C



Ta có: I,J lần lượt là trung điểm của AD và BC

$\Rightarrow IJ$ là đường trunh bình của hình thang $ABCD\Rightarrow IJ\parallel AB\parallel CD.$

Gọi $d=(SAB)\cap(IJG)$

Ta có: G là điểm chung giữa hai mặt phẳng (SAB) và (IJG)

Mặt khác: $\begin{cases}(SAB)\supset AB;(IJG)\supset IJ\\ AB\parallel IJ\end{cases}$

$\Rightarrow$ Giao tuyến d của (SAB) và (IJG) là đường thẳng qua G và song song với AB và IJ.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

A. Tam giác IBC.

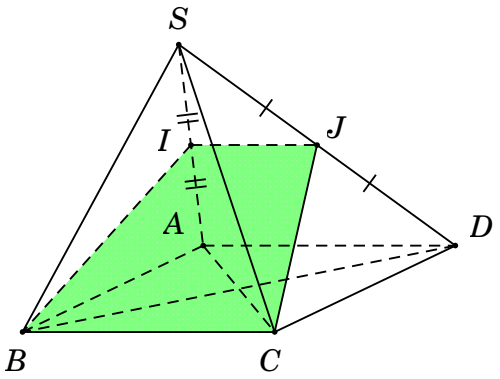
B. Hình thang $IBCJ$ (J là trung điểm SD).

C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).

D. Tứ giác $IBCD$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases}(IBC)\cap(SAD)=I\\ BC\subset(IBC),AD\subset(SAD)\longrightarrow(IBC)\cap(SAD)=Ix\parallel BC\parallel AD\\ BC\parallel AD\end{cases}$

Trong mặt phẳng (SAD): $Ix\parallel AD$, gọi $Ix\cap SD=J\longrightarrow IJ\parallel BC$

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là hình thang $IBCJ$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm AB và AC. Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác (T). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (T) là hình chữ nhật.

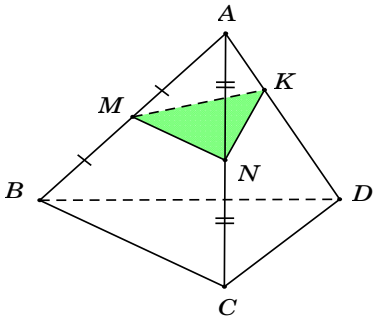
B. (T) là tam giác.

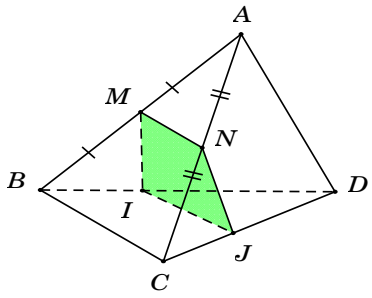
C. (T) là hình thoi.

D. (T) là tam giác; hình thang hoặc hình bình hành.

Lời giải

Chọn D





Trường hợp $(\alpha)\cap AD = K$

$\longrightarrow (T)$ là tam giác MNK. Do đó A và C sai.

Trường hợp $(\alpha)\cap(BCD) = IJ$, với $I \in BD, J \in CD$; I, J không trùng D.

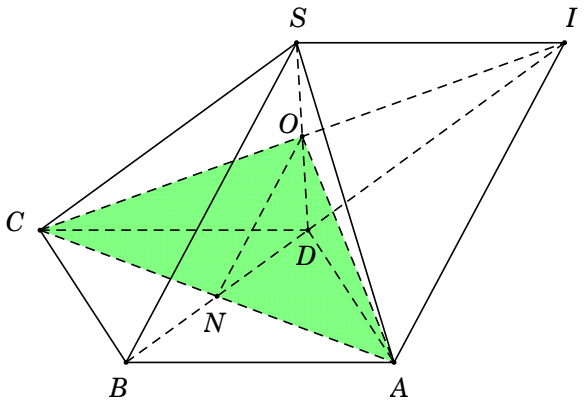
$\longrightarrow (T)$ là tứ giác. Do đó B đúng.

Câu 10: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $CDIS$ không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác SAC cân tại S, $SB = 8$. Thiết diện của mặt phẳng (ACI) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng:

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $8\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{2}$. **D.** $9\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = SD \cap CI; N = AC \cap BD$.

$\Rightarrow O, N$ lần lượt là trung điểm của $DS, DB \Rightarrow ON = \frac{1}{2}SB = 4$.

Thiết diện của $mp(ACI)$ và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác ΔOCA.

Tam giác ΔSAC cân tại $S \Rightarrow SC = SA \Rightarrow \Delta SDC = \Delta SDA$

$\Rightarrow CO = AO$ (cùng là đường trung tuyến của 2 định tương ứng) $\Rightarrow \Delta OCA$ cân tại O

$\Rightarrow S_{\Delta OCA} = \frac{1}{2}ON.AC = \frac{1}{2}.4.4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

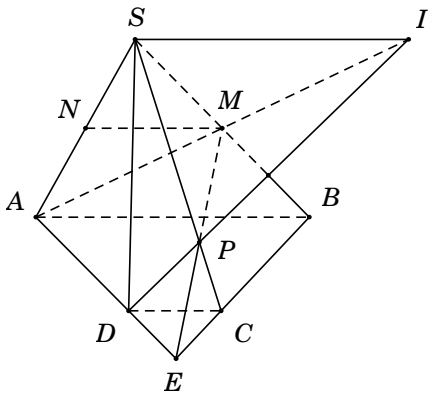
Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Gọi P là giao điểm của SC và (AND). Gọi I là giao điểm của AN và DP. Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật.

C. Hình vuông. **D.** Hình thoi.

Lời giải

Chọn A



Gọi $E = AD \cap BC,\ P = NE \cap SC$. Suy ra $P = SC \cap (AND)$.

Ta có

- S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD);
- $I = DP \cap AN \Rightarrow I$ là điểm chugn thứ hai của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Suy ra $SI = (SAB) \cap (SCD)$. Mà $AB \parallel CD \longrightarrow SI \parallel AB \parallel CD$.

Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB và chứng minh được cũng là đường trung bình của tam giác SAI nên suy ra $SI = AB$.

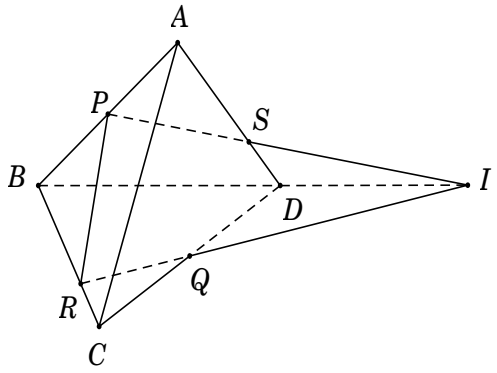
Vậy $SABI$ là hình bình hành.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và cạnh AD. Tính tỉ số $\dfrac{SA}{SD}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là giao điểm của BD và RQ. Nối P với I, cắt AD tại S.

Xét tam giác BCD bị cắt bởi IR, ta có $\frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC}.\frac{CQ}{QD}=1\Leftrightarrow\frac{DI}{IB}.2.1=1\Leftrightarrow\frac{DI}{IB}=\frac{1}{2}.$

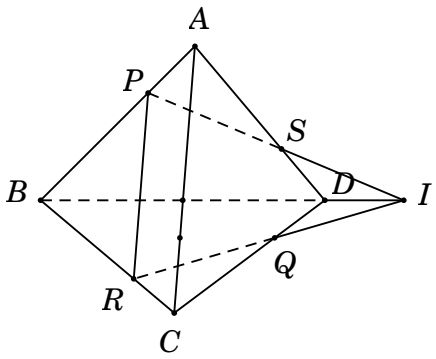
Xét tam giác ABD bị cắt bởi PI, ta có $\frac{AS}{SD}.\frac{DI}{IB}.\frac{BP}{PA}=1\Leftrightarrow\frac{SA}{SD}.\frac{1}{2}.1=1\Leftrightarrow\frac{SA}{SD}=2.$

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC. Cho $PR // AC$ và $CQ=2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S. Chọn khẳng định **đúng**?

A. $AD=3DS.$ **B.** $AD=2DS.$ **C.** $AS=3DS.$ **D.** $AS=DS.$

Lời giải

Chọn A



Gọi I là giao điểm của BD và RQ. Nối P với I, cắt AD tại S.

Ta có $\frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC}.\frac{CQ}{QD}=1$ mà $\frac{CQ}{QD}=2$ suy ra $\frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{DI}{IB}=\frac{1}{2}.\frac{RC}{BR}.$

Vì PR song song với AC suy ra $\frac{RC}{BR}=\frac{AP}{PB}\Rightarrow\frac{DI}{IB}=\frac{1}{2}.\frac{AP}{PB}.$

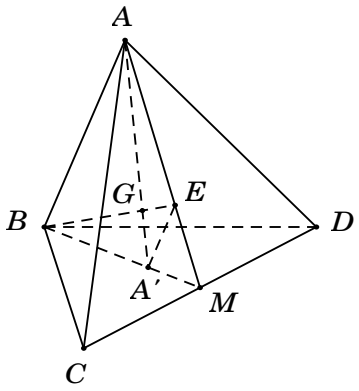
Lại có $\frac{SA}{SD}.\frac{DI}{IB}.\frac{BP}{PA}=1\Rightarrow\frac{SA}{SD}.\frac{1}{2}.\frac{AP}{PB}.\frac{BP}{PA}=1\Leftrightarrow\frac{SA}{SD}=2\longrightarrow AD=3DS.$

Câu 14: Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD. Tính tỉ số $\frac{GA}{GA'}.$

A. 2. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trọng tâm của tam giác ACD, M là trung điểm của CD.

Nối BE cắt AA' tại G suy ra G là trọng tâm tứ diện.

Xét tam giác MAB, có $\frac{ME}{MA}=\frac{MA'}{MB}=\frac{1}{3}$ suy ra $A'E//AB \Rightarrow \frac{A'E}{AB}=\frac{1}{3}$.

Khi đó, theo định lí Talet suy ra $\frac{A'E}{AB}=\frac{A'G}{AG}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{GA}{GA'}=3$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó có tam giác BCD không cân. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN. Gọi A_1 là giao điểm của AG và (BCD). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. A_1 là tâm đường tròn tam giác BCD.

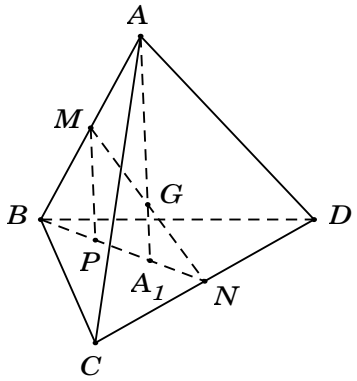
B. A_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD.

C. A_1 là trực tâm tam giác BCD.

D. A_1 là trọng tâm tam giác BCD.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng (ABN) cắt mặt phẳng (BCD) theo giao tuyến BN.

Mà $AG \subset (ABN)$ suy ra AG cắt BN tại điểm A_1.

Qua M dựng $MP // AA_1$ với $M \in BN$.

Có M là trung điểm của AB suy ra P là trung điểm $BA_1 \Rightarrow BP = PA_1$ (1).

Tam giác MNP có $MP // GA_1$ và G là trung điểm của MN.

$\Rightarrow$ A_1 là trung điểm của $NP \Rightarrow PA_1 = NA_1$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $BP = PA_1 = A_1N \Rightarrow \dfrac{BA_1}{BN} = \dfrac{2}{3}$ mà N là trung điểm của CD.

Do đó, A_1 là trọng tâm của tam giác BCD.

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A. LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) không có điểm chung, tức là:

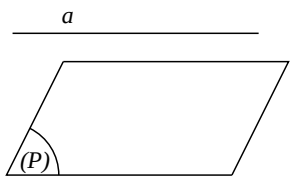
$a \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow a \parallel (P).$

b. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) chỉ có một điểm chung, tức là:

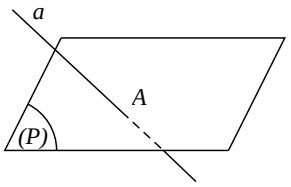
$a \cap (P) = A \Leftrightarrow a$ cắt (P) tại A.

c. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) có hai điểm chung, tức là:

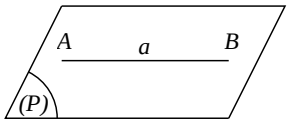
$a \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset (P).$



$a \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow a \parallel (P).$



$a \cap (P) = \{A\} \Leftrightarrow a$ cắt $(P).$



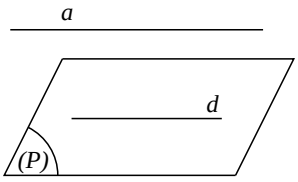
$a \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset (P).$

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Định lí 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P).

Tức là, $a \not\subset (P)$ thì nếu:

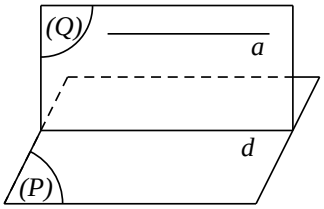
$a \parallel d \subset (P) \Rightarrow a \parallel (P).$



3. Tính chất

Định lí 2: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì sẽ cắt theo một giao tuyến song song với a.

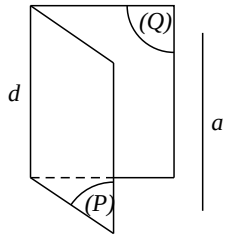
Tức là, nếu $\begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \end{cases} \left[(Q) \cap (P) = d\right] \Rightarrow a \parallel d.$



Hệ quả 1: Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

Hệ quả 2: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến (nếu có) của chúng song song với đường thẳng đó.

Tức là: $\begin{cases}(P)\cap(Q)=d\\(P)\parallel a\\(Q)\parallel a\end{cases}\Rightarrow d\parallel a.$



Hệ quả 3: Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng song song với b.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

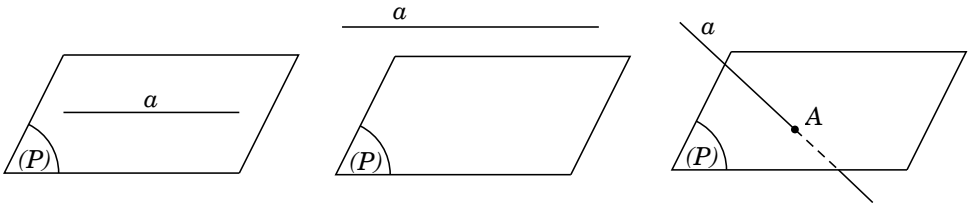
Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

Câu 1: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B



Có 3 vị trí tương đối của a và (P), đó là: a nằm trong (P), a song song với (P) và a cắt (P).

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a\parallel b$, $b\parallel(\alpha)$. Khi đó:

A. $a \parallel (\alpha)$.

B. $a \subset (\alpha)$.

C. a cắt (α).

D. $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 3: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó:

A. $a \parallel b$.

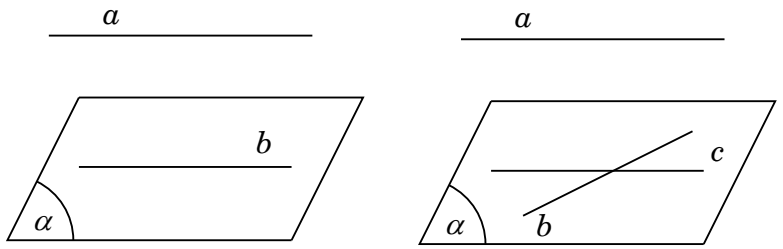
B. a, b chéo nhau.

C. $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau.

D. a, b cắt nhau.

Lời giải

Chọn C



Vì $a \parallel (\alpha)$ nên tồn tại đường thẳng $c \subset (\alpha)$ thỏa mãn $a \parallel c$. Suy ra b, c đồng phẳng và xảy ra các trường hợp sau:

• Nếu b song song hoặc trùng với c thì $a \parallel b$.

• Nếu b cắt c thì b cắt $(\beta) \equiv (a, c)$ nên a, b không đồng phẳng. Do đó a, b chéo nhau.

Câu 4: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.

B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a.

C. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

D. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b.

Lời giải

Chọn C

• A sai. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$ hoặc a, b chéo nhau.

• B sai. Nếu b cắt (α) thì b cắt a hoặc a, b chéo nhau.

• D sai. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt a hoặc song song với a.

Câu 5: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. a và b không có điểm chung.

B. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

C. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

D. a và b chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Câu 6: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b.

B. Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b.

C. Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b.

D. Các khẳng định A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn B

Gọi $(Q) \equiv (a,b)$.

• A sai. Khi $b = (P) \cap (Q) \Rightarrow b \subset (P)$.

• C sai. Khi $(P) \neq (Q) \Rightarrow b \parallel (P)$.

• Xét khẳng định B, giả sử (P) không cắt b khi đó $b \subset (P)$ hoặc $b \parallel (P)$. Khi đó, vì $b \parallel a$ nên $a \subset (P)$ hoặc a cắt (P) (mâu thuẫn với giả thiết (P) cắt a).

Vậy khẳng định B đúng.

Câu 7: Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khi đó:

A. $d \parallel d'$. **B.** d cắt d'. **C.** d và d' chéo nhau. **D.** $d \equiv d'$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $d' = (\alpha) \cap (\beta)$. Do d và d' cùng thuộc (β) nên d cắt d' hoặc $d \parallel d'$.

Nếu d cắt d'. Khi đó, d cắt (α) (mâu thuẫn với giả thiết).

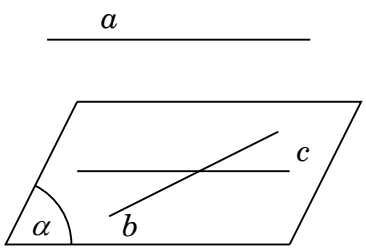
Vậy $d \parallel d'$.

Câu 8: Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D



Gọi a và b là 2 đường thẳng chéo nhau, c là đường thẳng song song với a và cắt b.

Gọi $(\alpha)\equiv(b,c)$. Do $a\parallel c\Rightarrow a\parallel(\alpha)$.

Giả sử $(\beta)\parallel(\alpha)$. Mà $b\in(\alpha)\Rightarrow b\parallel(\beta)$.

Mặt khác, $a\parallel(\alpha)\Rightarrow a\parallel(\beta)$.

Có vô số mặt phẳng $(\beta)\parallel(\alpha)$. Vậy có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.

B. Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b.

C. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M, song song với a và b (với M là điểm cho trước).

D. Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b.

Lời giải

Chọn A

Có có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Do đó A sai.

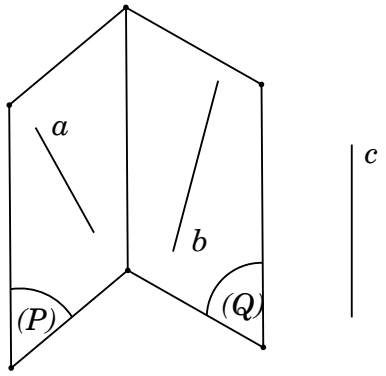
Câu 10: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a,b,c. Gọi (P) là mặt phẳng qua a, (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

A. Một mặt phẳng (P), một mặt phẳng (Q). **B.** Một mặt phẳng (P), vô số mặt phẳng (Q).

C. Một mặt phẳng (Q), vô số mặt phẳng (P). **D.** Vô số mặt phẳng (P) và (Q).

Lời giải

Chọn A



Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c \parallel (P)$ và $c \parallel (Q)$.

Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c, mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c.

Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 2. Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P)

1. Phương pháp

(Dùng định lí 1)

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel (P)$$

Nếu không có sẵn đường thẳng b trong mặt phẳng (P) thì ta tìm đường thẳng b bằng cách chọn một mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P), giao tuyến của (P) và (Q) chính là đường thẳng b cần tìm.

2. Các ví dụ

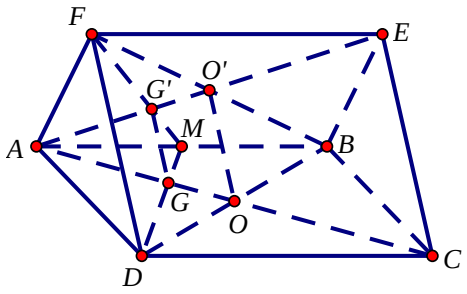
Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình bình hành ABCD và ABEF.

a. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ABF. Chứng minh $GG' \parallel (DCEF)$.

Giải

a. Ta có OO' là đường trung bình của tam giác ACE và tam giác BDF nên: $OO' \parallel CE$ và $OO' \parallel DF$.



Mà $CE \subset (BCE), DF \subset (ADF)$ nên $OO' \parallel (BCE)$ và $OO' \parallel (ADF)$.

b. Theo tính chất của trọng tâm tam giác, ta có:

$\frac{AG}{AO} = \frac{AG'}{AO'} = \frac{2}{3}$

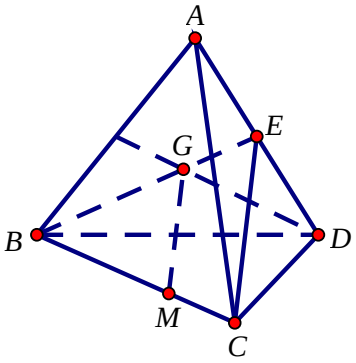
Vậy $GG' \parallel OO'$ Cd $OO' \parallel CE$ nên $GG' \parallel CE$.

Mà $CE \subset (CDEF)$ nên $GG' \parallel (DCEF)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD, G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$.

Chứng minh $MG \parallel (ACD)$.

Giải



Gọi E là trung điểm của AD. Ta có: $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$ (do G là trọng tâm của tam giác ABD).

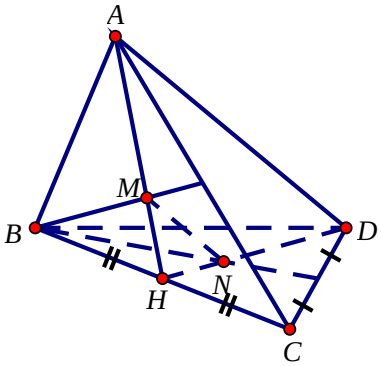
Mà $\frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$ (do $MB = 2MC$) nên $\frac{BG}{BE} = \frac{BM}{BC}$.

Suy ra $MG \parallel CE$.

Mà $CE \subset (ACD)$ do đó $MG \parallel (ACD)$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và BCD. Chứng minh rằng $MN \parallel (ABD)$ và $MN \parallel (ACD)$.

Giải



Gọi H là trung điểm của BC, ta có: $M \in AH, N \in DH$. Do đó:

$\frac{HM}{HA} = \frac{HN}{HD} = \frac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm tam giác) $\Rightarrow MN \parallel AD$.

Như vậy:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ABD) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel (ABD)$$

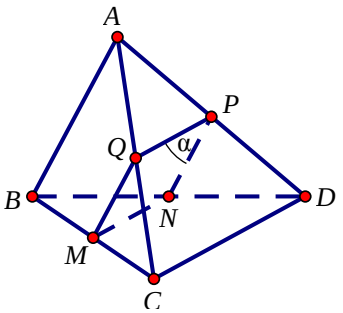
$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AD \\ AD \subset (ACD) \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel (ACD)$$

Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC; (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD, cắt các cạnh BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

Giải

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ (ABC) \supset AB \\ (ABC) \cap (\alpha) = MQ \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \parallel AB$ (1)

Tương tự, ta có: $NP \parallel AB$ (2)



$\left.\begin{array}{l} CD \parallel (\alpha) \\ (ACD) \supset CD \\ (ACD) \cap (\alpha) = PQ \end{array}\right\} \Rightarrow PQ \parallel CD$ (3)

Tương tự, ta có: $MN \parallel CD$ (4)

Từ (1) và (2) suy ra: $MQ \parallel NP$ (5)

Từ (3) và (4) suy ra: $PQ \parallel MN$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra MNPQ là hình bình hành.

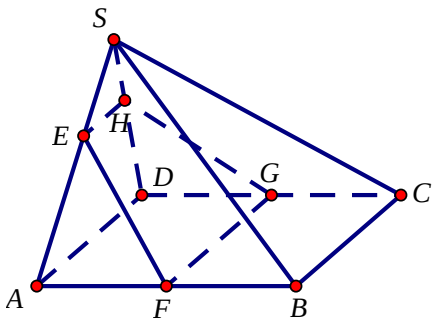
Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình bình hành; F, G lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a. Chứng minh rằng FG song song với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).
b. Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh rằng SB, SC song song với mặt phẳng (FGE).

Giải

a. Ta có:

$\left.\begin{array}{l} FG \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow FG \parallel (SAD)$



Chứng minh tương tự, ta cũng có: $FG \parallel (SBC)$

b. Gọi $(EFG) \cap SD = H$. Ta có:

$\left.\begin{array}{l} (ABCD) \cap (EFG) = FG \\ (ABCD) \cap (SAD) = AD \\ (SAD) \cap (EFG) = EH \\ FG \parallel AD \end{array}\right\} \Rightarrow EH \parallel AD \parallel FG$

Suy ra H là trung điểm của SD.

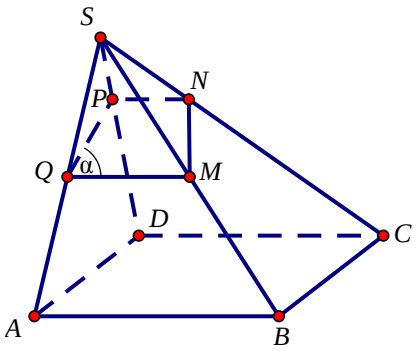
Như vậy:

$$\left.\begin{array}{l} GH \parallel SC \text{ (tính chất đường trung bình)} \\ HG \subset (EFG) \end{array}\right\} \Rightarrow SC \parallel (EFG).$$

Tương tự, ta có: $SB \parallel (EFG)$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh SB, song song với cạnh AB, cắt các cạnh SA, SD, SC lần lượt tại Q, P và N. Hãy xác định hình tính của tứ giác MNPQ?

Giải



Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ M \in (\alpha) \cap (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MQ \parallel AB \qquad (1)$$

Mặt khác:

$$\left.\begin{array}{l} DC \parallel AB \Rightarrow DC \overset{(1)}{\parallel} QM \ (*) \\ QM \subset (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow DC \parallel (\alpha)$$

Như vậy:

$$\left.\begin{array}{l} DC \parallel (\alpha) \\ PN = (\alpha) \cap (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow PN \parallel DC \qquad (2)$$

Từ (*) và (2) suy ra MNPQ là hình bình thang.

Dạng 2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện qua một điểm và song song với một đường thẳng

1. Phương pháp

Ngoài hai cách đã đề cập ở Bài 1 và Bài 2 ta có hai cách sau để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

Cách 1. Dùng định lí 2.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel a}$$

Cách 2. Dùng hệ quả 2.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (P) \parallel a \\ (Q) \parallel a \\ (P) \cap (Q) = d \end{array}\right\} \Rightarrow d \parallel a}$$

Tìm thiết diện là tìm các đoạn giao tuyến theo phương pháp tìm giao tuyến được nêu ở trên, cho đến khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD.

a. Chứng minh $MN \parallel (SBC), SB \parallel (OMN), SC \parallel (OMN)$.

b. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (OMN). Thiết diện là hình gì?

Giải

a. Ta có $MN \parallel AD$ (MN là đường trung bình của tam giác SAD) và $AD \parallel BC$ (tứ giác ABCD là hình bình hành), suy ra $MN \parallel BC$.

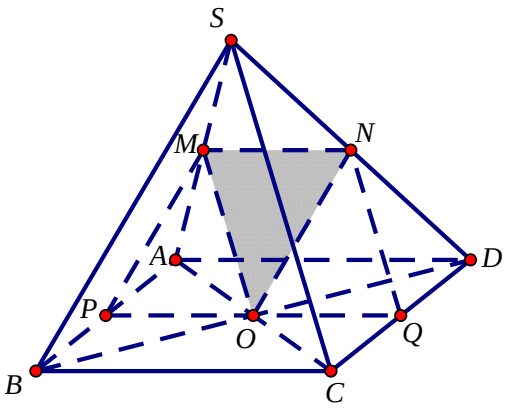
Mà $BC \subset (SBC)$ nên $MN \parallel (SBC)$.

Ta có: $ON \parallel SB$ (ON là đường trung bình của tam giác SBD) nên $ON \subset (OMN)$.

Do đó: $SB \parallel (OMN)$.

Ta có $OM \parallel SC$ (OM là đường trung bình của ΔSAC) và $OM \subset (OMN)$.

Vậy $SC \parallel (OMN)$.



b. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Từ đó có: $PQ \parallel AD$, suy ra $PQ \parallel MN$.

Vậy MN và PQ đồng phẳng, nghĩa là $(OMN) \equiv (MNPQ)$.

Ta có thiết diện do mp(OMN) cắt hình chóp là hình thang MNPQ $(MN \parallel PQ)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD, M là một điểm trên đoạn IJ. Gọi (P) là mặt phẳng qua M, song song với AB và CD.

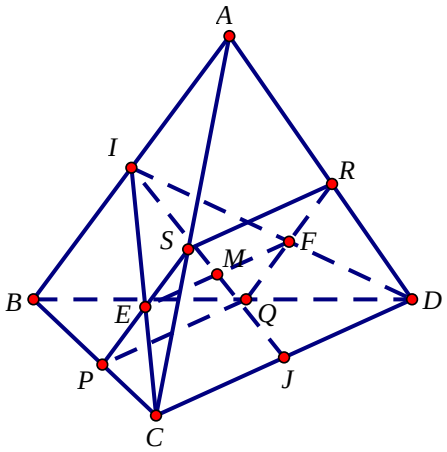
a. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ICD).

b. Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P). Thiết diện là hình gì?

Giải

a. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(P)\parallel CD\\ CD\subset(ICD)\\ M\in(P)\cap(ICD)\end{array}\right\}\Rightarrow(P)\cap(ICD)=Mx\parallel CD.$$



Trong mp(ICD) ta có Mx cắt IC tại E và cắt ID tại F. Suy ra $EF=(P)\cap(ICD)$.

b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(P)\parallel AB\\ AB\subset(ABC)\\ E\in(P)\cap(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow(P)\cap(ABC)=Ey\parallel AB.$$

Trong mp(ABC) ta có Ey cắt BC tại P và cắt AC tại S.

Suy ra $PS=(P)\cap(ABC)$.

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(P)\parallel AB\\ AB\subset(ABD)\\ F\in(P)\cap(ABD)\end{array}\right\}\Rightarrow(P)\cap(ABD)=Ft\parallel AB.$$

Trong mp(ABD) ta có Ft cắt BD tại Q và cắt AD tại R.

Suy ra $QR=(P)\cap(ABD)$.

Khi đó: $PQ=(P)\cap(CBD)$ và $RS=(P)\cap(ACD)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác PQRS.

Theo chứng minh trên ta có thể suy ra được: $PS\parallel AB, QR\parallel AB$ nên $PS\parallel QR$.

(1)

Mặt khác, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(P)\parallel CD\\ RS=(P)\cap(ACD)\end{array}\right\}\Rightarrow RS\parallel CD\\ \left.\begin{array}{l}(P)\parallel CD\\ PQ=(P)\cap(BCD)\end{array}\right\}\Rightarrow PQ\parallel CD\end{array}\right\}\Rightarrow RS\parallel PQ$$

(2)

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện PQRS là hình bình hành.

Dạng 4. Bài tập ứng dụng

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $MN \,//\, mp(ABCD)$.

B. $MN \,//\, mp(SAB)$.

C. $MN \,//\, mp(SCD)$.

D. $MN \,//\, mp(SBC)$.

Lời giải

Chọn A

Xét tam giác SAC có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC.

Suy ra $MN \,//\, AC$ mà $AC \subset (ABCD) \longrightarrow MN \,//\, mp(ABCD)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:

A. MN nằm trên $mp(ABCD)$.

B. MN cắt $mp(ABCD)$.

C. MN song song $mp(ABCD)$.

D. MN và $mp(ABCD)$ chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Theo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$ suy ra MN song song với AB.

Mà AB nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra $MN \,//\, (ABCD)$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $MN \,//\, (BCD)$.

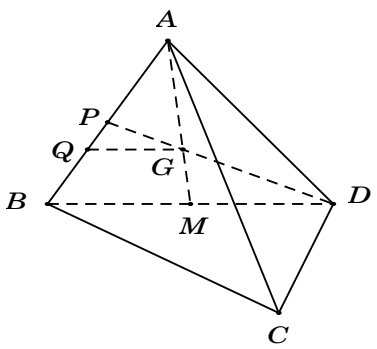
B. $GQ \,//\, (BCD)$.

C. MN cắt (BCD).

D. Q thuộc mặt phẳng (CDP).

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BD.

Vì G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow \dfrac{AG}{AM}=\dfrac{2}{3}$.

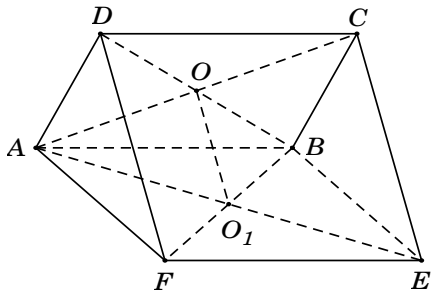
Điểm $Q \in AB$ sao cho $AQ=2QB \Leftrightarrow \dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{2}{3}$. Suy ra $\dfrac{AG}{AM}=\dfrac{AQ}{AB} \longrightarrow GQ // BD$.

Mặt khác BD nằm trong mặt phẳng (BCD) suy ra $GQ // (BCD)$.

Câu 4: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $OO_1 // (BEC)$. **B.** $OO_1 // (AFD)$. **C.** $OO_1 // (EFM)$. **D.** MO_1 cắt (BEC).

Lời giải



Chọn D

Xét tam giác ACE có O, O_1 lần lượt là trung điểm của AC, AE.

Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác $ACE \Rightarrow OO_1 // EC$.

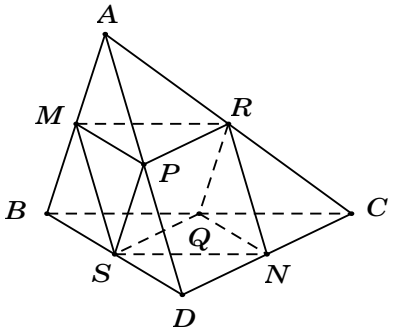
Tương tự, OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO_1 // FD$.

Vậy $OO_1 // (BEC)$, $OO_1 // (AFD)$ và $OO_1 // (EFC)$. Chú ý rằng: $(EFC)=(EFM)$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC. Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?

A. P, Q, R, S. **B.** M, P, R, S. **C.** M, R, S, N. **D.** M, N, P, Q.

Lời giải



Chọn C

Theo tính chất của đường trung bình của tam giác ta có

$PS // AC // QR$ suy ra P, Q, R, S đồng phẳng

Tương tự, ta có được $PM // BC // NQ$ suy ra P, M, N, Q đồng phẳng.

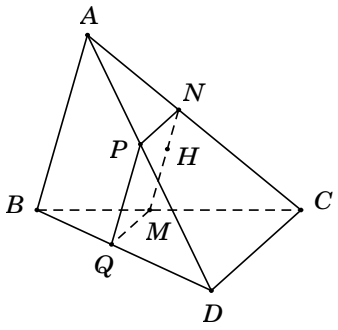
Và $NR // CD // SN$ suy ra M, R, S, N đồng phẳng.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC, (α) là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD. Mệnh đề nào sau đây **đúng** về thiết diện của (α) của tứ diện?

A. Thiết diện là hình vuông. **B.** Thiết diện là hình thang cân.

C. Thiết diện là hình bình hành. **D.** Thiết diện là hình chữ nhật.

Lời giải



Chọn C

Qua H kẻ đường thẳng (d) song song AB và cắt BC, AC lần lượt tại M, N.

Từ N kẻ NP song song vớ CD $(P \in CD)$. Từ P kẻ PQ song song với AB $(Q \in BD)$.

Ta có $MN // PQ // AB$ suy ra M, N, P, Q đồng phẳng và $AB // (MNPQ)$.

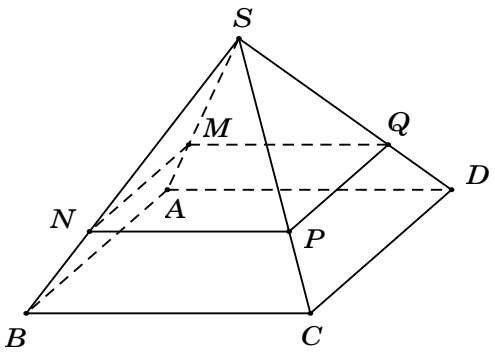
Suy ra $MNPQ$ là thiết diện của (α) và tứ diện.

Vậy thiết diện là hình bình hành.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là:

A. $\frac{400}{9}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{16}{9}$.

Lời giải



Chọn A

Ta có $(\alpha)\,//\,AB$ và CD mà A, B, C, D đồng phẳng suy ra $(\alpha)\,//\,(ABCD)$.

Giả sử (α) cắt các mặt bên $(SAB),(SBC),(SCD),(SDA)$ lần lượt tại các điểm N, P, Q với $N\in SB, P\in SC, Q\in SD$ suy ra $(\alpha)\equiv(MNPQ)$.

Khi đó $MN\,//\,AB\Rightarrow MN$ là đường trung bình tam giác $SAB\ \Rightarrow \frac{SM}{SA}=\frac{MN}{AB}=\frac{2}{3}$.

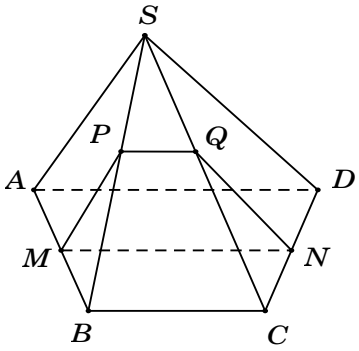
Tương tự, ta có được $\frac{NP}{BC}=\frac{PQ}{CD}=\frac{QM}{DA}=\frac{2}{3}$ và $MNPQ$ là hình vuông.

Suy ra $S_{MNPQ}=\left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{ABCD}=\frac{4}{9}S_{ABCD}=\frac{4}{9}.10.10=\frac{400}{9}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. M, N lần lượt là hai trung điểm của AB và CD. (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình vuông

Lời giải



Chọn B

Xét hình thang $ABCD$, có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Suy ra MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN // BC$.

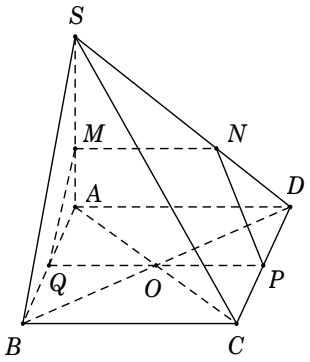
Lấy điểm $P \in SB$, qua P kẻ đường thẳng song song với BC và cắt BC tại Q.

Suy ra $(P) \cap (SBC) = PQ$ nên thiết diện (P) và hình chóp là tứ giác $MNQP$ có $MN // PQ // BC$. Vậy thiết diện là hình thang $MNQP$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là điểm thuộc cạnh SA (không trùng với S hoặc A). (P) là mặt phẳng qua OM và song song với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình tam giác.

Lời giải



Chọn B

Qua M kẻ đường thẳng $MN // AD$ và cắt SD tại $N \Rightarrow MN // AD$.

Qua O kẻ đường thẳng $PQ // AD$ và cắt AB, CD lần lượt tại $Q, P \Rightarrow PQ // AD$.

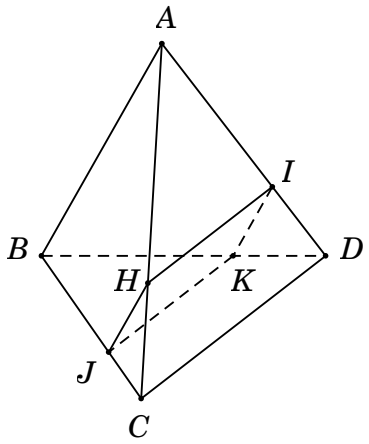
Suy ra $MN // PQ // AD \longrightarrow M, N, P, Q$ đồng phẳng $\Rightarrow (P)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $MNPQ$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt thuộc cạnh AD, BC sao cho $IA = 2ID$ và $JB = 2JC$. Gọi (P) là mặt phẳng qua IJ và song song với AB. Thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình tam giác. **D.** Tam giác đều.

Lời giải

Chọn B



Giả sử (P) cắt các mặt của tứ diện (ABC) và (ABD) theo hai giao tuyến JH và IK.

Ta có $(P) \cap (ABC) = JH,\ (P) \cap (ABD) = IK$

$(ABC) \cap (ABD) = AB,\ (P) // AB \longrightarrow JH // IK // AB.$

Theo định lí Thalet, ta có $\frac{JB}{JC} = \frac{HA}{HC} = 2$ suy ra $\frac{HA}{HC} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow IH // CD.$

Mà $IH \in (P)$ suy ra IH song song với mặt phẳng (P).

Vậy (P) cắt các mặt phẳng $(ABC), (ABD)$ theo các giao tuyến IH, JK với $IH // JK$.

Do đó, thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là hình bình hành.

BÀI 4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt

Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q). Căn cứ vào số đường thẳng chung của 2 mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Hai mặt phẳng (P) và (Q) không có đường thẳng chung, tức là:

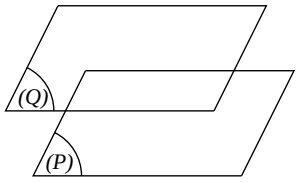
$(P)\cap(Q)=\varnothing \Leftrightarrow (P)\,//\,(Q).$

b. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chỉ có một đường thẳng chung, tức là:

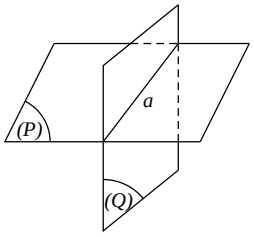
$(P)\cap(Q)=a \Leftrightarrow (P)$ cắt $(Q).$

c. Hai mặt phẳng (P) và (Q) có 2 đường thẳng chung phân biệt, tức là:

$(P)\cap(Q)=\{a,\,b\} \Leftrightarrow (P)\equiv(Q).$



$(P)\cap(Q)=\varnothing \Leftrightarrow (P)\,//\,(Q).$



$(P)\cap(Q)=a \Leftrightarrow (P)$ cắt $(Q).$

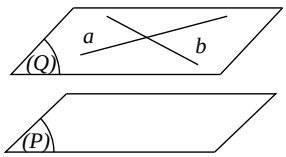


$(P)\cap(Q)=\{a,\,b\} \Leftrightarrow (P)\cap(Q).$

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Định lí 1: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song (Q).

Tức là: $\begin{cases} a,\,b\in(P) \\ a\cap b=\{I\} \\ a\,//\,(P),\,b\,//\,(Q) \end{cases} \Rightarrow (P)\,//\,(Q).$



3. Tính chất

Tính chất 1: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Tức là: $O\notin(P)\Rightarrow \exists!\,(Q):\begin{cases} O\in(Q) \\ (P)\,//\,(Q) \end{cases}.$

Cách dựng:

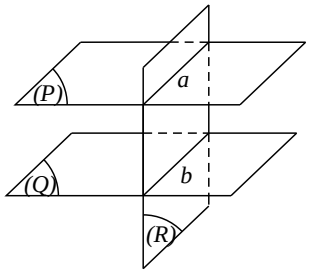
- Trong (P) dựng a, b cắt nhau.
- Qua O dựng $a_1\,//\,a, b_1\,//\,b.$
- Mặt phẳng (a_1, b_1) là mặt phẳng qua O và song song với (P).

Hệ quả 1: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với (Q).

Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Tính chất 2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.

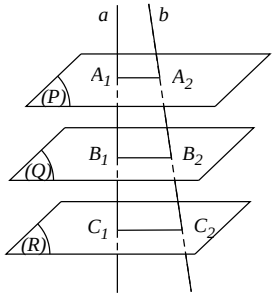
Tức là: $\begin{cases}(P)\,/\!/\,(Q)\\ a=(P)\cap(R)\Rightarrow a\,/\!/\,b.\\ b=(Q)\cap(R)\end{cases}$



Định lí Ta – let trong không gian:

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

Tức là: $\begin{cases}(P)\,/\!/\,(Q)\,/\!/\,(R)\\ a\cap(P)=A_1;\ a\cap(Q)=B_1;\ a\cap(R)=C_1\\ b\cap(P)=A_2;\ b\cap(Q)=B_2;\ b\cap(P)=C_2\end{cases}\Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$



4. Hình lăng trụ và hình hộp

Định nghĩa hình lăng trụ:

Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai cạnh đáy đều song song với nhau.

Trong đó:

 Các mặt khác với hai đáy gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.

 Cạnh chung của hai mặt bên gọi là cạnh bên của hình lăng trụ.

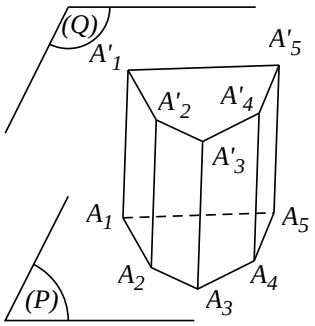
 Tùy theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác …

Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

a. Các cạnh bên song song và bằng nhau.

b. Các mặt bên và các mặt chéo là những hình bình hành.

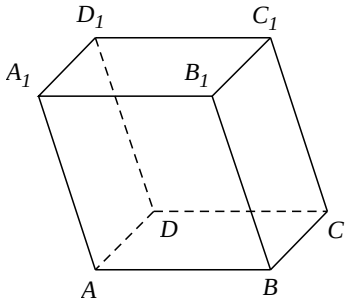
c. Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

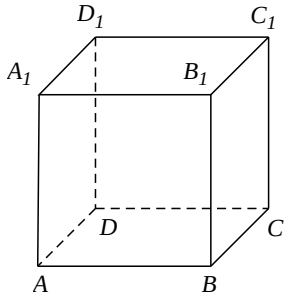


Định nghĩa hình hộp: Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.

a. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.

b. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.





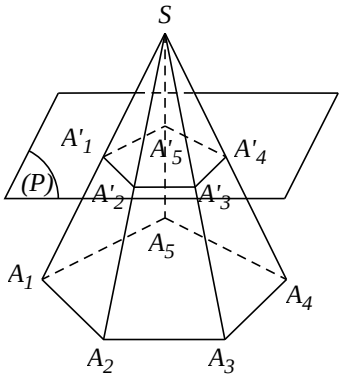
Chú ý: Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

5. Hình chóp cụt

Định nghĩa: Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ theo thứ tự tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các mặt bên $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, ..., A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là một hình chóp cụt.

Trong đó:

 Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt, còn thiết diện gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.



 Các mặt còn lại gọi là các mặt bên của hình chóp cụt.

 Cạnh chung của hai mặt bên kề nhau như $A_1A'_1, A_2A'_2, ..., A_nA'_n$ gọi là cạnh bên của hình chóp cụt.

Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,… ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chụp cụt ngũ giác,…

Tính chất: Với hình chóp cụt, ta có các tính chất sau:

1. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.
2. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Bài toán lý thuyết

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai mặt phẳng không cắt nhau thì song song.

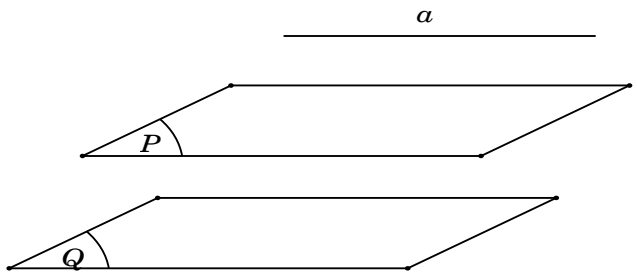
B. Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau.

C. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

D. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Lời giải

Chọn C



Trong không gian, hai mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: trùng nhau, cắt nhau, song song với nhau. Vì vậy, 2 mặt phẳng không cắt nhau thì có thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ A là mệnh đề sai.

Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì chúng có thể song song với nhau (hình vẽ) $\Rightarrow$ B là mệnh đề sai.

Ta có: $a \parallel (P), a \parallel (Q)$ nhưng (P) và (Q) vẫn có thể song song với nhau.

Mệnh đề C là tính chất nên C đúng.

Câu 2: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $mp(\alpha) \parallel mp(\beta)$?

A. $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ ((γ) là mặt phẳng nào đó).

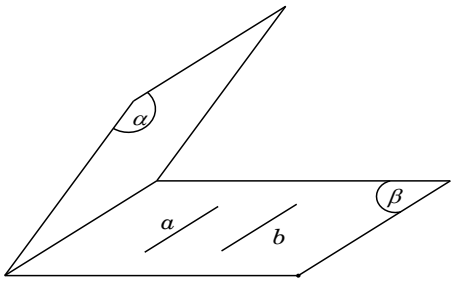
B. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β).

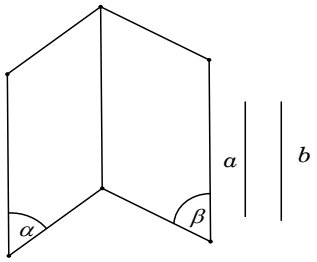
C. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β).

D. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β).

Lời giải

Chọn D





Trong trường hợp: $(\alpha)\,/\!/\,(\gamma)$ và $(\beta)\,/\!/\,(\gamma)$((γ) là mặt phẳng nào đó) thì (α) và (β) có thể trùng nhau $\Rightarrow$ Loại **A.**

$(\alpha)\,/\!/\,a$ và $(\alpha)\,/\!/\,b$ với a,b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) thì (α) và (β) vẫn có thể cắt nhau (hình 1) $\Rightarrow$ Loại **B.**

$(\alpha)\,/\!/\,a$ và $(\alpha)\,/\!/\,b$ với a,b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) thì (α) và (β) vẫn có thể cắt nhau (hình 2) $\Rightarrow$ Loại **C.**

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu mặt phẳng $(\alpha)\ /\!/\ (\beta)$ thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

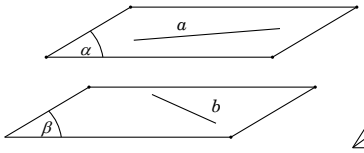
B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β).

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì $(a)\,/\!/\,(\beta)$.

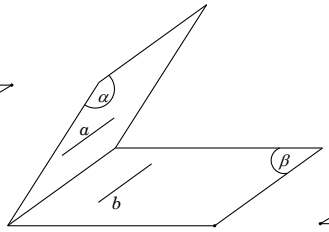
D. Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong $mp(\alpha)$.

Lời giải

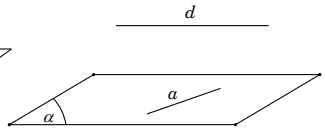
Chọn A



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì hai đường thẳng bất kì lần lượt thuộc (α) và (β) có thể chéo nhau (Hình 1) $\Rightarrow$ Loại **B.**

Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì hai mặt phẳng (α) và (β) có thể cắt nhau (Hình 2) $\Rightarrow$ Loại **C.**

Nếu đường thẳng d song song với $mp(\alpha)$ thì nó có thể chéo nhau với một đường thẳng nào đó nằm trong (α). (Hình 3).

Câu 4: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β), đường thẳng $a\,/\!/\,(\alpha)$. Có mấy vị trí tương đối của a và (β).

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Trong không gian, giữa đường thẳng và mặt phẳng có 3 vị trí tương đối: đường thẳng cắt mặt phẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng, đường thẳng nằm trên mặt phẳng.

$a \parallel (\alpha)$ mà $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow a$ và (α) không thể cắt nhau.

Vậy còn 2 vị trí tương đối.

Câu 5: Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên (P) và (Q). Gọi I là trung điểm của MN. Chọn khẳng định **đúng**.

A. Tập hợp các điểm I là đường thẳng song song và cách đều (P) và (Q).

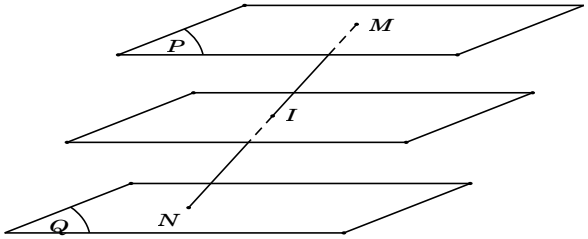
B. Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q).

C. Tập hợp các điểm I là một mặt phẳng cắt (P).

D. Tập hợp các điểm I là một đường thẳng cắt (P).

Lời giải

Chọn B



Ta có: I là trung điểm của MN

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ I đến (P) bằng khoảng cách từ I đến (Q)

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm I là mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q).

Câu 6: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (P)?

A. $a \parallel b$ và $b \subset (P)$.

B. $a \parallel b$ và $b \parallel (P)$.

C. $a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$.

D. $a \subset (Q)$ và $b \subset (P)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a \parallel b$ và $b \subset (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại **A.**

$a \parallel b$ và $b \parallel (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại **B.**

$a \parallel (Q)$ và $(Q) \parallel (P)$ suy ra $a \parallel (P)$ hoặc $a \subset (P) \Rightarrow$ Loại **C.**

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a \parallel b$.

B. Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì a và b chéo nhau.

C. Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.

D. Nếu $(\gamma) \cap (\alpha) = a, (\gamma) \cap (\beta) = b$ và $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì $a \parallel b$.

Lời giải

Chọn D

Nếu $(\alpha)\parallel(\beta)$ và $a\subset(\alpha), b\subset(\beta)$ thì $a\parallel b$ hoặc a chéo $b\Rightarrow$ A, B sai.

Nếu $a\parallel b$ và $a\subset(\alpha), b\subset(\beta)$ thì $(\alpha)\parallel(\beta)$ hoặc (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến song song với a và b.

Câu 8: Cho đường thẳng $a\subset mp(P)$ và đường thẳng $b\subset mp(Q)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $(P)\parallel(Q)\Rightarrow a\parallel b$.

B. $a\parallel b\Rightarrow(P)\parallel(Q)$.

C. $(P)\parallel(Q)\Rightarrow a\parallel(Q)$ và $b\parallel(P)$.

D. a và b chéo nhau.

Lời giải

Chọn C

Với đường thẳng $a\subset mp(P)$ và đường thẳng $b\subset mp(Q)$

Khi $(P)\parallel(Q)\Rightarrow a\parallel b$ hoặc a,b chéo nhau $\Rightarrow$ A sai.

Khi $a\parallel b\Rightarrow(P)\parallel(Q)$ hoặc $(P),(Q)$ cắt nhau theo giao tuyến song song với a và b $\Rightarrow$B sai.

a và b có thể chéo nhau, song song hoặc cắt nhau$\Rightarrow$ D sai.

Câu 9: Hai đường thẳng a và b nằm trong $mp(\alpha)$. Hai đường thẳng a' và b' nằm trong $mp(\beta)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Nếu $a\parallel a'$ và $b\parallel b'$ thì $(\alpha)\parallel(\beta)$.

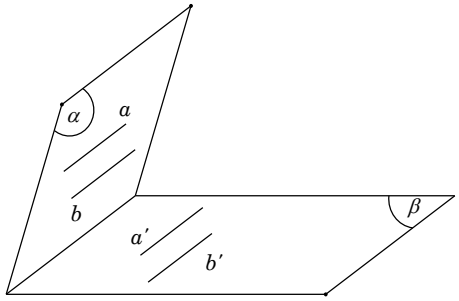
B. Nếu $(\alpha)\parallel(\beta)$ thì $a\parallel a'$ và $b\parallel b'$.

C. Nếu $a\parallel b$ và $a'\parallel b'$ thì $(\alpha)\parallel(\beta)$.

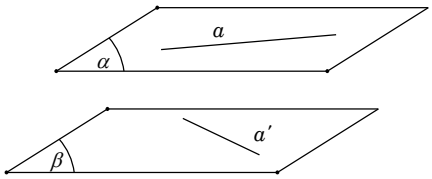
D. Nếu a cắt b và $a\parallel a', b\parallel b'$ thì $(\alpha)\parallel(\beta)$.

Lời giải

Chọn D



Hình 1



Hình 2

Nếu $a\parallel a'$ và $b\parallel b'$ thì $(\alpha)\parallel(\beta)$ hoặc (α) cắt (β) (Hình 1) $\Rightarrow$ A sai.

Nếu $(\alpha)\parallel(\beta)$ thì $a\parallel a'$ hoặc a,a' chéo nhau (Hình 2) $\Rightarrow$ B sai.

Nếu $a\parallel b$ và $a'\parallel b'$ thì $(\alpha)\parallel(\beta)$ hoặc (α) cắt CC'. (Hình 1) $\Rightarrow$ C sai.

Câu 10: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Hai đường thẳng p và q lần lượt nằm trong (P) và (Q). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. p và q cắt nhau.

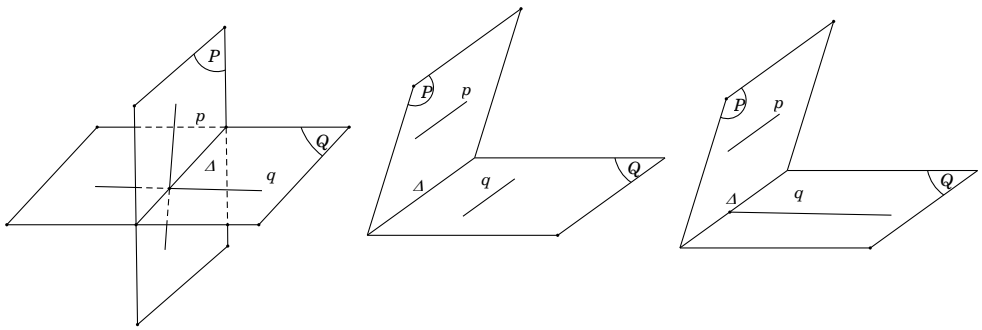
B. p và q chéo nhau.

C. p và q song song.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Lời giải

Chọn D



Ta có p và q có thể cắt nhau, song song, chéo nhau (hình vẽ).

Dạng 2. Chứng minh hai mặt phẳng song song

1. Phương pháp

Áp dụng kết quả sau:

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel c,\ b \parallel d \\ a,b \subset (P) \\ c,d \subset (Q) \\ a \cap b = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$

Áp dụng: Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P).

$$\left.\begin{array}{l} a \subset (Q) \\ (Q) \parallel (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel (P)$$

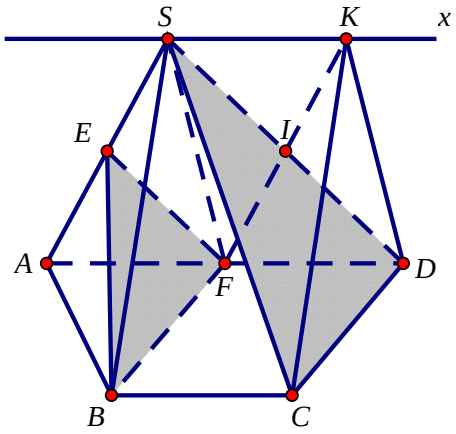
2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD, $AD \parallel BC,\ AD = 2BC$. Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AD, SD.

a. Chứng minh $(EFB) \parallel (SCD)$. Từ đó chứng minh $CI \parallel (EFB)$.

b. Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD). Tìm giao điểm K của FI với giao tuyến này, chứng minh $(SBF) \parallel (KCD)$.

Giải



a. Ta có:

$EF \parallel SD$ (EF là đường trung bình của tam giác SAD).

$BF \parallel CD$ $(BC \parallel FD,\ BC = FD)$.

Suy ra $(EFB) \parallel (SCD)$.

Mà $CI \subset (SCD)$ nên $CI \parallel (EFB)$.

b. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC),\ AD \subset (SAD) \\ S \in (SBC) \cap (SAD) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = Sx,\ Sx \parallel AD \parallel BC$

Trong mp(SAD): FI cắt Sx tại K.

Ta có: $SK \parallel FD,\ IS = ID$ nên $IK = IF$.

Vậy tứ giác SKDF là hình bình hành, suy ra $SF \parallel KD$.

Mặt khác $BF \parallel CD$ nên $(SBF) \parallel (KCD)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a. Chứng minh mặt phẳng (OMN) và mặt phẳng (SBC) song song với nhau.

b. Giả sử hai tam giác SAD và ABC đều là tam giác cân tại A. Gọi AE và AF lần lượt là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF song song với mặt phẳng (SAD).

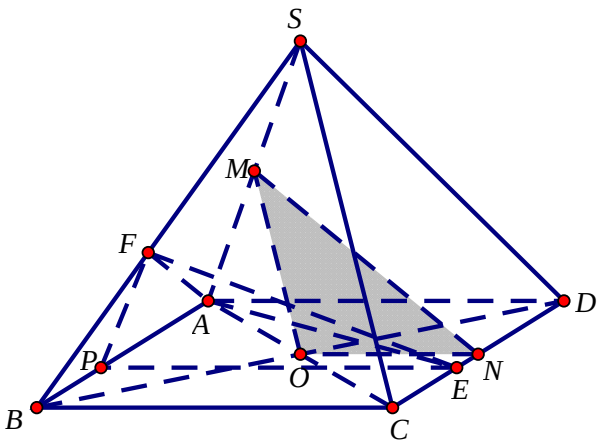
Giải

a. Ta có:

$ON \parallel BC$ (ON là đường trung bình của tam giác BCD).

$OM \parallel SC$ (OM là đường trung bình của tam giác SAC)

Vì $OM, ON \subset (OMN); BC, SC \subset (SBC)$ nên $(OMN) \parallel (SBC)$.



b. Từ E kẻ đường thẳng $EP \parallel AD$ (P thuộc AB) (1)

Khi đó theo tính chất đường phân giác và tam giác cân ta có:

$$\frac{PB}{PA} = \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AS} = \frac{FB}{FA}$$

Do đó: $PF \parallel SA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(PEF) \parallel (SAD)$.

Mặt khác $EF \subset (PEF)$ nên $EF \parallel (SAD)$.

Ngoài ra ta có thể dùng định lí Thales để chứng minh $EF \parallel (SAD)$ như sau:

Theo tính chất đường phân giác và tính chất của tam giác cân ta chứng minh được:

$$\frac{AB}{AS} = \frac{AC}{AD} = \frac{FB}{FS} = \frac{EC}{ED}.$$

Theo định lí Thales ta suy ra ba đường thẳng BC, EF và SD nằm trong ba mặt phẳng song song, suy ra EF song song với mặt phẳng chứa BC và song song với mặt phẳng chứa SD. Mặt khác $BC \parallel AD$ nên EF song song với mặt phẳng (SAD).

Ví dụ 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau.

a. Chứng minh hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) song song với nhau.

b. Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G và G' lần lượt của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c. Chứng minh G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

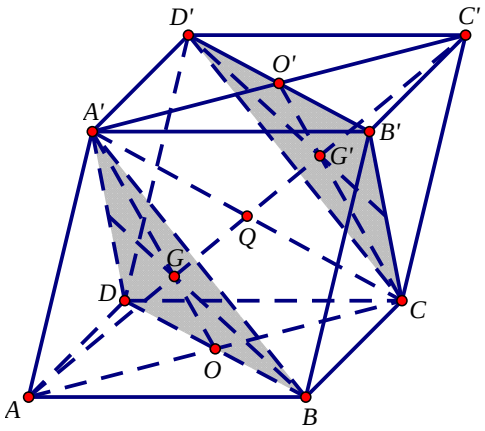
Giải

a. Ta có:

$A'B \parallel D'C$ (vì tứ giác A'BCD' là hình bình hành).

$BD \parallel B'D'$ (vì tứ giác BB'D'D là hình bình hành), suy ra $mp(BDA') \parallel mp(B'D'C)$.

b. Gọi O, O' và Q lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD, A'B'C'D và AA'C'C.



Ta có: A'O là đường trung tuyến và G là trọng tâm của tam giác BDA' nên $\frac{A'G}{A'O}=\frac{2}{3}$.

Do đó G cũng là trọng tâm tam giác A'AC (vì A'O là đường trung tuyến của tam giác A'AC).

Mà AQ là đường trung tuyến của tam giác A'AC nên G thuộc AQ, G thuộc AC' . (1)

Tương tự ta có G' là trọng tâm của tam giác B'D'C và cũng là trọng tâm của tam giác A'C'C.

Mà C'Q là đường trung tuyến của tam giác A'C'C nên G' thuộc C'Q. Suy ra G' thuộc AC'. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đường chéo AC' đi qua hai trọng tâm G và G' lần lượt của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c. Ta có:

G là trọng tâm tam giác A'AC nên $\frac{AG}{AQ}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{AG}{AC'}=\frac{1}{3}\left(AC'=2AQ\right)$. Suy ra $AG=\frac{1}{3}AC'$.

G' là trọng tâm tam giác A'C'C nên $\frac{C'G'}{C'Q}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{C'G'}{C'A}=\frac{1}{3}\left(AC'=2C'Q\right)$. Suy ra $C'G'=\frac{1}{3}AC'$.

Vậy $AG=GG'=C'G'=\frac{1}{3}AC'$. Tức là G và G' chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

Dạng 3. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng và tìm thiết diện qua một điểm và song song với một mặt phẳng

1. Phương pháp

Dùng tính chất thứ 2.

$$\left.\begin{array}{l}(P)\parallel(Q)\\(\alpha)\cap(P)=a\\(\alpha)\cap(Q)=b\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là trung điểm của AD. Gọi (α) và (β) là mặt phẳng qua điểm M và lần lượt song song với mặt phẳng (SBD) và (SAC).

a. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(α).

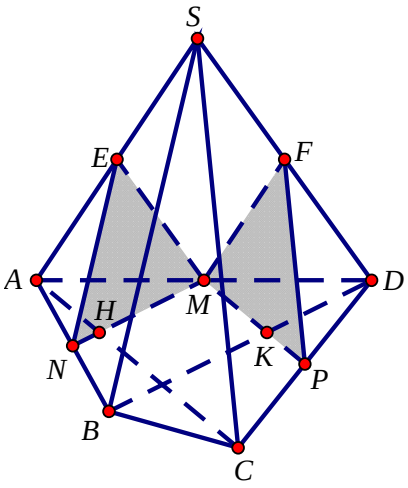
b. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(β).

c. Gọi H và K lần lượt là giao điểm của (α) và (β) với AC và BD. Chứng minh tứ giác OHMK là hình bình hành.

Giải

a. $\left.\begin{array}{l}(\alpha)\,/\!/\,(SBD)\\ (ABCD)\cap(SBD)=BD\\ M\in(ABCD)\cap(\alpha)\end{array}\right\}$

$\Rightarrow (ABCD)\cap(\alpha)=MN\,/\!/\,BD\,(N\in AB)$



Gọi M là trung điểm của AD nên N là trung điểm của AB. Ta có:

$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\,/\!/\,(SBD)\\ (SAB)\cap(SBD)=SB\\ N\in(SAB)\cap(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow (SAB)\cap(\alpha)=NE\,/\!/\,SB\,(E\in SA)$

Mà N là trung điểm của AB nên E là trung điểm của SA.

Khi đó: $ME=(\alpha)\cap(SAD)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác MNE.

b. $\left.\begin{array}{l}(\beta)\,/\!/\,(SAC)\\ (ABCD)\cap(SAC)=AC\\ M\in(ABCD)\cap(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow (ABCD)\cap(\beta)=MP\,/\!/\,AC\,(P\in CD)$

Mà M là trung điểm của AD nên P là trung điểm của CD.

Ta có:

$\left.\begin{array}{l}(\beta)\,/\!/\,(SAC)\\ (SCD)\cap(SAC)=SC\\ P\in(SCD)\cap(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow (SCD)\cap(\beta)=PF\,/\!/\,SC\,(F\in SD)$

Mà P là trung điểm của CD nên F là trung điểm của SD.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác MPF.

c. Trong mp(ABCD): AC cắt MN tại H, BD cắt MP tại K. Do MN chứa trong $mp(\alpha)$ và MP chứa trong $mp(\beta)$ nên H chính là giao điểm của AC với $mp(\alpha)$ và K chính là giao điểm của BD với $mp(\beta)$.

Ta có $MN\,/\!/\,BD$ nên $MH\,/\!/\,OK$, $MP\,/\!/\,AC$ nên $MK\,/\!/\,HO$. Vậy tứ giác OHMK là hình bình hành.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành ABCD. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (P) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'. Chứng minh:

a. Tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

b. $AA'+CC'=BB'+DD'$.

Giải

a. Ta có $AB\,/\!/\,CD$ và $Ax\,/\!/\,Dt$ nên $mp(Ax,By)\,/\!/\,mp(Cz,Dt)$.

Mà $(P')\cap(Ax,By)=A'B'$; $(P')\cap(Cz,Dt)=C'D'$ nên $A'B'\,/\!/\,C'D'$ (1)

Tương tự:

$$\left.\begin{array}{l} mp(Ax,Dt) \parallel mp(By,Cz) \\ (P') \cap (Ax,Dt) = A'D' \\ (P') \cap (By,Cz) = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow A'D' \parallel B'C'$$

(2)

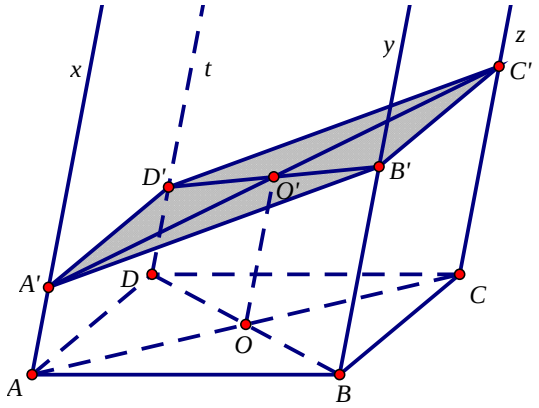
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

b. Gọi O và O' lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD và A'B'C'D'.

Khi đó ta có OO' là đường trung bình của hình thang AA'C'C và hình thang BB'D'D.

Do đó: $AA'+CC'=2OO'$ và $BB'+DD'=2OO'$.

Vậy $AA'+CC'=BB'+DD'$.



Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Mặt phẳng (α) chứa MN cắt các cạnh AD và BC lần lượt là P và Q.

a. Cho trước điểm P, hãy nói cách dựng điểm Q.

b. Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng $KP=KQ$.

Giải

a. Ta có (α) là mp(MNP).

Trong mp(ABD): MP cắt BD tại E.

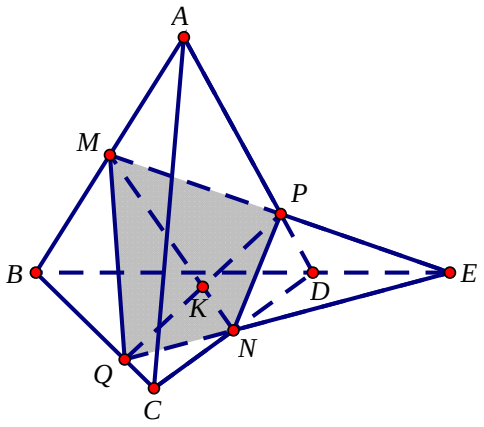
Trong mp(BCD): EN cắt BC tại Q.

Vậy (α) chính là mp(MPNQ). Q là điểm cần tìm.

b. Trên hai đường thẳng chéo nhau AB và CD lần lượt có các điểm A, M, B và C, N, D định ra các tỉ số bằng nhau:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{ND}{NC}=1.$$

Theo định lí Thales ta suy ra AD, MN, BC nằm trên ba mặt phẳng song song.



Mà PQ là cát tuyến cắt ba mặt phẳng song song lần lượt tại P, K, Q nên: $\frac{KP}{KQ}=\frac{MA}{MB}=\frac{ND}{NC}=1$.

Vậy K là trung điểm của PQ.

Dạng 3. Tìm thiết diện của lăng trụ, hình chóp cụt

1. Phương pháp

Tìm thiết diện của lăng trụ hay hình chóp cụt cũng thực hiện tương tự như xác định thiết diện của hình chóp.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CC'.

a. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (A'MN). Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AB.

b. Gọi P là điểm đối xứng của C qua A. Hãy xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNP). Tính tỉ số các đoạn thẳng mà thiết diện chia các cạnh AA' và AB.

Giải

a. Trong mp(BCC'B'): MN cắt BB' tại D.

Khi đó mp(A'MN) chính là mp(A'DN).

Trong mp(AA'B'B): A'D cắt AB tại E.

Vậy thiết diện do mp(A'MN) cắt lăng trụ là tứ giác A'EMN.

Ta có: $\frac{EA}{EB}=\frac{AA'}{BD}=\frac{2CN}{BD}=2\frac{MC}{MB}=2$ (vì $AA'=CC'=2CN, CN\parallel BD$ và $MB=MC$). Do đó $\frac{EA}{EB}=2$.

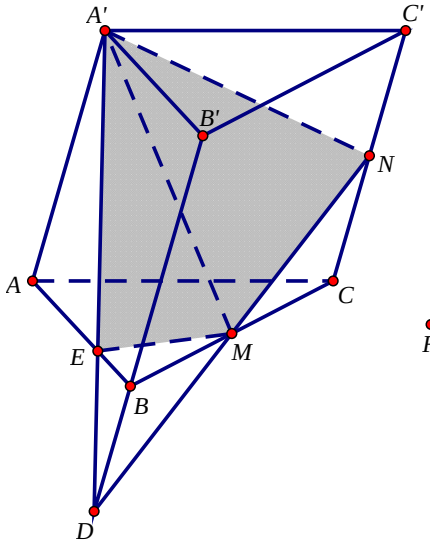
b. Trong mp(ABC): MP cắt AC tại F. Khi đó mp(MNP) chính là mp(MNF).

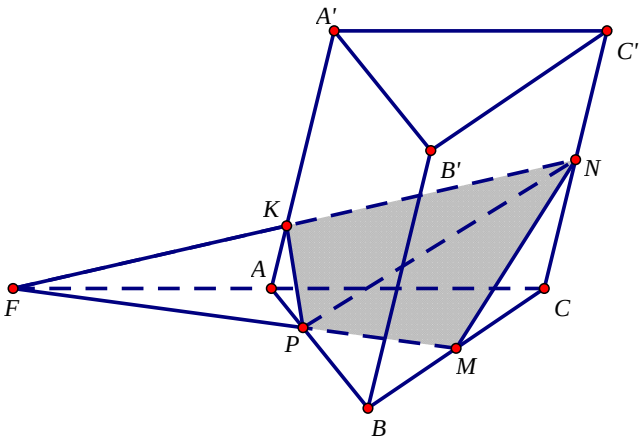
Trong mp(AA'C'C): NF cắt AA' tại K. Vậy thiết diện do mp(MNP) cắt lăng trụ là tứ giác MNPK.

Ta có: $\frac{KA}{AA'}=\frac{KA}{CC'}=\frac{1}{2}.\frac{KA}{CN}=\frac{1}{2}.\frac{FA}{FC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ (vì $AA'=CC'=2CN, KA\parallel CN$).

Vậy $\frac{KA}{KA'}=\frac{1}{3}$.

Tam giác FBC có FM và BA là hai đường trung tuyến cắt nhau tại P nên P là trọng tâm tam giác FBC. Vậy theo tính chất trọng tâm ta có $\frac{PA}{PB}=\frac{1}{2}$.





Ví dụ 2. Cho hình chóp cụt ABC.A'B'C'. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B', B'B và BC. Xác định thiết diện của hình chóp cụt cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Giải

Gọi (α) là mp(MNP).

Trong mp(AA'B'B): MN cắt AB tại F và cắt AA' tại E.

Trong mp(ABC): FP cắt AC tại Q.

Trong mp(AA'C'C): QE cắt A'C' tại R.

Khi đó:

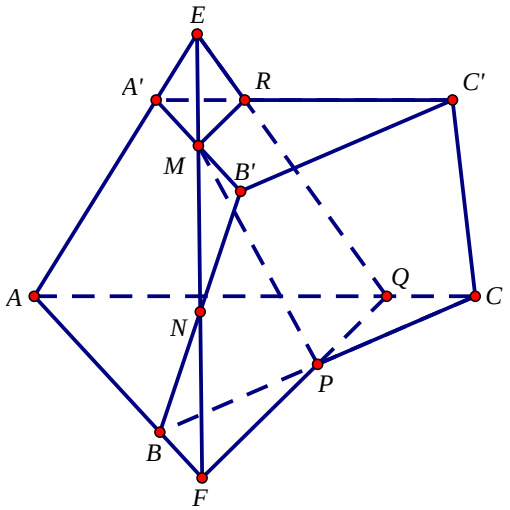
$MN=(\alpha)\cap(AA'B'B)$

$NP=(\alpha)\cap(BB'C'C)$

$PQ=(\alpha)\cap(ABC)$

$QR=(\alpha)\cap(AA'C'C)$

$RM=(A)\cap(A'B'C')$

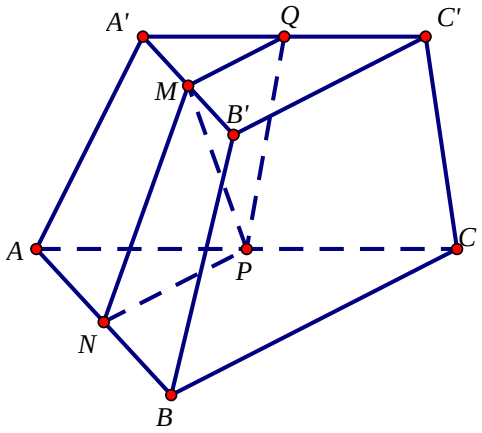


Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác MNPQR.

Ví dụ 3. Cho hình chóp cụt ABC.A'B'C'. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh A'B' và AC. Xác định thiết diện của hình chóp cụt cắt bởi mặt phẳng chứa MP và song song với mặt phẳng (BB'C'C).

Giải

Gọi (α) là mặt phẳng chứa MP và song song với mp(BB'C'C).



Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\,//\,(BB'C'C)\\(ABC)\cap(BB'C'C)=BC\\P\in(ABC)\cap(\alpha)\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (ABC)\cap(\alpha)=PN\,//\,BC\ (N\in AB)$

Vì P là trung điểm của AC nên N là trung điểm của AB.

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\,//\,(BB'C'C)\\(A'B'C')\cap(BB'C'C)=B'C'\\M\in(A'B'C')\cap(\alpha)\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (A'B'C')\cap(\alpha)=MQ\,//\,B'C'\ (Q\in A'C')$

Vì M là trung điểm của A'B' nên Q là trung điểm của A'C'.

Khi đó: $\begin{cases}MN=(\alpha)\cap(AA'B'B)\\PQ=(\alpha)\cap(AA'C'C)\end{cases}$

Vậy thiết diện cần tìm là hình thang MNPQ $(MQ\,//\,NP)$.

Dạng 4: Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (NOM) cắt (OPM).

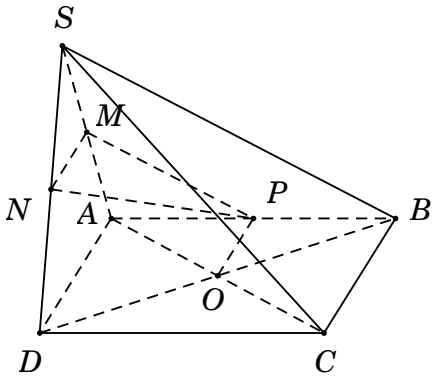
B. $(MON)\,//\,(SBC)$.

C. $(PON)\cap(MNP)=NP$.

D. $(NMP)\,//\,(SBD)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD suy ra $MN\,//\,AD$. (1)

Và OP là đường trung bình của tam giác BAD suy ra $OP\,//\,AD$. (2)

Từ (1),(2) suy ra $MN\,//\,OP\,//\,AD\ \Rightarrow M, N, O, P$ đồng phẳng.

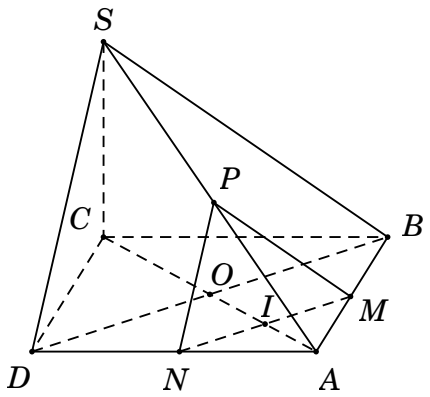
Lại có $MP\,//\,SB,\ OP\,//\,BC$ suy ra $(MNOP)\,//\,(SBC)$ hay $(MON)\,//\,(SBC)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

A. Hình hình hành. **B.** Tam giác cân. **C.** Tam giác vuông. **D.** Tam giác đều.

Lời giải

Chọn D



Gọi MN là đoạn thẳng giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt đáy $(ABCD)$.

Vì $(P)//(SBD)$, $(P)\cap(ABCD)=MN$ và $(SBD)\cap(ABCD)=MN$ suy ra $MN//BD$.

Lập luận tương tự, ta có

(P) cắt mặt (SAD) theo đoạn giao tuyến NP với $NP//SD$.

(P) cắt mặt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP với $MP//SB$.

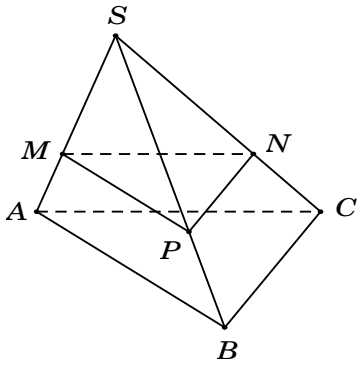
Vậy tam giác MNP đồng dạng với tam giác SBD nên thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác đều MNP.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB=AC=4$, $\widehat{BAC}=30°$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM=2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{14}{9}$. **C.** $\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A



Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}.4.4.\sin 30^0=4.$

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh $SB, SC.$

Vì $(P)//(ABC)$ nên theoo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{SP}{SC}=\frac{2}{3}.$

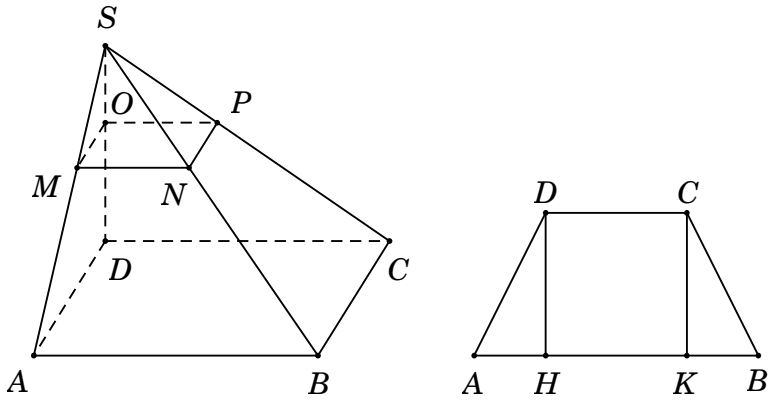
Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABC$ theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k=\frac{2}{3}.$ Vậy $S_{\Delta MNP}=k^2.S_{\Delta ABC}=\left(\frac{2}{3}\right)^2.4=\frac{16}{9}.$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC=2,$ hai đáy $AB=6,\ CD=4.$ Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA=3SM.$ Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}.$ **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}.$ **C.** $2.$ **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}.$

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên $AB.$

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow\begin{cases}AH=BK;\ CD=HK\\AH+HK+BK=AB\end{cases}\Rightarrow BK=1.$

Tam giác BCK vuông tại $K,$ có $CK=\sqrt{BC^2-BK^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD}=CK.\frac{AB+CD}{2}=\sqrt{3}.\frac{4+6}{2}=5\sqrt{3}.$

Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh $SB, SC, SD.$

Vì $(P)//(ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\frac{MN}{AB}=\frac{NP}{BC}=\frac{PQ}{CD}=\frac{QM}{AD}=\frac{1}{3}.$

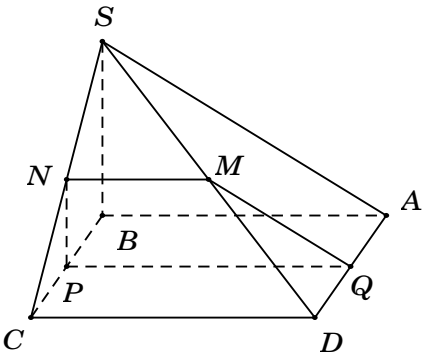
Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ}=k^2.S_{ABCD}=\frac{5\sqrt{3}}{9}.$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có tâm $O,\ AB=8\ ,\ SA=SB=6.$ Gọi (P) là mặt phẳng qua O và song song với $(SAB).$ Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là:

A. $5\sqrt{5}.$ **B.** $6\sqrt{5}.$ **C.** $12.$ **D.** $13.$

Lời giải

Chọn B



Qua O kẻ đường thẳng (d) song song AB và cắt BC, AD lần lượt tại P, Q.

Kẻ PN song song với SB $(N \in SB)$, kẻ QM song song với SA $(M \in SA)$.

Khi đó $(MNPQ)//(SAB) \Rightarrow$ thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$

Vì P, Q là trung điểm của BC, AD suy ra N, M lần lượt là trung điểm của SC, SD.

Do đó MN là đường trung bình tam giác $SCD \Rightarrow MN = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{AB}{2} = 4$.

Và $NP = \dfrac{SB}{2} = 3;\ QM = \dfrac{SA}{2} = 3 \Rightarrow NP = QM \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

Hạ NH, MK vuông góc với PQ. Ta có $PH = KQ \Rightarrow PH = \dfrac{1}{2}(PQ - MN) = 2$.

Tam giác PHN vuông, có $NH = \sqrt{5}$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = NH.\dfrac{PQ + NM}{2} = 6\sqrt{5}$.

Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hình lăng trụ có các cạnh bên song song và bằng nhau.

B. Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.

C. Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác đều.

D. Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành.

Lời giải

Chọn C

Xét hình lăng trụ có đáy là một đa giác (tam giác, tứ giác,…), ta thấy rằng

Hình lăng trụ luôn có các cạnh bên song song và bằng nhau.

Hai mặt đáy của hình lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song.

Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau (tam giác, tứ giác,…)

Các mặt bên của lăng trụ là các hình bình hành vì có hai cạnh là hai cạnh bên của hình lăng trụ, hai cạnh còn lại thuộc hai đáy song song.

Câu 7: Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.

C. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau.

D. Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

Lời giải

Chọn C

Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình hình hành, chúng bằng nhau nếu hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

Câu 8: Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Các cạnh bên của hình chóp cụt đôi một song song.

B. Các cạnh bên của hình chóp cụt là các hình thang.

C. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.

D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai.

Lời giải

Chọn C

Xét hình chóp cụt có đáy là đa giác (tam giác, tứ giác,…) ta thấy rằng:

Các cạnh bên của hình chóp cụt đôi một cắt nhau.

Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang cân.

Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.

Câu 9: Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Trong hình chóp cụt thì hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

B. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.

C. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang cân.

D. Đường thẳng chứa các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

Lời giải

Chọn C

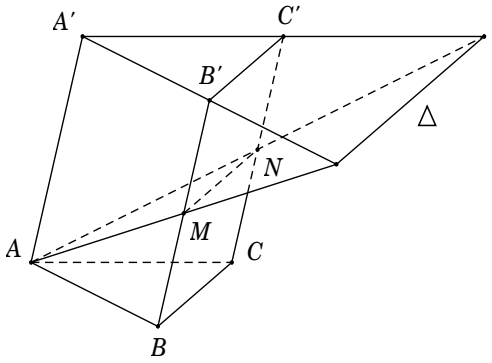
Với hình chóp cụt, các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.

Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Gọi Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\Delta \parallel AB$. **B.** $\Delta \parallel AC$. **C.** $\Delta \parallel BC$. **D.** $\Delta \parallel AA'$.

Lời giải

Chọn C



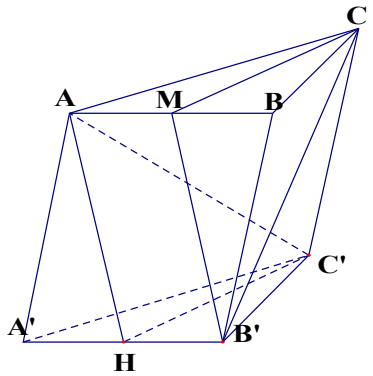
Ta có $\begin{cases} MN \subset (AMN) \\ B'C' \subset (A'B'C') \\ MN \parallel B'C' \end{cases} \longrightarrow \Delta$ là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và $(A'B'C')$ sẽ song song với MN và $B'C'$. Suy ra $\Delta \parallel BC$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Đường thẳng $B'C$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (AHC'). **B.** $(AA'H)$. **C.** (HAB). **D.** $(HA'C)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$. (1)

Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng $CC' \longrightarrow MHC'C$ là hình hình hành $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$. (2)

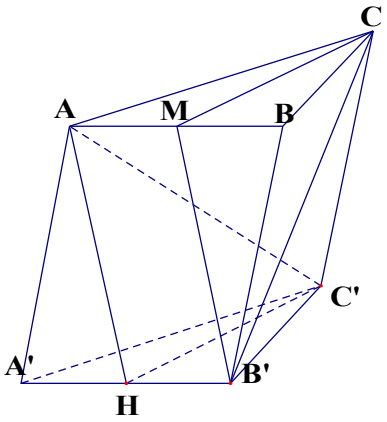
Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$.

Câu 12: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (AHC') song song với đường thẳng nào sau đây?

A. CB'. **B.** BB'. **C.** BC. **D.** BA'.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MB' \parallel AH \longrightarrow MB' \parallel (AHC')$. (1)

Vì MH là đường trung bình của hình bình hành $ABB'A'$ suy ra MH song song và bằng BB' nên MH song song và bằng $CC' \longrightarrow MHC'C$ là hình hình hành $\longrightarrow MC \parallel HC' \longrightarrow MC \parallel (AHC')$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $(B'MC) \parallel (AHC') \longrightarrow B'C \parallel (AHC')$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $(ABC) // (A_1B_1C_1)$. **B.** $AA_1 // (BCC_1)$.

C. $AB // (A_1B_1C_1)$. **D.** AA_1B_1B là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn D

Vì mặt bên AA_1B_1B là hình bình hành, còn nó là hình chữ nhật nếu $ABC.A_1B_1C_1$ là hình lăng trụ đứng.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $ABCD$ là hình bình hành.

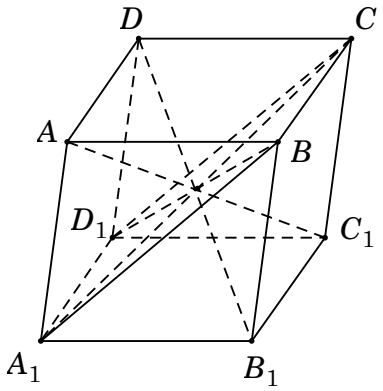
B. Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B đồng quy.

C. $(ADD_1A_1)//(BCC_1B_1)$.

D. AD_1CB là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào hình vẽ và tính chất của hình hộp chữ nhật, ta thấy rằng:

- Hình hộp có đáy $ABCD$ là hình bình hành.
- Các đường thẳng A_1C, AC_1, DB_1, D_1B cắt nhau tại tâm của AA_1C_1C, BDD_1B_1.
- Hai mặt bên $(ADD_1A_1), (BCC_1B_1)$ đối diện và song song với nhau.
- AD_1 và CB là hai đường thẳng chéo nhau suy ra AD_1CB không phải là hình chữ nhật.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD'. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $(AA'B'B)//(DD'C'C)$.

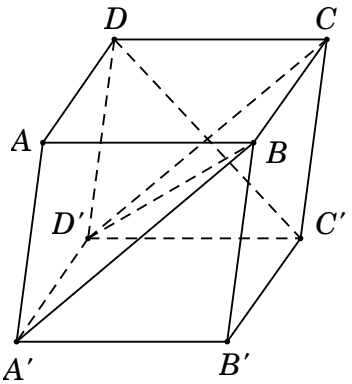
B. $(BA'D')//(ADC')$.

C. $A'B'CD$ là hình bình hành.

D. $BB'D'D$ là một tứ giác.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào hình vẽ dưới và tính chất của hình hộp, ta thấy rằng:

- Hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(DD'C'C)$ đối diện, song song với nhau.
- Hình hộp có hai đáy $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$ là hình bình hành $\Rightarrow A'B' = CD$ và $A'B' // CD$ suy ra $A'B'CD$ là hình hình hành.
- $BD // B'D'$ suy ra B, B', D', D đồng phẳng $\Rightarrow BB'D'D$ là tứ giác.
- Mặt phẳng $(BA'D')$ chứa đường thẳng CD' mà CD' cắt $C'D$ suy ra $(BA'D')$ không song song với (ADC').

Câu 16: Nếu thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

A. 3 cạnh. **B.** 4 cạnh. **C.** 5 cạnh. **D.** 6 cạnh.

Lời giải

Chọn C

Đa giác thiết diện của một lăng trụ tam giác và một mặt phẳng có nhiều nhất 5 cạnh với các cạnh thuộc các mặt của hình lăng trụ tam giác.

Câu 17: Nếu thiết diện của một hình hộp và một mặt phẳng là một đa giác thì đa giác đó có nhiều nhất mấy cạnh?

A. 4 cạnh. **B.** 5 cạnh. **C.** 6 cạnh. **D.** 7 cạnh.

Lời giải

Chọn C

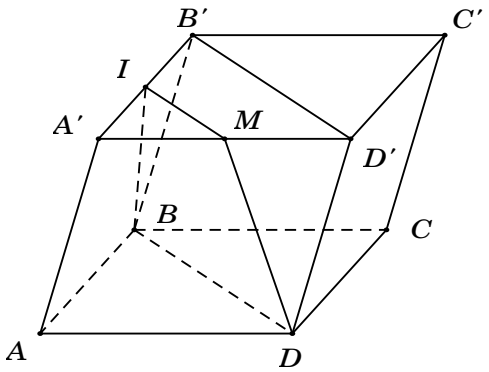
Vì hình hộp là hình lăng trụ có đáy là tứ giác và có 6 mặt nên thiết diện của hình hộp và mặt phẳng bất kì là một đa giác có nhiều nhất 6 cạnh.

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Hình thang. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} B'D' \subset (IB'D') \\ BD \subset (ABCD) \\ B'D' // BD \end{cases} \longrightarrow$ Ggiao tuyến của $(IB'D')$ với $(ABCD)$ là đường thẳng d đi qua I và song song với BD.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $M = d \cap AD \longrightarrow IM \,//\, BD \,//\, B'D'$.

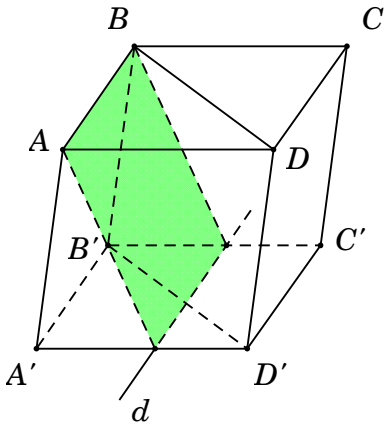
Khi đó thiết diện là tứ giác $IMB'D'$ và tứ giác này là hình thang.

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác (T). Khẳng định nào sau đây không **sai**?

A. (T) là hình chữ nhật. **B.** (T) là hình bình hành. **C.** (T) là hình thoi. **D.** (T) là hình vuông.

Lời giải

Chọn B



Giả sử mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và cắt hình hộp theo tứ giác (T).

Gọi d là đường thẳng giao tuyến của (α) và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

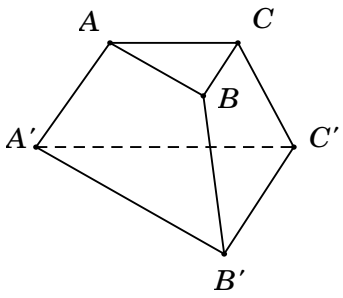
Ta chứng minh được $AB // d$ suy ra tứ giác (T) là một hình bình hành.

Câu 20: Cho hình chóp cụt tam giác $ABC.A'B'C'$ có 2 đáy là 2 tam giác vuông tại A và A' và có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$. Khi đó tỉ số diện tích $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B



Hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ có hai mặt đáy là hai mặt phẳng song song nên tam giác ABC đồng dạng tam giác $A'B'C'$ suy ra $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}.AB.AC}{\frac{1}{2}.A'B'.A'C'} = \frac{AB}{A'B'}.\frac{AC}{A'C'} = \frac{1}{4}$.

BÀI 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt Δ tại điểm M' xác định. Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương của đường thẳng Δ hoặc nói gọn là theo phương Δ.

Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu. Phương Δ gọi là phương chiếu.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.

Nếu H là một hình nào đó thì tập hợp H' các hình chiếu M' của tất cả những điểm M thuộc H được gọi là hình chiếu của H' qua phép chiếu song song nói trên.

Chú ý. Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm. Sau đây, ta chỉ xét các phép chiếu của những đường thẳng có phương không trùng với phương chiếu.

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

Định lí 1

a) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

b) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

d) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

III. Hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng

Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của hình H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Hình biểu diễn của các hình thường gặp

+ **Tam giác:** Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông,v.v…)

+ **Hình bình hành:** Một hình bình hành bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật…)

+ **Hình thang:** Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

+ **Hình tròn:** Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn cho hình tròn

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1. Vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

1. Phương pháp

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian, ta cần chú ý một số điểm sau:

- Nếu trên hình H có hai đoạn thẳng cùng phương thì trên hình H' hình chiếu của hai đoạn thẳng đó phải cùng phương.
- Trung điểm của một đoạn thẳng có hình chiếu là trung điểm của đoạn thẳng hình chiếu.
- Trong tam giác có một góc tù, ta cần chú ý chân đường cao kẻ từ đỉnh của góc nhọn không nằm trên cạnh đối diện mà nằm ở trên phần kéo dài của cạnh ấy.
- Một góc bất kì có thể biểu diễn cho mọi góc (nhọn, vuông, tù).
- Một tam giác bất kì có thể là hình biểu diễn của mọi tam giác (cân, đều, vuông).
- Hình bình hành có thể dùng làm hình biểu diễn cho các hình có tính chất của hình bình hành (vuông, thoi, chữ nhật,…)
- Một đường tròn được biểu diễn bởi một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Hãy chọn mặt phẳng chiếu (P) và phương chiếu d để hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là:

a. Một tam giác cân.

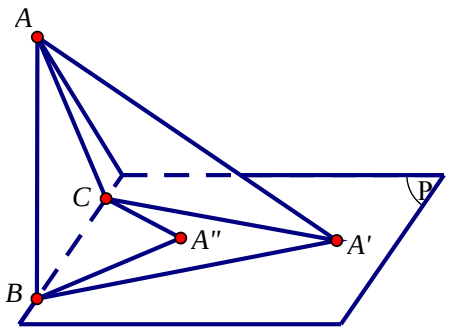
b. Một tam giác vuông.

Giải

Qua BC dựng mặt phẳng (P) không qua A.

a. Trong mặt phẳng (P), dựng tam giác BCA' cân tại A'. Khi đó, phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AA' biến tam giác ABC thành tam giác BCA'.

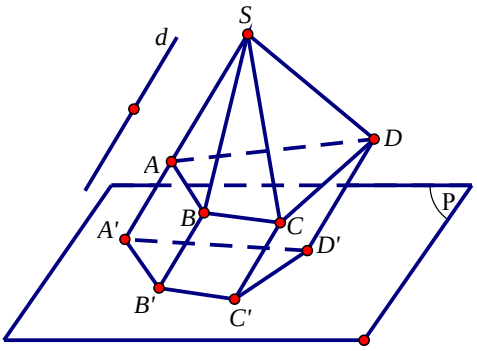
b. Trong mặt phẳng (P), dựng tam giác BCA" vuông tại A". Khi đó, phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AA" biến tam giác ABC thành tam giác vuông A"BC.



Ví dụ 2. Vẽ hình chiếu của hình chóp S.ABCD lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu SA (SA không song song với (P)).

Giải

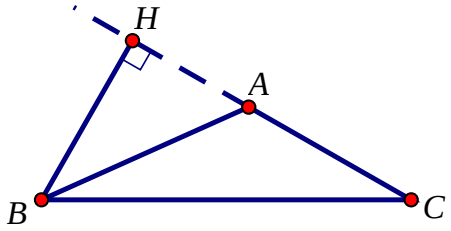
Vì phương chiếu d là SA nên SA cắt (P) tại A'. Các đỉnh B, C, D có hình chiếu trên (P) lần lượt là B', C', D' $\left(BB' \parallel AA', CC' \parallel AA', DD' \parallel AA'\right)$. Vậy hình chiếu của hình chóp S.ABCD lên (P) là tứ giác A'B'C'D'.



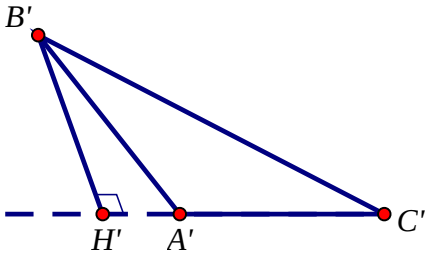
Ví dụ 3. Vẽ hình biểu diễn của tam giác ABC có góc A tù, đường cao BH.

Giải

Xem hình vẽ sau:



Hình thật



Hình biểu diễn

Ví dụ 4. Vẽ hình biểu diễn của đường tròn có hai đường kính vuông góc.

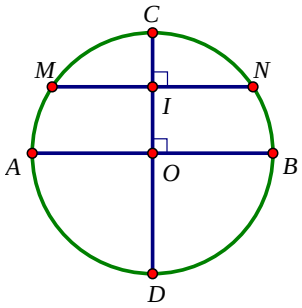
Giải

Giả sử trên hình thật ta có đường tròn tâm (O), tâm O, có hai đường kính AB và CD vuông góc. Nếu ta vẽ dây dung MN song song với AB thì CD sẽ cắt MN tại trung điểm I của MN.

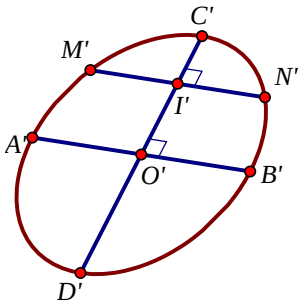
Suy ra cách vẽ hình biểu diễn như sau:

- Vẽ elip (E), tâm O' và đường kính A'B' (qua O') của nó.
- Vẽ dây cung $M'N' \parallel A'B'$.
- Lấy I' là trung điểm của M'N'.

Đường thẳng O'I' cắt elip (E) tại C', D'. Ta có A'B' và C'D' là hình biểu diễn hai đường kính vuông góc với nhau của đường tròn.



Hình thật



Hình biểu diễn

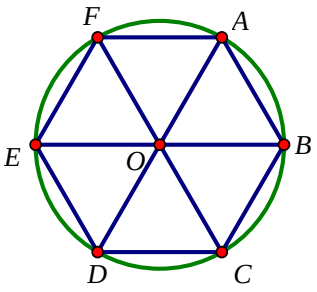
Ví dụ 5. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

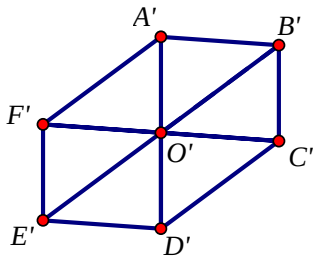
Giải

Xét hình lục giáo đều ABCDEF, ta thấy:

- Tứ giác OABC là một hình thoi.
- Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O. Suy ra cách vẽ như sau:

+ Vẽ hình bình hành O'A'B'C' biểu diễn cho hình thoi OABC.
+ Lấy các điểm D', E', F' đối xứng với các điểm A', B', C' qua O'.
+ A'B'C'D'E'F' là hình cần vẽ.





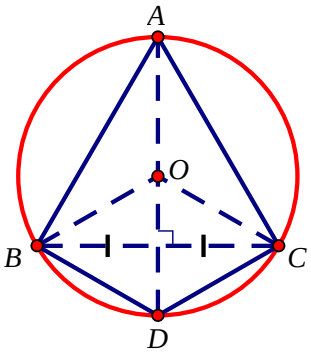
Hình biểu diễn lục giác đều

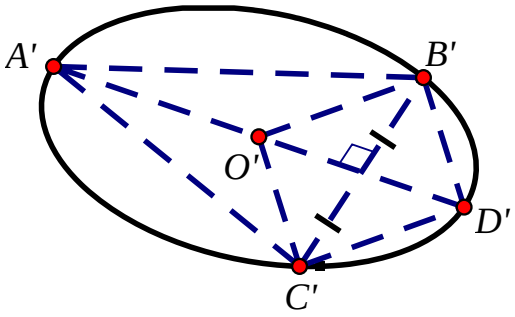
Ví dụ 6. Vẽ hình biểu diễn của một tam giác đều.

Giải

Xét tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm đối xứng với A qua O, ta thấy tứ giác OBDC là hình thoi. Từ đó suy ra cách vẽ như sau:

+ Vẽ hình bình hành O'B'D'C' biểu diễn cho hình thoi OBDC.
+ Lấy điểm A' là điểm đối xứng của D' qua O'.
+ Tam giác A'B'C' là tam giác đều cần tìm.





Hình biểu diễn tam giác đều

Dạng 2. Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song

1. Phương pháp

Các bài toán liên quan đến phép chiếu song song thường là dựa vào các tính chất của phép chiếu song song để chứng minh một vấn đề nào đó. Cần chú ý rằng trong các bài toán dạng này, việc tìm phương chiếu đóng vai trò khá quan trọng.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD.

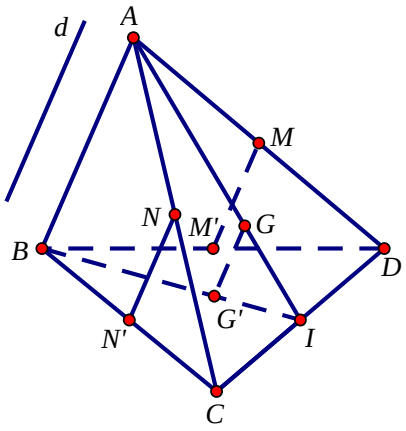
a. Chứng minh hình chiếu G' của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AB là trọng tâm của tam giác BCD.

b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và AC. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N theo phép chiếu nói trên.

Giải

a. Chứng minh G' là trọng tâm của tam giác BCD:

- Gọi I là trung điểm của CD. Qua phép chiếu song song phương AB thì IB là hình chiếu của IA trên mặt phẳng (BCD).
- Vì phép chiếu song song bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự ba điểm A, G, I nên hình biểu diễn G' của G nằm trên BI và ở giữa B và I.



Trong tam giác IAB, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{IG}{IA}=\dfrac{IG'}{IB}\\ \dfrac{IG}{IA}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{IG'}{IB}=\dfrac{1}{3}.$$

Suy ra G' là trọng tâm của tam giác BCD.

b. Hình chiếu của M, N qua phép chiếu song song phương AB trên mặt phẳng (BCD). Ta thấy:

- BD là hình chiếu của AD trên mặt phẳng (BCD); M là trung điểm của AD nên M' là trung điểm của BD.
- BC là hình chiếu của AC trên mặt phẳng (BCD); N là trung điểm của AC nên N' là trung điểm của BC.

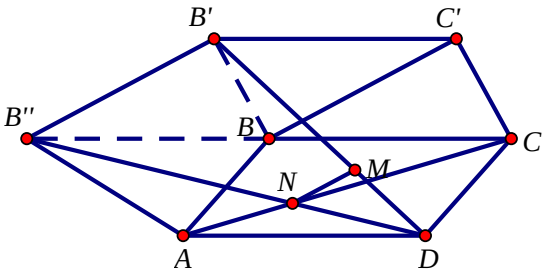
Ví dụ 2. Cho hai hình bình hành ABCD và BCC'B' nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Tìm điểm M trên đoạn DB', và điểm N trên đường chéo AC sao cho $MN \parallel BC'$.

Giải

- Phân tích:

Giả sử đã tìm được $M \in DB'$ và $N \in AC$ sao cho $MN \parallel BC'$.

Xét phép chiếu song song theo phương BC' lên mặt phẳng (ABCD). Khi đó qua phép chiếu này, hình chiếu của các điểm D, M, B' lần lượt là D, N, B''. Vì D, M, B' thẳng hàng nên D, N, B'' cũng thẳng hàng. Do đó, N là giao điểm của DB'' và AC. Từ đó, ta có cách dựng như sau:



- Cách dựng:

+ Dựng B'' là hình chiếu của B' qua phép chiếu theo phương BC' lên mặt phẳng (ABCD).

+ Dựng N là giao điểm của DB'' và AC.

+ Trong mặt phẳng (DB'B''), ta kẻ $NM \parallel B'B''$ cắt DB' tại M.

Vậy M và N là các điểm cần tìm.

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng song song.

B. Hình chiếu song song của một hình bình hành là một hình bình hành.

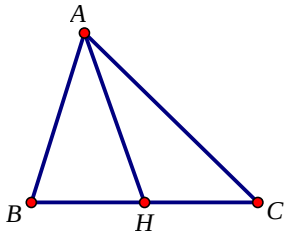
C. Phép chiếu song song biến một tam giác thành một tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không cùng phương với phương chiếu.

D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

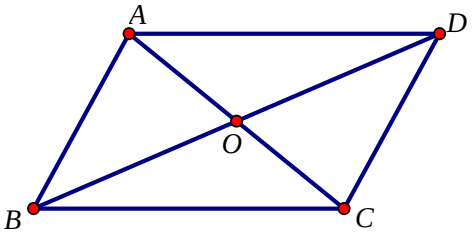
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Câu 2. Trên hình $\mathcal{A}$ có $\begin{cases} AH \perp BC \\ HB = HC \end{cases}$ và hình $\mathcal{B}$ có $\begin{cases} AB \parallel CD, AD \parallel BC \\ AC \perp BD \end{cases}$



Hình $\mathcal{A}$



Hình $\mathcal{B}$

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. ABC là tam giác đều.

B. ABC là tam giác cân tại A.

C. ABCD là hình thoi.

D. B và C đúng.

Hướng dẫn giải

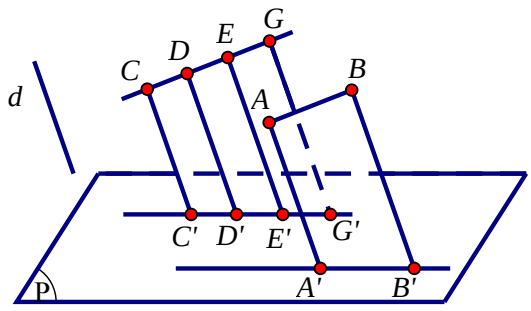
ĐÁP ÁN D.

Nhìn hình vẽ, ta thấy:

- Tam giác ABC có AH vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên cân tại A → B đúng.

- Tứ giác ABCD có $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$ nên là hình bình hành. Mặt khác hai đường chéo của nó vuông góc nên ABCD là hình thoi → C đúng.

Câu 3. Trên hình $\mathcal{C}$, ta có phép chiếu song song theo phương d và mặt phẳng chiếu (P); $AB \parallel CG$ và $AB = DG$; A', B', C', D', E', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, E, G qua phép chiếu nói trên.



Hình $\mathcal{C}$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{DG}{AB}=\frac{D'G'}{A'B'}=1$.

B. $\frac{C'D'}{D'E'}=\frac{CD}{DE}$.

C. $D'G'=A'B'$.

D. Tất cả A, B, C đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

The định lí 2, ta thấy câu A và câu B đúng. Từ câu A đúng suy ra câu C đúng.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

B. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.

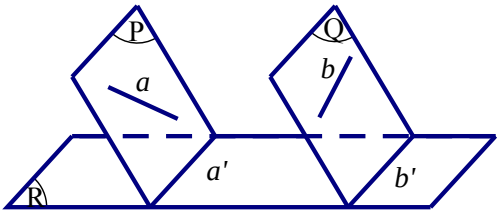
C. Hình chiếu song song của hai một hình vuông là một hình vuông.

D. Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A.

Dựng mặt phẳng (P) qua a và song song với b. Dựng mặt phẳng (Q) qua b và song song với a. Giả sử (P) song song với (Q). Ta chọn phương chiếu d song song với (P) và mặt phẳng chiếu (R) sao cho (R) cắt (P) và (Q) lần lượt theo hai giao tuyến a' và b'. Khi đó hình chiếu a', b' song song với nhau.



Câu 5. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là hai đường thẳng a' và b'. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a' và b' luôn luôn cắt nhau.

B. a' và b' có thể trùng nhau.

C. a và b không thể song song.

D. a' và b' có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Gọi l là phương chiếu, (α) và (β) là các mặt phẳng song song với l và lần lượt đi qua a và b. Khi đó nếu (α) và (β) cắt nhau thì a' và b' cắt nhau, nếu (α) và (β) song song thì a' và b' song song.

Câu 6. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b'. Khi đó:

A. a và b phải song song với nhau.

B. a và b phải cắt nhau.

C. a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.

D. a và b không thể song song.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C.

Nếu $a' /\!/ b'$ thì $mp(a,a') /\!/ mp(b,b')$. Bởi vậy a và b có thể song song hoặc chéo nhau.

Câu 7. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D có hình chiếu song song trên mặt phẳng (P) lần lượt là bốn điểm A', B', C', D'. Những trường hợp nào sau đây không thể xảy ra?

A. A'B'C'D' là bốn đỉnh của một hình bình hành.

B. D' là trọng tâm tam giác A'B'C'.

C. D' là trung điểm cạnh A'B'.

D. Hai điểm B', C' nằm giữa hai điểm A' và D'.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D.

Bốn điểm không đồng phẳng A', B', C', D' không thể thẳng hàng.

Câu 8. Hình chiếu song song của một hình thang ABCD không thể là hình nào dưới đây?

A. Hình bình hành.

B. Hình tam giác cân.

C. Đoạn thẳng.

D. Bốn điểm thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B.

BÀI 1. VECTO TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC PHÉP TOÁN VỀ VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A, điểm cuối là B ta có một vectơ, được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

Định nghĩa

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{x},\ \vec{y}$,…

Các khái niệm có liên quan đến vectơ như giá của vectơ, độ dài của vectơ, sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ, vectơ – không, sự bằng nhau của hai vectơ, … được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

II – ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BA VECTƠ

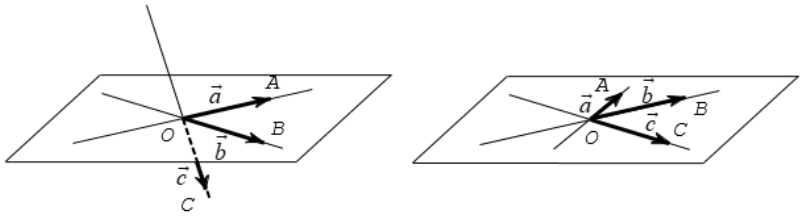
1. Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian

Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vectơ – không. Nếu từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ thì có thể xả ra hai trường hợp:

- Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, khi đó ta nói rằng vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

- Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng thi ta nói ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Trong trường hợp này giá của các vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ luôn luôn song song với một mặt phẳng.



a) Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng b) Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng

Chú ý. Việc xác định sự đồng phẳng hoặc không đồng phẳng của ba vectơ nói trên không phụ thuộc vào việc chọn điểm O.

Từ đó ta có định nghĩa sau đây:

2. Định nghĩa

Trong không gian ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

3. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Từ định nghĩa ba vectơ đồng phẳng và từ định lí về sự phân tích (hay biểu thị) một vectơ theo hai vectơ hai vectơ không cùng phương trong hình học phẳng chúng ta có thể chứng minh được định lí sau đây:

Định lí 1

Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và vectơ $\vec{c}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m,n sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$. Ngoài ra cặp số m,n là duy nhất.

Định lí 2

Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Khi đó với mọi vectơ $\vec{x}$ ta đều tìm được một bộ ba số m,n,p sao cho $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$. Ngoại ra bộ ba số m,n,p là duy nhất.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

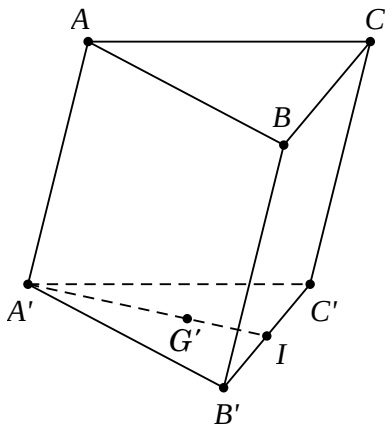
Dạng 1. Biểu diễn vectơ

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'}, \vec{b}=\overrightarrow{AB}, \vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}\right)$. **B.** $\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)$. **D.** $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của $B'C'$.

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'G'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

Ta có $\overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G'}=\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)$.

$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

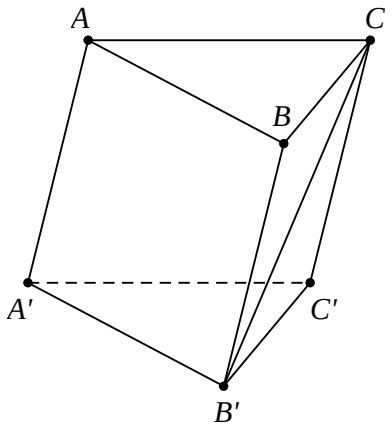
Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $BB'C'C$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AA'}$

$=-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

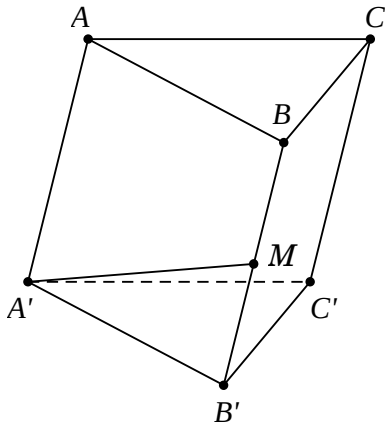
Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$.

C. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

Chọn C



Vì M là trung điểm của $BB' \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

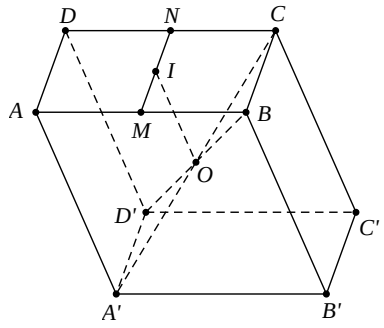
Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình hình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}, \overrightarrow{CA'} = \vec{v}, \overrightarrow{BD'} = \vec{x}, \overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. **B.** $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. **D.** $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Vì I là trung điểm của MN suy ra $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$.

Kết hợp với $\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB'}\right)=-\frac{1}{4}(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}).$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}, \overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Gọi I là trung điểm của $B'C'$, K là giao điểm của $A'I$ và $B'D'$. Mệnh đều nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{3}\left(4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}\right)$.

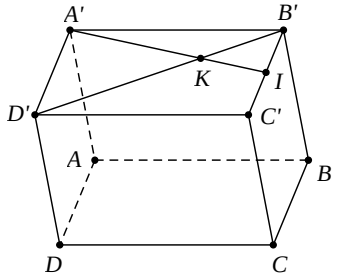
B. $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{3}\left(4\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{DK}=4\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.

D. $\overrightarrow{DK}=4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$.

Lời giải

Chọn A



Vì I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}=2\overrightarrow{A'I}$.

Và K là giao điểm của $A'I, B'D'$ nên theo định lí Talet $\Rightarrow \overrightarrow{A'K}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

Ta có $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'K}=\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$.

Khi đó $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AK}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AK}$.

$=\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}=\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

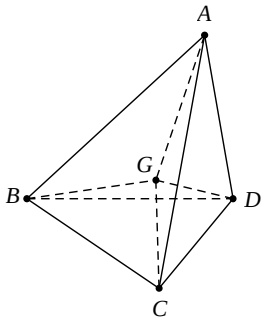
B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn A



Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}.$

Khi đó $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}.4\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)\longrightarrow\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$

$=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$

Vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ nên mệnh đề $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ sai.

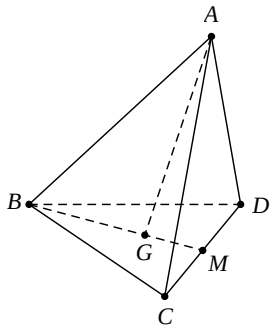
Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của CD suy ra $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}.$

Ta có $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right).$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}\right).$

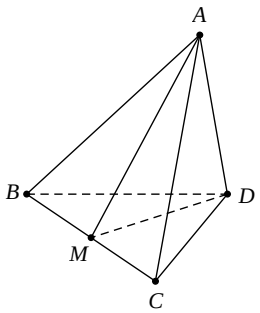
B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}\right).$

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}\right).$

Lời giải

Chọn A



Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$

Ta có $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right).$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}\right).$

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b}\right).$

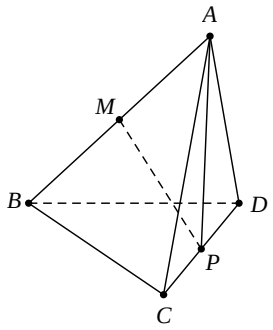
B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c}\right).$

C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d}\right).$

D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}\right).$

Lời giải

Chọn D



Vì M, P lần lượt là trung điểm của $AB, CD \Rightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AP} \end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$.

Dạng 2. Đẳng thức vectơ

Câu 1: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

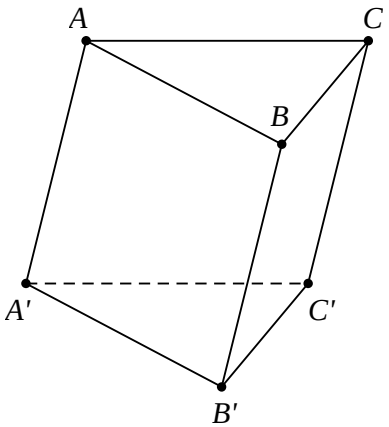
B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{d} = \vec{c} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.

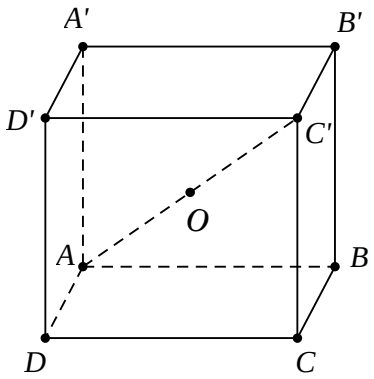
B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.

C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.

D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Mà O là trung điểm của AC' suy ra $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

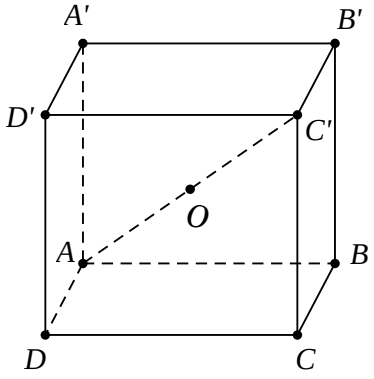
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A đúng**, vì theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

□ **B đúng**, vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{BC'}=-\overrightarrow{D'A}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

□ **C sai**, vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB'}\\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'}\end{cases}$ mà $\overrightarrow{AB'}\neq\overrightarrow{AD'}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}\neq\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

□ **D đúng**, vì $\begin{cases}(1):\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}\\(2):\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AC'}\end{cases}\Rightarrow(1)=(2).$

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}.$

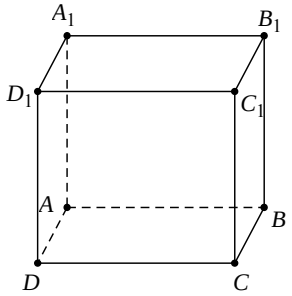
B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{DC}.$

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}.$

D. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn D



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A đúng**, vì $\begin{cases}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}\\\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1A_1}\end{cases}$ suy ra $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1A_1}.$

□ **B đúng**, vì $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}.$

□ **C đúng**, vì $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}$ (quy tắc hình hộp).

□ **D sai**, vì $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BD_1}\neq\overrightarrow{BC}.$

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}.$

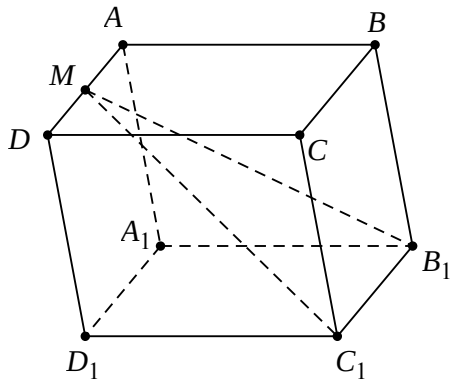
B. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}.$

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}.$

D. $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}.$

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A sai**, vì $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1D_1}\right).$

$=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}\right)=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}.$

□ **B đúng**, vì $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right).$

$=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{C_1D_1}\right)=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}.$

□ **C sai**, vì $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$ (từ B).

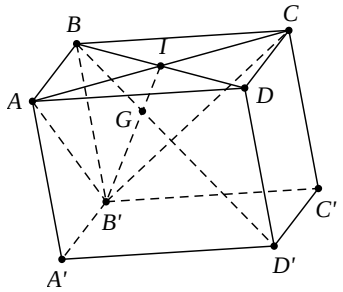
□ **D sai**, vì $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{BD_1}.$

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a.$ Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC'}=3\overrightarrow{AG}.$ **B.** $\overrightarrow{AC'}=4\overrightarrow{AG}.$ **C.** $\overrightarrow{BD'}=4\overrightarrow{BG}.$ **D.** $\overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}.$

Lời giải

Chọn D



Cách 1. Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD\Rightarrow I$ là trung điểm của $BD.$

Ta có $\Delta BIG\sim\Delta D'B'G\Rightarrow\frac{BG}{D'G}=\frac{BI}{D'B'}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{BG}{BD'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}.$

Cách 2. Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$.

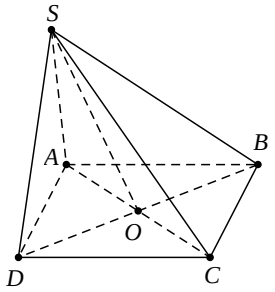
Do G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ suy ra $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{BG}\Leftrightarrow\overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\overrightarrow{SB}=\vec{b},$ $\overrightarrow{SC}=\vec{c},\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **C.** $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Vì O là trung điểm của AC suy ra $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO}=\vec{a}+\vec{c}$ (1).

Và O là trung điểm của BD suy ra $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{SO}=\vec{b}+\vec{d}$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.

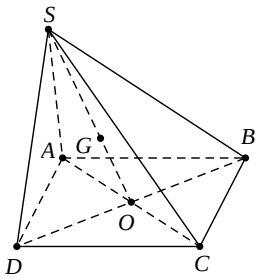
Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. G,S,O không thẳng hàng. **B.** $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$.

C. $\overrightarrow{GS}=5\overrightarrow{OG}$. **D.** $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$

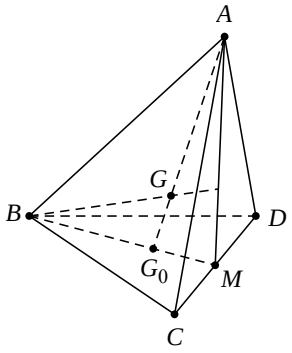
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}\Rightarrow$ ba điểm G, S, O thẳng hàng.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}.$ **B.** $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}.$ **C.** $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}.$ **D.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}.$

Lời giải

Chọn C



Vì G_0 là giao điểm của đường thẳng AG với mặt phẳng (BCD).

Suy ra G_0 là trọng tâm của tam giác $BCD\Rightarrow\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D}=\vec{0}.$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_0}+\underbrace{\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D}}_{\vec{0}}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_0}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}.$

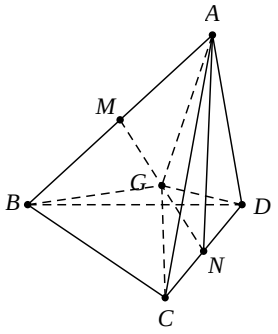
Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}.$ **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}.$

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}.$

Lời giải

Chọn B



Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}\end{cases}$.

Mà G là trung điểm của $MN \Rightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}.$

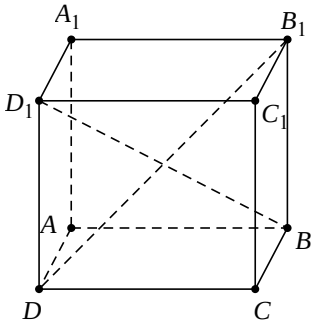
Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=4\overrightarrow{MG}.$

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}.$

A. $k=4.$ **B.** $k=1.$ **C.** $k=0.$ **D.** $k=2.$

Lời giải

Chọn B



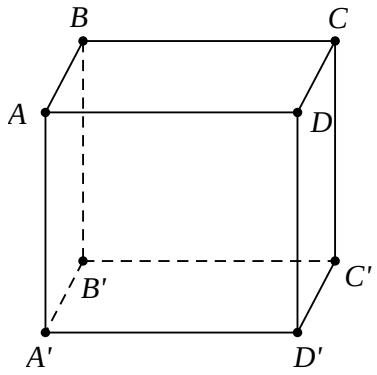
Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}\Rightarrow k=1.$

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'.$ Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}.$

A. $k=0.$ **B.** $k=1.$ **C.** $k=4.$ **D.** $k=2.$

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD'}=\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{D'A}.$

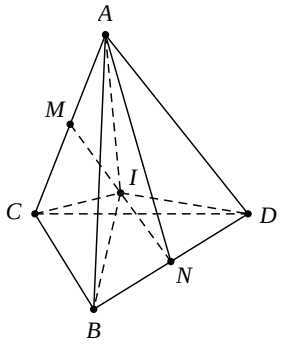
Suy ra $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\overrightarrow{AD'}+k\overrightarrow{D'A}=\vec{0}\Leftrightarrow(k-1)\overrightarrow{D'A}=\vec{0}\Leftrightarrow k=1.$

Câu 13: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD.$ Gọi I là trung điểm của đoạn MN. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}.$

A. $k=2.$ **B.** $k=4.$ **C.** $k=1.$ **D.** $k=0.$

Lời giải

Chọn C



Vì M, N lần lượt là trung điểm của $AC, BD \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}\\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN}\end{cases}.$

Mặt khác $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$ (I là trung điểm của MN) $\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}.$

Ta có $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}}_{\vec{0}}+(2k-2)\overrightarrow{IB}+(k-1)\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

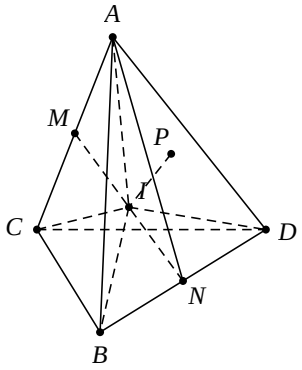
$\Leftrightarrow(k-1)\left(2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}$ mà $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\neq\vec{0}$ suy ra $k-1=0\Leftrightarrow k=1.$

Câu 14: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD.$ Gọi I là trung điểm của đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right).$

A. $k=4.$ **B.** $k=\frac{1}{2}.$ **C.** $k=\frac{1}{4}.$ **D.** $k=2.$

Lời giải

Chọn C



Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, $BD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN} \end{cases}.$

Mặt khác $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$ (I là trung điểm của MN) $\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}.$

Khi đó $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)=4\overrightarrow{PI}$

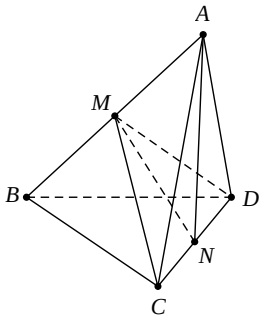
Mà $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$ nên suy ra $4k=1\Leftrightarrow k=\frac{1}{4}.$

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right).$

A. $k=\frac{1}{2}.$ **B.** $k=\frac{1}{3}.$ **C.** $k=3.$ **D.** $k=2.$

Lời giải

Chọn A



Ta có N là trung điểm của $CD \Rightarrow \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$ (1).

Và M là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right).$

Kết hợp giả thiết $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)\Rightarrow k=\frac{1}{2}.$

Dạng 3. Đồng phẳng của ba vectơ

Câu 1: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng.

B. Hai vectơ $\vec{x},\vec{a}$ cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{x},\vec{b}$ cùng phương.

D. Ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đôi một cùng phương.

Lời giải

Chọn A

Giả sử, ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng, khi đó $\vec{x}=m.\vec{y}+n.\vec{z}$.

Ta có $\begin{cases}m.\vec{y}=m.\vec{a}-m.\vec{b}-m.\vec{c}\\ n.\vec{z}=-3n.\vec{b}-2n.\vec{c}\end{cases}\Rightarrow m.\vec{y}+n.\vec{z}=m.\vec{a}-(m+3n).\vec{b}-(m+2n).\vec{c}.$

Khi đó $2\vec{a}+\vec{b}=m.\vec{a}-(m+3n).\vec{b}-(m+2n).\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m+3n=-1\\ m+2n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\ n=-1\end{cases}.$

Vậy ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 2: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Ba vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c},\ \vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c},\ \vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. Ba vectơ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c},\ \vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c},\ \vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. Ba vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\ \vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c},\ \vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. Ba vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c},\ \vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c},\ \vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B

Ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists\, m,n:\vec{x}=m.\vec{y}+n.\vec{z}.$

Với $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c},\ \vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c},\ \vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}.$

Suy ra $\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}=m\left(3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}\right)+n\left(2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}\right).$

$=(3m+2n)\vec{a}-3(m+n)\vec{b}+(2m-3n)\vec{c}\Rightarrow\begin{cases}3m+2n=1\\ -3m-3n=-2\\ 2m-3n=4\end{cases}\Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Vậy ba vectơ kể trên không đồng phẳng.

Chú ý. Bạn đọc làm tương tự với các **A, C, D** để thấy được các vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng

Câu 3: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}.$

B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}.$

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}.$

D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng quy.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

 Với $m+n+p=0\Rightarrow m=n=p=0$ suy ra $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ nên chưa kết luận được ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

 Với $m+n+p\neq 0$ suy ra tồn tại ít nhất một số khác $0.$

Giả sử $m\neq 0,$ ta có $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}\Leftrightarrow \vec{a}=-\frac{n}{m}.\vec{b}-\frac{p}{m}.\vec{c}.$

Suy ra tồn tại n, p để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng.

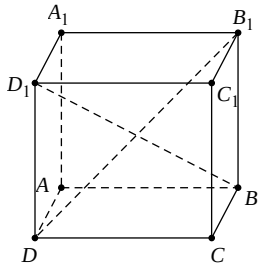
B. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{CD_1}$ suy ra $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.EFGH.$ Gọi I là tâm của hình bình hành $ABEF$ và K là tâm của hình bình hành $BCGF.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

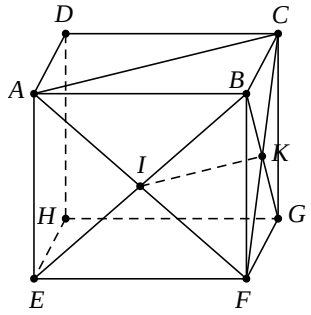
A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. **D.** $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B



Vì I, K lần lượt là trung điểm của AF và CF.

Suy ra IK là đường trung bình của tam giác $AFC \Rightarrow IK // AC \Rightarrow IK // (ABCD)$.

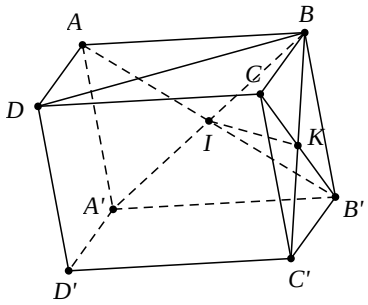
Mà $GF // (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD)$ suy ra ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $k = 4$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 0$. **D.** $k = 2$.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A đúng**, vì $\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{AC}$ cùng thuộc mặt phẳng $(B'AC)$.

□ **B đúng**, vì $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$.

□ **C sai**, vì $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'K}$

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1} \Rightarrow k = 1$. .

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

A. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

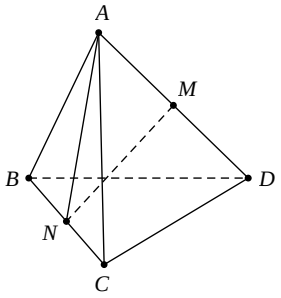
B. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

C. Ba vectơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

D. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C



Vì M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC suy ra: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$ và $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Khi đó, dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A đúng**, vì $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

□ **B đúng**, vì MN không nằm trong mặt phẳng (ABC).

□ **C sai**, tương tự ta thấy AN không nằm trong mặt phẳng (MNC).

□ **D đúng**, vì $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy điểm M, N sao cho $AM=3MD, BN=3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

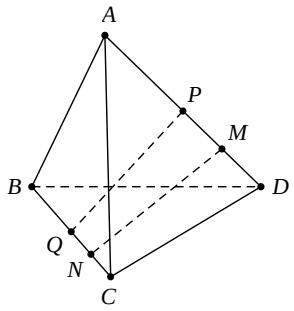
B. Ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

C. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

D. Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A



Theo bài ra, ta có M, N lần lượt là trung điểm của PD, QC.

Khi đó, dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A sai**, vì $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ 3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BN}\end{cases}$

Suy ra $4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

□ **B đúng**, vì $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{DC}$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{DC}\right)\Rightarrow\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

□ **C đúng**, vì với cách biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ tương tự như trên, ta có $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.

□ **D đúng**, vì biểu diễn giống **A**, ta được $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\ (1)$; $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}\ (2)$. Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

A. $x=-1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm x để ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

Hệ thức $(1)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$.

Hệ thức $(2)\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+x\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=(1+x)\overrightarrow{AB}-x\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{BC}$.

Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(2+x)\overrightarrow{AB}-x\overrightarrow{AD}+(x+3)\overrightarrow{BC}$.

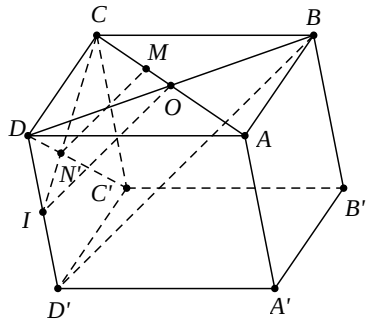
Vậy ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng khi $2+x=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC=3MC$. Lấy N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N=xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$.

A. $x=\frac{2}{3}$. **B.** $x=\frac{1}{3}$. **C.** $x=\frac{1}{4}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình hình hành $ABCD$ và I là trung điểm của DD'.

Nối $C'D$ cắt CI tại $N' \Rightarrow N'$ là trọng tâm của tam giác CDD'.

Ta có OI là đường trung bình của tam giác BDD' suy ra $OI \parallel BD'$.

Mặt khác $\frac{CN'}{CI}=\frac{CM}{CO}$ nên $MN' \parallel OI$ suy ra $MN' \parallel BD'$.

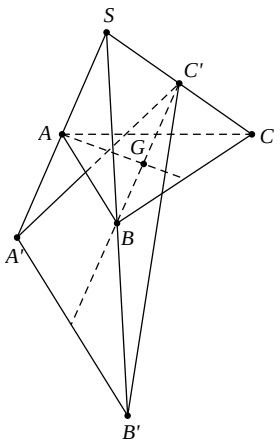
Theo bài ra, ta có $MN \parallel BD' \longrightarrow N \equiv N' \Rightarrow C'N=\frac{2}{3}C'D \Rightarrow x=\frac{2}{3}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\frac{SA}{SA'}=a, \frac{SB}{SB'}=b, \frac{SC}{SC'}=c,$ trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì

A. $a+b+c=3$. **B.** $a+b+c=4$. **C.** $a+b+c=2$. **D.** $a+b+c=1$.

Lời giải

Chọn A



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

Khi đó $3\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$ mà $\overrightarrow{SA}=a.\overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SB}=b.\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC}=c.\overrightarrow{SC'}.$

Suy ra $3\overrightarrow{SG}=a.\overrightarrow{SA'}+b.\overrightarrow{SB'}+c.\overrightarrow{SC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{SG}=\frac{a}{3}.\overrightarrow{SA'}+\frac{b}{3}.\overrightarrow{SB'}+\frac{c}{3}.\overrightarrow{SC'}.$

Vì $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GC'}$ đồng phẳng.

Do đó, tồn tại ba số l, m, n sao cho $(l^2+m^2+n^2\neq 0)$ và $l.\overrightarrow{GA'}+m.\overrightarrow{GB'}+n.\overrightarrow{GC'}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow l.\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA'}\right)+m.\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB'}\right)+n.\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB'}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow (l+m+n)\overrightarrow{SG}=l.\overrightarrow{SA'}+m.\overrightarrow{SB'}+n.\overrightarrow{SC'}.$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SG}=\frac{l}{l+m+n}.\overrightarrow{SA'}+\frac{m}{l+m+n}.\overrightarrow{SB'}+\frac{n}{l+m+n}.\overrightarrow{SC'}=\frac{a}{3}.\overrightarrow{SA'}+\frac{b}{3}.\overrightarrow{SB'}+\frac{c}{3}.\overrightarrow{SC'}.$

Suy ra $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}=\frac{l}{l+m+n}+\frac{m}{l+m+n}+\frac{n}{l+m+n}=1 \Rightarrow a+b+c=3.$

Dạng 4. Tìm điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Điểm M xác định bởi đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng G.

B. M thuộc tia AG và $AM=3AG.$

C. G là trung điểm AM.

D. M là trung điểm AG.

Lời giải

Chọn B

Do G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}.$

Kết hợp giả thiết, suy ra $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AG}.$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. N là trung điểm BD.

B. N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BCDN$.

C. N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.

C. N trùng với A.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{DC}$.

Đẳng thức chứng tỏ N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Ta định nghĩa "G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$". Khẳng định nào sau đây sai?

A. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AB và CD.

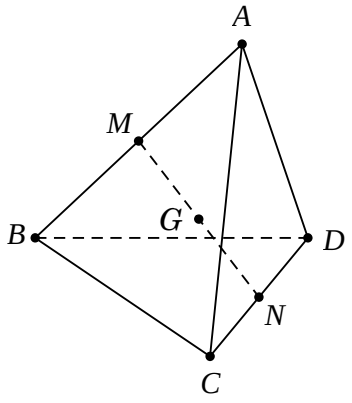
B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD.

C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$

$\longrightarrow G$ là trung điểm IJ . Do đó A đúng.

Tương tự, **B** và C đều đúng.

Vậy cả A, B, C đều đúng.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M được xác định bởi đẳng thức vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là tâm của mặt đáy $ABCD$.

B. M là tâm của mặt đáy $A'B'C'D'$.

C. M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

D. Tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Lời giải

Chọn C

Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$.

Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = \vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\right)$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + 4\overrightarrow{MO} = \vec{0} + 4\overrightarrow{MO} = 4\overrightarrow{MO}$.

Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = 4\overrightarrow{MO'}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO} + 4\overrightarrow{MO'} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'} = \vec{0}$.

Vậy điểm M cần tìm là trung điểm của OO'.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức vectơ $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB'.

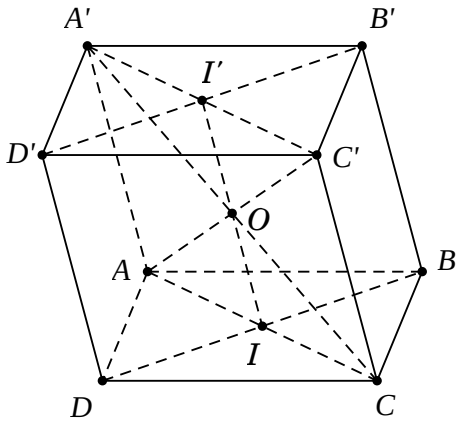
B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm CC'.

D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, I' lần lượt là tâm các mặt đáy $ABCD$, $A'B'C'D'$. Suy ra O là trung điểm của II'.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{IB}$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên từ đẳng thức $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{IB}$ suy ra M là trung điểm BB'.

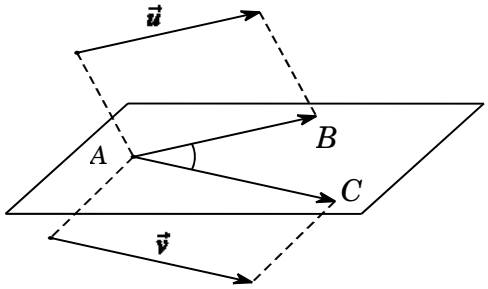
BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC
A. *KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM*

I – TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai vectơ trong không gian

Định nghĩa

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{u},\ \overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ $\left(0^\circ\le\widehat{BAC}\le 180^\circ\right)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong không gian, kí hiệu là $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.



2. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Định nghĩa

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$, được xác định bởi công thức:

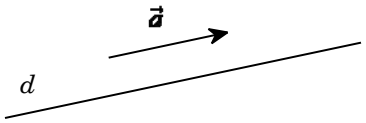
$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)}.$$

Trong trường hợp $\vec{u}=\vec{0}$ hoặc $\vec{v}=\vec{0}$, ta quy ước $\vec{u}.\vec{v}=0$.

II – VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa

Vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.



2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì vectơ $k\vec{a}$ với $k\neq 0$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

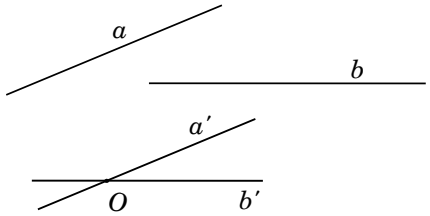
b) Một đường thẳng trong không gian hoàn toàn xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của nó.

c) Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vectơ chỉ phương cùng phương.

III – GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.



2. Nhận xét

a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

b) Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng b và $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0°\le\alpha\le 90°$ và bằng $180°-\alpha$ nếu $90°<\alpha\le 180°$. Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng $0°$.

IV – HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

Người ta kí hiệu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau là $a\perp b$.

2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì: $a\perp b\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$.

b) Cho hai đường thẳng song song. Nếu một đường thẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

c) Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

B. PHÂN LOẠI

Dạng 1. Tính góc giữa hai đường thẳng

1. **Phương pháp**

Cách 1: (Theo phương pháp hình học)

- Lấy điểm O tùy ý (ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng), qua đó vẽ các đường thẳng lần lượt song song (hoặc trùng) với hai đường thẳng đã cho.
- Tính một góc trong các góc được tạo bởi giữa hai đường thẳng cắt nhau tại O.
- Nếu góc đó nhọn thì đó là góc cần tìm, nếu góc đó tù thì góc cần tính là góc bù với góc đã tính.

Cách 2: (Theo phương pháp vectơ)

- Tìm $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 tính $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$
- Khi đó $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi I là trung điểm của BC. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng DI và AB.

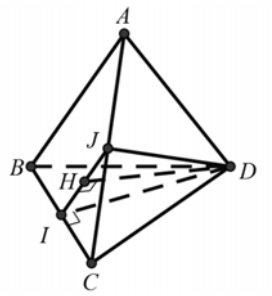
Hướng dẫn giải

Đặt cạnh của tứ diện có độ dài là a.

Gọi J là trung điểm của AC.

Ta có: $IJ//AB\Rightarrow\left(AB,DI\right)=\left(IJ,DI\right)=\widehat{DIJ}$

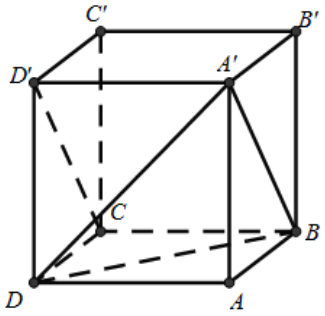
Kẻ $HD\perp IJ,\left(H\in IJ\right)$



Ta có: $\cos\widehat{DIJ}=\dfrac{IH}{DI}=\dfrac{\frac{a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Xác định Góc tạo bởi hai đường thẳng BD và CD'.

Hướng dẫn giải



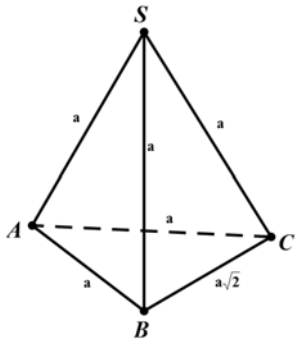
Do $BA'//CD'$ nên góc giữa BD và CD' là góc giữa BD và BA'

Mà $\Delta A'BD$ là tam giác đều nên góc giữa BD và BA' là 60^o.

Vậy góc giữa BD và CD' là 60^o.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có $SA=SB=SC=AC=AB=a$ và $BC=a\sqrt{2}$. Xác định góc giữa hai đường thẳng CS và AB.

Hướng dẫn giải



Trước hết ta tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$

Từ giả thiết suy ra ΔABC vuông cân tại A

Ta có:

$$\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}+0}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{a.a.\cos 120^\circ}{a.a}=\frac{-\frac{a^2}{2}}{a^2}=-\frac{1}{2}$$

Suy ra: $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)=120^\circ.$

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng $60^\circ.$

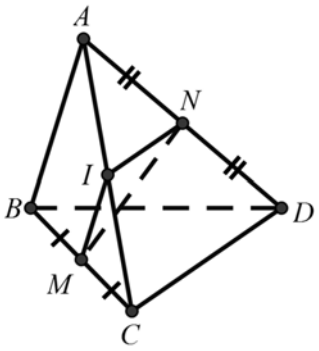
Ví dụ 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Cho biết $AB=CD=2a$ và $MN=a\sqrt{3}$. Xác định góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của AC ta có:

$$IM=IN=a$$

Áp dụng định lí côsin trong ΔIMN



$$MN^2=IM^2+IN^2-2IM.IN\cos\widehat{MIN}$$

$$3a^2=a^2+a^2-2a.a\cos\widehat{MIN}$$

$$\Rightarrow\cos\widehat{MIN}=-\frac{1}{2}$$

Suy ra: $\widehat{MIN}=120^\circ$

Vậy: $\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left(\widehat{IM,IN}\right)=180^\circ-120^\circ=60^\circ.$

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong không gian

1. Phương pháp

Cách 1: Dùng định nghĩa: $a\perp b\Leftrightarrow\left(\widehat{a,b}\right)=90^0$

Cách 2: Dùng định lí: $\begin{cases}b//c\\a\perp c\end{cases}\Rightarrow a\perp b$

Cách 3: Sử dụng tích vô hướng: $a\perp b\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$

2. .Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABC có SA=SB=SC và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$. Chứng minh rằng: $SA\perp BC, SB\perp AC, SC\perp AB$

Hướng dẫn

Chứng minh: $SA\perp BC$

Xét: $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

$=\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SC}\right|\cos\widehat{ASC}-\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|\cos\widehat{ASB}=0\Rightarrow SA\perp BC$

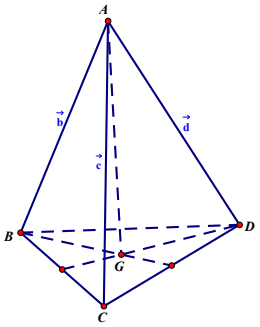
Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD.

a) Chứng minh $AG\perp CD$

b) Gọi M là trung điểm của CD. Tính góc giữa AC và BM.

Hướng dẫn

a) Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b};\ \overrightarrow{AC}=\vec{c};\ \overrightarrow{AD}=\vec{d}$



Chứng minh : $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD}=0$

Với

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)$

$\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\left(\vec{d}-\vec{c}\right)$

Từ đó: $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD}=0$

b) Ta có:

$\cos\left(\widehat{AC,BM}\right)=\frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|}$

Với

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=\frac{a^2}{4}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

B. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

C. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

D. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

Lời giải

Chọn A

A đúng theo định nghĩa.

B sai vì có thể b và c chéo nhau.

C sai vì có thể là góc vuông.

D sai. Nếu góc giữa hai vectơ chỉ phương là α với $0^0 \le \alpha \le 90^0$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng α, nếu góc giữa hai vectơ chỉ phương là α với $90^0 < \alpha \le 180^0$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng $180^0 - \alpha$.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải

Chọn D

Câu 3: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.

B. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$.

Lời giải

Chọn D

Vì b có thể nằm trong mặt phẳng (P).

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. 45^0.

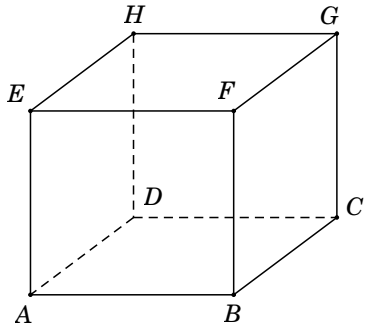
B. 90^0.

C. 120^0.

D. 60^0.

Lời giải

Chọn B



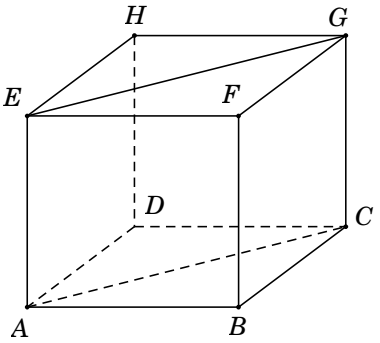
Vì $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}$ ($ADHE$ là hình vuông) nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DH}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=\widehat{BAE}=90^0$ ($ABFE$ là hình vuông).

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn C



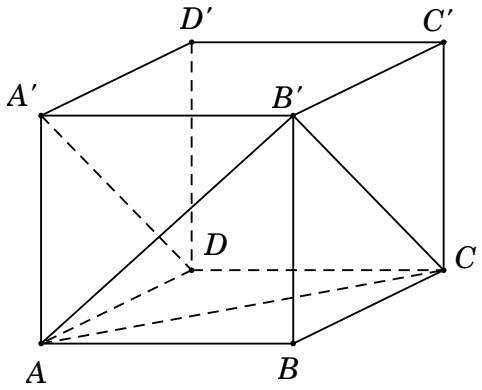
Vì $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình chữ nhật) nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EG}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45^0$ ($ABCD$ là hình vuông).

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là:

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương. Khi đó, tam giác $AB'C$ đều ($AB' = B'C = CA = a\sqrt{2}$) do đó $\widehat{B'CA} = 60^0$.

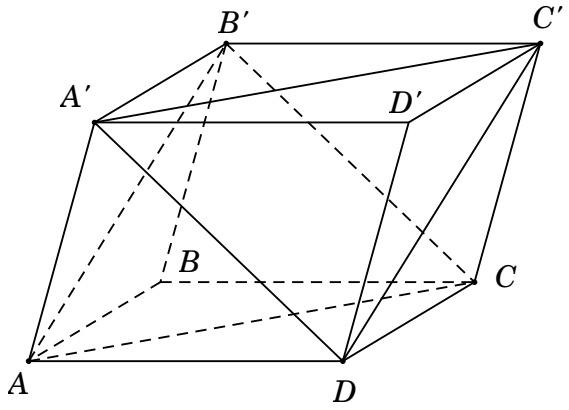
Lại có, DA' song song CB' nên $(AC, DA') = (AC, CB') = \widehat{ACB'} = 60^0.$

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}.$ **B.** $\widehat{DA'C'}.$ **C.** $\widehat{BB'D}.$ **D.** $\widehat{BDB'}.$

Lời giải

Chọn B



Ta có $AC \,//\, A'C'$ ($A'B'CD$ là hình bình hành) mà $\widehat{DA'C'}$ nhọn nên

$(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'}.$

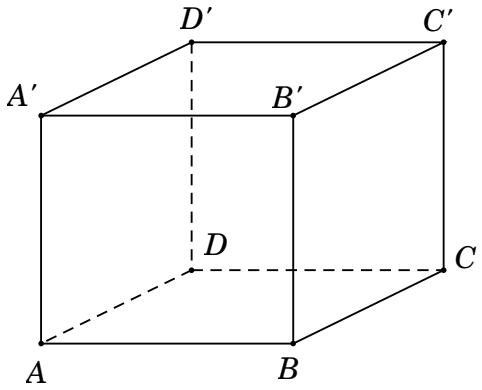
Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định **sai?**

A. Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90^0. **B.** Góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60^0.

C. Góc giữa AD và $B'C$ bằng 45^0. **D.** Góc giữa BD và $A'C'$ bằng 90^0.

Lời giải

Chọn B



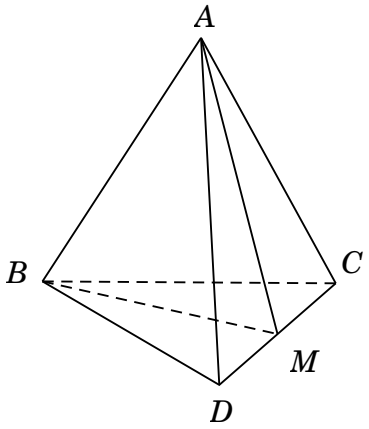
Ta có $(AA',B'D')=(BB',B'D')=\widehat{BB'C}=90^0$. Khẳng định B sai.

Câu 9: Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của CD.

Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

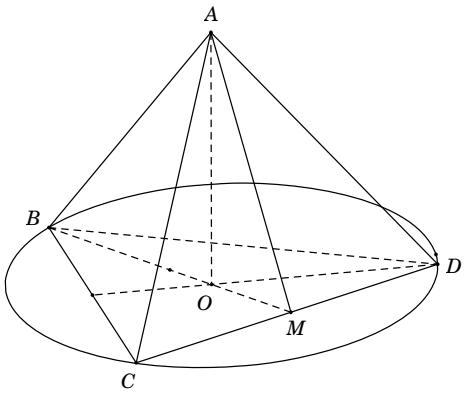
Suy ra $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 90^0.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của CD.

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AM \perp CD, OM \perp CD.$

Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CD}.\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO}\right) = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MO} = \vec{0}.$

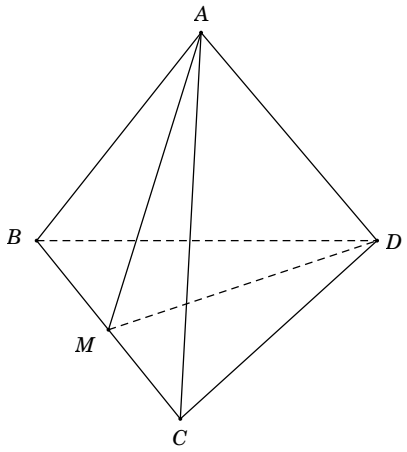
Suy ra $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{CD}$ nên số đo góc giữa hai đường thẳng AO và CD bằng 90^0.

Câu 11: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử cạnh của tứ diện là a.

Tam giác BCD đều $\Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}\right)-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right)$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos 30^\circ-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos 60^\circ$

$=a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{4}$

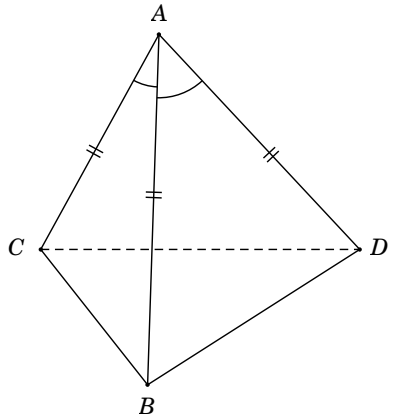
$\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}>0\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\left(AB,DM\right)\Rightarrow\cos\left(AB,DM\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}.$

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 120°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right)-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos 60^\circ-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos 60^\circ.$

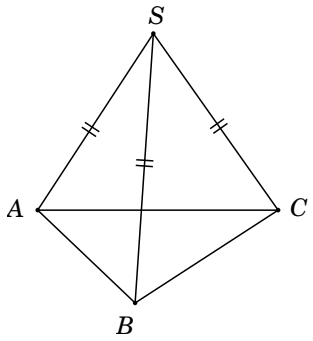
Mà $AC=AD\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=90^\circ$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

A. 120°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SC}.\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)=\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$

$=\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}\right)-\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{SA}\right|.\cos\left(\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}\right)$

$=SC.SB.\cos\widehat{BSC}-SC.SA.\cos\widehat{ASC}.$

Mà $SA=SB=SC$ và $\widehat{BSC}=\widehat{ASC}\Rightarrow\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=0$.

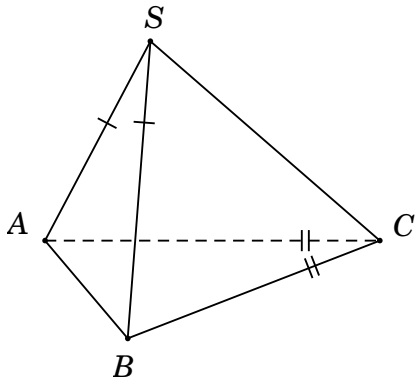
Do đó $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)=90°$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB$ và $CA=CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn D



Xét $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CS}.\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CB}$

$=CS.CA.\cos\widehat{SCA}-CS.CB.\cos\widehat{SCB}$

$=CS.CA.\dfrac{SC^2+CA^2-SA^2}{2SC.CA}-CS.CB.\dfrac{SC^2+CB^2-SB^2}{2SC.CB}$

$=\dfrac{SC^2+CA^2-SA^2}{2}-\dfrac{SC^2+CB^2-SB^2}{2}=0$ (do $SA=SB$ và $CA=CB$)

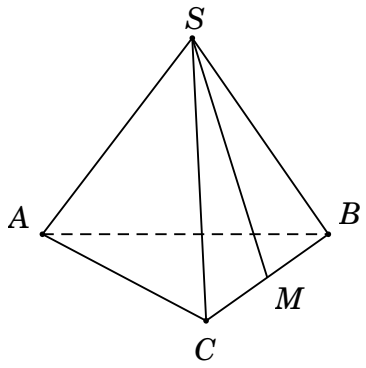
Vậy $SC\perp AB$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=AC$ và $\widehat{SAC}=\widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn D



Xét $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$=\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right)-\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|.\cos\widehat{SAB}$

$=SA.SC.\cos\widehat{ASC}-SA.SB.\cos\widehat{ASB}.\ (1)$

Ta có $\begin{cases}SA \text{ chung}\\ AB=AC\\ \widehat{SAB}=\widehat{SAC}\end{cases}\Rightarrow \Delta SAB=\Delta SAC\ (c-g-c)$.

Suy ra $\begin{cases}SC=SB\\ \widehat{ASC}=\widehat{ASB}\end{cases}.\ (2)$

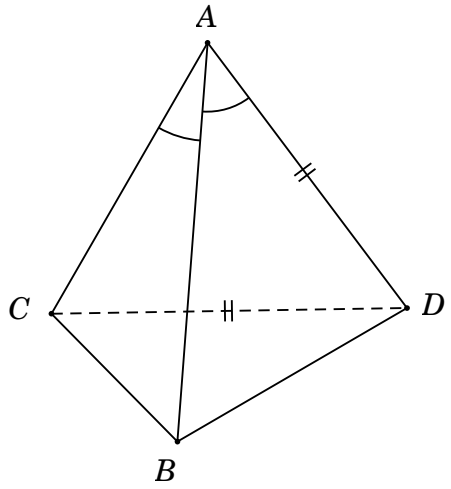
Từ (1) và (2), suy ra $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=0$. Vậy $SA\perp BC$.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=\frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB}=\widehat{DAB}=60°$, $CD=AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\varphi=\frac{3}{4}$. **B.** $\varphi=60°$. **C.** $\varphi=30°$. **D.** $\cos\varphi=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\cos(AB,CD)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{AB.CD}$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right)-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

$=AB.AD.\cos 60^\circ-AB.AC.\cos 60^\circ$

$=AB.AD.\dfrac{1}{2}-AB.\dfrac{3}{2}AD.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}AB.AD=-\dfrac{1}{4}AB.CD.$

Do có $\cos(AB,CD)=\dfrac{\left|-\dfrac{1}{4}AB.CD\right|}{AB.CD}=\dfrac{1}{4}$.

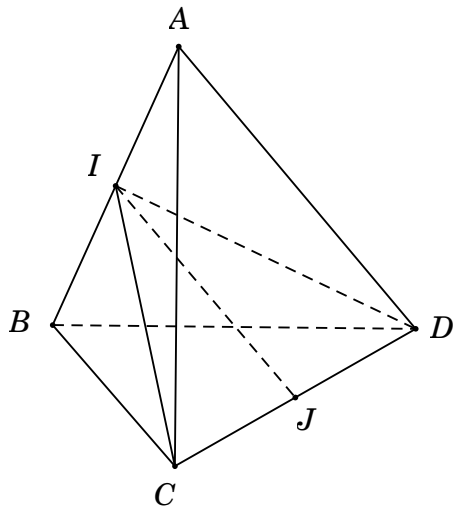
Vậy $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^\circ$, $\widehat{CAD}=90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. 120°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn $CD \Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right).$

Tam giác ABC có $AB=AC$ và $\widehat{BAC}=60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow CI \perp AB$.

Tương tự, ta có ΔABD đều nên $DI \perp AB$.

Ta có $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=0$

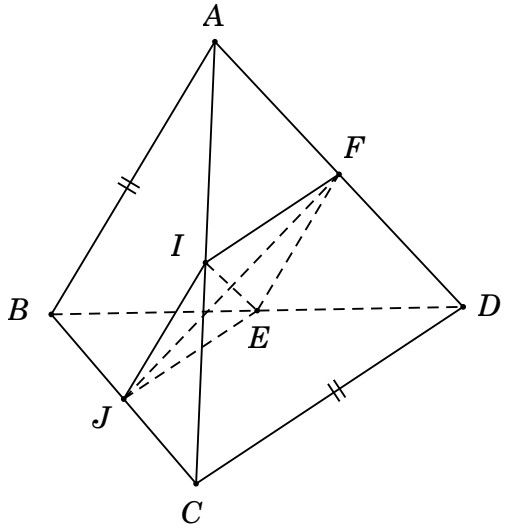
$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IJ}\right)=90°$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE, JF) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có IF là đường trung bình của $\Delta ACD \Rightarrow \begin{cases} IF \parallel CD \\ IF = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

Lại có JE là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow \begin{cases} JE \parallel CD \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} IF = JE \\ IF \parallel JE \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}AB \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$. Mà $AB = CD \Rightarrow IJ = JE$.

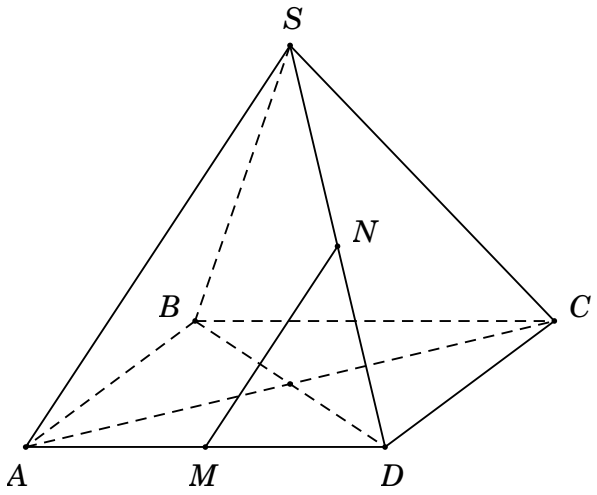
Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE, JF) = 90°$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn C



Do $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

Từ giả thiết ta có MN là đường trung bình của $\Delta DSA \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}$

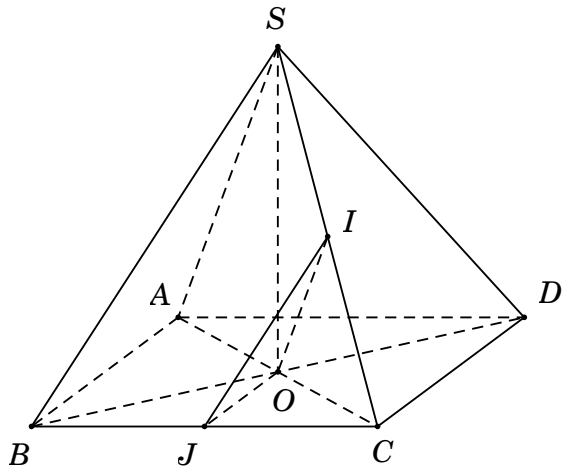
Khi đó $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0 \Rightarrow MN \perp SC \Rightarrow (MN, SC) = 90°$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OJ$ là đường trung bình của ΔBCD.

Suy ra $\begin{cases} OJ \,//\, CD \\ OJ = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

Vì $CD \,//\, OJ \Rightarrow (IJ,CD) = (IJ,OJ)$.

Xét tam giác IOJ, có $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{a}{2} \\ OJ = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{2} \\ IO = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta IOJ$ đều.

Vậy $(IJ,CD) = (IJ,OJ) = \widehat{IJO} = 60°$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và SC.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $AB = BC = CD = DA = a$ nên $ABCD$ là hình thoi cạnh a.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $\Delta CBD = \Delta SBD$ $(c-c-c)$.

Suy ra hai đường trung tuyến tương ứng CO và SO bằng nhau.

Xét tam giác SAC, ta có $SO = CO = \dfrac{1}{2}AC$.

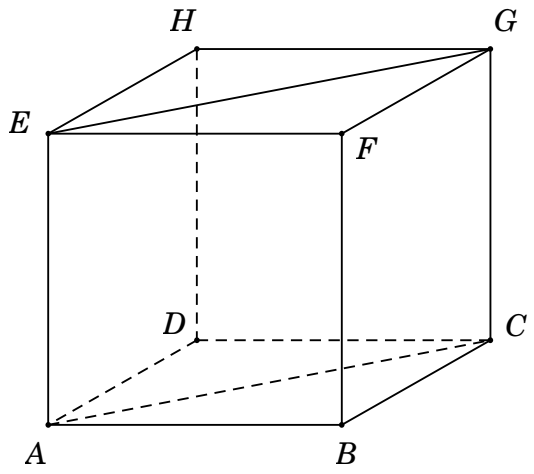
Do đó tam giác SAC vuông tại S (tam giác có đường trung tuyến bằng nửa cạnh đáy). Vậy $SA \perp SC$.

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$.

A. $a^2\sqrt{3}$. **B.** a^2. **C.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Mặt khác $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \perp AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$

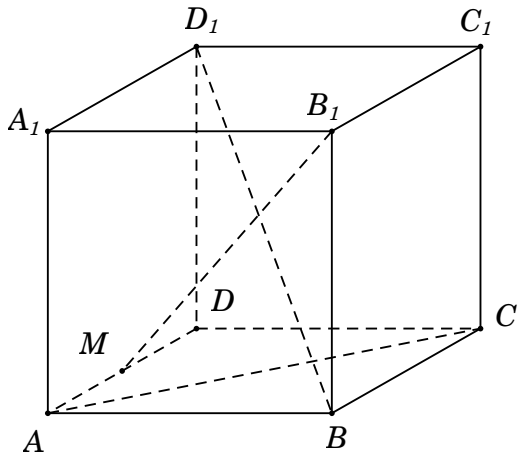
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB^2 + 0 = a^2$.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\frac{3}{4}a^2$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}=\left(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}\right)$

$=\underbrace{\overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BA}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{AD}}_{=0}+\overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}^2+\underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DD_1}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BA}}_{=0}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}+\underbrace{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DD_1}}_{=0}$

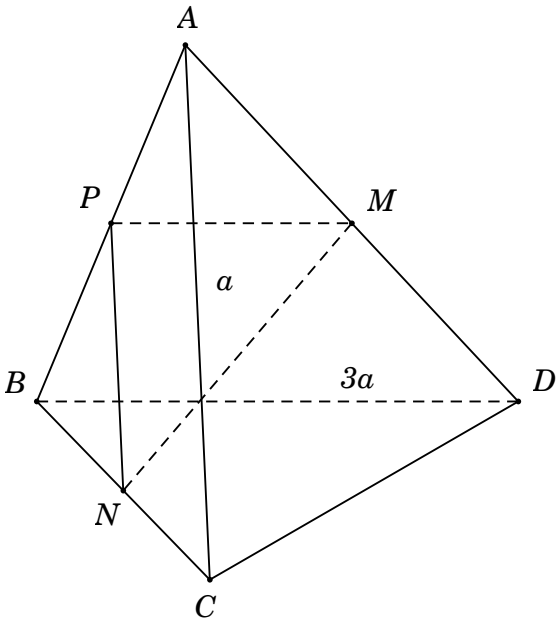
$=\overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=-a^2+a^2+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC=a,\ BD=3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN.

A. $MN=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $MN=\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **C.** $MN=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của $AB \Rightarrow PN, PM$ lần lượt là đường trung bình của tam giác ΔABC và ΔABD. Suy ra $\begin{cases} PN = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2} \\ PM = \frac{1}{2}BD = \frac{3a}{2} \end{cases}$.

Ta có $AC \perp BD \Rightarrow PN \perp PM$ hay tam giác ΔPMN vuông tại P

Do đó $MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

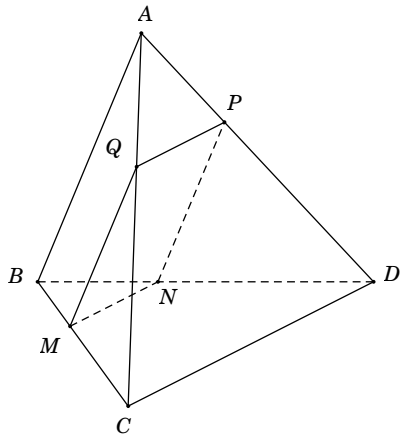
Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} (MNPQ) // AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ // AB.$

Tương tự ta có $MN // CD, NP // AB, QP // CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $MN \perp MQ (do AB \perp CD)$.

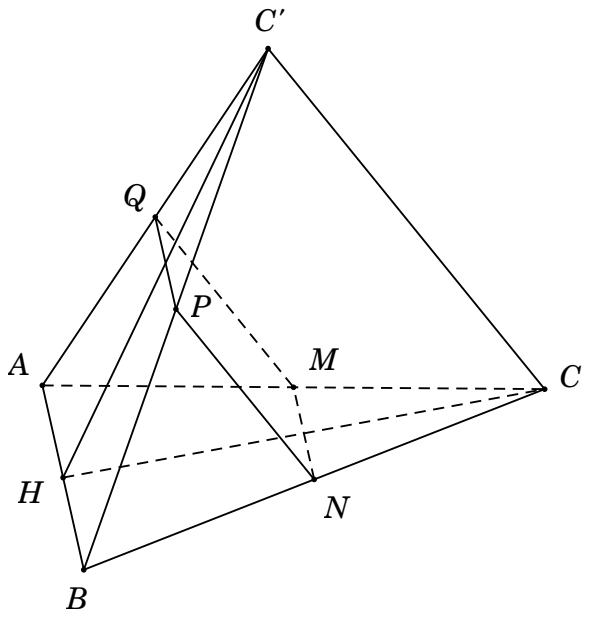
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 26: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Lời giải

Chọn B



Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$

$\Rightarrow \begin{cases} PQ = MN = \dfrac{1}{2}AB \\ PQ // AB // MN \end{cases} \Rightarrow$ $MNPQ$ là hình bình hành.

Gọi H là trung điểm của AB. Vì hai tam giác ABC và ABC' đều nên $\begin{cases} CH \perp AB \\ C'H \perp AB \end{cases}$.

Suy ra $AB \perp (CHC')$. Do đó $AB \perp CC'$.

Ta có $\begin{cases} PQ // AB \\ PN // CC' \Rightarrow PQ \perp PN \\ AB \perp CC' \end{cases}$.

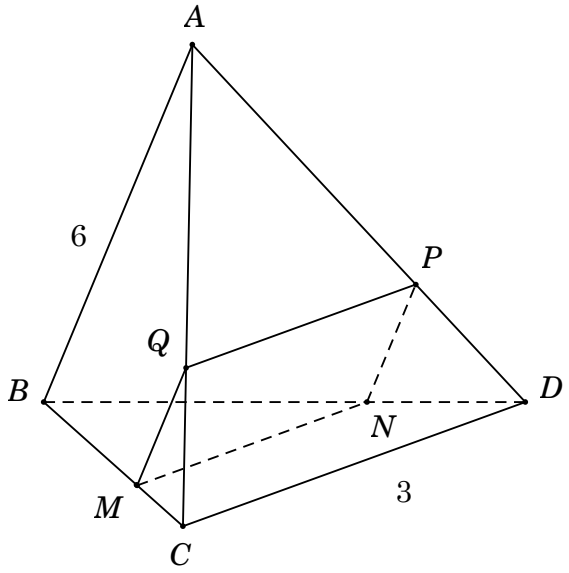
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6$, $CD = 3$, góc giữa AB và CD là $60°$ và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tại M, N, Q. Diện tích $MNPQ$ bằng:

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ//AB.$

Tương tự ta có $MN//CD,\ NP//AB,\ QP//CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $\left(\widehat{AB;CD}\right)=\left(\widehat{QM;MP}\right)=60^0$. Suy ra $S_{MNPQ}=QM.QN.\sin 60^0.$

Ta có $\Delta CMQ\backsim\Delta CBA\Rightarrow\frac{CM}{CB}=\frac{MQ}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MQ=2.$

$\Delta AQN\backsim\Delta ACD\Rightarrow\frac{AQ}{AC}=\frac{QN}{CD}=\frac{2}{3}\Rightarrow QN=2.$

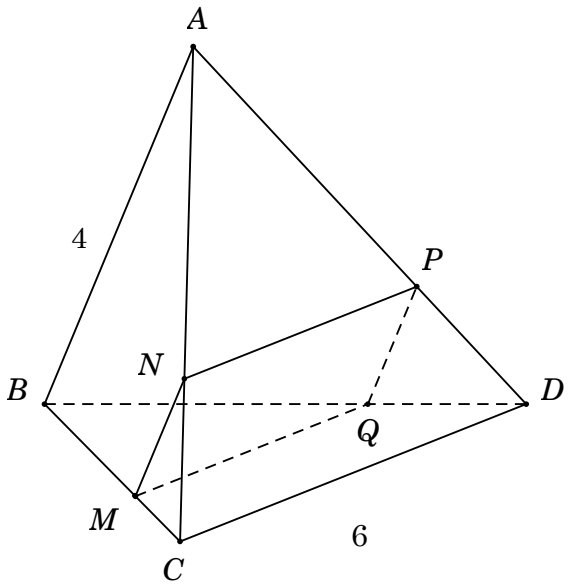
Vậy $S_{MNPQ}=QM.QN.\sin 60^0=2.2.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$

Câu 28: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=4,\ CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là:

A. 5. **B.** 6. **C.** $\frac{17}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MN\end{cases}\Rightarrow MN//AB.$

Tương tự ta có $MQ//CD, NP//CD, QP//AB$. Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $\left(\widehat{AB;CD}\right)=\left(\widehat{MN;MQ}\right)=\widehat{NMQ}=90^0\Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có $\Delta CMN\backsim\Delta CBA\Rightarrow\frac{CM}{CB}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{4}{3};$

$\Delta ANP\backsim\Delta ACD\Rightarrow\frac{AN}{AC}=\frac{NP}{CD}=\frac{2}{3}\Rightarrow MP=4.$

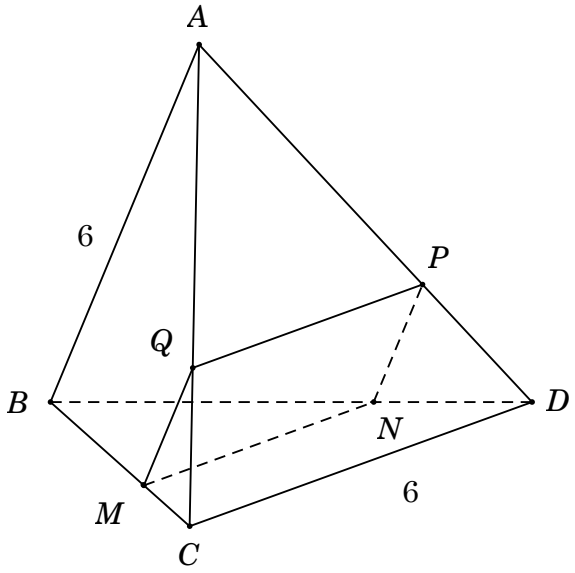
Vậy $S_{MNPQ}=MN.NP=\frac{16}{3}.$

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC\ (0<x<1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC,DB,AD,AC tại M,N,P,Q . Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A



Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ//NP//AB \\ MN//PQ//CD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$. Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ//AB$ nên $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x.AB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = x.BC \Rightarrow BM = (1-x)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1-x \Rightarrow MN = (1-x).CD = 6(1-x)$.

Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$S_{MNPQ} = MN.MQ = 6(1-x).6x = 36.x.(1-x) \le 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = 9$.

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC .

Câu 30: Trong không gian cho tam giác ABC. Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. M là trọng tâm tam giác ABC .

B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

C. M là trực tâm tam giác ABC .

D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Chọn A

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ cố định và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$P = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv G$.

Vậy $P_{\min} = GA^2 + GB^2 + GC^2$ với $M \equiv G$ là trọng tâm tam giác ABC.

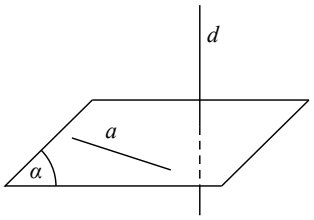
BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α).

Kí hiệu $d \perp (\alpha)$.



2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định lí

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

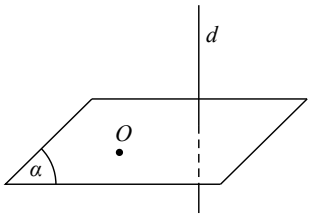
Hệ quả

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

3. Tính chất

Tính chất 1

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

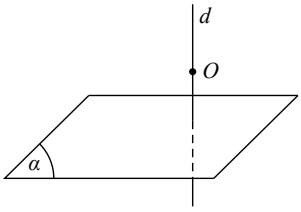


Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng

Người ta gọi mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

Tính chất 2

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

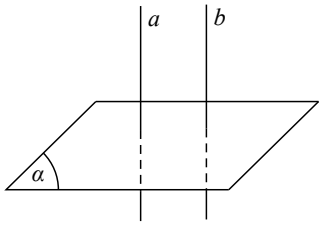


4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.

Tính chất 1

Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

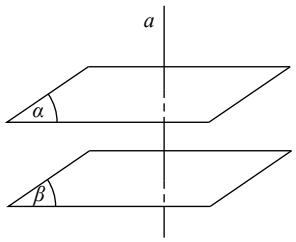
Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



Tính chất 2

Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

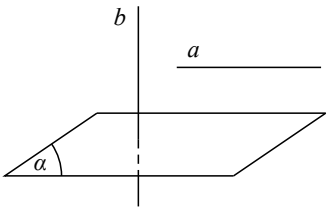
Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Tính chất 3

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.

Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.



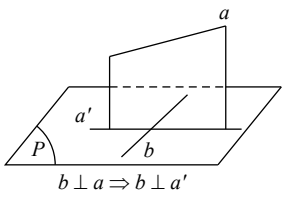
5. Định lí ba đường vuông góc

Định nghĩa

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương vuông góc tới mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

Định lí (Định lí 3 đường vuông góc)

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P). Khi đó điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

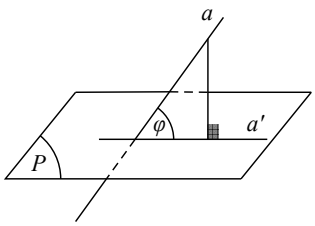


6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa

Nếu đường thẳng $a \perp (P)$ thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90^0.

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).



Chú ý: Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^0 \le \varphi \le 90^0$.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

1. Phương pháp

Ta cần nắm vững các tính chất sau

Tính chất 1

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Tính chất 2

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tính chất 3

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hai đường thẳng a, b và hai mặt phẳng (P), (Q). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left.\begin{array}{l} a//b \\ (P)\perp a \end{array}\right\} \Rightarrow (P)\perp b.$

B. $\left.\begin{array}{l} a\perp b \\ b//(P) \end{array}\right\} \Rightarrow (P)\perp a.$

C. $\left.\begin{array}{l} a\perp b \\ b\perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow (P)//a.$

D. $\left.\begin{array}{l} a\perp (Q) \\ b\perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow (P)//(Q).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

$\left.\begin{array}{l} a//b \\ (P)\perp a \end{array}\right\} \Rightarrow (P)\perp b$ là mệnh đề đúng. Nghĩa là, cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này sẽ vuông góc với đường thẳng kia.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng a, b và hai mặt phẳng (P), (Q). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left.\begin{array}{l} a\perp (P) \\ b\perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a//b.$

B. $\left.\begin{array}{l} a\perp (P) \\ b\perp (P) \\ a\neq b \end{array}\right\} \Rightarrow a//b.$

C. $\left.\begin{array}{l} (P)//(Q) \\ a\perp (P) \end{array}\right\} \Rightarrow a//(Q).$

D. $\left.\begin{array}{l} a//(P) \\ (P)\perp (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow a//(Q).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

- Mệnh đề A sai. Vì khi đó hai đường thẳng a và b có thể song song hoặc trùng nhau. Mệnh đề A chỉ đúng khi a và b phân biệt.
- Mệnh đề B đúng. Thật vậy, ta thấy:

+ Nếu a cắt b tại M. Như vậy, qua điểm M ta vẽ được hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với (P): Vô lí. Vậy a không cắt b.

+ Nếu a chéo b. Lấy điểm N trên a. Qua N vẽ đường thẳng $b'//b$.

Do $b\perp (P)$ nên $b'\perp (P)$. Như vậy từ điểm N ta có hai đường thẳng a và b' cùng vuông góc với (P): Vô lí. Vậy a và b không chéo nhau.

+ Trường hợp a trùng b không xảy ra vì $a\neq b$ (giả thiết).

Vậy $a//b$.

• Mệnh đề C sai. Mệnh đề đúng là $a \perp (Q)$.

• Mệnh đề D sai. Vì lúc này a có thể song song hoặc chứa trong (Q).

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng a, b và hai mặt phẳng (P), (Q). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \\ c \subset (P) \end{array}\right\} \Rightarrow b // (P).$

B. $\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ a \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow b // (P).$

C. $\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ a \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b // (P) \\ b \subset (P) \end{array}\right.$.

D. $\left.\begin{array}{l} a \perp (P) \\ a // (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) // (Q).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

A sai: Lúc này b có thể chứa trong, hoặc cắt, hoặc song song với (P). Mệnh đề chỉ đúng khi $a \perp (P)$.

B sai: Vì lúc này b có thể chứa trong (P). Mệnh đề chỉ đúng khi $b \not\subset (P)$.

D sai: Thật vậy, nếu $(P) // (Q)$ hoặc $(P) \equiv (Q)$ thì do $a \perp (P)$ nên $a \perp (Q)$: Vô lí (Trái với giả thiết $a // (Q)$).

Ví dụ 4: Cho $\begin{cases} a, b, c \subset (\alpha) \\ c \perp a,\ c \perp b \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a cắt b. **B.** $a // b$. **C.** $a \equiv b$.

D. $\left[\begin{array}{l} a // b \\ a \equiv b \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Vì a, b, c đồng phẳng và $c \perp a,\ c \perp b$ nên $a // b$ hoặc $a \equiv b$.

Ví dụ 5: Cho $\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ c // (\alpha) \\ c \perp a,\ c \perp b \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a cắt b. **B.** $a // b$. **C.** $\left[\begin{array}{l} a // b \\ a \equiv b \end{array}\right.$.

D. $a \equiv b$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ví dụ 6: Cho $\begin{cases} a,b \subset (\alpha) \\ c \text{ cắt } (\alpha) \\ c \perp a,\ c \perp b \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a cắt b. **B.** $a // b$. **C.** $\left[\begin{array}{l} a // b \\ a \equiv b \end{array}\right.$.

D. $a \equiv b$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

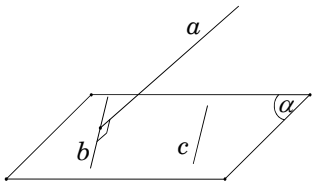
B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề **C** sai vì thiếu điều kiện "cắt nhau" của hai đường thẳng nằm trong (α). Ví dụ: đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b và c nằm trong (α) nhưng b và c song song với nhau thì khi đó a chưa chắc vuông góc với (α).

Câu 2: Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng (P), đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp (P) nếu:

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (P).

B. vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp (P).

C. vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp (P).

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P).

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P).(Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng).

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

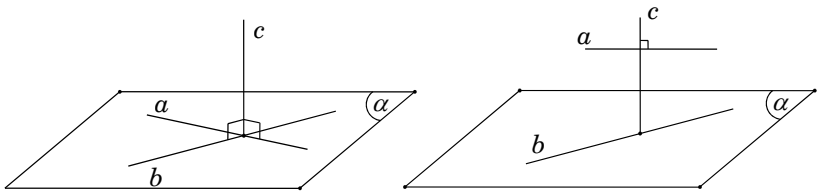
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Lời giải

Chọn B



Mệnh đề ở câu B sai vì: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể cắt nhau, chéo nhau.

Câu 4: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.

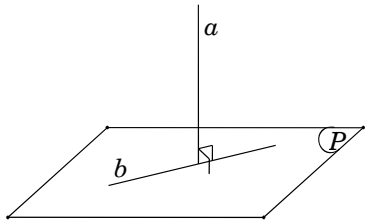
B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.

Lời giải

Chọn D



`Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P).

Câu 5: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

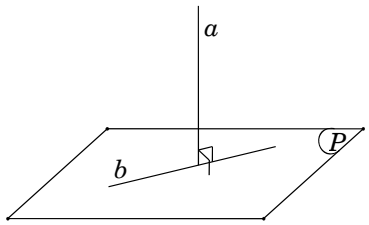
B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$. **D.** Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

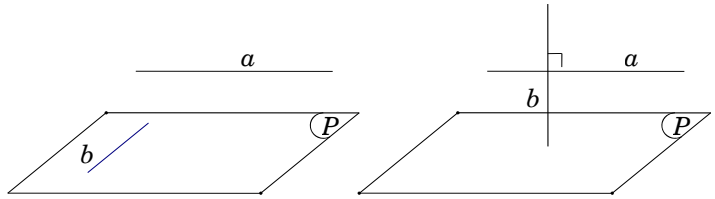
Lời giải

Chọn B

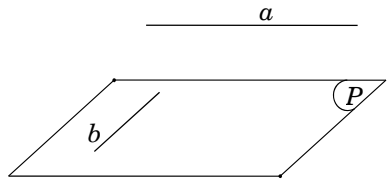
Mệnh đề A sai vì b có thể nằm trong (P).



Mệnh đề C sai vì b có thể cắt (P) hoặc b nằm trong (P).



Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P).



Câu 6: Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b \parallel (\alpha)$ thì $a \perp b$.

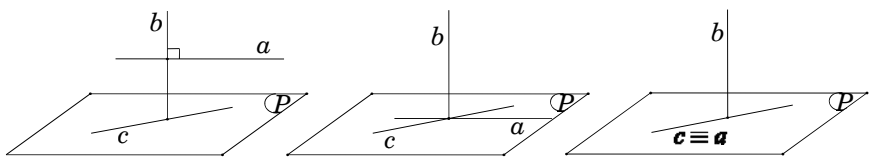
C. Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$, $b \perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a,c).

Lời giải

Chọn D

Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$ hoặc a cắt c hoặc a trùng c hoặc a chéo c.



Câu 7: Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

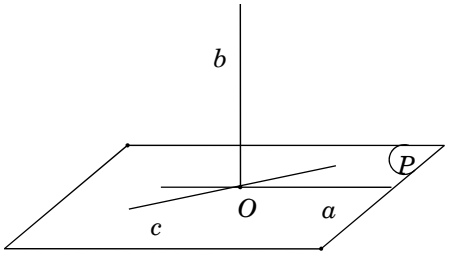
B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

C. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề C sai vì qua một điểm O cho trước có **vô số** đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

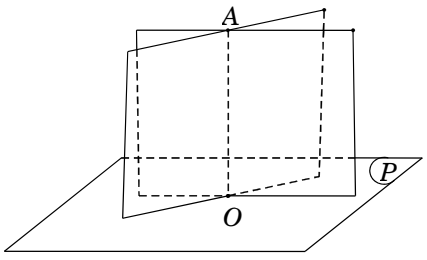
B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn D



Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

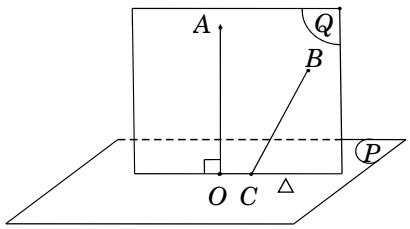
C. Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β).

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

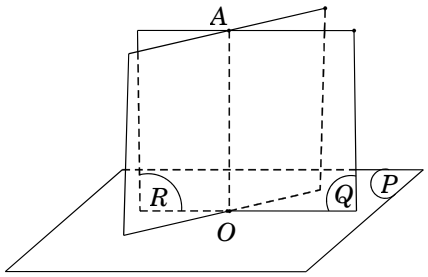
Lời giải

Chọn D

Mệnh đề A sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.



Mệnh đề B sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.



Mệnh đề C sai vì đường thẳng AB có thể không vuông góc với giao tuyến.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P).

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề B sai vì hai góc này phụ nhau.

Mệnh đề C sai vì (P) có thể trùng (Q).

Mệnh đề D sai vì a có thể trùng b.

Dạng 2. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Từ đó suy ra đường thẳng vuông góc với đường thẳng

1. Phương pháp

Để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ta có thể sử dụng một ttrong các cách sau

1. $\begin{cases} a \perp b \subset (\alpha) \\ a \perp c \subset (\alpha) \Rightarrow a \perp (\alpha) \\ b \cap c = A \end{cases}$ (a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau)
2. $\begin{cases} a // b \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$ (a song song với một đường thẳng b vuông góc (P))
3. $\begin{cases} a \perp (\beta) \\ (\alpha) // (\beta) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\alpha)$
4. $AB \perp (\alpha) = \{M \mid MA = MB\}$, (α) là mặt phăng trung trực của AB
5. $\begin{cases} \Delta ABC \subset (\alpha) \\ MA = MB = MC \Rightarrow MO \perp (\alpha) \\ OA = OB = OC \end{cases}$

Để chứng minh đường thẳng vuông góc với đường thẳng ngoài 4 cách đã biết ở bài hai đường thẳng vuông góc ta có thểm sử dụng thêm các cách sau

1. $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$
2. $\begin{cases} a // (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$
3. $\begin{cases} a' = hch_{\alpha}(a) \\ b \subset \alpha \end{cases} \Rightarrow b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$
4. $\begin{cases} \Delta ABC, a \perp AB \\ \qquad\quad a \perp AC \end{cases} \Rightarrow a \perp BC$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện SABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Kẻ BE vuông góc với AC $(E \in AC)$. Khi đó:

A. $BE \subset (SBC)$.

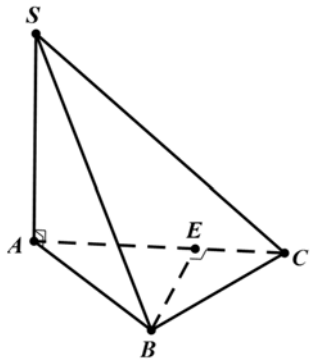
B. $BE \subset (SAB)$.

C. $BE \perp (SAC)$.

D. BE là đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C



Do $SA \perp BE, BE \perp AC \Rightarrow BE \perp (SAC)$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC vuông tại C. Kẻ $SA \perp (ABC)$, $AE \perp SC$ và $AF \perp SB$. Khi đó:

A. $AF // BC$.

B. $AE \subset (SBC)$.

C. $AF \perp (SBC)$.

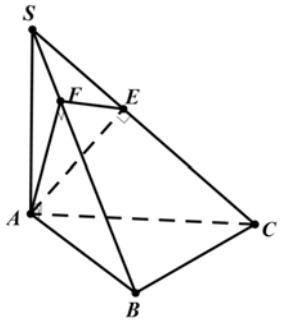
D $SB \perp (AEF)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AE \ (1)$$



Theo giả thiết: $SC \perp AE \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp SB$ mà $AF \perp SB \Rightarrow SB \perp (AEF)$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$.

Khi đó:

A. SO là đường cao của hình chóp.

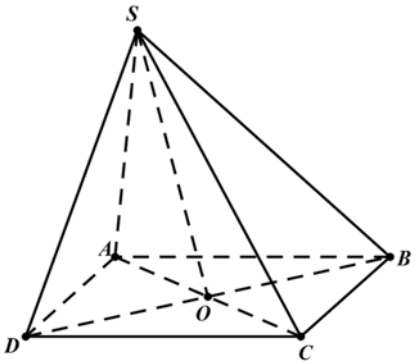
B. Tam giác SBD vuông cân.

C. Tam giác SAC vuông cân.

D. $SO = \frac{1}{2}BD.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A



O là tâm hình thoi $\Rightarrow$ O là trung điểm của AC, BD mà mỗi $\Delta SAC, \Delta SBD$ cân

$\Rightarrow SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow$ SO là đường cao hình chóp.

Lưu ý: Tam giác $\Delta SAC, \Delta SBD$ chỉ cân chứ không vuông

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD.$ Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và BC thì

A. $IJ \perp (SAD).$

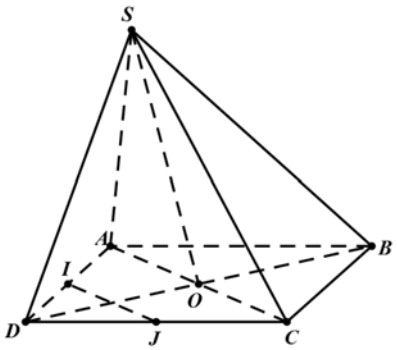
B. $IJ \perp (SCD).$

C. $IJ \perp (SAC).$

D. $IJ \perp (SBD).$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D



$\Delta SAC, \Delta SBD$ cân $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SO \perp IJ$

$IJ // AC \Rightarrow IJ \perp BD$

$\Rightarrow IJ \perp (SBD)$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SB = b$ và tam giác SAC cân tại S. Trên cạnh AB lấy một điểm M với $AM = x(0 < x < a)$. Mặt phẳng (α) qua M song song với AC và SB cắt BC, SB, SA lần lượt tại N, P, Q. Giá trị x để S_{MNPQ} lớn nhất bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Phân tích: Trước hết ta phải xác định được MNPQ là hình chữ nhật

Vì $(\alpha)//SB$ và $(\alpha)//AC$ nên MNPQ là hình bình hành.

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp SO \ (\Delta ACS \text{ cân}) \\ AC \perp BD \ (\text{đường chéo hình vuông}) \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (SBD)$$

$\Rightarrow AC \perp SB$, mà $MQ // SB \Rightarrow MN \perp MQ$

Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải

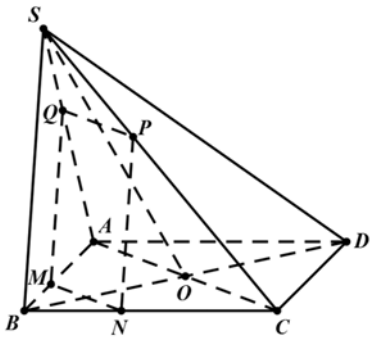
ĐÁP ÁN C

Ta có: MN // AC

$$\Rightarrow MN = \frac{BM}{BA}.AC = \frac{a-x}{a}.a\sqrt{2} = (a-x)\sqrt{2}$$

ΔSAB có: MQ // SB $\Rightarrow MQ = \frac{AM}{AB}.SB = \frac{bx}{a}$

$$S_{MNPQ} = MN.MQ = \frac{b\sqrt{2}}{a}(a-x)x$$



Ta có: $\frac{(a-x)+x}{2} \geq \sqrt{(a-x)x} \Rightarrow \frac{a^2}{4} \geq (a-x)x$

$\Rightarrow S_{MNPQ}$ lớn nhất khi và chỉ khi $a - x = x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

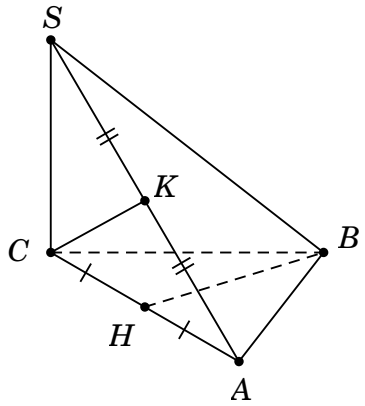
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $CH \perp AK$. **B.** $CH \perp SB$. **C.** $CH \perp SA$. **D.** $AK \perp SB$.

Lời giải

Chọn D



Vì H là trung điểm của AB , tam giác ABC cân suy ra $CH \perp AB.$

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$ mà $CH \perp AB$ suy ra $CH \perp (SAB).$

Mặt khác $AK \subset (SAB) \longrightarrow CH$ vuông góc với các đường thẳng $SA, SB, AK.$

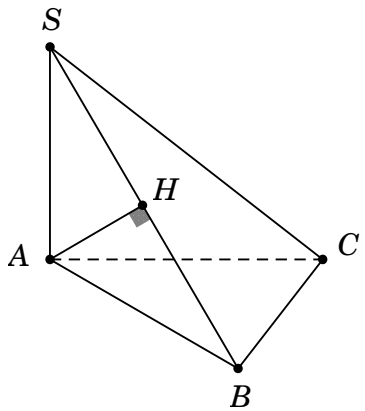
Và $AK \perp SB$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi tam giác SAB cân tại $S.$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B,$ cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác $SAB.$ Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $SA \perp BC.$ **B.** $AH \perp BC.$ **C.** $AH \perp AC.$ **D.** $AH \perp SC.$

Lời giải

Chọn C



Theo bài ra, ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC.$

Tam giác ABC vuông tại $B,$ có $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$

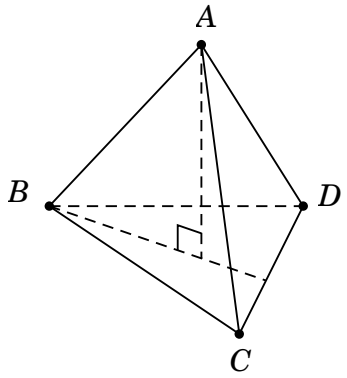
Nếu $AH \perp AC$ mà $SA \perp AC$ suy ra $AC \perp (SAH) \Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $CD \perp BD$. **B.** $AC = BD$. **C.** $AB = CD$. **D.** $AB \perp CD$.

Lời giải

Chọn D



Vì AH vuông góc với $mp(BCD)$ suy ra $AH \perp CD$. (1)

Mà H là trực tâm của tam giác $BCD \Rightarrow BH \perp CD$. (2)

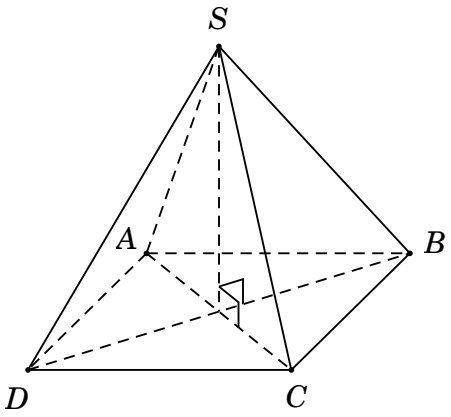
Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp (SAC)$. **B.** $CD \perp AC$. **C.** $SO \perp (ABCD)$. **D.** $CD \perp (SBD)$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S mà O là trung điểm $AC \Rightarrow SO \perp AC$.

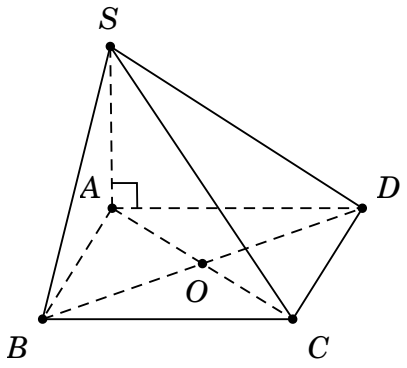
Tương tự, ta cũng có $SO \perp BD$ mà $AC \cap BD = O \subset (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $SA \perp BD$. **B.** $SC \perp BD$. **C.** $SO \perp BD$. **D.** $AD \perp SC$.

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với $mp\,(ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.

Mà $ABCD$ là hình thoi tâm $O \Rightarrow AC \perp BD$ nên suy ra $BD \perp (SAC)$.

Mặt khác $SO \subset (SAC)$ và $SC \subset (SAC)$ suy ra $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp SC \end{cases}$.

Và AD, SC là hai đường thẳng chéo nhau.

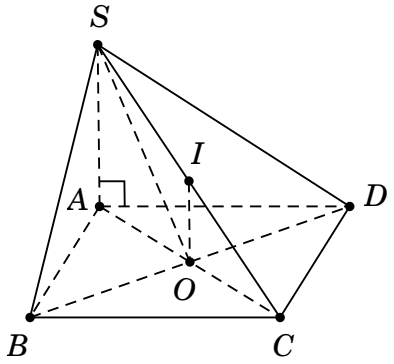
Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Đường thẳng SA cuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $IO \perp (ABCD)$. **B.** $BC \perp SB$.

C. Tam giác SCD vuông ở D. **D.** (SAC) là mặt phẳng trung trực của BD.

Lời giải

Chọn D



Vì O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC suy ra OI là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow OI // SA$ mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp (ABCD).$

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \perp AB$ mà $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp SB.$

Tương tự, ta có được $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \quad (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD.$

Nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của $BD \longrightarrow BD \perp AC$: điều này không thể xảy ra vì $ABCD$ là hình chữ nhật.

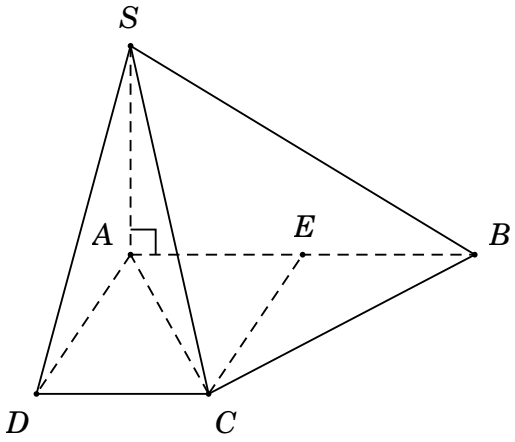
Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. $CE \perp (SAB).$ **B.** $CB \perp (SAC).$

C. Tam giác SDC vuông tại D. **D.** $CE \perp (SDC).$

Lời giải

Chọn D



Từ giả thết suy ra $ADCE$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} CE \perp AB \\ CE = AD = a \end{cases}.$

Ta có $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \ (\text{do } SA \perp ABCD) \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB)$. Do đó A đúng.

Vì $CE = AD = a \Rightarrow CE = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $C \Rightarrow CB \perp AB$. Kết hợp với $CB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) nên suy ra $CB \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \ (\text{do } SA \perp ABCD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$. Do đó C đúng.

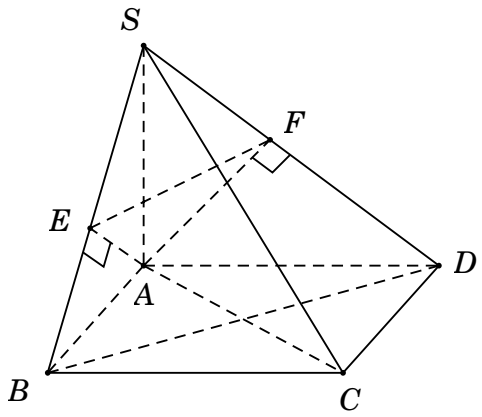
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D là đáp án sai.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $SC \perp (AFB)$. **B.** $SC \perp (AEC)$. **C.** $SC \perp (AED)$. **D.** $SC \perp (AEF)$.

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.

Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$ mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

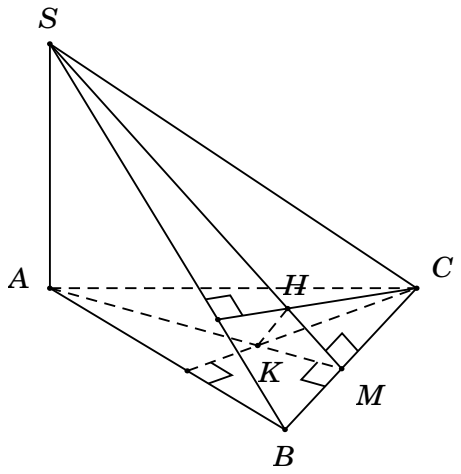
Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.

Câu 19: Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $BC \perp (SAH)$. **B.** $SB \perp (CHK)$. **C.** $HK \perp (SBC)$. **D.** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn D



- Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$. Do đó A đúng.

- Ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$.

Mặt khác có $CH \perp SB$. Từ đó suy ra $SB \perp (CHK)$. Do đó B đúng.

- Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \\ SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Do đó C đúng.

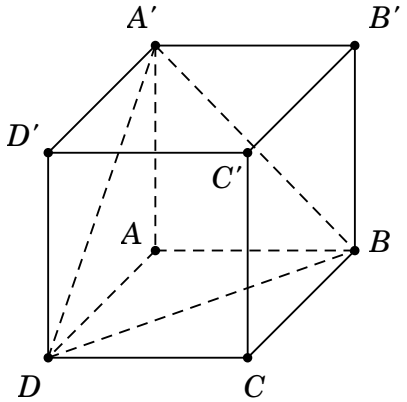
Dùng phương pháp lại trừ, suy ra D sai.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$. **B.** $(A'DC')$. **C.** $(A'CD')$. **D.** $(A'B'CD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AA'D'A$ là hình vuông suy ra $AD' \perp A'D$. (1)

Và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương suy ra $AB \perp A'D$. (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'.$

Lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ mà $AA' \perp BD$ $(AA' \perp (ABCD))$

$\Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC'$. Kết hợp với $A'D \perp AC'$ suy ra $AC' \perp (A'BD).$

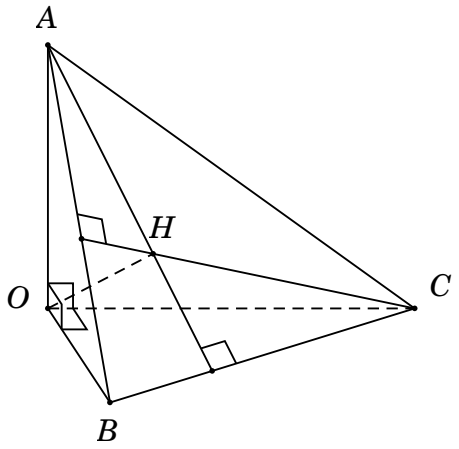
Câu 21: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $OA \perp BC.$ **B.** $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$

C. H là trực tâm $\triangle ABC.$ **D.** $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2.$

Lời giải

Chọn D



- $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$ Do đó A đúng. (1)

- Gọi $I = AH \cap BC.$

Theo giả thiết ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp OI.$

Tam giác vuông $BOC,$ ta có $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$

Tam giác vuông $AOI,$ ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$ Do đó B đúng.

- Từ chứng minh trên $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp AI.$ (3)

Gọi $J = BH \cap AC.$ Chứng mình tương tự ta có $AC \perp BJ$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra H là trực tâm $\triangle ABC.$ Do đó C đúng.

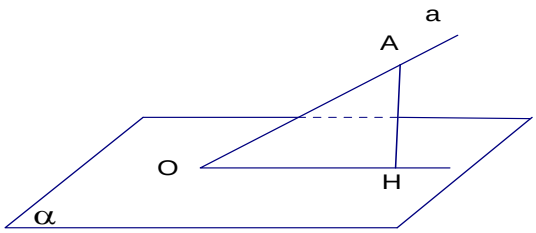
Vậy D là đáp án sai.

Dạng 3. Xác định góc – hình chiếu – tính độ dài

1. Phương pháp

- Bước 1: Tìm giao điểm O của a với α.
- Bước 2: Chọn $A \in a$ và dựng $AH \perp \alpha$, với $H \in \alpha$.

Khi đó: $\widehat{AOH} = \left(\widehat{a,\alpha}\right)$



- Bước 3: Tính số đo của $\widehat{AOH}$ dựa trên các hệ thức lượng trong tam giác.

Các trường hợp đặc biệt

- $a \perp (\alpha) \Rightarrow \left[\widehat{a,(\alpha)}\right] = 90^0$
- $\begin{bmatrix} a // (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\widehat{a,(\alpha)}\right] = 0^0$

Chú ý: Nếu $\left[\widehat{a,(\alpha)}\right] = \varphi$ thì $0 \le \varphi < 90^0$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện SABC có $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$, $AB = a\sqrt{3}$, tam giác SBC cân tại S.

a) Góc α giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (ABC) là

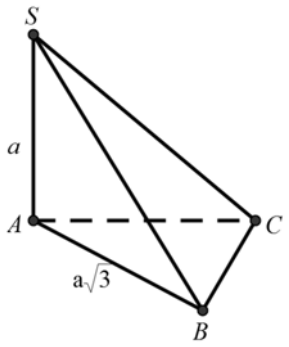
A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

b) Góc β giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (ABC) là

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Hướng dẫn giải

Xác định góc α và β. Ta có:



$SA \perp (ABC)$

$\Rightarrow \begin{cases} AB \text{ là hình chiếu của SB trên (ABC)} \\ AC \text{ là hình chiếu của SC trên (ABC)} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \widehat{SBA} \\ \beta = \widehat{SCA} \end{cases}$.

a) ĐÁP ÁN A

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại A. Do đó:

$\tan\alpha = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30°.$

b) ĐÁP ÁN B

$\Delta SAB: SB^2 = SA^2 + AB^2 = a^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2 = 4a^2$

Do đó: $SB = 2a \Rightarrow SC = SB = 2a$

Mặt khác: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại A

$\Rightarrow \sin\beta = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30°.$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a$.

a) Góc α giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD) là

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

b) Góc β giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (ABCD) là

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

c) Góc γ giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) là

A. 30°. **B.** 60°. **C.** $\gamma = 45°$. **D.** 90°.

Hướng dẫn giải

Xác định góc α và β. Ta có:

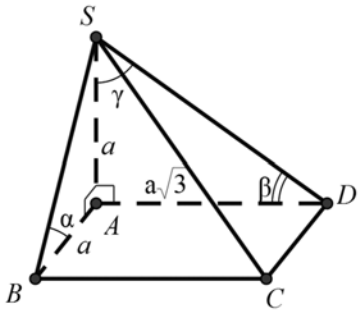
$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} AB \text{ là hình chiếu của } SB \text{ trên } (ABCD) \\ AD \text{ là hình chiếu của } SD \text{ trên } (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \widehat{SBA} \\ \beta = \widehat{SDA} \end{cases}$$

a) ĐÁP ÁN C

Góc α giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD) là $\widehat{SBA}$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại A

$\Rightarrow \widehat{SBA} = \alpha = 45°.$



b) ĐÁP ÁN A

Góc β giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (ABCD) là $\widehat{SDA}$

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại A

$\Rightarrow \tan\beta = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 30°.$

c) ĐÁP ÁN B

$DA \perp (SAB) \Rightarrow$ SA là hình chiếu của SD trên (SAB) $\Rightarrow \gamma = \widehat{ASD}$

ΔSAD vuông tại A $\Rightarrow \tan\gamma = \dfrac{AD}{SA} = \sqrt{3} \Rightarrow \gamma = 60°.$

Ví dụ 3: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại A, $BC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$ và $\cos\widehat{BA'C} = \dfrac{5}{6}$. Góc giữa đường thẳng A'B và mặt phẳng (A A'C'C) bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Hướng dẫn giải

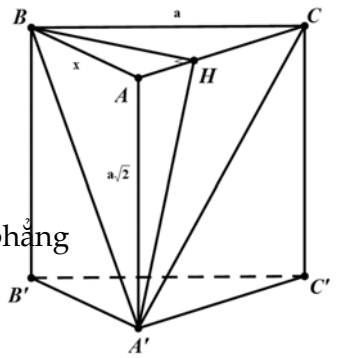
ĐÁP ÁN A

Đặt $AB = x$ thì $A'B^2 = A'C^2 = x^2 + 2a^2$

Áp dụng định lí côsin trong $\Delta A'BC$, ta có:

$$\cos\widehat{BA'C} = \frac{A'B^2 + A'C^2 - BC^2}{2A'B.A'C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4a^2 - a^2}{2\left(x^2 + 2a^2\right)} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = a$$



Kẻ $BH \perp AC$, khi đó $BH \perp (AA'C'C)$

Suy ra góc giữa đường thẳng A'B và mặt phẳng (AA'C'C) là góc $\widehat{BA'H}$.

Trong tam giác vuông A'BH có

$$\sin\widehat{BA'H} = \frac{BH}{A'B} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BA'H} = 30°.$$

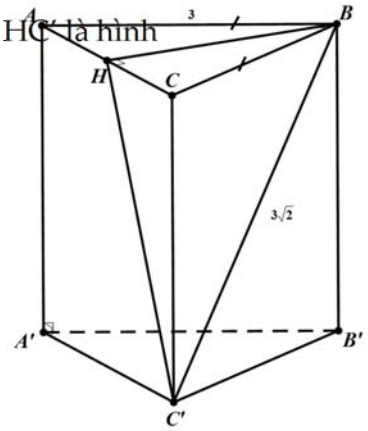
Ví dụ 4: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $AB = 3\text{cm}$, $BC' = 3\sqrt{2}\text{cm}$. Góc hợp bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng (ACC'A') bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Gọi H là trung điểm của cạnh AC, suy ra HC là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng (ACC'A')



Do đó $\left(\widehat{BC',(ACC'A')}\right) = \left(\widehat{BC',HC'}\right)$

Ta có tam giác BHC' vuông tại H, cạnh $BH = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

Ta có $\sin\widehat{HC'B} = \dfrac{BH}{BC'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HC'B} = 30°.$

Vậy $\left(\widehat{BC',(ACC'A')}\right) = 30°.$

Ví dụ 5: Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′ có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{A}=60°$. Chân đường vuông góc hạ từ B′ xuống mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm của hai đường chéo của đáy ABCD. Cho $BB'=a$. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Tính góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy.

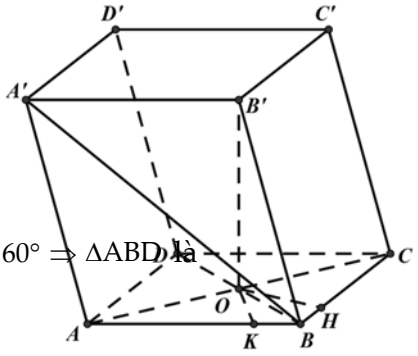
Gọi $O=AC\cap BD$. Theo giả thiết ta có $B'O\perp(ABCD)$

$\begin{cases}B'B\cap(ABCD)=B\\B'O\perp(ABCD),O\in(ABCD)\end{cases}$

$\Rightarrow$ Hình chiếu B′B trên (ABCD) là OB

$\Rightarrow\left(B'B,(ABCD)\right)=(B'B,BO)=\widehat{B'BO}$

Tam giác ABD có $AB=AD=a$, $\widehat{BAD}=60°\Rightarrow\Delta ABD$ là tam giác đều $\Rightarrow OB=\dfrac{a}{2}$



Trong tam giác vuông B′OB: $\cos\widehat{B'OB}=\dfrac{OB}{BB'}=\dfrac{\frac{a}{2}}{a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{B'OB}=60°$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh bằng 4a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tam giác SAB có diện tích bằng $\dfrac{8a^2\sqrt{6}}{3}$. Côsin của góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{19}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$. **C.** $\dfrac{6}{25}$.

D. $\dfrac{19}{25}$.

Hướng dẫn giải

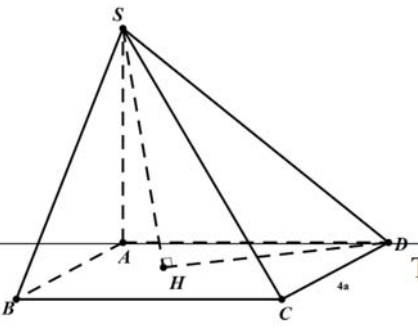
ĐÁP ÁN A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên mặt phẳng (SBC)

$\Rightarrow\left(\widehat{SD;(SBC)}\right)=\widehat{HSD}\Rightarrow\cos\left(\widehat{SD;(SBC)}\right)=\cos\widehat{DSH}=\dfrac{SH}{SD}$

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}SA.AB=\dfrac{1}{2}SA.4a=\dfrac{8a^2\sqrt{6}}{3}\Rightarrow SA=\dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$

$V_{D.SBC}=\dfrac{1}{3}DH.S_{SBC}$ và



$$V_{D.SBC} = V_{S.BCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{BCD}$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{4a\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2}.4a.4a = \frac{32a^3\sqrt{6}}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}DH.S_{SBC} = \frac{32a^3\sqrt{6}}{9} \Rightarrow DH = \frac{32a^3\sqrt{6}}{3S_{SBC}}$$

Từ $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2}BC.SB = \frac{1}{2}.4a.SB = 2a.SB$

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = \left(\frac{4a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 16a^2 = \frac{80a^2}{3} \Rightarrow SB = a\sqrt{\frac{80}{3}} \Rightarrow S_{SBC} = 2a^2\sqrt{\frac{80}{3}}$$

Thế vào (1) $\Rightarrow DH = \frac{32a^3\sqrt{6}}{3.2a^2\sqrt{\frac{80}{3}}} = \frac{4a\sqrt{10}}{5}$

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 = \left(\frac{4a\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 16a^2 = \frac{80a^2}{3} \Rightarrow SD = a\sqrt{\frac{80}{3}}$$

$$\Rightarrow SH^2 = SD^2 - HD^2 = \frac{80a^2}{3} - \left(\frac{4a\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{304a^2}{15}$$

$$\Rightarrow SA = a\sqrt{\frac{304}{15}} \Rightarrow \cos\left(\widehat{SD;(SBC)}\right) = \frac{SH}{SD} = \frac{a\sqrt{\frac{304}{15}}}{a\sqrt{\frac{80}{3}}} = \frac{\sqrt{19}}{5}.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của $AB, BC, SB.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $(IJK)//(SAC).$

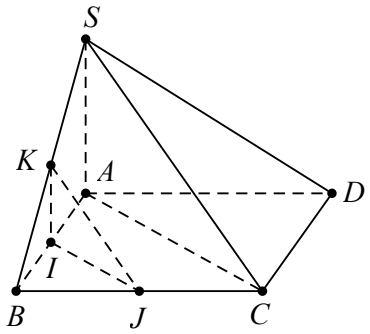
B. Góc giữa SC và BD bằng $60^0.$

C. $BD \perp (IJK).$

D. $BD \perp (SAC).$

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác $SBC,$ có $\frac{BK}{BS}=\frac{BJ}{BC}=\frac{1}{2}$ suy ra JK song song với SC $(1).$

Tam giác $SAB,$ có $\frac{BI}{BA}=\frac{BK}{BS}=\frac{1}{2}$ suy ra IK song song với SA $(2).$

Từ $(1),(2)$ suy ra $mp(IJK)//mp(SAC)$ $(*).$

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow BD\perp AC$ mà $SA\perp BD$ suy ra $BD\perp(SAC).$

Kết hợp với $(*),$ ta được $BD\perp(IJK).$ Vậy góc giữa hai đường thẳng SC, BD bằng $90^0.$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, BD đôi một vuông góc với nhau. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBD}.$

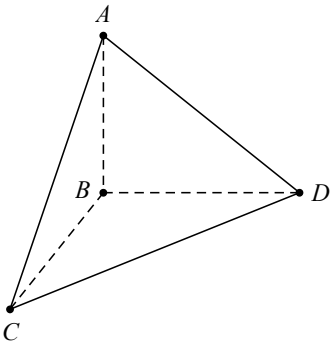
B. Góc giữa AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}.$

C. Góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{ADB}.$

D. Góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CBA}.$

Lời giải

Chọn B



Dựa vào đáp án, ta thấy rằng:

□ **A sai**, vì $\begin{cases}CB\perp BD\\CB\perp BA\end{cases}\Rightarrow CB\perp(ABD)\Rightarrow B$ là hình chiếu của C trên $mp(ABD).$

Suy ra góc giữa CD và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.

□ **B đúng**, vì $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow B$ là hình chiếu của A trên $mp(BCD)$.

Suy ra góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

□ **C sai**, vì $\begin{cases} BD \perp BA \\ BD \perp BC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ABC) \Rightarrow B$ là hình chiếu của D trên $mp(ABC)$.

Suy ra góc giữa AD và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{DAB}$.

□ **D sai**, vì B là hình chiếu của C trên $mp(ABD)$ suy ra góc giữa AC và mặt phẳng (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. H là hình chiếu của O trên (ABC). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. H là trung điểm của cạnh AB.

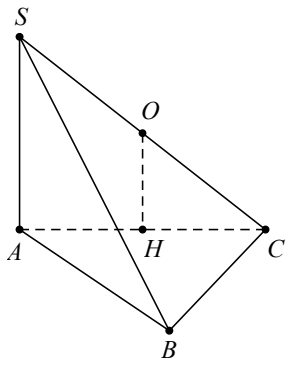
B. H là trung điểm của cạnh BC.

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. H là trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải

Chọn C



Ta có SA vuông góc với $mp(ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $AB \perp BC$ suy ra $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow$ tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow O$ là trung điểm của SC.

Theo bài ra, ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \,//\, SA \Rightarrow H$ là trung điểm của AC.

Mà tam giác ABC vuông tại B nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác nhọn, cạnh bên $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC), khi đó

A. H là trực tâm của tam giác ABC.

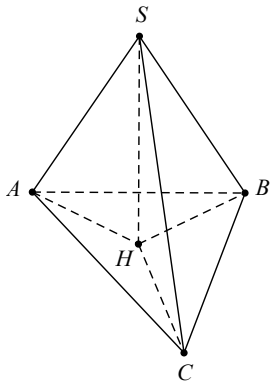
B. H là trọng tâm của tam giác $ABC.$

C. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC.$

D. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC.$

Lời giải

Chọn C



Vì H là hình chiếu vuông góc của S trên $mp\left(ABC\right)$ nên ta có

- Tam giác SAH vuông tại $H,$ có $SA^2=AH^2+SH^2.$
- Tam giác SBH vuông tại $H,$ có $SB^2=BH^2+SH^2.$
- Tam giác SCH vuông tại $H,$ có $SC^2=CH^2+SH^2.$

Kết hợp điều kiện $SA=SB=SC$ suy ra $HA=HB=HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC.$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC}=120^0,\widehat{CSA}=60^0,\widehat{ASB}=90^0$ và $SA=SB=SC.$ Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABC),$ khi đó

A. I là trung điểm của $AB.$

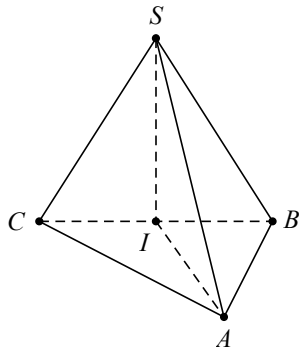
B. I là trọng tâm của tam giác $ABC.$

C. I là trung điểm của $AC.$

D. I là trung điểm của $BC.$

Lời giải

Chọn D



Đặt $SA = a.$ Tam giác SAB vuông cân tại $S,$ có $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2}.$

Tam giác SAC cân tại $S,$ có $\widehat{CSA} = 60^0$ suy ra $SA = SC = AC = a.$

Áp dụng định lí Cosin cho tam giác $SBC,$ ta có $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2.SB.SC.\cos\widehat{BSC}$

$\Rightarrow BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2.\cos 120^0 = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3} = \sqrt{AB^2 + AC^2}.$

Khi đó, tam giác ABC vuông tại A mà I là hình chiếu của S trên $mp\,(ABC).$

Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay chính là trung điểm $BC.$**.**

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O,$ $\widehat{BAD} = 60^0$ và $A'A = A'B = A'D.$ Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. trung điểm của $AO.$

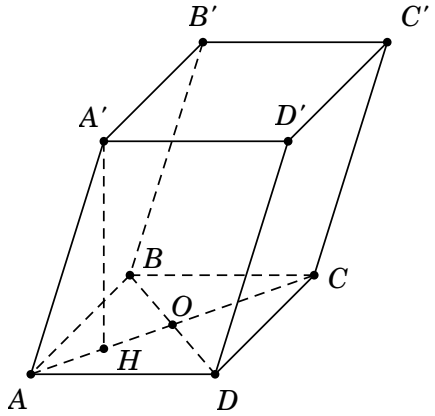
B. trọng tâm của tam giác $ABD.$

C. tâm O của hình thoi $ABCD.$

D. trọng tâm của tam giác $BCD.$

Lời giải

Chọn B



Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AB = AD$ mà $\widehat{BAD} = 60^0$ suy ra tam giác ABD đều $(1).$

Ta có $A'A = A'B = A'D$ nên hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là

A. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

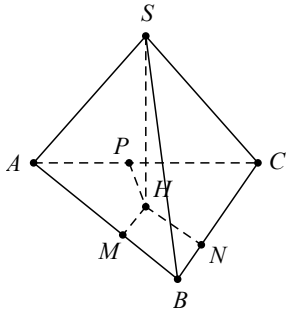
B. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. trọng tâm của tam giác ABC.

D. giao điểm của hai đường thẳng AC và BD.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của S trên các cạnh AB, AC, BC.

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHM) \Rightarrow AB \perp HM$, tương tự ta được $HN \perp AC, HP \perp BC$.

Khi đó $\widehat{(SAB);(ABC)} = \widehat{(SM;HM)} = \widehat{SMH}$, tương tự suy ra $\Rightarrow \widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH}$.

$\Rightarrow \Delta SMH = \Delta SNH = \Delta SPH \Rightarrow HM = HN = NP \Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Độ dài đoạn thẳng AD bằng

A. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

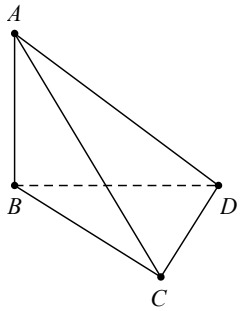
B. $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

C. $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$.

D. $\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow$ tam giác ABD vuông tại B.

Lại có $\begin{cases} AB \perp CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow$ tam giác BCD vuông tại C.

Khi đó $\begin{cases} AD^2 = AB^2 + BD^2 \\ BD^2 = BC^2 + CD^2 \end{cases} \Rightarrow AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau. Điểm nào dưới đây các đều bốn đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$?

A. Trung điểm của cạnh BD.

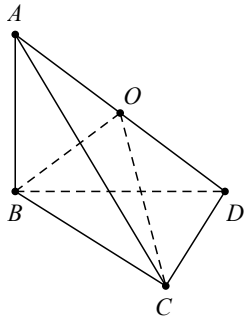
B. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. Trung điểm của cạnh AD.

D. Trọng tâm của tam giác ACD.

Lời giải

Chọn C



.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow$ tam giác ABD vuông tại B.

Suy ra $IA = IB = ID = \dfrac{AD}{2}$, với I là trung điểm của AD. (1)

Lại có $\begin{cases} AB \perp CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow$ tam giác ACD vuông tại C.

Suy ra $EA = EC = ED = \dfrac{AD}{2}$, với E là trung điểm của AD. (2)

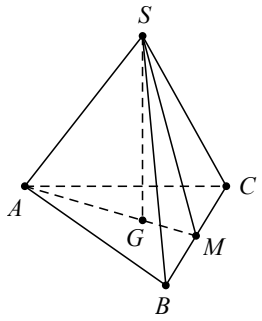
Từ $(1),(2)$ suy ra $I \equiv E$ nên trung điểm của cạnh AD cách đều A, B, C, D.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và độ dài các cạnh bên $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Độ dài đoạn thẳng SG bằng

A. $\dfrac{\sqrt{9b^2+3a^2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{b^2-3a^2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{b^2+3a^2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SA = SB = SC$ và G là trọng tâm tam giác ABC

Suy ra G là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng (ABC).

Gọi M là trung điểm của BC suy ra $BM = CM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác ABC đều cạnh a, có $GM = \dfrac{AM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác SBM vuông tại M, có $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}}$.

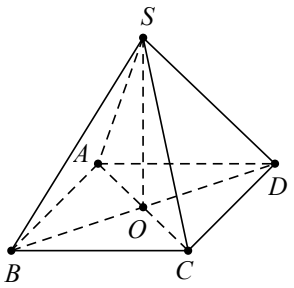
Tam giác SGM vuông tại G, có $SG = \sqrt{SM^2 - GM^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{12}} = \dfrac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$.

Câu 11: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Độ dài cạnh SO bằng

A. $SO = a\sqrt{3}$. **B.** $SO = a\sqrt{2}$. **C.** $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì O là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$

Khi đó $\widehat{SA;(ABCD)} = \widehat{(SA;OA)} = \widehat{SAO} = 45^0 \Rightarrow$ tam giác SAO vuông cân. (1)

Tam giác ABC vuông cân tại B, có $OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$. (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $SO = OA = a\sqrt{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = a$, $BC = 2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Tính góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABD).

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $\widehat{SC,(ABD)} = \widehat{SC,(ABCD)} = \widehat{SC,AC} = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác vuông SAC, ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{SA}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{SCA} = 60^0$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = 2\sqrt{2}$. **B.** $\varphi = 60^0$. **C.** $\tan\varphi = 2$. . **D.** $\varphi = 45^0$.

Lời giải

Chọn A

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SO trên mặt đáy $(ABCD)$ là AO. Do đó $\widehat{(SO,(ABCD))} = \widehat{(SO,OA)} = \widehat{SOA}$.

Trong tam giác vuông SAO, ta có $\tan\widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = 2\sqrt{2}$.

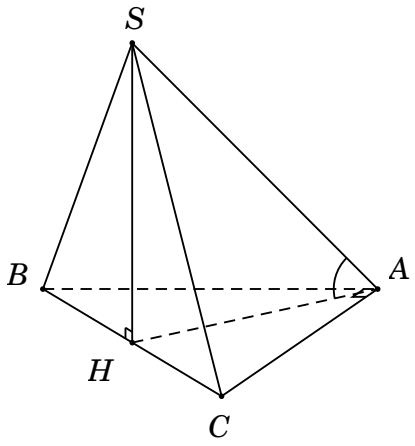
Vậy SO hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc nhọn φ thỏa mãn $\tan\varphi = 2\sqrt{2}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có cạnh bằng $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy (ABC)

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp (ABC)$.

Vì $SH \perp (ABC)$ nên HA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC).

Do đó $\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA,AH)} = \widehat{SAH}$.

● Tam giác SBC đều cạnh $2a$ nên $SH = a\sqrt{3}$.

● Tam giác ABC vuông tại A nên $AH = \frac{1}{2}BC = a$.

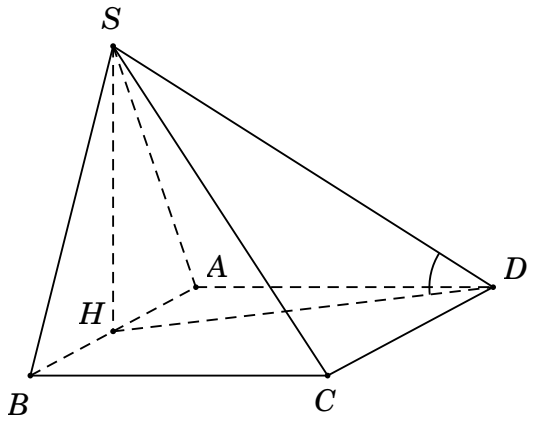
Tam giác vuông SAH, có $\tan\widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \sqrt{3}$, suy ra $\widehat{SAH} = 60^0$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot\varphi = \frac{5}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cot\varphi = \frac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\varphi = 30^0$. **D.** $\cot\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt đáy $(ABCD)$ là HD.

Do đó $\widehat{SD,(ABCD)} = \widehat{(SD,HD)} = \widehat{SDH}$.

● Tam giác SAB đều cạnh a nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

● $HD = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác vuông SHD, có $\cot \widehat{SDH} = \dfrac{DH}{SH} = \dfrac{5}{\sqrt{15}}$.

Câu 16: Cho chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Gọi φ là góc giữa giữa cạnh bên và mặt đáy. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{7}$. **B.** $\varphi = 60^0$. **C.** $\varphi = 45^0$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi O là tâm mặt đáy $(ABCD)$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Vì $SO \perp (ABCD)$, suy ra OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó $\widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{(SA,AO)} = \widehat{SAO}$.

Tam giác vuông SOA, có $\tan \widehat{SAO} = \dfrac{SO}{AO} = \dfrac{\sqrt{SB^2 - BO^2}}{AO} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và mặt phẳng (BCD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\cos\alpha = 0$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là trọng tâm tam giác đều $BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện $ABCD \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

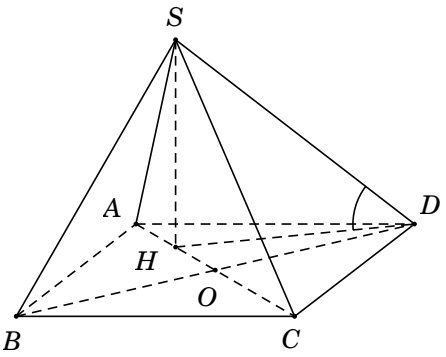
Khi đó $\alpha = \widehat{ABH} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. .

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \sqrt{5}$. **B.** $\tan\alpha = 1$. **C.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SH \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng $(ABCD)$ là HD.

Do đó $\widehat{SD,(ABCD)} = \widehat{(SD,HD)} = \widehat{SDH}$.

● Tính được $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$.

● Trong tam giác ADH, có $DH = \sqrt{AH^2 + AD^2 - 2AH.AD.\cos 45^0} = a\sqrt{10}$.

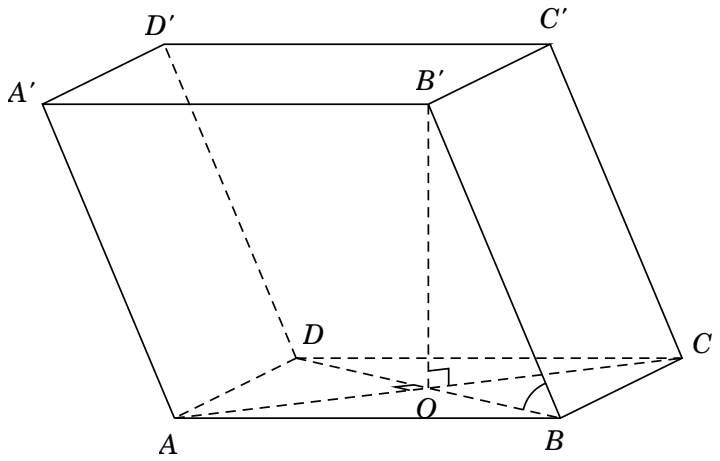
Tam giác vuông SHD, có $\tan\widehat{SDH} = \frac{SH}{HD} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 19: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết $B'O \perp (ABCD)$.

Do đó $\widehat{BB',(ABCD)} = \widehat{BB',BO} = \widehat{B'BO}$.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a , suy ra $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$.

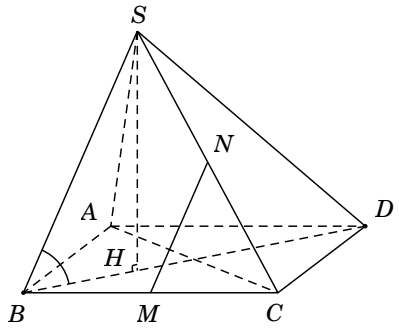
Tam giác vuông $B'BO$, có $\cos\widehat{B'BO} = \frac{BO}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B'BO} = 60^0$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a,\ AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC và $SH = \frac{a}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SC . Gọi α là góc giữa đường thẳng MN với mặt đáy $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \frac{4}{3}$. **B.** $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. **C.** $\tan\alpha = \frac{2}{3}$. **D.** $\tan\alpha = 1$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $MN \parallel SB$. Do đó $\widehat{MN,(ABCD)} = \widehat{SB,(ABCD)}$.

Do $SH \perp (ABCD)$ nên $\widehat{MN,(ABCD)} = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SB,HB} = \widehat{SBH}$.

Ta có $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a$; $BH=\dfrac{BD}{3}=\dfrac{2a}{3}$.

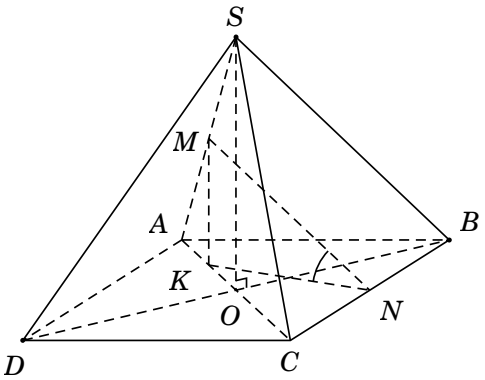
Tam giác SHB, có $\tan\widehat{SBH}=\dfrac{SH}{BH}=\dfrac{3}{4}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $MK\parallel SO$, do $SO\perp(ABCD)$, suy ra $MK\perp(ABCD)$.

Do đó $\widehat{MN,(ABCD)}=\widehat{MN,NK}=\widehat{MNK}$. Ta có $CK=\dfrac{3}{4}CA=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác CNK, có $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^0=\dfrac{CN^2+CK^2-KN^2}{2CN.CK}\Rightarrow KN=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

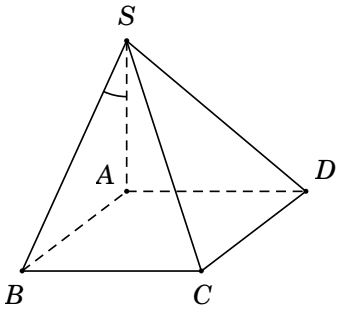
Tam giác vuông MNK, có $\cos\widehat{MNK}=\dfrac{NK}{MN}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{MNK}=60^0$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA=2a$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\varphi=60^0$. **D.** $\varphi=30^0$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BA \perp AD \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD)$. Suy ra hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng (SAD) là SA. Do đó $\widehat{SB,(SAD)} = \widehat{(SB,SA)} = \widehat{BSA}$.

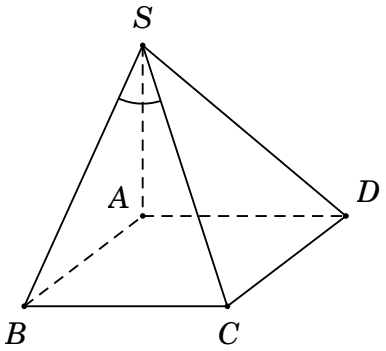
Tam giác vuông SAB, ta có $\cos\widehat{BSA} = \dfrac{SB}{SA} = \dfrac{SA}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$. **C.** $\alpha = 30^0$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Suy ra hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB) là SB. Do đó $\widehat{SC,(SAB)} = \widehat{(SC,SB)} = \widehat{CSB}$.

Tam giác vuông SAB, có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{7}$.

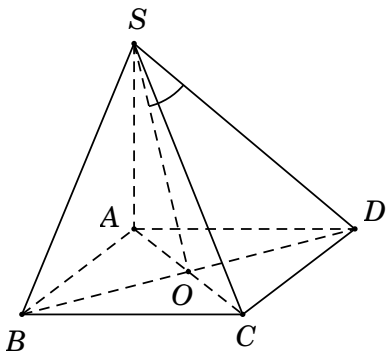
Tam giác vuông SBC, có $\tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc gữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 45^0. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\tan\varphi=\sqrt{5}$. **C.** $\varphi=60^0$. **D.** $\varphi=45^0$.

Lời giải

Chọn A



Xác định $45^0=\widehat{SC,(ABCD)}=\widehat{SC,AC}=\widehat{SCA}$, suy ra $SA=AC=2a\sqrt{2}$.

Gọi $O=AC\cap BD$, ta có $\begin{cases}DO\perp AC\\DO\perp SA\end{cases}\Rightarrow DO\perp(SAC)$ nên hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng (SAC) là SO. Do đó $\widehat{SD,(SAC)}=\widehat{SD,SO}=\widehat{DSO}$.

Ta có $DO=\dfrac{1}{2}BD=a\sqrt{2}$; $SO=\sqrt{SA^2+AO^2}=\sqrt{SA^2+DO^2}=a\sqrt{10}$.

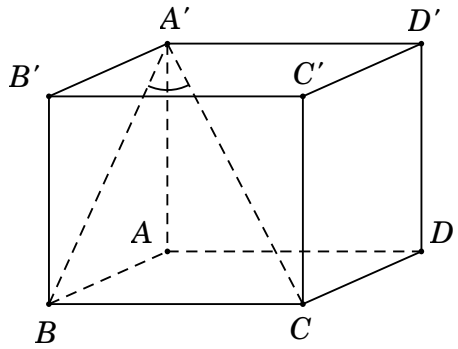
Tam giác vuông SOD, có $\tan\widehat{DSO}=\dfrac{OD}{OS}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 25: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}$, $AA'=4$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B)$.

Do đó $\widehat{A'C,(AA'B'B)} = \widehat{(A'C,A'B)} = \widehat{CA'B}$.

Vì $BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp BA'$ nên tam giác $A'BC$ vuông tại B.

Tam giác vuông $A'BC$, có $\tan \widehat{CA'B} = \dfrac{BC}{A'B} = \dfrac{BC}{\sqrt{AA'^2 + AB^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

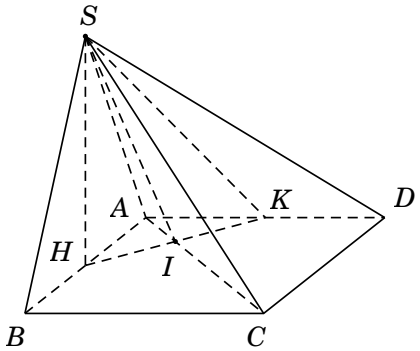
Vậy $A'C$ tạo với mặt phẳng $(AA'B'B)$ một góc 30^0.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SHK). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \sqrt{7}$. **B.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $I = HK \cap AC$. Do H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $HK \parallel BD$. Suy ra $HK \perp AC$. Lại có $AC \perp SH$ nên suy ra $AC \perp (SHK)$.

Do đó $\widehat{(SA,(SHK))} = \widehat{(SA,SI)} = \widehat{ASI}$.

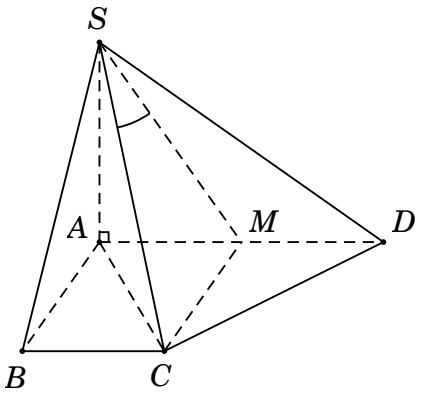
Tam giác SIA vuông tại I, có $\tan\widehat{ASI}=\dfrac{AI}{SI}=\dfrac{\frac{1}{4}AC}{\sqrt{SA^2-AI^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAD).

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông nên $CM\perp AD$.

Ta có $\begin{cases}CM\perp AD\\CM\perp SA\end{cases}\Rightarrow CM\perp(SAD)$.

Suy ra hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAD) là SM.

Do đó $\widehat{SC,(SAD)}=\widehat{SC,SM}=\widehat{CSM}$.

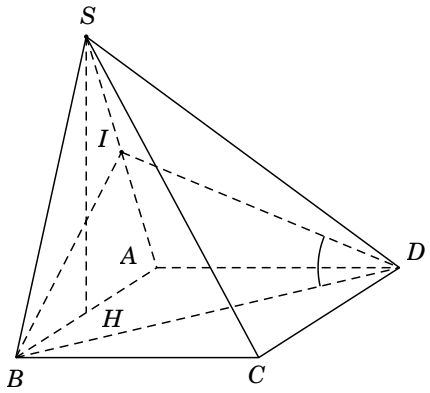
Tam giác vuông SMC, có $\tan\widehat{CSM}=\dfrac{CM}{SM}=\dfrac{AB}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\rightarrow\widehat{CSM}=30^0$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa BD và mặt phẳng (SAD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha=60^0$. **B.** $\alpha=30^0$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm SA. Do tam giác SAD đều nên $BI \perp SA.$ (1)

Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SH \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAD) \Rightarrow AD \perp BI.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $BI \perp (SAD)$ nên hình chiếu vuông góc của BD trên mặt phẳng (SAD) là $ID.$ Do đó $\widehat{BD,(SAD)} = \widehat{BD,ID} = \widehat{BDI}.$

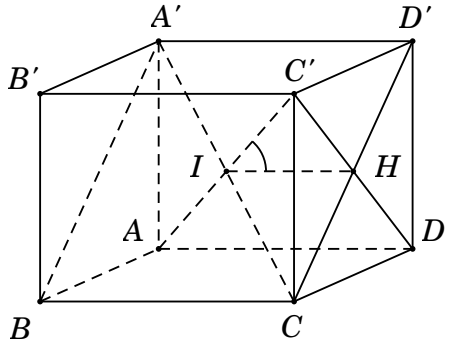
Tam giác BDI vuông tại I nên $\sin \widehat{BDI} = \dfrac{BI}{BD} = \dfrac{\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}}{AB\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và mặt phẳng $(A'BCD').$ Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 30^0.$ **B.** $\tan\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.$ **C.** $\alpha = 45^0.$ **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi $A'C \cap AC' = I;\ C'D \cap CD' = H$.

Ta có $\begin{cases} C'D \perp CD' \\ C'D \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow C'D \perp (A'BCD') \Rightarrow IH$ là hình chiếu vuông góc của AC' trên mặt phẳng $(A'BCD').$

Do đó $\widehat{AC',(A'BCD')}=\widehat{C'I,(A'BCD')}=\widehat{C'I,HI}=\widehat{C'IH}.$

Trong tam giác vuông $C'HI$, có $\tan\widehat{C'IH}=\dfrac{C'H}{IH}=\dfrac{\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{AB}{2}}=\sqrt{2}.$

Dạng 4. Thiết Diện

Phương pháp

Việc xác định thiết diện với một khối đa diện với một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước, trước hết ta phải tìm được điểm chung của một mặt phẳng đã cho với một mặt của khối đa diện, sau đó dựa vào mối quan hệ giữa tính song song và vuông góc để tìm ra phương của giao tuyến giữa mặt đã cho và các mặt của khối đa diện. Thường ta hay dùng hệ quả sau để tìm điểm chung

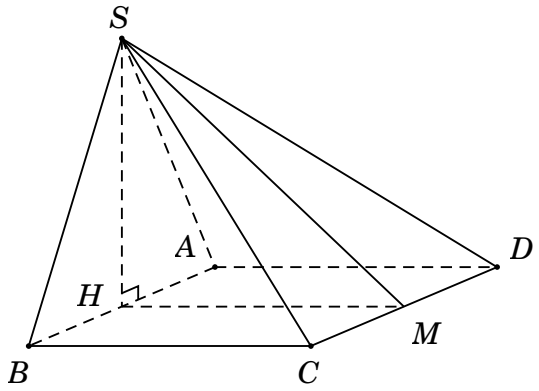
1) $\begin{cases}a\perp b\\(\alpha)\perp b\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a\subset(\alpha)\\a//(\alpha)\end{array}\right.;$ 2) $\begin{cases}O\in b\perp a\\O\in(\alpha)\perp a\end{cases}\Rightarrow b\subset(\alpha)$

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $BC=2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua S vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.$ **B.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $S=a^2\sqrt{3}.$ **D.** $S=\dfrac{a^2}{2}.$

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm $AB\Rightarrow SH\perp AB.$ Suy ra:

- $SH\subset(\alpha).$
- $SH\perp(ABCD)$ (do $(SAB)\perp(ABCD)$ theo giao tuyến AB).

Kẻ $HM\perp AB$ $(M\in CD)\Rightarrow HM\subset(\alpha).$

Do đó thiết diện là tam giác SHM vuông tại H.

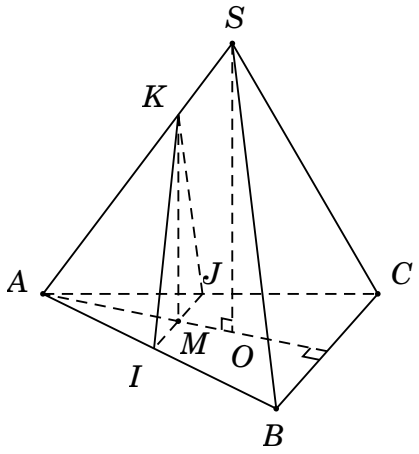
Ta có $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM=BC=2a.$ Vậy $S_{\Delta SHM}=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$

Câu 2: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O; $SO=2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO $(M\neq A;M\neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AO. Đặt $AM=x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S=2a^2.$ **B.** $S=2x^2.$ **C.** $S=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2.$ **D.** $S=2(a-x)^2.$

Lời giải

Chọn B



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO\perp AA'$ mà $(\alpha)\perp AA'$ suy ra $SO\,//\,(\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC\,//\,(\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ\,//\,BC$ với $I\in AB,\ J\in AC$; kẻ $MK\,//\,SO$ với $K\in SA.$

Khi đó thiết diện là tam giác $KIJ.$

Diện tích tam giác IJK là $S_{\Delta IJK}=\frac{1}{2}IJ.MK$.

Trong tam giác ABC, ta có $\frac{IJ}{BC}=\frac{AM}{AA'}$ suy ra $IJ=\frac{AM.BC}{AA'}=\frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự trong tam giác SAO, ta có $\frac{MK}{SO}=\frac{AM}{AO}$ suy ra $MK=\frac{AM.SO}{AO}=2x\sqrt{3}$.

Vậy $S_{\Delta IJK}=\frac{1}{2}\frac{2x\sqrt{3}}{3}.2x\sqrt{3}=2x^2$.

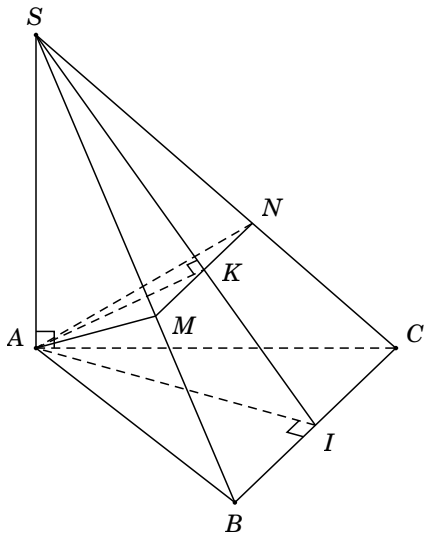
Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta AMN}=\dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}.$ **B.** $S_{\Delta AMN}=\dfrac{4a^2\sqrt{21}}{49}.$

C. $S_{\Delta AMN}=\dfrac{a^2\sqrt{21}}{7}.$ **D.** $S_{\Delta AMN}=\dfrac{2a^2\sqrt{21}}{7}.$

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm $BC\Rightarrow AI\perp BC.$ Kẻ $AK\perp SI\ \ (K\in SI)$.

Từ K kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N.

Khi đó thiết diện là tam giác AMN.

Ta có $\begin{cases}BC\perp AI\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAI)\Rightarrow BC\perp AK\Rightarrow MN\perp AK.$

Tam giác vuông SAI, có $AK=\dfrac{SA.AI}{\sqrt{SA^2+AI^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác SBC, có $\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{SK}{SI}=\dfrac{SA^2}{SI^2}=\dfrac{SA^2}{SA^2+AI^2}=\dfrac{4}{7}\Rightarrow MN=\dfrac{4a}{7}.$

Vậy $S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{2}AK.MN=\dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}.$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua trung điểm E của SC và vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{EFGH}=\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{16}$.

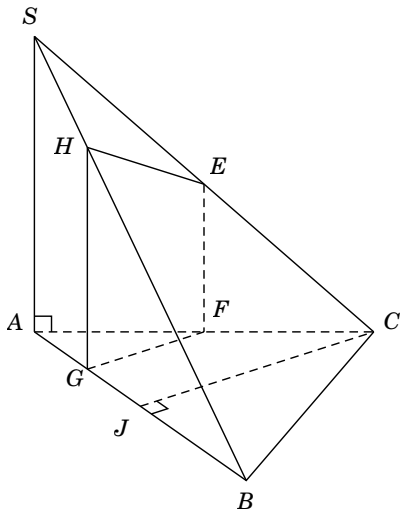
B. $S_{EFGH}=\dfrac{a^2\sqrt{7}}{32}$.

C. $S_{EFGH}=\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.

D. $S_{EFGH}=\dfrac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi F là trung điểm AC, suy ra $EF \parallel SA$.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ nên $EF \perp AB$. (1)

Gọi $J,\ G$ lần lượt là trung điểm $AB,\ AG$.

Suy ra $CJ \perp AB$ và $FG \parallel CJ$ nên $FG \perp AB$. (2)

Trong ΔSAB kẻ $GH \parallel SA$ $(H \in SB)$, suy ra $GH \perp AB$. (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra thiết diện cần tìm là hình thang vuông $EFGH$.

Do đó $S_{EFGH}=\dfrac{1}{2}(EF+GH).FG$.

Ta có $EF=\dfrac{1}{2}SA=\dfrac{a}{2}$; $FG=\dfrac{1}{2}CJ=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$; $\dfrac{GH}{SA}=\dfrac{BG}{BA}\Rightarrow GH=BG=\dfrac{3a}{4}$.

Vậy $S_{EFGH}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{3a}{4}\right).\dfrac{a\sqrt{3}}{4}=\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

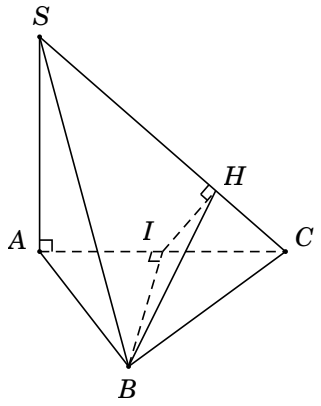
A. $S_{\Delta BIH}=\dfrac{a^2\sqrt{15}}{10}$.

B. $S_{\Delta BIH}=\dfrac{a^2\sqrt{5}}{8}$.

C. $S_{\Delta BIH}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}.$ **D.** $S_{\Delta BIH}=\dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AC, suy ra $BI\perp AC$.

Ta có $\begin{cases}BI\perp AC\\ BI\perp SA\end{cases}\Rightarrow BI\perp(SAC)\Rightarrow BI\perp SC.\ (1)$

Kẻ $IH\perp SC\ \ (H\in SC).\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $SC\perp(BIH)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác IBH.

Do $BI\perp(SAC)\Rightarrow BI\perp IH$ nên ΔIBH vuông tại I.

Ta có BI đường cao của tam giác đều cạnh a nên $BI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác CHI đồng dạng tam giác CAS, suy ra

$$\frac{IH}{SA}=\frac{CI}{CS}\Rightarrow IH=\frac{CI.SA}{CS}=\frac{CI.SA}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

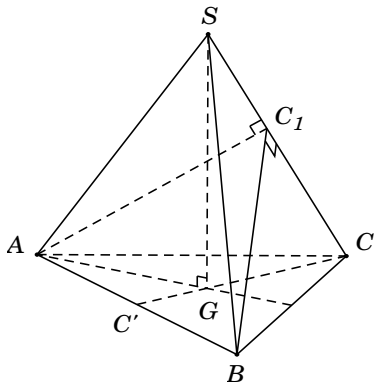
Vậy $S_{\Delta BIH}=\dfrac{1}{2}BI.IH=\dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}.$

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức giữa a và b để (α) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $a>b\sqrt{2}.$ **B.** $a>b\sqrt{3}.$ **C.** $a<b\sqrt{2}.$ **D.** $a<b\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.

Gọi C' là trung điểm AB. Suy ra C, C', G thẳng hàng.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CC' \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCC') \Rightarrow AB \perp SC$. (1)

Trong tam giác SAC, kẻ $AC_1 \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (ABC_1)$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác ABC_1 thỏa mãn đi qua A và vuông góc với SC.

Tam giác SAC cân tại S nên để C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^0$.

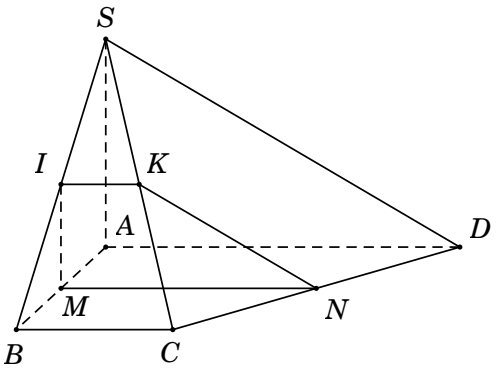
Suy ra $\cos\widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow SA^2 + SC^2 - AC^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \rightarrow a < b\sqrt{2}.$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, $BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng:

A. 10. **B.** 20. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C



Do $(P)\perp AB\Rightarrow (P)\,//\,SA.$

Gọi I là trung điểm của $SB\Rightarrow MI\,//\,SA\Rightarrow MI\subset (P).$

Gọi N là trung điểm của $CD\Rightarrow MN\perp AB\Rightarrow MN\subset (P).$

Gọi K là trung điểm của $SC\Rightarrow IK\,//\,BC$, mà $MN\,//\,BC\Rightarrow MN\,//\,IK\Rightarrow IK\subset (P).$

Vậy thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M.

Ta có:

MI là đường trung bình của tam giác $SAB\ \Rightarrow MI=\dfrac{1}{2}SA=3.$

IK là đường trung bình của tam giác $SBC\ \Rightarrow IK=\dfrac{1}{2}BC=3.$

MN là đường trung bình của hình thang $ABCD\Rightarrow MN=\dfrac{1}{2}(AD+BC)=7.$

Vậy $S_{MNKI}=\dfrac{IK+MN}{2}.MI=15.$

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O, đường cao AA'; $SO=2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn OA' $(M\neq A';M\neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM=x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S_{IJEF}=-2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right).$

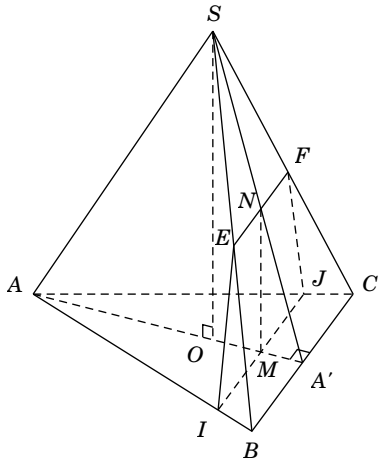
B. $S_{IJEF}=2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right).$

C. $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2.$

D. $S=2(a-x)^2.$

Lời giải

Chọn A



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO\perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB,\ J \in AC$; kẻ $MN \parallel SO$ với $N \in SA'$.

Qua N kẻ $EF \parallel BC$ với $E \in SB,\ F \in SC$.

Khi đó thiết diện là hình thang $IJFE$.

Diện tích hình thang $S_{IJEF} = \frac{1}{2}(IJ + EF)MN$.

Tam giác ABC, có $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA'} \Rightarrow IJ = \frac{AM.BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SBC, có $\frac{EF}{BC} = \frac{SN}{SA'} = \frac{OM}{OA'} \Rightarrow EF = \frac{OM.BC}{OA'} = 2\left(x\sqrt{3} - a\right)$.

Tam giác SOA', có $\frac{MN}{SO} = \frac{MA'}{OA'} \Rightarrow MN = \frac{SO.MA'}{OA'} = 2\left(3a - 2x\sqrt{3}\right)$.

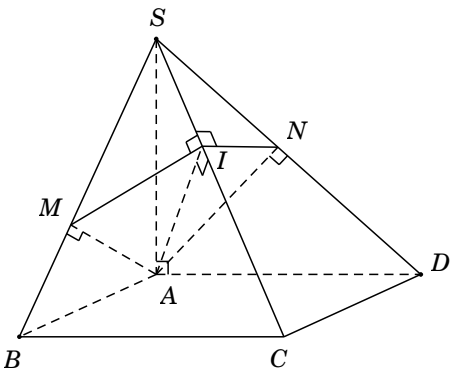
Vậy $S_{IJEF} = \frac{2}{3}\left(4x\sqrt{3} - 3a\right)\left(3a - 2x\sqrt{3}\right) = -2\left(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2\right)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{AMIN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{7}$. **B.** $S_{AMIN} = \frac{12a^2\sqrt{6}}{35}$. **C.** $S_{AMIN} = \frac{6a^2\sqrt{6}}{35}$. **D.** $S_{AMIN} = \frac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác SAC, kẻ $AI \perp SC$ $(I \in SC)$.

Trong mp(SBC), dựng đường thẳng đi qua I vuông góc với SC cắt SB tại M.

Trong mp(SCD), dựng đường thẳng qua I vuông góc với SC cắt SD tại N.

Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) là tứ giác $AMIN$.

Ta có $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AM$. (1)

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MI$.

Chứng minh tương tự, ta được $AN \perp NI$.

Do đó $S_{AMIN} = S_{\Delta AMI} + S_{\Delta ANI} = \frac{1}{2} AM.MI + \frac{1}{2} AN.NI$.

Vì AM, AI, AN là các đường cao của các tam giác vuông SAB, SAC, SAD nên

$AM = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$; $AI = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = a\sqrt{2}$; $AN = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Suy ra $MI = \sqrt{AI^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{30}}{5}$ và $NI = \sqrt{AI^2 - AN^2} = \frac{a\sqrt{14}}{7}$.

Vậy $S_{AMIN} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{\sqrt{5}} . \frac{a\sqrt{30}}{5} + \frac{2a\sqrt{21}}{7} . \frac{a\sqrt{14}}{7} \right) = \frac{12a^2\sqrt{6}}{35}$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a\sqrt{2}$; $AA' = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua M là trung điểm của BC và vuông góc với AB' . Thiết diện tạo bởi (α) với hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. Hình thang cân.

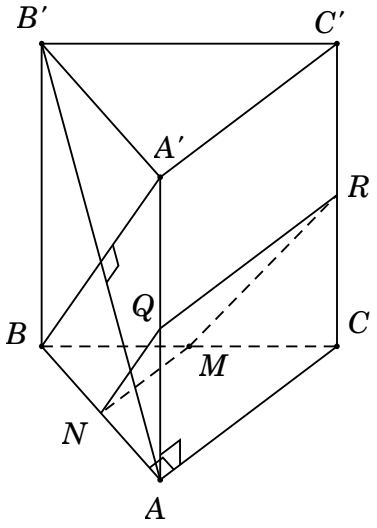
B. Hình thang vuông.

C. Tam giác.

D. Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow MN \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABB'A') \Rightarrow MN \perp AB' \Rightarrow MN \subset (\alpha).$

Từ giả thiết suy ra $AB = a = AA' \Rightarrow ABB'A'$ là hình vuông $\Rightarrow BA' \perp AB'$.

Trong mp $(ABB'A')$ kẻ $NQ \parallel BA'$ với $Q \in AA'$.

Trong mp $(ACC'A')$ kẻ $QR \parallel AC$ với $R \in CC'$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNQR$ vuông (do MN và QR cùng song song với AC và $MN \perp NQ$).

BÀI 4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Góc giữa hai mặt phẳng

1. Định nghĩa: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Nhận xét:

- Cho hai đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q); $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của a và b. Gọi φ là góc giữa (P) và (Q). Khi đó, ta có:

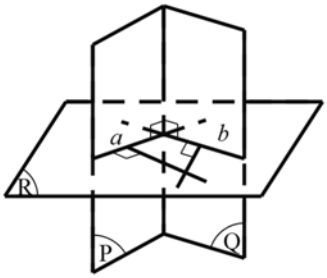
$$\begin{cases} \varphi = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) & \text{nếu } \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) \le 90^o \\ \varphi = 180^o - \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) & \text{nếu } \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) > 90^o \end{cases}$$

  Như vậy, góc giữa hai mặt phẳng luôn nhỏ hơn hoặc bằng 90^o.

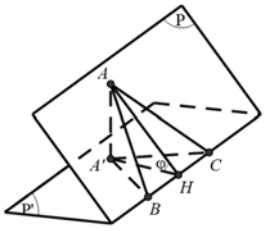
- Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nếu nó nằm trên đường thẳng vuông góc với (P).

2. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng

Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến x, để tính góc giữa chúng, ta chỉ việc xét một mặt phẳng (R) vuông góc với x, lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến a và b. Lúc đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b.



3. Định lí 1. Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') thì $S' = S\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phăng (P) và (P').



$$dt\left(\Delta A'BC\right) = dt\left(\Delta ABC\right).\cos\varphi$$

II. Hai mặt phẳng vuông góc

1. Định nghĩa. Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^o.

Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, kí hiệu: $(P) \perp (Q)$ hay $(Q) \perp (P)$.

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \varphi = 90^o$ (Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q)).

Từ định nghĩa trên ta suy ra: $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$, với $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vectơ pháp tuyến của (P) và (Q).

2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

a) Định lí 2. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

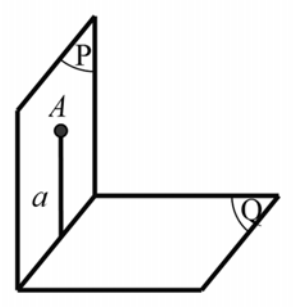
$$\left.\begin{array}{l}(P)\supset a\\ a\perp(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow(P)\perp(Q)$$

Chú ý: Dùng định lí này để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.

b) Các hệ quả

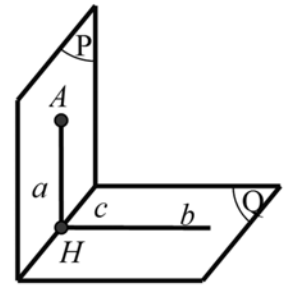
Hệ quả 1

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

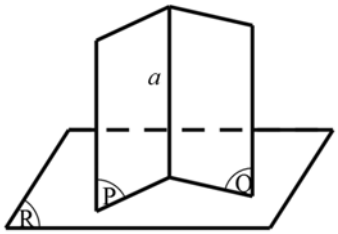


$$\left.\begin{array}{l}(P)\perp(Q)\\ A\in(P)\\ A\in a,\ a\perp(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow a\subset(P)$$

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào thuộc (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) sẽ vuông góc với mặt phẳng (Q).



$$\left.\begin{array}{l}(P)\perp(Q)\\ (P)\cap(Q)=c\\ a\subset(P),\ a\perp c\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(Q)$$



Hệ quả 2. Hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

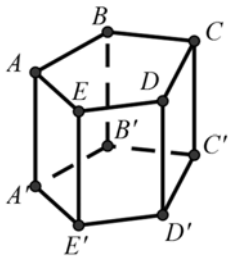
$$\left.\begin{array}{l}(P)\cap(Q)=a\\ (P)\perp(R)\\ (Q)\perp(R)\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(R)$$

Hệ quả 3. Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

a không vuông góc với (P) $\Rightarrow \exists !(Q):\begin{cases}(Q)\supset a\\(Q)\perp(P)\end{cases}$.

III. Hình lăng trụ đứng. Hình hộp chữ nhật. Hình lập phương

1. Hình lăng trụ đứng



a) ***Định nghĩa.*** Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

b) ***Nhận xét.*** Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

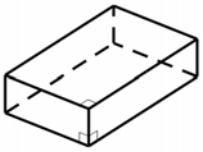
2. Hình lăng trụ đều



a) ***Định nghĩa.*** Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

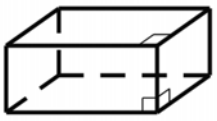
b) ***Nhận xét.*** Các mặt bên của hình lăng trụ đều là những hình chữ nhật bằng nhau. Ngoài ra, hình lăng trụ đều có các tính chất của hình lăng trụ đứng.

3. Hình hộp đứng



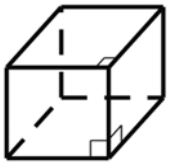
a) ***Định nghĩa.*** Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

b) ***Nhận xét.*** Trong hình hộp đứng bốn mặt bên đều là hình chữ nhật.



4. Hình hộp chữ nhật

a) ***Định nghĩa.*** Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.



b) ***Nhận xét.*** Tất cả sáu mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật.

5. Hình lập phương

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp có tất cả các mặt là hình vuông.

IV. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

1. Định nghĩa đều



Định nghĩa. Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

- Đường vuông góc với mặt đáy kẻ từ đỉnh gọi là đường cao của hình chóp.

Từ định nghĩa, suy ra:

- Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm của đáy.

Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.



2. Hình chóp cụt đều

Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cụt thì hình chóp cụt đó được gọi là hình chóp cụt đều.

Đoạn thẳng nối tâm của hai đáy được gọi là đường cao của hình chóp cụt đều.

Từ định nghĩa suy ra: Các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân bằng nhau.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

Câu 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với (P). Do $(P)//(Q)\Rightarrow d\perp(Q)$.

Giả sử (R) là mặt phẳng chứa d. Mà $\begin{cases}d\perp(P)\\ d\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(R)\perp(P)\\ (R)\perp(P)\end{cases}$.

Có vô số mặt phẳng (R) chứa d. Do đó có vô số mặt phẳng qua M, vuông góc với (P) và (Q).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c\perp a, c\perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp a và b trùng nhau, sẽ tồn tại mặt phẳng chứa a và b không vuông góc với mặt phẳng (α) chứa c.

C sai. Trong trường hợp a và b cắt nhau, mặt phẳng (a,b) chứa b nhưng không vuông góc với a.

D sai. Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và tréo nhau, nếu $(\alpha) \supset a$, $(\alpha) /\!/ b$ và $(\beta) \supset b$, $(\beta) /\!/ a$ thì $(\alpha) /\!/ (\beta)$.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

B sai. Qua một đường thẳng vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D sai. Qua một điểm có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d.

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R).

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp $a \in d$, $b \in d$, khi đó AB trùng với d.

C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

D sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, đường thẳng thuộc mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn D

A sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng này, vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

B, C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song hoặc trùng nhau.

B sai. Nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước thì có vô số mặt phẳng qua đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng đó. Nếu đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng cho trước thì không có mặt phẳng nào vuông góc với mặt phẳng đó.

D sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q).

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Lời giải

Chọn B

Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và tréo nhau, nếu $(P)\supset a$, $(P)/\!/b$ và $(Q)\supset b$, $(Q)/\!/a$ thì $(P)/\!/(Q)$.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R).

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) hoặc $(Q)\equiv(R)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

D. Cả 3 mệnh đề trên đều đúng.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào sai?

A. Đáy là đa giác đều.

B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.

D. Các mặt bên là những hình vuông.

Lời giải

Chọn D

Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy. Do đó các mặt bên là những hình chữ nhật.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Lời giải

Chọn B

Dạng 2. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

1. Phương pháp

Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, ta dùng định lí: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\left.\begin{array}{l}(P)\supset a\\ a\perp(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow (P)\perp(Q).$$

Như vậy, việc chứng minh hai mặt phẳng vuông góc quy về việc chứng minh một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho đường thẳng a và hai mặt phẳng (P) và (Q). Khẳng đinh nào sau đây đúng?

A. $\left.\begin{array}{l}a\subset(P)\\ (Q)\perp a\end{array}\right\}\Rightarrow (Q)\perp(P).$

B. $\left.\begin{array}{l}(Q)\perp(P)\\ a\subset(P)\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(Q).$

C. $\left.\begin{array}{l}\Delta=(P)\cap(Q)\\ a\perp\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(Q).$

D. Có 2 câu đúng trong 3 câu trên.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Theo định lí: "Nếu $(P)\supset a$ và $a\perp(Q)$ thì $(P)\perp(Q)$" thì A đúng.

Ví dụ 2: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Gọi a là đường thẳng nằm trong (P). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu $a\perp\Delta$ thì $a\perp(Q)$.

B. $\left.\begin{array}{l}a\perp\Delta\\ (P)\perp(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(Q).$

C. Nếu $a\perp(Q)$ thì $(P)\perp(Q)$.

D. Chỉ có 1 câu sai trong 3 câu trên.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

$\left.\begin{array}{l}a\subset(P)\\ a\perp\Delta\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(Q)$: Sai. Vậy A sai.

$\left.\begin{array}{l}a\perp\Delta\\ (P)\perp(Q)\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(Q)$: Đúng. Vậy B đúng.

$\left.\begin{array}{l} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \perp (Q)$: Đúng. Vậy C đúng.

Ví dụ 3: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, giao tuyến là Δ. $A \in (P)$ và $A \notin (Q)$. Qua A, vẽ đường thẳng Δ' vuông góc với (Q). Khẳng đình nào sau đây **sai** ?

A. $\Delta' \subset (P)$.

B. Δ' chéo Δ.

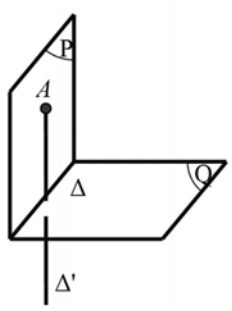
C. $\Delta' \perp \Delta$.

D. Có 2 câu đúng trong 3 câu trên.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $\left.\begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ \Delta' \perp (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta' \subset (P)$: Đúng. vậy A đúng.



Vì $\Delta' \subset (P)$ và $\Delta \subset (P)$ nên Δ' chéo Δ là sai. Vậy B sai.

$\left.\begin{array}{l} \Delta' \perp (Q) \\ \Delta \subset (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta' \perp \Delta$: Đúng. Vậy C đúng.

Ví dụ 4: Cho đường thẳng a và hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Khẳng đinh nào sau đây đúng?

A. $\left.\begin{array}{l} a \subset (P) \\ a \perp \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (Q)$.

B. $\left.\begin{array}{l} a \perp (Q) \\ a \text{ cắt } \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow a \subset (P)$.

C. $\left.\begin{array}{l} (P) \perp (Q) \\ a \perp \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow a \subset (P)$.

D. Cả 3 câu đều sai.

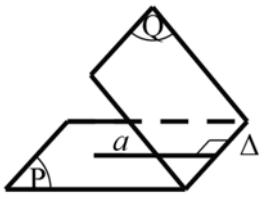
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

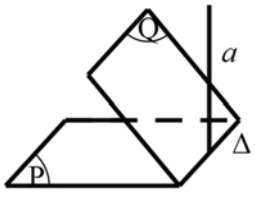
Thiếu giả thiết $(P) \perp (Q)$ nên A sai (hình 1).

Thiếu giả thiết nên B sai (hình 2).

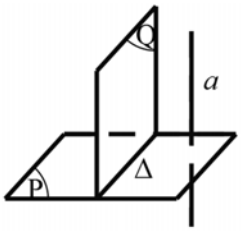
Thiếu giả thiết Δ cắt a nên C sai (hình 3).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Ví dụ 5: Cho tứ diện ABCD có tam giác ABD và tam giác ABC vuông tại B. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $CB \perp AD$.

B. $AB \perp (BCD)$.

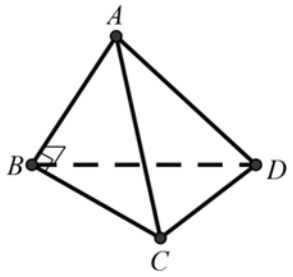
C. $AC^2 + AB^2 = BC^2$.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Vì ΔABC vuông tại B nên $AB \perp BC$ và ΔABD vuông tại B nên $AB \perp BD$. Từ đó suy ra $AB \perp (BCD)$. Vậy B đúng.



Ví dụ 6: Cho tam giác ABC đều, cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D, lấy điểm S. Để cho mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAC), SD có độ dài tính theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $a\sqrt{6}$.

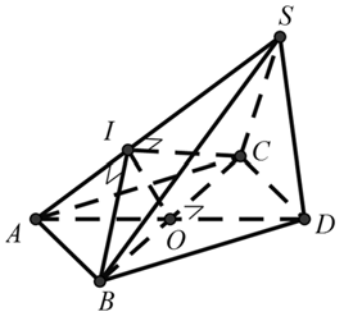
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Vì $SD \perp (BCD)$ nên ΔSDB và ΔSDC vuông tại D.

Mà $DB = DC$ (ABCD là hình thoi) nên $\Delta SDB = \Delta SDC$. Suy ra, $SB = SC$.

Mặt khác $AB = AC$ (ΔABC đều) nên $\Delta SAB = \Delta SAC$. Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ C trong ΔSCA, ta có $SA \perp IB$ và $SA \perp IC$. Suy ra $SA \perp (BIC)$.



Để cho $(SAB) \perp (SAC)$, ta phải có $\widehat{BIC} = 90^\circ$.

Suy ra $OI = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ (O là trung điểm của BC).

ΔAIO vuông tại I cho $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Delta AIO \backsim \Delta ADS$ nên $SD = \frac{AD}{AI}.IO \Rightarrow SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

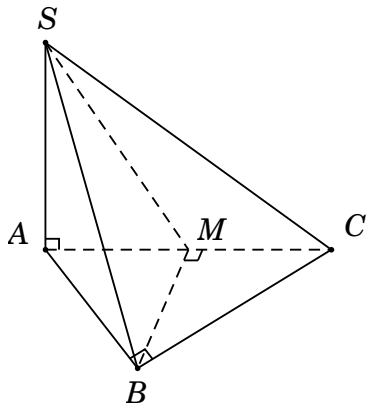
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $BM \perp AC.$ **B.** $(SBM) \perp (SAC).$

C. $(SAB) \perp (SBC).$ **D.** $(SAB) \perp (SAC).$

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC cân tại B có M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC.$ Do đó A đúng.

Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \ \left(\text{do } SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \ \left(\text{do } SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$. Do đó C đúng.

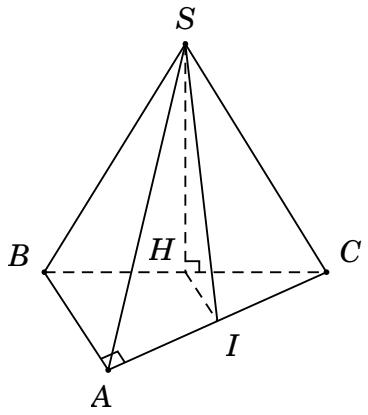
Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 2: Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $SH \perp AB.$ **B.** $HI \perp AB.$ **C.** $(SAB) \perp (SAC).$ **D.** $(SHI) \perp (SAB).$

Lời giải

Chọn C



Do SBC là tam giác đều có H là trung điểm BC nên $SH \perp BC$.

Mà $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB.$ Do đó A đúng.

Ta có HI là đường trung bình của ΔABC nên $HI \,//\, AC \Rightarrow HI \perp AB.$ Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ HI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow (SAB) \perp (SHI).$ Do đó D đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì C là đáp án sai.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và mằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $AI \perp SC.$

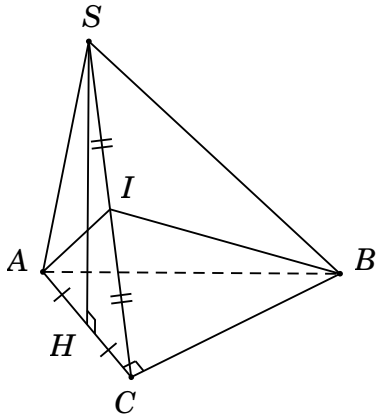
B. $(SBC) \perp (SAC).$

C. $AI \perp BC.$

D. $(ABI) \perp (SBC).$

Lời giải

Chọn B



Tam giác SAC đều có I là trung điểm của SC nên $AI \perp SC$. Do đó A đúng.

Gọi H là trung điểm AC suy ra $SH \perp AC$. Mà $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$ do đó $SH \perp BC$. Hơn nữa theo giả thiết tam giác ABC vuông tại C nên $BC \perp AC$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AI$. Do đó C đúng.

Từ mệnh đề A và C suy ra mệnh đề D đúng.

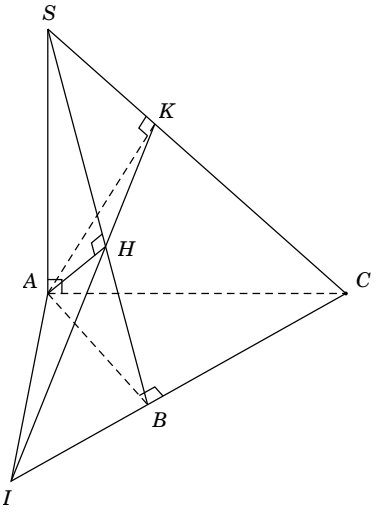
Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC và I là giao điểm của HK với mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây sai?

A. $BC \perp AH$. **B.** $(AHK) \perp (SBC)$. **C.** $SC \perp AI$. **D.** Tam giác IAC đều.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Do đó A đúng.

Lại có $AH \perp SB$. Từ đó suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)

Lại có theo giả thiết $SC \perp AK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (AHK) \Rightarrow (SBC) \perp (AHK)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SC \perp (AHK) \\ AI \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp AI$. Do đó C đúng.

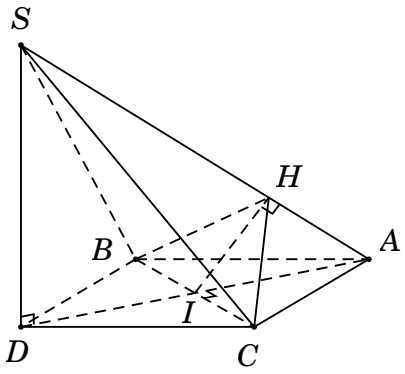
Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 5: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC; kẻ IH vuông góc SA $(H \in SA)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $SA \perp BH$. **B.** $(SDB) \perp (SDC)$. **C.** $(SAB) \perp (SAC)$. **D.** $BH \perp HC$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra $ABDC$ là hình thoi nên $BC \perp AD$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Lại có theo giả thiết $IH \perp SA$. Từ đó suy ra $SA \perp (HCB) \Rightarrow SA \perp BH$. Do đó A đúng.

Tính được $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = 2AI = a\sqrt{3}$, $SA^2 = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\Delta AHI \backsim \Delta ADS \Rightarrow \frac{IH}{SD} = \frac{AI}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AI.SD}{AS} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ tam giác HBC có trung tuyến IH bằng nửa cạnh đáy BC nên $\widehat{BHC} = 90^0$ hay $BH \perp HC$. Do đó D đúng.

Từ mệnh đề A và D suy ra mệnh đề C đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

Dạng 3. Tính góc giữa hai mặt phẳng

1. Phương pháp

- Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến x, để xác định góc giữa chúng, ta chỉ việc xét một mặt phẳng (K) vuông góc với x lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến a và b. Lúc đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b.
- Để tìm góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta thường làm như sau:

  – Xác định một điểm A trên (P), vẽ $AH \perp (Q)$ (tại H).

  – Vẽ $HO \perp x$ tại O thì $AO \perp x$.

  – Góc $(OA, OH) \le 90^o$ là góc cần tìm.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 30^o. **B.** 45^o. **C.** 60^o.

D. 90^o.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

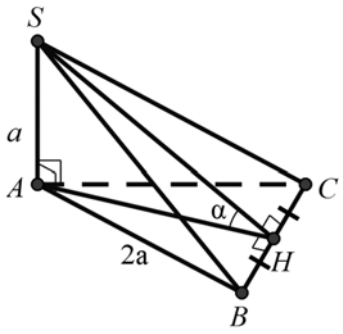
Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Kẻ đường cao AH của ΔABC, ta có: $BC \perp AH$, AH là hình chiếu của SH trên mặt phẳng (ABC) nên suy ra $BC \perp SH$.

Vậy $\alpha = \widehat{SHA}$.

Tam giác SHA vuông tại A có: $SA = a$, $AH = a\sqrt{3}$ (đường cao của tam giác đều ABC).

Suy ra: $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^o$.



Ví dụ 2: Cho hình chóp đều S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $SA = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Giá trị góc α giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 30^o. **B.** 45^o. **C.** 60^o.

D. 90^o.

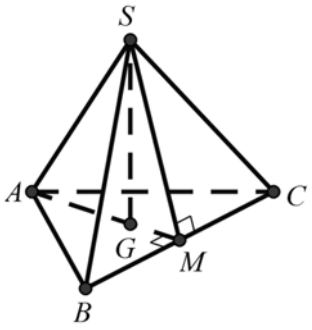
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Xác định góc α. Gọi G là trọng tâm của ΔABC, ta có $SG \perp (ABC)$. Kẻ $AM \perp BC$ thì trọng tâm G của ΔABC thuộc AM.

GM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABC) nên $BC \perp SM$. Suy ra góc cần tìm là $\alpha = \widehat{SMG}$.

Tính α. Ta có: $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của tam giác đều ABC, cạnh a), suy ra



$GM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$

Tam giác SMB vuông tại M nên:

$$SM^2 = SB^2 - BM^2 = \left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow SM = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Tam giác SGM vuông tại G nên:

$$\cos\alpha = \frac{GM}{SM} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^o.$$

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'C'), thì $\cos\alpha$ có giá trị bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

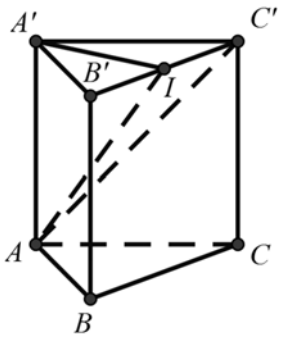
Do ABC.A'B'C' là hình lăng trụ đều nên B và C là hình chiếu vuông góc của B' và C' trên (ABC).

Tam giác AB'C' cân tại A. Gọi I là trung điểm của B'C' thì $AI \perp B'C'$.

Ta có $AA' \perp (A'B'C') \Rightarrow AA' \perp A'I \Rightarrow \Delta AA'I$ vuông tại A'.

Do đó: $AI^2 = AA'^2 + A'I^2 = 3a^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{15a^2}{4}.$

Suy ra $AI = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$



+ Diện tích $\Delta AB'C': S = \frac{1}{2}B'C'.AI = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}.$

+ Diện tích $\Delta ABC: S' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Áp dụng công thức diện tích hình chiếu của đa giác, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{S'}{S} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{4}{a^2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

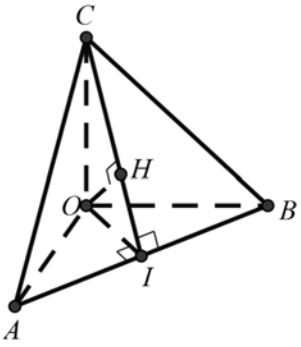
Ví dụ 4: Cho hình chóp tam giác O.ABC có OA, OB, OC vuông góc đôi một. Gọi α, β, γ là các góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OCA). Tổng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ có giá trị bằng

A. 2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (ABC).

Đặt $OA = a, OA = b, OC = c$ và $OH = h.$

Kéo dài CH cắt AB tại I, ta chứng minh được $AB \perp (OCI)$ và $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$

Suy ra góc giữa (ABC) và (OAB) là $\widehat{OIC} = \alpha.$

Trong ΔOCI ta có: $\widehat{OIC} = \widehat{COH} = \alpha$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Trong ΔOCH ta có: $\cos\alpha = \frac{OH}{OC} = \frac{h}{c}.$

Chứng minh tương tự: $\cos\beta = \frac{h}{a}, \cos\gamma = \frac{h}{b}.$

Do đó $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{h^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = h^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 1.$

Chú ý: Có thể chứng minh bài toán bằng cách dùng công thức diện tích hình chiếu như sau:

Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, OAB, OBC, OCA.

Do $OC \perp (OAB)$ nên ΔOAB là hình chiếu vuông góc của ΔABC lên (OAB).

Ta có: $S_1 = S\cos\alpha.$

Mặt khác ΔHAB là hình chiếu vuông góc của ΔOAB lên (ABC) nên:

$S_{HAB} = S_{OAB}.\cos\alpha = S_1\cos\alpha = S\cos^2\alpha.$

Chứng minh tương tự: $S_{HBC} = S\cos^2\beta; S_{HCA} = S\cos^2\gamma.$

Do đó: $S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HCA} = S\cos^2\alpha + S\cos^2\beta + S\cos^2\gamma.$

Hay $S = S(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = a$. Để góc tạo bởi (AB'C') và (ABC) bằng 60^o thì độ dài cạnh bên của lăng trụ bằng bao nhiêu?

A. a. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** 2a.

D. $a\sqrt{5}$.

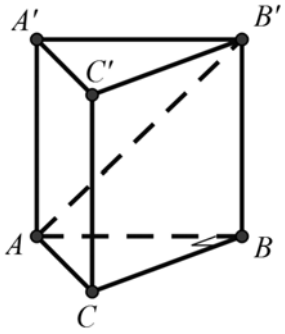
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp BB'$ nên $BC \perp (ABB'A')$.

Mà $B'C' // BC$ nên $B'C' \perp (ABB'A')$. Suy ra:

$B'C' \perp AB' \Rightarrow \Delta AB'C'$ vuông tại B'.



Gọi S là diện tích của $\Delta AB'C'$ và S' là diện tích ΔABC.

Từ giả thiết ta có:

$$S' = S\cos 60^o \Rightarrow \frac{a^2}{2} = S.\frac{1}{2}.$$ Do đó $S = a^2$.

Mà $S = \frac{1}{2}B'C'.AB' \Rightarrow AB' = 2a$.

Từ tam giác ABB' vuông tại B ta có:

$$BB'^2 = AB'^2 - AB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow BB' = a\sqrt{3}.$$

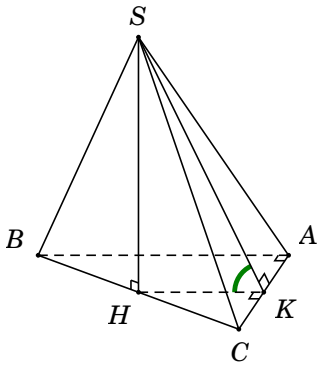
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 60^0$. **B.** $\tan\varphi = 2\sqrt{3}$. **C.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\tan\varphi = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \parallel AB$ nên $HK \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp HK \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK.$

Do đó $\widehat{(SAC),(ABC)} = \widehat{(SK,HK)} = \widehat{SKH}.$

Tam giác vuông ABC, có $AB = BC.\cos\widehat{ABC} = a \Rightarrow HK = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}.$

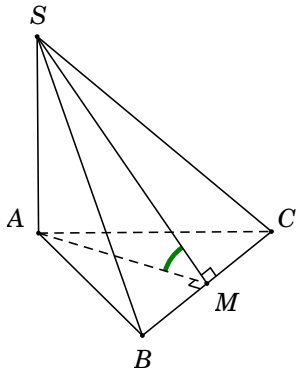
Tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} = 2\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 30^0.$ **B.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}.$ **C.** $\varphi = 60^0.$ **D.** $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.

Do đó $\widehat{(SBC),(ABC)}=\widehat{(SM,AM)}=\widehat{SMA}.$

Tam giác ABC đều cạnh a, suy ra trung tuyến $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Tam giác vuông SAM, có $\sin\widehat{SMA}=\dfrac{SA}{SM}=\dfrac{SA}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C

Gọi Q là trung điểm BC, suy ra $OQ\perp BC$.

Ta có $\begin{cases}BC\perp OQ\\BC\perp SO\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SOQ)\Rightarrow BC\perp SQ.$

Do đó $\widehat{(SBC),(ABCD)}=\widehat{SQ,OQ}=\widehat{SQO}.$

Tam giác vuông SOQ, có $\tan\widehat{SQO}=\dfrac{SO}{OQ}=\sqrt{3}.$

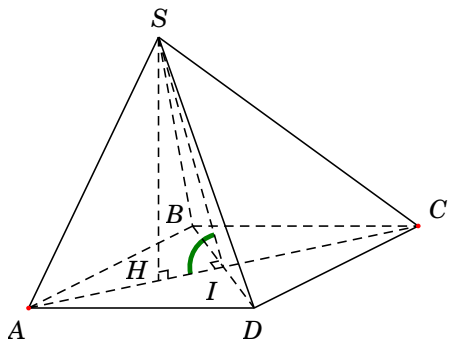
Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60^0.

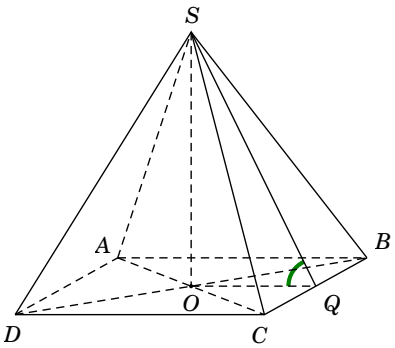
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60^0$, $SA=SB=SD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=\sqrt{5}.$ **B.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$ **C.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $\varphi=45^0.$

Lời giải

Chọn A





Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA=SB=SD$ nên suy ra H cách đều các đỉnh của tam giác ABD hay H là tâm của tam gác đều ABD.

Suy ra $HI=\frac{1}{3}AI=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $HI\perp BD$. Tam giác SBD cân tại S nên $SI\perp BD$.

Do đó $\widehat{(SBD),(ABCD)}=\widehat{SI,AI}=\widehat{SIH}$.

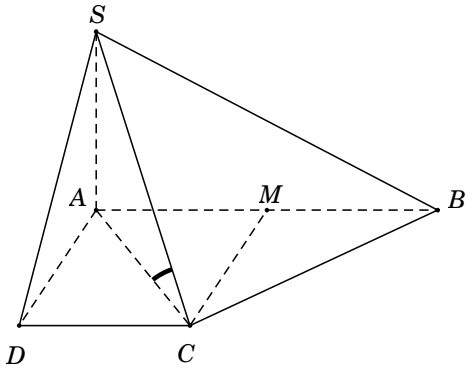
Trong tam vuông SHI, có $\tan\widehat{SIH}=\frac{SH}{HI}=\sqrt{5}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, $AB=2a$, $AD=CD=a$. Cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\varphi=45^0$. **C.** $\varphi=60^0$. **D.** $\varphi=30^0$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $AB\Rightarrow ADCM$ là hình vuông $CM=AD=a=\frac{AB}{2}$.

Suy ra tam giác ACB có trung tuyến bằng nửa cạnh đáy nên vuông tại C.

Ta có $\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp SC$.

Do đó $\widehat{(SBC),(ABCD)}=\widehat{SC,AC}=\widehat{SCA}$.

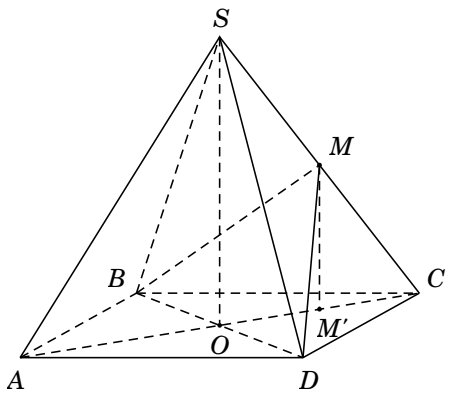
Tam giác SAC vuông tại A $\Rightarrow\tan\varphi=\frac{SA}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 90°$. **B.** $\varphi = 60°$. **C.** $\varphi = 45°$. **D.** $\varphi = 30°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M' là trung điểm $OC \Rightarrow MM' // SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD)$.

Theo công thức diện tích hình chiếu, ta có $S_{\Delta M'BD} = \cos\varphi . S_{\Delta MBD}$

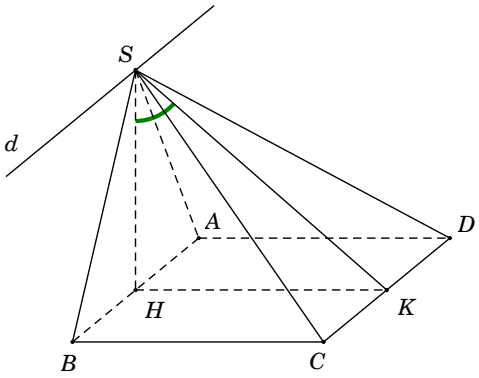
$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta M'BD}}{S_{\Delta MBD}} = \dfrac{BD.MO}{BD.M'O} = \dfrac{MO}{M'O} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^0$.

Câu 7: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB.

Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK.$

Từ đó suy ra $\widehat{(SAB),(SCD)} = \widehat{SH,SK} = \widehat{HSK}.$

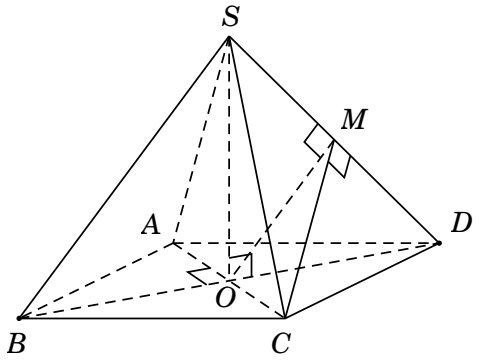
Trong tam giác vuông SHK , có $\tan \widehat{HSK} = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \varphi = \sqrt{6}.$ **B.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $\tan \varphi = \sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của SD . Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a$, $BD = a\sqrt{2}$ nên vuông tại $S \Rightarrow SB \perp SD \Rightarrow OM \perp SD.$

Do đó $\widehat{(SBD),(SCD)} = \widehat{OM,CM}$.

Ta có $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM$.

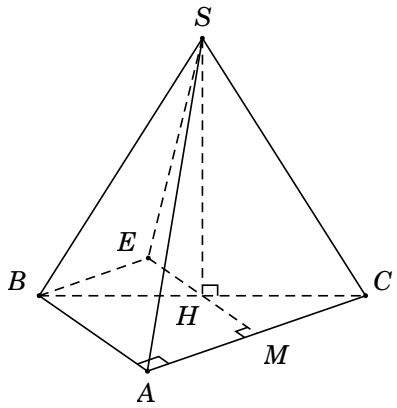
Tam giác vuông MOC , có $\tan \widehat{CMO} = \dfrac{OC}{OM} = \sqrt{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = AC = a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SB và AC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}.$ **B.** $\cot \varphi = \sqrt{7}.$ **C.** $\cot \varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}.$ **D.** $\cot \varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{4}.$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm BC. Tam giác ABC vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Theo giả thiết, ta có $SH \perp (ABC)$.

Qua B kẻ $Bx \parallel AC$. Khi đó $\widehat{SB,AC} = \widehat{SB,Bx}$.

Kẻ $HE \perp Bx$ tại E, cắt AC tại M.

Suy ra $AMEB$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} BE = AM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2} \\ HE = HM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2} \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} Bx \perp HE \\ Bx \perp SH \end{cases} \Rightarrow Bx \perp (SHE) \Rightarrow Bx \perp SE$.

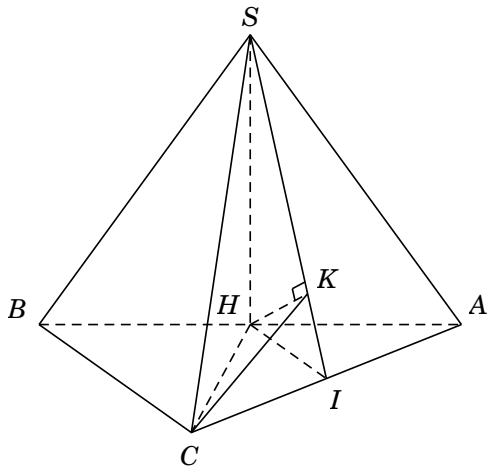
Tam giác vuông SEB, có $\cot \widehat{SBE} = \dfrac{BE}{SE} = \dfrac{AM}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C. Gọi H là trung điểm AB. Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = SH = a$. Tính cosin của góc α tọa bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp CH$. (1)

Tam giác ABC cân tại C nên $CH \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $CH \perp (SAB)$.

Gọi I là trung điểm $AC \longrightarrow HI \parallel BC \xrightarrow{BC \perp AC} HI \perp AC$. (3)

Mặt khác $AC \perp SH$ (do $SH \perp (ABC)$). (4)

Từ (3) và (4), suy ra $AC \perp (SHI)$.

Kẻ $HK \perp SI$ $(K \in SI)$. (5)

Từ $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $HK \perp (SAC)$.

Vì $\begin{cases} HK \perp (SAC) \\ HC \perp (SAB) \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng HK và HC.

Xét tam giác CHK vuông tại K, có $CH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}$.

Do đó $\cos\widehat{CHK} = \frac{HK}{CH} = \frac{2}{3}$.

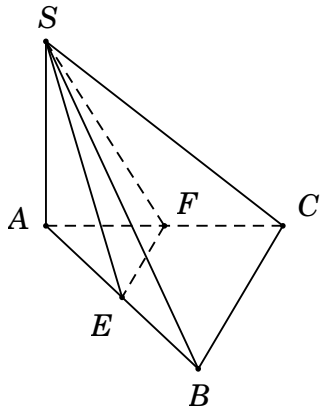
Nhận xét. Bài làm sử dụng lý thuyết "$\begin{cases} d_1 \perp (\alpha) \\ d_2 \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(\alpha),(\beta)} = \widehat{d_1, d_2}$". Nếu ta sử dụng lý thuyết quen thuộc "góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến" thì rất khó.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

A. $\widehat{CSF}$. **B.** $\widehat{BSF}$. **C.** $\widehat{BSE}$. **D.** $\widehat{CSE}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi (d) là đường thẳng đi qua S và song song với EF.

Vì EF là đường trung bình tam giác ABC suy ra $EF // BC$.

Khi đó $(d)// EF // BC \Rightarrow (SEF)\cap(SBC)=(d)$ (1).

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \ \ (SA \perp (ABC)) \\ AB \perp BC \end{cases}$ suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SE \\ BC \perp SB \end{cases}$ (2).

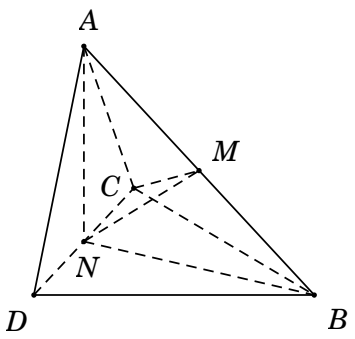
Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases} (d) \perp SE \\ (d) \perp SB \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SEF);(SBC)} = \widehat{(SE;SB)} = \widehat{BSE}.$

Câu 12: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x.$ Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ta có $AN \perp CD$ mà $(ACD) \perp (BCD)$ suy ra $AN \perp (BCD) \Rightarrow AN \perp BN$.

Tam giác ABC cân tại C, có M là trung điểm của AB suy ra $CM \perp AB$.

Giả sử $(ABC) \perp (BCD)$ mà $CM \perp AB$ suy ra $CM \perp (ABD) \Rightarrow CM \perp DM$.

Khi đó, tam giác MCD vuông cân tại $M \Rightarrow MN = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2} \Rightarrow AB = CD = 2x$.

Lại có $AN = BN = \sqrt{AC^2 - AN^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$, mà $AB^2 = AN^2 + BN^2$.

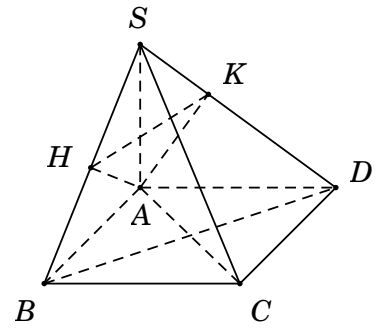
Suy ra $2\left(a^2 - x^2\right) = 4x^2 \Leftrightarrow a^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60^0.

A. $x = \dfrac{3a}{2}$. **B.** $x = \dfrac{a}{2}$. **C.** $x = a$. **D.** $x = 2a$.

Lời giải

Chọn C



Từ A kẻ AH vuông góc với SB $(H \in SB)$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$.

Từ A kẻ AK vuông góc với SD $(K \in SD)$, tương tự, chứng minh được $SK \perp (SCD)$.

Khi đó $SC \perp (AHK)$ suy ra $\widehat{(SBC);(SCD)} = \widehat{(AH;AK)} = \widehat{HAK} = 60^0$.

Lại có $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow AH = AK$ mà $\widehat{HAK} = 60^0$ suy ra tam giác AHK đều.

Tam giác SAB vuông tại S, có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \dfrac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{x^2}{x^2 + a^2}$.

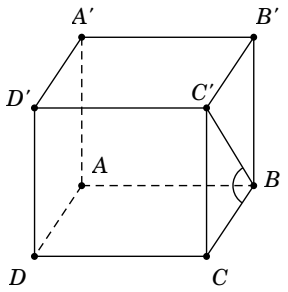
Vì $HK // BD$ suy ra $\frac{SH}{SB}=\frac{HK}{BD}\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^2+a^2}=\frac{xa}{\sqrt{x^2+a^2}.a\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=a.$

Câu 14: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng $a,$ góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng $60^0.$ Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

A. $2a.$ **B.** $3a.$ **C.** $a\sqrt{3}.$ **D.** $a\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn C



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều $\Rightarrow\begin{cases}AB\perp BB'\\AB\perp BC\end{cases}\Rightarrow AB\perp(BB'C'B).$

Khi đó $\begin{cases}(ABC')\cap(BB'C'B)=BC'\\(ABCD)\cap(BB'C'B)=BC\\(ABC')\cap(ABCD)=AB\end{cases}$ suy ra $\widehat{(ABC');(ABCD)}=\widehat{(BC';BC)}=\widehat{C'BC}=60^0.$

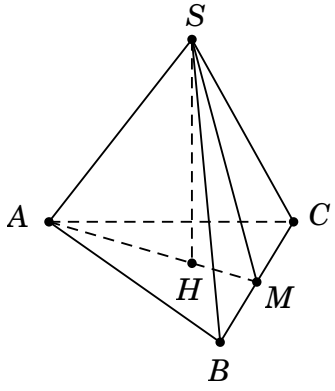
Đặt $AA'=x,$ tam giác BCC' vuông tại $C,$ có $\tan\widehat{C'BC}=\frac{CC'}{BC}\Rightarrow x=\tan 60^0.a=a\sqrt{3}.$

Câu 15: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a,$ góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60^0.$ Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

A. $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $SH=\frac{a\sqrt{2}}{3}.$ **C.** $SH=\frac{a}{2}.$ **D.** $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều có $SA=SB=SC$ nên suy ra H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Khi đó $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{(SM;AM)} = \widehat{SMA} = 60^0$.

Tam giác ABC đều có $AM = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \dfrac{AM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác AHM vuông tại H, có $\tan\widehat{SMA} = \dfrac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \tan 60^0 . \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy độ dài đường cao $SH = \dfrac{a}{2}$.

Dạng 4. Thiết diện

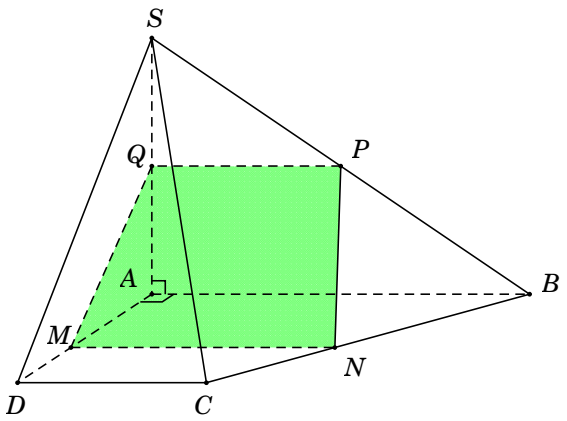
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, đáy lớn AB; cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi Q là điểm trên cạnh SA và $Q \neq A,\ Q \neq S$; M là điểm trên đoạn AD và $M \neq A$. Mặt phẳng (α) qua QM và vuông góc với mặt phẳng (SAD). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là:

A. tam giác. **B.** hình thang cân.

C. hình thang vuông. **D.** hình bình hành.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$. Mà $(\alpha) \perp (SAD)$ suy ra $AB \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại N.

Qua E kẻ đường thẳng song song với AB cắt SB tại P.

Khi đó thiết diện là hình thang $MNPQ$ (do $MN \parallel PQ$).

Vì $AB \perp (SAD)$ suy ra $MN \perp (SAD)$ nên $MN \perp EM$.

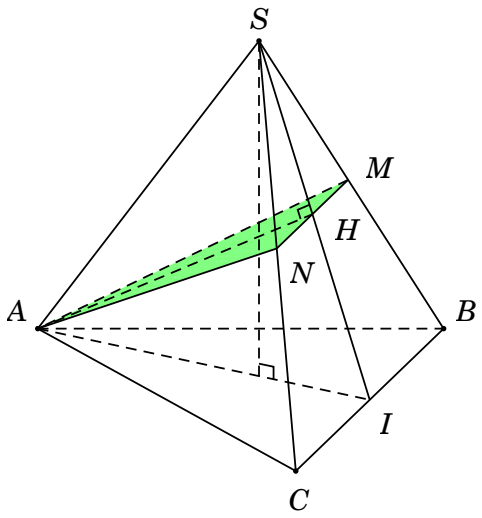
Do đó thiết diện $MNPE$ là hình thang vuông tại E và M.

Câu 2: Cho hình chóp đều $SABC$. Mặt phẳng (α) qua A, song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là:

A. tam giác đều. **B.** tam giác cân. **C.** tam giác vuông. **D.** tứ giác.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm BC.

Trong tam giác SAI kẻ $AH \perp SI$ $(H \in SI)$.

Trong tam giác SBC, qua H kẻ đường song song với BC, cắt SC ở M, cắt SB ở N.

Qua cách dựng ta có $BC \parallel (AMN)$. (1)

Ta có $\begin{cases} SI \perp AH \\ SI \perp MN \ (\text{do } SI \perp BC) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (AMN) \Rightarrow (SBC) \perp (AMN)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra thiết diện cần tìm là tam giác AMN.

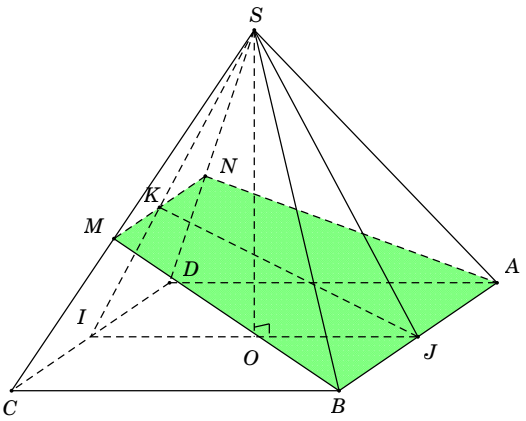
Dễ thấy H là trung điểm của MN mà $AH \perp (SBC)$ suy ra $AH \perp MN$. Tam giác AMN có đường cao AH vừa là trung tuyến nên nó là tam giác cân đỉnh A.

Câu 3: Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là:

A. tam giác cân. **B.** hình hình hành. **C.** hình thang vuông. **D.** hình thang cân.

Lời giải

Chọn D



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Trong tam giac SIJ kẻ $JK \perp SI$.

Trong tam giac SIJ, qua K kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC tại M, cắt SD tại N.

Ta dễ dàng chứng minh được $(ABMN) \perp (SCD)$.

Khi đó thiết diện cần tìm là hình thang $ABMN$.

Vì hình chóp đã cho là hình chóp đều nên suy ra $AN = BM$.

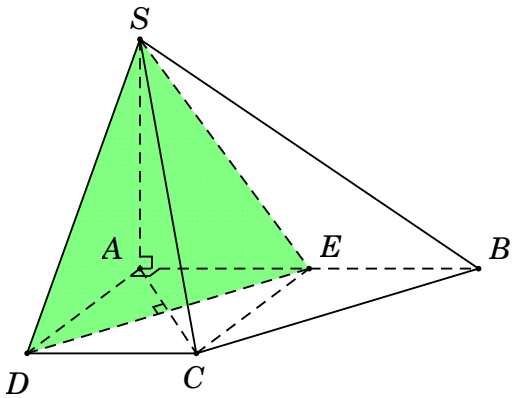
Vậy thiết diện là hình thang cân.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2a,\ AD = DC = a$; cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \frac{a^2}{2}$. **B.** $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \frac{a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E là trung điểm AB, suy ra $AECD$ là hình vuông nên $DE \perp AC$. (1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp DE$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $DE \perp (SAC) \Rightarrow (SDE) \perp (SAC)$.

Ta có $\left.\begin{array}{l}(SDE) \supset SD \\ (SDE) \perp (SAC)\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) \equiv (SDE)$.

Vậy thiết diện là tam giác SDE.

Ta có $SD = \sqrt{SA^2 + DA^2} = a\sqrt{2}$; $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = a\sqrt{2}$; $DE = AC = DC\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

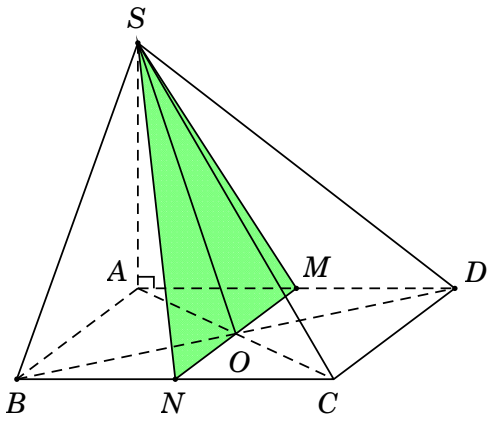
Do đó tam giác SDE đều có cạnh $a\sqrt{2}$ nên $S_{\Delta SDE} = \dfrac{SD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a,\ AD = 2a.$ Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $S = \dfrac{a^2}{2}.$ **D.** $S = a^2.$

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC. Khi đó:

- MN đi qua O.
- $\begin{cases} MN \perp AD \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAD)$.

Từ đó suy ra $(\alpha) \equiv (SMN)$ và thiết diện cần tìm là tam giác SMN.

Tam giác SMN vuông tại M nên $S_{\Delta SMN} = \dfrac{1}{2}SM.MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + \left(\dfrac{AD}{2}\right)^2}.AB = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}.$

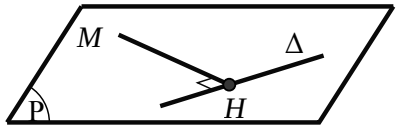
BÀI 5. KHOẢNG CÁCH

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

a) Định nghĩa:

Khoảng cách từ một điểm M đến đường thẳng Δ là khoảng cách giữa hai điểm M và H trong đó H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ.



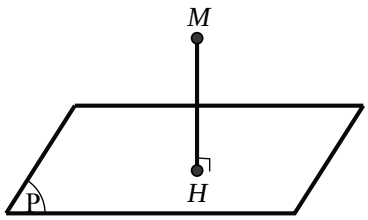
Ký hiệu: $d(M,\Delta)=MH$.

b) Chú ý: Nếu $M\in\Delta$ thì $d(M,\Delta)=0$.

2. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

a) Định nghĩa:

Khoảng cách từ một điểm M đến mặt phẳng (P) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P).



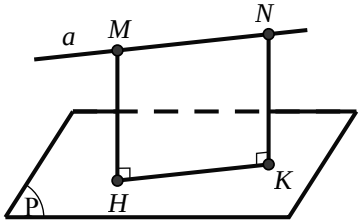
Kí hiệu: $d(M,(P))=MH$.

b) Chú ý: Nếu $M\in(P)$ thì $d(M,(P))=0$.

3. Khẳng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

a) Định nghĩa:

Khoảng cách từ một đường thẳng a đến một mặt phẳng (P) song song với a bằng khoảng cách từ một điểm tùy ý của a đến (P).



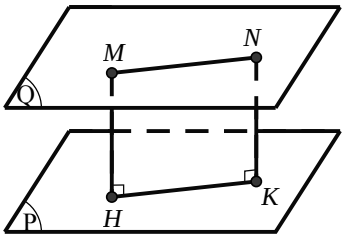
Tức là: $d(a,(P))=d(M,(P))$, $\forall M\in a$.

b) Chú ý: Khi $\left[\begin{array}{l}a\cap(P)\\a\subset(P)\end{array}\right.\Rightarrow d(a,(P))=0$.

4. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

a) Định nghĩa:

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm tùy ý của mặt này đến mặt kia.



Tức là: $d((P),(Q))=d(M,(Q))$, $\forall M\in(Q)$.

b) Chú ý: Khi $\left[\begin{array}{l}(P)\cap(Q)\\(P)\equiv(Q)\end{array}\right.\Rightarrow d((P),(Q))=0$.

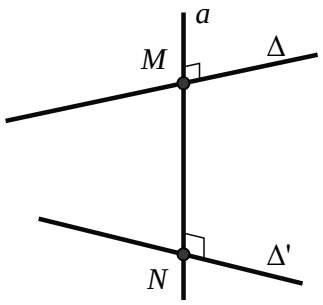
5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

a) Định nghĩa:

- Đường thẳng a gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' nếu a

cắt Δ ở M và cắt Δ' ở N đồng thời vuông góc với cả Δ và Δ'.

- Đoạn MN được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ'.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.



b) Chú ý:

- Khi $\begin{cases}\Delta \cap \Delta' \\ \Delta \equiv \Delta'\end{cases} \Rightarrow d(\Delta,\Delta') = 0.$
- Khi $\Delta // \Delta' \Rightarrow d(\Delta,\Delta') = d(M,\Delta')$ với $\forall M \in \Delta.$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1: KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương Pháp

Cách xác định:

Việc dựng hình chiếu của một điểm trên đường thẳng trong không gian, ta có thể làm theo 2 cách sau:

- Dựng mặt phẳng đi qua điểm và đường thẳng đã cho. Rồi trên mặt phẳng đó qua điểm đã cho dựng đoạn vuông góc từ điểm tới đường thẳng.
- Dựng một mặt phẳng đi qua điểm đã cho và vuông góc với đường thẳng, lúc đó giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng vừa dựng chính là hình chiếu của điểm trên đường thẳng.

Tính toán: Sau khi đã xác định được khoảng cách cần tính, ta dùng các hệ thức lượng trong tam giác, đa giác, đường tròn, … để tính toán.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a, AD = b, AA' = c.$ Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD' bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$ **B.** $\dfrac{b\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$

C. $\dfrac{c\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$ **D.** $\dfrac{abc\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

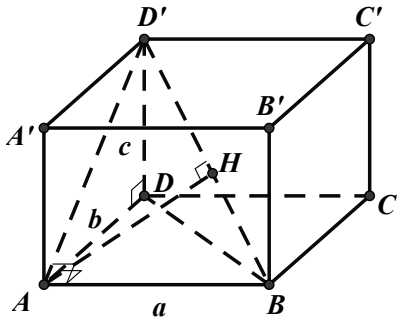
Do $AB \perp AD'$ nên tam giác ABD' vuông tại A. Trong tam giác ABD' kẻ đường cao AH thì $AH = d(A,BD').$

Trong $\Delta ADD'$, ta có:

$AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{b^2+c^2}$

$BD' = \sqrt{AB^2 + AD'^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Xét $\Delta ABD'$, ta được:



$AH.BD' = AB.AD'$

$\Rightarrow AH = \dfrac{AB.AD'}{BD'} = \dfrac{a\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Vậy $d(A,BD') = AH = \dfrac{a\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều tâm O, cạnh a, hình chiếu của C' trên (ABC) trùng với tâm của đáy. Cạnh bên CC' hợp với (ABC) góc 60^o. Gọi I là trung điểm của AB. Khoảng cách

Câu 2.1. từ điểm O đến đường thẳng CC' bằng

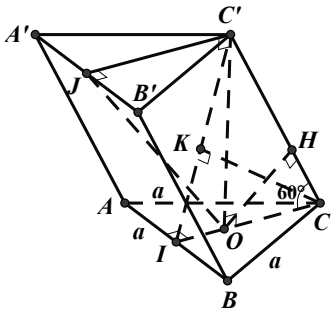
A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{4}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Theo giả thiết, suy ra: $C'O \perp (ABC)$, suy ra:

$OC = hch_{(ABC)}CC' \Rightarrow \left(\widehat{CC',(ABC)}\right) = \widehat{C'CO}$



Theo giả thiết, ta có: $\widehat{C'CO} = 60^o$

Trong (C'CO) dựng $OH \perp CC'$ tại H ta được:

$d(O,CC') = OH$.

Xét $\Delta COH \Rightarrow OH = OC.\sin 30^o = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{2}$

Suy ra: $d(O,CC') = \dfrac{a}{2}$.

Câu 2.2. Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng IC' bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{13}}{3}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Tính $d(C,IC')$

Trong (C'IC) dựng $CK \perp IC'$ tại K ta được: $d(C,IC') = CK$

Xét $\Delta CIC' \Rightarrow OC'.CI = CK.IC' \Rightarrow CK = \dfrac{OC'.CI}{IC'}$

Mà $OC' = OC.\tan 60^o = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a; CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$IC'^2 = IO^2 + OC'^2 = \dfrac{a^2}{12} + a^2 = \dfrac{13a^2}{12}$

Nên $d(C,IC') = CK = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}} = \dfrac{3a}{\sqrt{13}} = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$.

Câu 2.3. Khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng A'B' bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Tính $d(O,A'B')$

Vì $C'O \perp (ABC)//(A'B'C') \Rightarrow OC' \perp (A'B'C')$. Gọi J là trung điểm của $A'B' \Rightarrow C'J \perp A'B' \subset (A'B'C') \Rightarrow OJ \perp A'B'$ (định lí 3 đường vuông góc)

Tức là: $d(O,A'B') = OJ$

Xét $\Delta OC'J \Rightarrow OJ = \sqrt{OC'^2 + C'J^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

Tức là: $d(O,A'B') = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

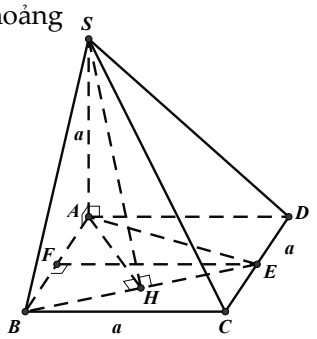
Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE bằng

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Vì $SA \perp (ABCD)$, trong mặt phẳng (ABCD) nếu dựng $AH \perp BE$ tại H thì $SH \perp BE$ (định lí 3 đường vuông góc). Tức là khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE bằng đoạn SH.



Ta có: $S_{ABE} = \frac{1}{2}AB.EF = \frac{1}{2}a.a = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}AH.BE$

Mà $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Nên $AH = \frac{a^2}{BE} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, mà ΔSAH vuông tại A, nên:

$$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của AB. Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM bằng

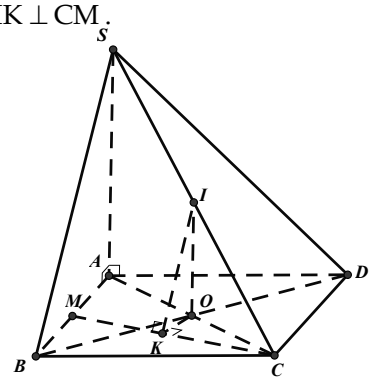
A. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{17}$. **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Do $IO \perp (ABCD)$ nên nếu dựng $OK \perp CM$ $(K \in CM)$ thì $IK \perp CM$.

Tức là: $d(I,CM) = IK$.



Mà $IK = \sqrt{OI^2 + OK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + OK^2}$

Do $S_{OMC} = \frac{1}{2}OK.MC$

$$\Rightarrow OK = \frac{2S_{OMC}}{MC} = \frac{2\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right)}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$$

Suy ra $IK = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{20}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, gọi O là tâm của đáy và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Gọi I là trung điểm của BC và K là hình chiếu của O lên SI. Khoảng cách từ O đến SA bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải

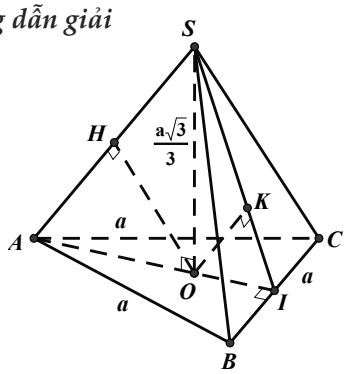
ĐÁP ÁN D

Dựng $OH \perp SA$ tại $H \Rightarrow d(O,SA) = OH$

Ta có: $OA = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = SO$,

suy ra: $OH = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Vậy $d(O,SA) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.



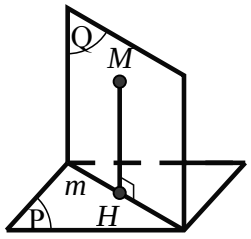
DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẲNG

1. Phương pháp

Để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, trước hết ta phải tìm hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng. Việc dựng hình chiếu của điểm trên mặt phẳng, ta hay dùng một trong các cách sau:

Cách 1:

- Tìm một mặt phẳng (Q) chứa M và vuông góc với (P).
- Xác định $m = (P) \cap (Q)$.
- Dựng $Mx \perp m = (P) \cap (Q)$, suy ra $H = Mx \cap m$ là điểm cần tìm.



Cách 2:

Giả sử đã biết đường thẳng $d \perp (\alpha)$, dựng $Mx // d \perp (\alpha)$, lúc đó $H = Mx \cap (P)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P).

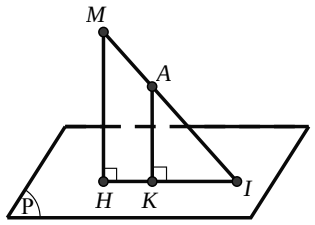
Cách 3:

Dựa vào tính chất trục của tam giác: Cho ΔABC nằm trên (P), hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, tức là nếu $MA = MB = MC$ khi đó hình chiếu của điểm M trên (P) là tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Chú ý. Khi tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ta cần biết vận dụng chú ý sau một cách khéo léo để từ việc phải tính khoảng cách từ một điểm này đến mặt phẳng (khó xác định) đến việc tính khoảng cách từ điểm khác đến mặt phẳng (dễ xác định hơn).

• Nếu $MA//(\alpha) \Rightarrow d(M,(\alpha)) = d(A,(\alpha))$.

• Nếu $MA \cap (\alpha) = I \Rightarrow \dfrac{d(M,(\alpha))}{d(A,(\alpha))} = \dfrac{IM}{IA}$.



2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng 30^o. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBM) với M là trung điểm CD bằng

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{4a}{3}$. **D.** $\dfrac{5a}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

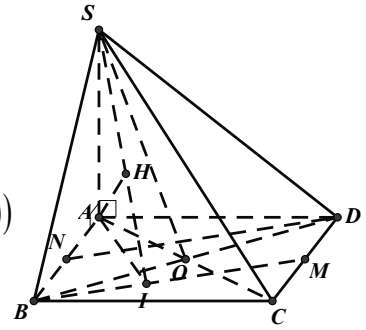
Dễ dàng chứng minh được $DB \perp (SAC) \Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của DS lên (SAC) là SO, góc giữa SD và (SAC) là $\widehat{DSO} = 30^o$. Đặt $DO = x$, ta có $SO = x\sqrt{3}$ (O là giao của AC và BD)

Từ $SO^2 = AO^2 + SA^2 \Rightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Gọi N là trung điểm của $AB \Rightarrow DN//BM$

Suy ra

$$d(D;(SBM)) = d(N;(SBM)) = \frac{1}{2}d(A;(SBM))$$



Kẻ $AI \perp BM$, $AH \perp SM$.

Từ đó chứng minh được

$$AH \perp (SBM) \Rightarrow d(A;(SBM)) = AH$$

Trong (ABCD): $S_{ABM} = S_{ABCD} - 2S_{BCM} = \dfrac{a^2}{2}$

Mà $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AI.BM \Rightarrow AI = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Khi đó: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2}{3}a \Rightarrow d(D;(SBM)) = \dfrac{a}{3}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$ và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa cạnh bên SC với đáy là 60^0. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{38}}{29}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{58}}{29}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{38}}{29}$. **D.** $\dfrac{3a}{29}$.

Hướng dẫn giải

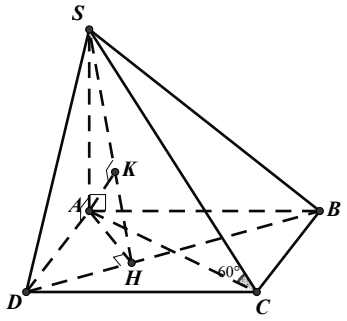
ĐÁP ÁN B

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD và K là hình chiếu vuông góc của A trên SH.

Ta có $SA \perp BD$ và $AH \perp BD$ nên

$BD \perp (SAH)$.

Suy ra $AK \perp BD$. Mà $AK \perp SH$ nên $AK \perp (SBD)$



Ta có: $d(C;(SBD)) = d(A;(SBD)) = AK$

Ta có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{29}{18a^2}$

Vậy $d(C;(SBD)) = AK = \frac{3a\sqrt{58}}{29}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

Gọi I là hình chiếu của A lên SC. Từ I lần lượt vẽ các đường thẳng song song với SB, SD cắt BC, CD tại P, Q. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của PQ với AB, AD. Khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{9}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

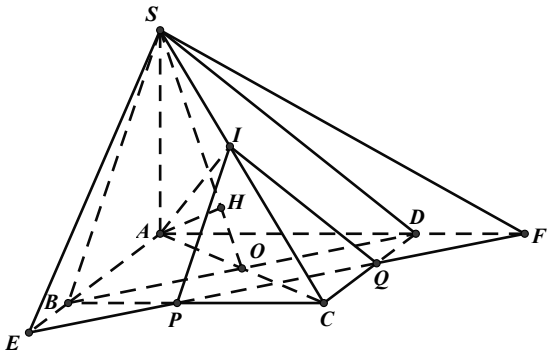
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

Qua A dựng $AH \perp SO$. Dễ dàng chứng minh được $AH \perp BD$

Khi đó $AH = d(A,(SBD))$



Trong tam giác vuông SAC, ta có:

$$CI.SC = AC^2$$

$$\Rightarrow \frac{IC}{SC} = \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{AC^2}{SA^2 + AC^2}$$

$$= \frac{AB^2 + BC^2}{SA^2 + (AB^2 + BC^2)} = \frac{2a^2}{2a^2 + 3a^2} = \frac{2}{5}$$

ΔCBS có $IP // SP \Rightarrow \frac{IP}{SB} = \frac{CP}{CB} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{2}{5}$

Áp dụng định lý Talet: $\frac{BE}{CQ} = \frac{BP}{PC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BE}{CQ} = \frac{BC - CP}{PC} = \frac{3}{2}$

Mà $AB = CD = CQ + QP = CQ + BE = \frac{5}{3}BE$

Do ΔAEF vuông tại A nên:

$$S_{AEF} = \frac{1}{2}AE.AF = \frac{1}{2}AE^2 = \frac{1}{2}(AB + BE)^2 = \frac{32}{25}AB^2 = \frac{32a^2}{25} \text{ (đvdt)}$$

$$\frac{DA}{DE} = \frac{5}{3} \Rightarrow d(E,(SBD)) = \frac{3}{5}d(A,(SBD))$$

Tam giác SAO vuông tại A, khi đó $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{7}$

Vậy $d(E,(SBD)) = \frac{3a\sqrt{21}}{7}$.

Ví dụ 4: Cho khối chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B, $BA = a, BC = 2a$, $SA = 2a$,

$SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{8a}{9}$. **B.** $\frac{a}{9}$. **C.** $\frac{2a}{9}$. **D.** $\frac{5a}{9}$.

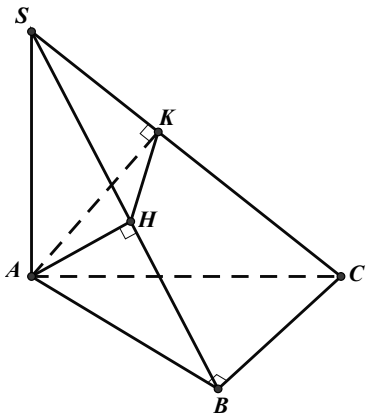
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN

Vì $BC \perp (SAB)$ nên: $AH \perp BC$, $AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH \perp HK$, $AH \perp SC$ mà $AK \perp SC$

$\Rightarrow SC \perp (AHK)$



Ta có: $AH = \frac{AB.SA}{SB} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$,

$AK = \frac{AC.SA}{SC} = \frac{2\sqrt{5}a}{3}$,

$HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \frac{8a}{3\sqrt{5}}$, $SK = \frac{4a}{3}$

$\Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{1}{6}.\frac{4a}{3}.\frac{2a}{\sqrt{5}}.\frac{8a}{3\sqrt{5}} = \frac{32}{135}a^3$

Mặt khác $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}a$ nên $S_{AHS} = \frac{4}{5}a^2$

Vậy khoảng cách cần tìm là: $d(K,(SAB)) = \frac{3V_{KSAH}}{S_{AHS}} = \frac{8a}{9}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^o$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{5a}{3}$. **B.** $\frac{4a}{3}$. **C.** $\frac{2a}{3}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải

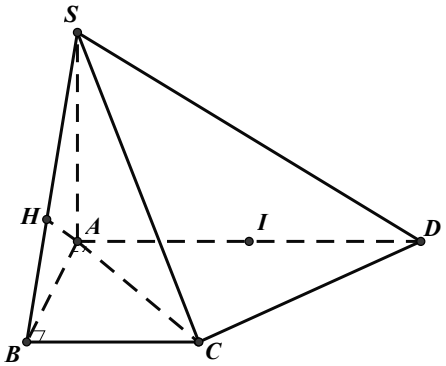
ĐÁP ÁN D

Gọi I là trung điểm AD.

Ta có $CI = IA = ID = \frac{AD}{2}$, suy ra ΔACD vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$.

Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$

nên ta có $CD \perp SD$ hay ΔSCD vuông. Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ B, H đến (SCD)



Ta có: $\Delta SAB \backsim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SA}{SH} = \frac{SB}{SA}$

$\Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}$

mà $\frac{SH}{SB} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$

Thể tích khối tứ diện S.BCD: $V_{SBCD} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$,

$$CD=\sqrt{CI^2+ID^2}=\sqrt{2}a\Rightarrow S_{SCD}=\frac{1}{2}SC.CD=\sqrt{2}a^2$$

Ta có: $V_{S.BCD}=\frac{1}{3}d_1.S_{SCD}\Rightarrow d_1=\frac{3.\frac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\sqrt{2}a^2}=\frac{a}{2}$

Vậy khoảng cách từ H đến (SCD) là $d_2=\frac{2}{3}d_1=\frac{a}{3}$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại A, $AB=AC=a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy một góc bằng 60^o. Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải

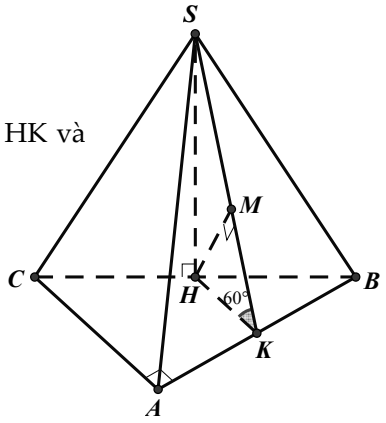
ĐÁP ÁN C

Gọi K là trung điểm của $AB\Rightarrow HK\perp AB$ (1)

Vì $SH\perp(ABC)$ nên $SH\perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB\perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $\widehat{SKH}=60^o$



Ta có $SH=HK.\tan\widehat{SKH}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì $IH//SB$ nên $IH//(SAB)$.

Do đó $d(I,(SAB))=d(H,(SAB))$

Từ H kẻ $HM\perp SK$ tại M

$\Rightarrow HM\perp(SAB)\Rightarrow d(H,(SAB))=HM$

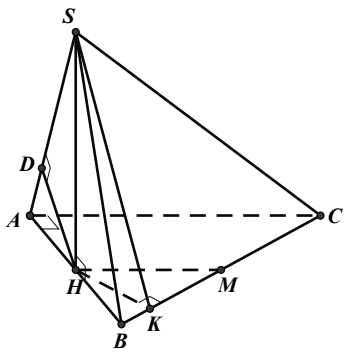
Ta có $\frac{1}{HM^2}=\frac{1}{HK^2}+\frac{1}{SH^2}=\frac{16}{3a^2}\Rightarrow HM=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 7: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A và $AB=2a$, $AC=2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30^o. Khoảng cách từ trung điểm M của cạnh BC đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{3a}{5}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $HK\perp BC$ tại K

$\Rightarrow BC\perp(SHK)$

Từ giả thiết ta có: $\widehat{SHK}=30^o$

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=4a$

$\sin\widehat{ABC}=\frac{AC}{BC}=\frac{HK}{HB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác SHK có $SH = HK\tan\widehat{SKH} = \dfrac{a}{2}$

Do M là trung điểm của cạnh BC nên MH // AC, do đó MH // (SAC).

Suy ra: $d\left(M,(SAC)\right) = d\left(H,(SAC)\right)$

Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $HD \perp SA$ tại D. Ta có:

$AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp DH \Rightarrow DH \perp (SAC)$

$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{HA^2} + \dfrac{1}{HS^2} \Rightarrow HD = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Vậy $d\left(M,(SAC)\right) = d\left(H,(SAC)\right) = HD = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 8: Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại A, $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60^o. Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

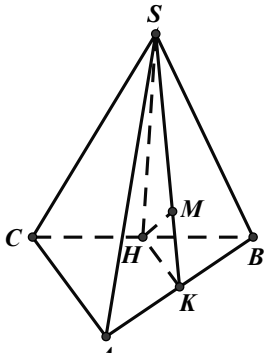
ĐÁP ÁN C

Gọi K là trung điểm của $AB \Rightarrow HK \perp AB \quad (1)$

Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB \perp SK$

Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK bằng $\widehat{SKH} = 60^o$.



Ta có: $SH = HK\tan\widehat{SKH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AB.AC.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Vì $IH // SB$ nên $IH // (SAB)$. Do đó $d\left(I,(SAB)\right) = d\left(H,(SAB)\right)$

Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại $M \Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d\left(H,(SAB)\right) = HM$

Ta có: $\dfrac{1}{HM^2} = \dfrac{1}{HK^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

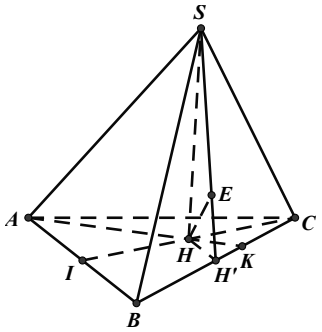
Vậy $d\left(I,(SAB)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

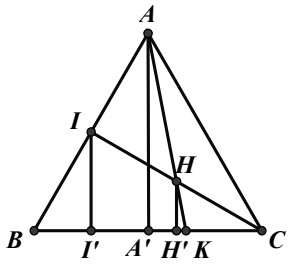
Ví dụ 9: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi I là trung điểm cạnh AB. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CI, góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{29}}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3\sqrt{29}}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B





Ta có: $CI=\sqrt{AC^2-AI^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $AH=\sqrt{AI^2+IH^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$, suy ra $SH=AH.\tan 60^o=\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$.

Gọi A', H', I' lần lượt là hình chiếu của A, H, I trên BC, E là hình chiếu của H trên SH' thì $HE\perp(SBC)\Rightarrow d\left(H;(SBC)\right)=HE$.

Ta có: $HH'=\dfrac{1}{2}II'=\dfrac{1}{4}AA'=\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$. Từ $\dfrac{1}{HE^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HH'^2}\Rightarrow HE=\dfrac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$

Vậy $d\left(H;(SBC)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{4\sqrt{29}}$.

Ví dụ 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a. Góc $\widehat{BAC}=60^o$, hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (SAC) hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60^o. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

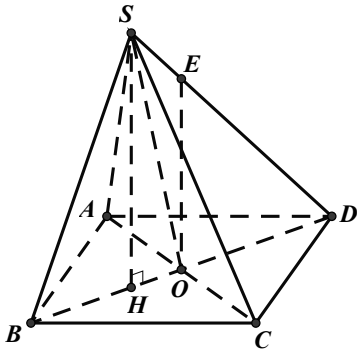
A. $\dfrac{a}{\sqrt{112}}$. **B.** $\dfrac{2a}{\sqrt{111}}$. **C.** $\dfrac{6a}{\sqrt{112}}$. **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{112}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Trong (SBD) kẻ $OE//SH$ khi đó ta có OC, OD, OE đôi một vuông góc.

Và: $OC=\dfrac{a}{2}$, $OD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OE=\dfrac{3a}{8}$



Áp dụng công thức:

$$\frac{1}{d^2\left(O,(SCD)\right)}=\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OD^2}+\frac{1}{OE^2}$$

$$\Rightarrow d=\frac{3a}{\sqrt{112}}$$

Mà $d\left(B,(SCD)\right)=2d\left(O,(SCD)\right)=\dfrac{6a}{\sqrt{112}}$.

DẠNG 3: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐƯỜNG THẲNG ĐẾN MẶT PHẲNG

1. Phương pháp

Việc tính khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nó, hoặc tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đều quy về việc tính khoảng cách từ điểm đến mặt

phẳng. Cần lưu ý việc chọn điểm trên đường hoặc trên mặt sao cho việc xác định khoảng cách đơn giản nhất.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Hình chiếu vuông góc của A trên (A′B′C′) trùng với trung điểm của B′C′.

Câu 1.1. Khoảng cách từ AA′ đến mặt bên $(BCC'B')$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

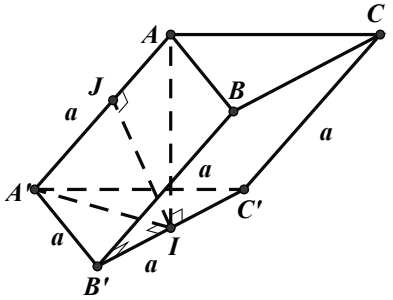
Ta có: $AA'//BB'\subset(BCC'B')$

$\Rightarrow AA'//(BCC'B')$

Gọi $J=hch_{AA'}I\Rightarrow IJ\perp AA'//BB'\Rightarrow IJ\perp BB'$

Mặt khác, theo giả thiết suy ra:

$$\begin{cases}B'C'\perp A'I\subset(AA'I)\\ B'C'\perp AI\subset(AA'I)\end{cases}\Rightarrow B'C'\perp(AA'I)$$



Suy ra: $IJ\perp B'C'$, tức là $IJ\perp(BCC'B')$,

mà $J\in AA'$ nên $d(AA',(BCC'B'))=IJ$

Trong $\Delta AA'I\Rightarrow IJ.AA'=AI.A'I\Rightarrow IJ=\frac{AI.A'I}{AA'}$.

Dễ thấy $A'I=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AI=\sqrt{AA'^2-AI^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{4}}=\frac{a}{2}$.

Suy ra: $IJ=\frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d(AA',(BCC'B'))=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 1.2. Khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ bằng

A. $\frac{a}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Hai đáy của lăng trụ song song nên $d((ABC),(A'B'C'))=d(A,(A'B'C'))$ mà $A\in(ABC)$ và $AI\perp(A'B'C')\Rightarrow d((ABC),(A'B'C'))=AI=\frac{a}{2}$.

Ví dụ 2: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có $AB=a$, $BC=b$, $CC'=c$.

2.1. Khoảng cách từ AA′ đến (BDD′B′) bằng

A. $\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **B.** $\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **C.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **D.** $\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Ta có: $AA'//BB'\subset(BDD'B')$

$\Rightarrow AA'//(BDD'B')$. Do đó:

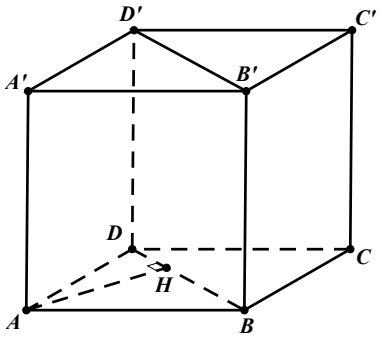
$d(AA',(BDD'B')) = d(A,(BDD'B'))$

Gọi $H = hch_{BD}A \Rightarrow AH \perp BD$ mà

$(BDD'B') \perp (ABCD)$ suy ra:

$AH \perp (BDD'B')$. Tức là:

$d(A,(BDD'B')) = AH$



Xét $\Delta ABD \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$

$= \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

nên $AH^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow AH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

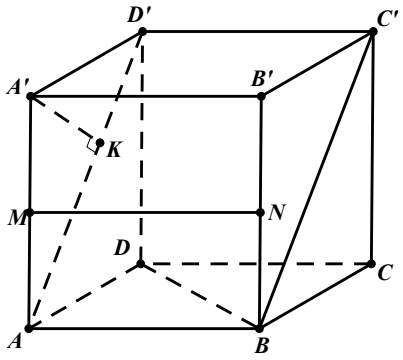
Vậy: $d(AA',(BDD'B')) = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2.2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA′, BB′. Khoảng cách từ MN đến (ABC′D′) bằng

A. $\dfrac{2abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **B.** $\dfrac{abc}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. **C.** $\dfrac{bc}{2\sqrt{a^2+b^2}}$. **D.** $\dfrac{2ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C



Ta có: $MN // AB \subset (ABC'D') \Rightarrow MN // (ABC'D')$. Suy ra:

$d(MN,(ABC'D')) = d(M,(ABC'D'))$, nhưng A′M cắt mặt phẳng (ABC′D′) tại A và M là trung điểm của AA′. Nên:

$$d(M,(ABC'D')) = \frac{1}{2}d(A',(ABC'D'))$$

Gọi $K = hch_{AD'}A' \Rightarrow A'K \perp AD'$ mà $(ABC'D') \perp (AA'D'D)$, suy ra:

$A'K \perp (ABC'D')$. Tức là: $d(A',(ABC'D')) = A'K$.

Xét $\Delta A'AD' \Rightarrow \dfrac{1}{A'K^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{A'D'^2} = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{c^2+b^2}{c^2b^2}$, nên:

$A'K^2 = \dfrac{c^2b^2}{c^2+b^2} \Rightarrow A'K = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$. Vậy $d(M,(ABC'D')) = \dfrac{bc}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

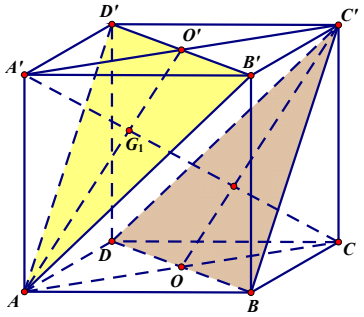
2.3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AD'B')$ và $(C'BD)$ bằng

A. $\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **B.** $\frac{abc}{\sqrt{ab+bc+ca}}$.

C. $\frac{abc}{2\sqrt{a^2+c^2+c^2}}$. **D.** $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D



Ta có: $B'D'//BD\subset(C'BD)\Rightarrow B'D'//(C'BD)$

Gọi $O=AC\cap BD, O'=A'C'\cap B'D'$

Suy ra: $AO'//C'O\subset(C'BD)\Rightarrow AO'//(C'BD)$

Mà $AO', B'D'\subset(AB'D'), AO'\cap B'D'=O'\Rightarrow(AD'B')//(C'BD)$

Ta đã chứng minh được A'C bị các mặt (AD'B'), (C'BD) chia thành ba đoạn bằng nhau.

Do đó: $d\left((AD'B'),(C'BD)\right)=d\left(G_1,(C'BD)\right)=d\left(A',(AD'B')\right)$

Vì A'A, A'B', A'D' đôi một vuông góc, nếu:

$$\frac{1}{d^2\left(A',(AD'B')\right)}=\frac{1}{A'A^2}+\frac{1}{A'B'^2}+\frac{1}{A'D'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

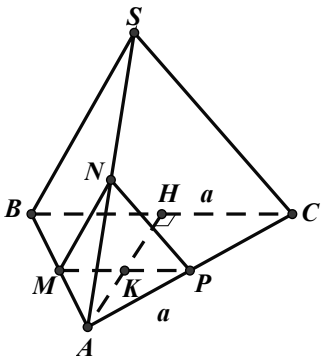
Vậy: $d\left(A',(AD'B')\right)=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}=d\left((AD'B'),(C'BD)\right)$

Ta cần chú ý kết quả sau: Nếu tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc thì:

$d\left(O,(ABC)\right)=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, mặt bên SBC vuông góc với đáy ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, SA, AC. Khoảng cách giữa hai (MNP) và (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.



Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Theo giả thiết, suy ra:

$MN//SB\subset(SAB)\Rightarrow MN//(SAB)$

$NP//SC\subset(SAC)\Rightarrow NP//(SAC)$

Mà $MN, NP\subset(MNP), MN\cap NP=N$ nên $(MNP)//(SBC)$.

Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow AH\perp BC$

(do ΔABC đều)

Mà $(ABC)\perp(SBC)$ và $AH\subset(ABC)$

$BC=(ABC)\cap(SBC)\Rightarrow AH\perp(SBC)$

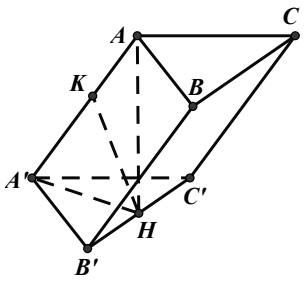
Gọi $K=AH\cap MP\Rightarrow KH\perp(SBC)\Rightarrow d(K,(SBC))=KH$

Vì $(MNP)//(SBC)$ và $K\in(MNP)$

Do đó: $d((MNP),(SBC))=d(K,(SBC))=KH=\frac{1}{2}AH=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^o. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (A′B′C′) thuộc đường thẳng B′C′. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy bằng

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy chính bằng AH.

Trong $\Delta HAA'$, ta có: $\widehat{A'}=30^o$.

$$AH=AA'.\sin\widehat{A'}=a.\sin 30^o=\frac{a}{2}.$$

DẠNG 4. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

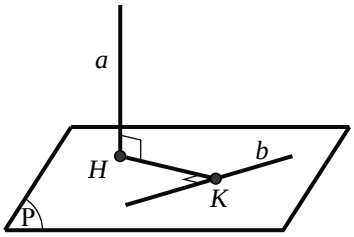
1. Phương pháp

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

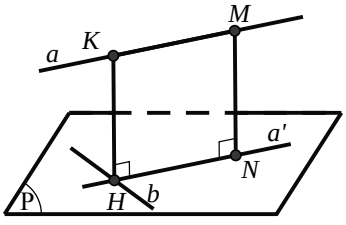
- *Cách 1:* Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và song song với b. Khoảng cách từ b đến (P) là khoảng cách cần tìm.
- *Cách 2:* Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm.
- *Cách 3:* Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

- *Cách 1:* Khi $a\perp b$
  + Dựng một $(P)\supset b, (P)\perp a$ tại H.
  + Trong (P) dựng $HK\perp b$ tại K.
  + Đoạn HK là đoạn vuông góc chung của a và b.

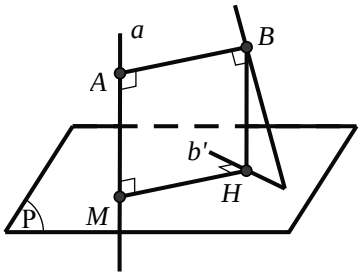


- *Cách 2:*
  + Dựng $(P)\supset b, (P)//a$.
  + Dựng $a'=hch_{(P)}a$, bằng cách lấy $M\in a$ dựng đoạn $MN\perp(\alpha)$, lúc đó a′ là đường thẳng đi qua N và song song a.
  + Gọi $H=a'\cap b$, dựng $HK//MN\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung.



- *Cách 3:*
  + Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với a tại điểm M.
  + Dựng hình chiếu b′ của b trên (P).
  + Dựng hình chiếu vuông góc H của M trên b′.

+ Từ H dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại điểm B.



+ Qua B dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại điểm A. Khi đó, AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD có $AD = 2AB$, $SA \perp (ABCD)$, $SC = 2a\sqrt{5}$ và góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng 60^o, M là trung điểm của cạnh BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SD bằng

A. $\frac{a\sqrt{510}}{17}$. **B.** $\frac{a\sqrt{51}}{17}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{510}}{17}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{510}}{17}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SC$ có hình chiếu trên $(ABCD)$ là AC

$\Rightarrow \left(\widehat{SC, ABCD}\right) = \left(\widehat{SC, AC}\right) = \widehat{SCA} = 60^o$

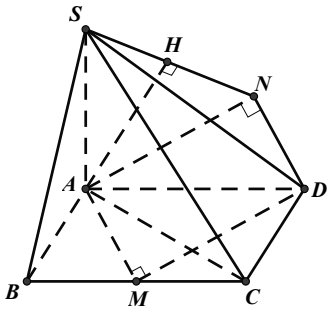
Ta giác SAC vuông tại A

$\Rightarrow AC = SC.\cos 60^o = a\sqrt{5}$

và $SA = SC.\sin 60^o = a\sqrt{15}$

Ta có $AB^2 + AD^2 = AC^2$

$\Leftrightarrow 5AB^2 = 5a^2 \Leftrightarrow AB = a$



Dựng hình bình hành AMDN và dựng $AH \perp SN$ tại H.

Ta có:

- $AM // DN \Rightarrow AM // (SDN) \Rightarrow d(AM, (SDN)) = d(A, (SDN))$
- $AM \perp MD$ nên AMDN là hình chữ nhật.

$\Rightarrow ND \perp AN$ mà $DN \perp SA \Rightarrow DN \perp (SAN)$

$\Rightarrow DN \perp AH$ mà $AH \perp SN \Rightarrow AH \perp (SDN) \Rightarrow d(A, (SDN)) = AH$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{15a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{17}{30a^2}$

$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{510}}{17}$. Vậy $d(AM, SD) = \frac{a\sqrt{510}}{17}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60^o$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CM bằng

A. $\frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{17}}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

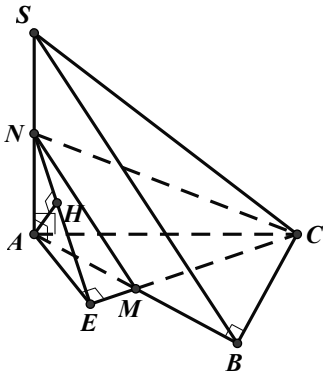
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Gọi N là trung điểm cạnh SA.

Do $SB//(CMN)$ nên

$$d(SB,CM)=d(SB,(CMN))$$
$$=d(B,(CMN))=d(A,(CMN))$$



Kẻ $AE\perp MC, E\in MC$ và kẻ

$AH\perp NE, H\in NE$

Chứng minh được

$$AH\perp(CMN)\Rightarrow d(A,(CMN))=AH$$

Tính $AE=\frac{2S_{AMC}}{MC}$ trong đó:

$$\left.\begin{array}{l}S_{\Delta AMC}=\frac{1}{2}AM.AC.\sin\widehat{CAM}=\frac{1}{2}a.4a.\frac{\sqrt{3}}{2}=a^2\sqrt{3}\\ MC=a\sqrt{13}\end{array}\right\}\Rightarrow AE=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

Tính được $AH=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\Rightarrow d(A,(CMN))=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\Rightarrow d(SB,CM)=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{29}}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A, D, SA vuông góc với đáy, $SA=AD=a$, $AB=2a$. Khoảng cách giữa AB và SC bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a\sqrt{2}$.

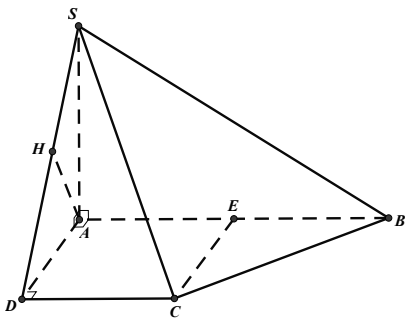
Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: AB // DC nên

$$d(AB,SC)=d(AB,(SDC)).$$

Trong mặt phẳng (SAD) từ A kẻ $AH\perp SD, H\in SD$ (1)



Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}DC\perp AD\\ DC\perp SA\end{array}\right\}\Rightarrow DC\perp(SAD)$$
$$\Rightarrow DC\perp AH\ \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH\perp(SCD)$

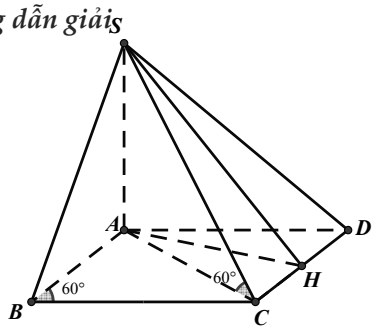
$$AH=d(AB,(SCD))=d(AB,SC)$$

Trong tam giác vuông SAD có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{SA^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow AH=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60^o$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, SC tạo với đáy một góc 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, SD bằng

A. $\frac{3a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{15}}$. **D.** $\frac{3a}{\sqrt{15}}$.

Hướng dẫn giải



ĐÁP ÁN D

$d\left(AB,SD\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)=\dfrac{3V_{S.ACD}}{S_{SCD}}$

Gọi H là trung điểm CD. Ta có: $CD\perp SH$.

Do đó $S_{SCD}=\dfrac{1}{2}CD.SH=\dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$

Vậy $d\left(AB,SD\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)=\dfrac{3V_{S.ACD}}{S_{SCD}}=\dfrac{3a}{\sqrt{15}}$.

Lưu ý: Ở trên ta đã sử dụng công thức $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}$. Đây là công thức thể tích của khối đa diện học ở chương trình 12 $\left(V=\dfrac{1}{3}B.h\right)$

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, $SA\perp\left(ABCD\right)$, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

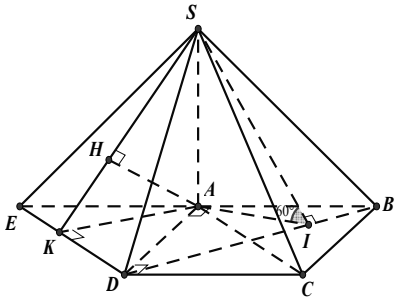
A. $\dfrac{3a}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Trong mặt phẳng (ABCD) đường thẳng qua D song song với AC, cắt đường thẳng AB tại E.

Trong tam giác ADE kẻ đường cao AK $\left(K\in DE\right)\Rightarrow\left(SAK\right)\perp\left(SDE\right)$. Dựng $AH\perp SK$ tại H, suy ra $AH\perp\left(SDE\right)$.



Do $AC//\left(SDE\right)$

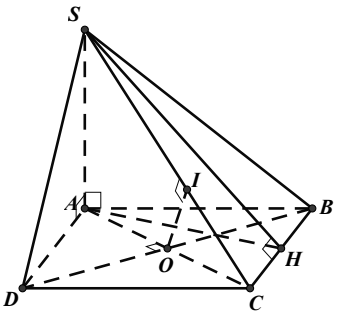
$\Rightarrow d\left(AC;SD\right)=d\left(A;\left(SDE\right)\right)=AH$

Ta có: $AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AH=\dfrac{3a}{4}\Rightarrow d\left(AC;SD\right)=\dfrac{3a}{4}$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD}=120^O$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^O. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{14}$. **B.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{8}$.

Hướng dẫn giải



ĐÁP ÁN C

Gọi $O=AC\cap BD$.

Vì $DB\perp AC$, $BD\perp SC$ nên $BD\perp\left(SAC\right)$ tại O.

Kẻ $OI\perp SC\Rightarrow OI$ là đường vuông góc chung của BD và SC.

Sử dụng hai tam giác đồng dạng ICO và ACS hoặc

đường cao của tam giác SAC, suy ra được $OI = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Vậy $d(BD,SC) = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Ví dụ 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45^o. Gọi E là trung điểm BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC theo a bằng

A. $\frac{a}{19}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{38}}{9}$. **C.** $\frac{a\sqrt{38}}{19}$. **D.** $\frac{a\sqrt{38}}{9}$.

Hướng dẫn giải

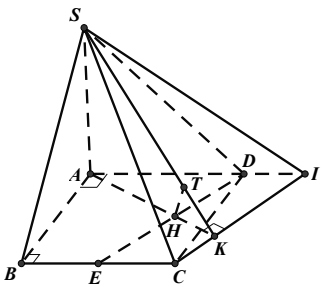
ĐÁP ÁN C

Từ C dựng $CI // DE \Rightarrow DE // (SCI)$.

Từ A dựng $AK \perp CI$, cắt ED tại H và CI tại K.

Trong (SAK) dựng $HT \perp SK$.

Do $CI \perp (SAK)$ nên $HT \perp (SCI)$



$AK = \frac{CD.AI}{CI} = \frac{3a}{\sqrt{5}}$,

$HK = \frac{1}{3}AK = \frac{a}{\sqrt{5}}$

$d(DE;SC) = d(H;(SCI))$

$= HT = \frac{SA.HK}{SK} = \frac{a\sqrt{38}}{19}$.

Ví dụ 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = AD = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

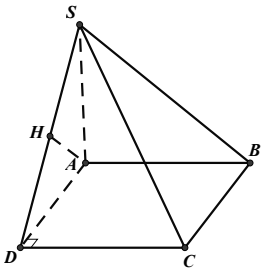
A. $\frac{a\sqrt{2}}{10}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Trong mặt phẳng (SAD),

vẽ $AH \perp SD, H \in SD$



Mặt khác ABCD là hình chữ nhật nên $CD \perp (SAD) \Rightarrow AH \perp (SCD)$

Vậy khoảng cách giữa AB và SC chính là AH.

Trong tam giác vuông SAD có AH là đường cao nên

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 9: Cho hình chóp S.ABC có tam giác SAB đều cạnh a, tam giác ABC cân tại C. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc hợp bởi cạnh SC và mặt đáy là 30^o. Tính khoảng cách của hai đường thẳng SA và BC.

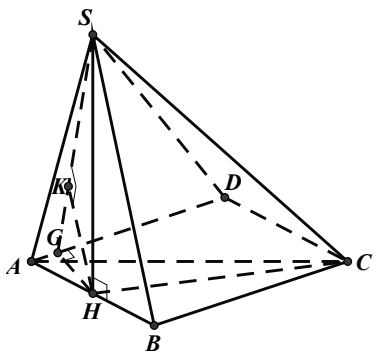
A. $\frac{3a}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{3a}{13}$. **C.** $\frac{a}{13}$. **D.** $\frac{2a}{13}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Gọi H là trung điểm cạnh AB, ta có SH là đường cao của hình chóp S.ABC và CH là đường cao của tam giác ABC. Từ giả thiết ta được $\widehat{SCH} = 30^o$. Tam giác SHC vuông tại H nên

$$\frac{SH}{CH} = \tan 30^o \Rightarrow CH = SH.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$$



Dựng hình bình hành ABCD, khi đó

$$d(BC,SA) = d(BC,(SAD))$$

$$= d(B,(SAD)) = 2d(H,(SAD))$$

Gọi G, K lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng AD và SG. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AD \perp HG \\ AD \perp SH \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (SHG) \Rightarrow HK \perp AD$$

Mà $HK \perp SG$ nên $HK \perp (SAD)$ hay $d(H,(SAD)) = HK$

Tam giác SHG vuông tại H nên:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HC^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{52}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$$

Vậy $d(BC,SA) = \frac{3a}{\sqrt{13}}$.

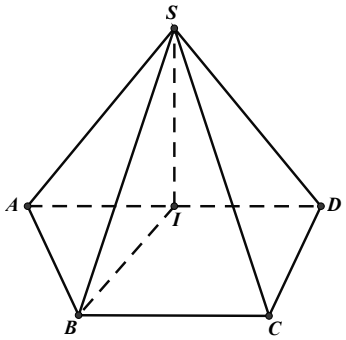
Ví dụ 10: Cho hình chóp S.ABCD, tứ giác ABCD là hình thang cân, hai đáy là BC và AD. Biết $SA = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{a}{7}$. **D.** $\frac{3a}{7}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Ta có: $S_{ABCD} = 3S_{ABI} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$



Xét ΔSBI vuông tại I có:

$$SI^2 = SB^2 - BI^2 = a^2 \Rightarrow SI = a$$

$$\left.\begin{array}{l} AD // BC \\ BC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow AD // (SBC)$$

$$\Rightarrow d(AD,BC) = d(AD,(SBC))$$

$$= d(I,(SBC)) = \frac{3V_{SIBC}}{S_{SBC}}$$

$$V_{SIBC}=\frac{1}{3}V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a^3\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12};$$

$$S_{SBC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

Vậy $d(AD,SB)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN TỐC ĐỘ

Câu 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Khoảng cách từ C đến AC bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách từ D đến đường thẳng SB bằng

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có $AB=14, BC=10, AC=16$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm O sao cho $OA=8$. Khoảng cách từ điểm O đến cạnh BC bằng

A. $8\sqrt{3}$. **B.** 16. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** 24.

Câu 4: Hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC=2a$, $\widehat{ABC}=60^o$. Gọi M là trung điểm cạnh BC và $SA=SC=SM=a\sqrt{5}$. Khoảng cách từ S đến cạnh AB bằng

A. $\frac{a\sqrt{17}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{19}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{19}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc BAC bằng 60^o. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD=2HB$. Đường thẳng SO tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60^o với O là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{3a\sqrt{7}}{15}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$. **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{11}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{7}}{15}$.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABC có các mặt ABC, SBC là những tam giác đều cạnh a. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^o. Hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) nằm trong tam giác ABC. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) theo a bằng

A. $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{13}}{11}$. **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{13}$.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật tâm I, có $AB=a, BC=a\sqrt{3}$. Gọi H là trung điểm AI. Biết SH vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác SAC vuông tại S. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{3a}{\sqrt{11}}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{13}}$. **C.** $\frac{3a}{\sqrt{15}}$. **D.** $\frac{5a}{\sqrt{17}}$.

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $BD=2a$; tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD) bằng

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB=a$, $BC=2a\sqrt{2}$. Hình chiếu

của S lên mặt phẳng đáy là trọng tâm của tam giác ABC. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^o. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 10: Cho hình chóp S.ABC có $AB = AC, BC = a\sqrt{3}, \widehat{BAC} = 120^o$. Gọi I là trung điểm cạnh AB. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của CI, góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{4a\sqrt{37}}{37}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{37}}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{37}}{37}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{37}}{37}$.

Câu 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm I của AC và BC. Mặt bên (SAB) hợp với đáy một góc 60^o. Biết rằng $AB = BC = a, AD = 3a$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAB) theo a bằng

A. $\frac{4a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{3}}{7}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh bằng a, góc $\widehat{DAB} = 120^o$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{3a}{7}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13: Trong mặt phẳng (P), cho hình thoi ABCD có độ dài các cạnh bằng a, $\widehat{ABC} = 120^o$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại G, lấy điểm S sao cho $\widehat{ASC} = 90^o$. Khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBD) theo a bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{17}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{37}}$.

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, $BD = 2a$; tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$.

Câu 15: Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^o$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy (ABCD) và (A'B'C'D') bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16: Cho tứ diện ABCD có $AB \perp (BCD), AB = 5a, BC = 3a, CD = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và AD.

Câu 16.1. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a}{4}$. **D.** $\frac{5a}{2}$.

Câu 16.2. Gọi (P) là mặt phẳng chứa MN và đi qua trung điểm K của AB. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) bằng

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $\frac{5a}{4}$. **D.** $\frac{5a}{2}$.

Câu 17: Cho hình chóp cụt tứ giác đều ABCD.A'B'C'D'. Đáy lớn ABCD có cạnh bằng a, đáy nhỏ A'B'C'D' có cạnh bằng b. Góc giữa mặt bên và đáy lớn bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình chóp cụt đều bằng

A. $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{(a+b)\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{(b-a)\sqrt{3}}{2}$.

Câu 18: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD') bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 19: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AH = 2HB$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD bằng

A. $\frac{a\sqrt{39}}{15}$. **B.** $\frac{6a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\frac{a\sqrt{39}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{39}}{11}$.

Câu 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của đoạn AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{25}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{45}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 21: Cho hình chóp S.ABC có $SC = \frac{a\sqrt{70}}{5}$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = a$ và hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SA bằng

A. $\frac{3a}{5}$. **B.** $\frac{4a}{5}$. **C.** $\frac{a}{5}$. **D.** $\frac{2a}{5}$.

Câu 22: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng 3a. Chân đường cao hạ từ đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AH$, góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\frac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{19}}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{39}}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 23: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của H và AD, góc giữa SB và mặt phẳng đáy (ABCD) là 45^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a bằng

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $a\sqrt{\frac{2}{5}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

.

Câu 24: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SD hợp với mặt đáy một góc 60^o và hình chiếu vuông góc H của đỉnh S lên mặt đáy là trung điểm của cạnh AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng

A. $\frac{a\sqrt{345}}{31}$. **B.** $\frac{a\sqrt{546}}{31}$. **C.** $\frac{a\sqrt{645}}{31}$. **D.** $\frac{a\sqrt{465}}{31}$.

Câu 25: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, với

$AB = BC = a$, $AD = 2a$ $(a > 0)$. Các mặt bên (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB bằng

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 26: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 60^o$ cạnh bên $SD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn BD sao cho $HD = 3HB$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{40}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{8}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 27: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại B và C, $AB = 2BC = 4CD = 2a$, giả sử M và N lần lượt là trung điểm AB và BC. Hai mặt phẳng (SMN) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh bên SB hợp với (ABCD) một góc 60^o. Khoảng cách giữa SN và BD bằng

A. $a\sqrt{\frac{3}{15}}$. **B.** $a\sqrt{\frac{3}{65}}$. **C.** $a\sqrt{\frac{3}{55}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{3}{35}}$.

Câu 28: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B. Biết $AD = 2AB = 2BC = 2a$, $SA = SD = SC = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

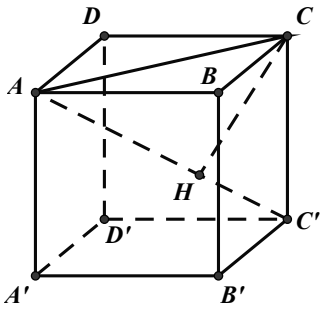
D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. ĐÁP ÁN C

Nhận xét rằng:

$$\Delta BAC' = \Delta CA'A = \Delta DAC' = \Delta A'AC$$
$$= \Delta B'C'A = \Delta D'C'A$$

nên khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau.



Hạ CH vuông góc với AC', ta được:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{CC'^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 2. ĐÁP ÁN A

Gọi H là giao điểm của AC và BD.

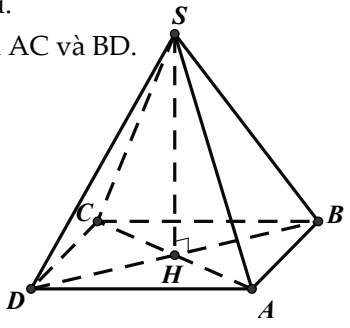
$AB = BC = CD = DA = a \Rightarrow ABCD$ là hình thoi.

Do đó $AC \perp BD$ đồng thời H là trung điểm của AC và BD.

ΔSAC cân tại $S \Rightarrow SH \perp AC$ (1)

ΔSBD cân tại $S \Rightarrow SH \perp BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $SH \perp (ABCD)$ (3)



Vì $SA = SB = SC = SD$

nên $HA = HB = HC = HD$

Suy ra ABCD là hình vuông (tứ giác đều) (4)

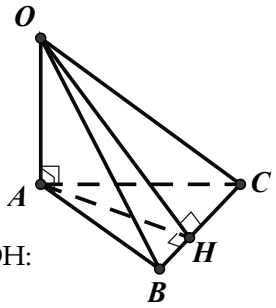
Từ (3) và (4) ta được S.ABCD là hình chóp tứ giác đều.

Xét ΔSBD ta có: $SA = SB = a, BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BD^2 = SB^2 + SD^2$.

Thế nên ΔSBD vuông tại S.

Suy ra $DS \perp SB$. Vậy $d(D,SB) = DS = a$.

Câu 3. ĐÁP ÁN B



Nửa chu vi tam giác ABC: $p = \dfrac{14+16+10}{2} = 20$

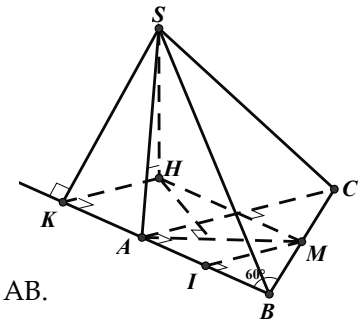
$$S_{ABC} = \sqrt{20.(20-14)(20-16)(20-10)} = 40\sqrt{3}$$

$$AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{80\sqrt{3}}{10} = 8\sqrt{3}$$

Nối OH thì $OH \perp BC$. Khoảng cách từ O đến BC là OH:

$$OH = \sqrt{OA^2 + AH^2} = 16$$

Câu 4. ĐÁP ÁN B



Chân đường cao hình chóp là tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC (Do $SA = SC = SM$).

Góc $\widehat{AMC} = 120^o$, nên H ở ngoài tam giác AMC và HAM là tam giác đều nên:

$$HM = AM = a$$

$$SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$$

Từ H kẻ $HK \perp AB$ thì $SK \perp AB$: SK là khoảng cách từ S đến cạnh AB.

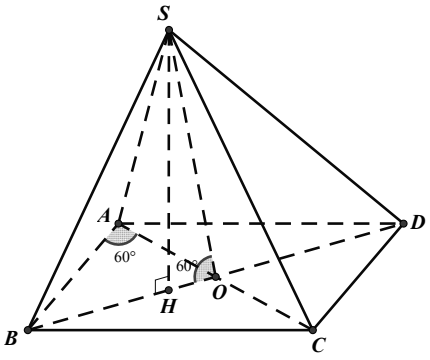
$$HK = MI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$ (do ABM là tam giác đều cạnh bằng a)

$$SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{19a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{19}}{2}.$$

Câu 5. Phân tích:

Ta có $d(B,(SCD)) = \dfrac{3}{2}d(H,(SCD)) = \dfrac{3}{2}.\dfrac{3V_{H.SCD}}{S_{SCD}} = \dfrac{9}{2}.\dfrac{V_{H.SCD}}{S_{SCD}} = \dfrac{9}{2}.\dfrac{V_{S.HCD}}{S_{SCD}}$

ĐÁP ÁN B



Trong tam giác SHO có:

$$SH = HO.\tan 60^o$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a}{2}$$

Ta có:

$$S_{HCD} = \frac{1}{2}CO.HD = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.(OD + OH)$$

$$= \frac{a}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{16}$$

$$V_{S.HDC} = \frac{1}{3}.SH.S_{HDC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2}{16} = \frac{a^3}{96} \quad (1)$$

Mặt khác: $SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \dfrac{a\sqrt{57}}{6}; SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

$$SD=\frac{a\sqrt{57}}{6};\ SC=\frac{a\sqrt{21}}{6};\ CD=a,\ p=\frac{SC+SD+CD}{2}$$

$$S_{SCD}=\sqrt{p(p-SC)(p-SD)(p-CD)}=\frac{a^2\sqrt{21}}{12}\ \ (3)$$

Từ (1), (2) ta có $d\left(B,(SCD)\right)=\frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Câu 6. ĐÁP ÁN B

Gọi M là trung điểm của BC.

Lập luận được góc giữa (SBC) và (ABC) là $\widehat{SMA}=60^o$

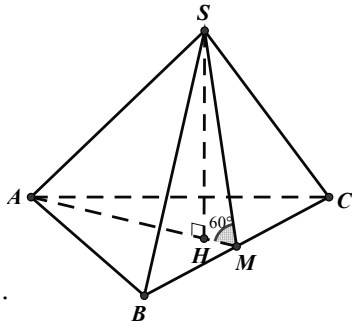
ΔSAM đều cạnh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow S_{SAM}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$$

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}BC.S_{SAM}=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

$$S_{SAC}=\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{13}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

$$d\left(B,(SAC)\right)=\frac{3V_{B.SAC}}{S_{SAC}}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{16.\frac{a^2\sqrt{39}}{16}}=\frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$



Câu 7. ĐÁP ÁN D

$SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp AC$

ΔSAC vuông tại $S\Rightarrow SH^2=HA.HC$

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a$, suy ra:

$HA=\frac{a}{2},\ HC=\frac{3a}{2}\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

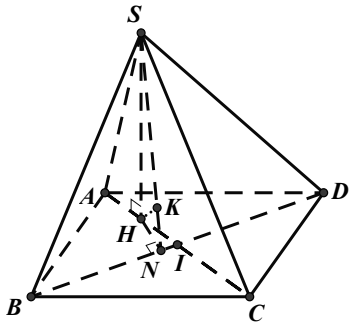
$CI=2HI\Rightarrow d\left(C,(SBD)\right)=2d\left(I,(SBD)\right)$

Hạ $HN\perp BD,\ N\in BD$ và $HK\perp SN,\ KN$.

Suy ra: $HK\perp(SBD)$ nên $d\left(H,(SBD)\right)=HK$

Ta có: $AB.AD=2S_{ABD}=2HN.BD\Rightarrow HN=\frac{AB.AD}{2BD}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có: $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HN^2}+\frac{1}{SH^2}\Rightarrow HK=\frac{3a}{2\sqrt{15}}$. Vậy $d\left(C,(SBD)\right)=2HK=\frac{3a}{\sqrt{15}}$.



Câu 8. ĐÁP ÁN D

Kẻ $SH\perp AC,\ H\in AC$

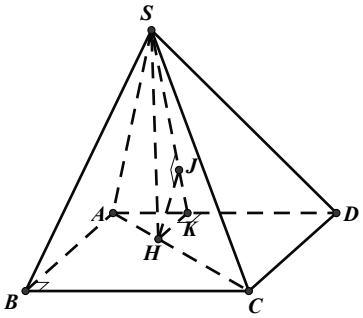
Do $(SAC)\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

$SA=\sqrt{AC^2-SC^2}=a,\ SH=\frac{SA.SC}{AC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có:

$AH=\sqrt{SA^2-SH^2}=\frac{a}{2}\Rightarrow CA=4HA$

$\Rightarrow d\left(C,(SAD)\right)=4d\left(H,(SAD)\right)$



Do $BC//(SAD) \Rightarrow d(B,(SAD)) = d(C,(SAD)) = 4d(H,(SAD))$

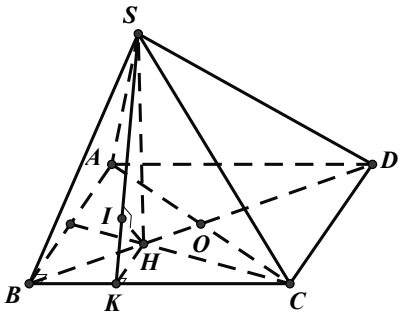
Kẻ $HK \perp AD\ (K \in AD)$, $HJ \perp SK\ (J \in SK)$

Chứng minh được $(SHK) \perp (SAD)$ mà $HJ \perp SK \Rightarrow HJ \perp (SAD)$

$\Rightarrow d(H,(SAD)) = HJ$; ΔAHK vuông tại $K \Rightarrow HK = AH\sin 45^o = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow HJ = \dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$. Vậy $d(B,(SAD)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 9. ĐÁP ÁN D



Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC và O là tâm của hình chữ nhật, ta có: $BH = \dfrac{2}{3}BO = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}AC$

$= \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(2\sqrt{2}a\right)^2} = a$

Ta có $SH \perp (ABCD)$ nên góc giữa SB và mặt phẳng (ABCD) là góc $\widehat{SBH} = 60^o$

Trong tam giác vuông SHB ta có:

$SH = BH\tan\widehat{SBH} = a.\tan 60^o = a\sqrt{3}$

Ta có: $d(A;(SBC)) = 2d(O;(SBC)) = 2.\dfrac{3}{2}d(H;(SBC)) = 3d(H;(SBC))$

Kẻ $HK \perp BC\ (K \in BC)$, $HI \perp SK\ (I \in SK)\ (1)$

Ta có: $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BC$

Do đó $BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp HI \qquad (2)$

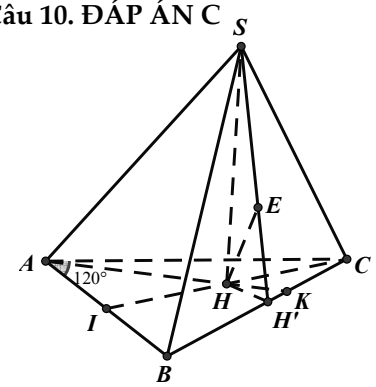
Từ (1) và (2) suy ra $HI \perp (SBC)$ nên $d(H;(SBC)) = HI$

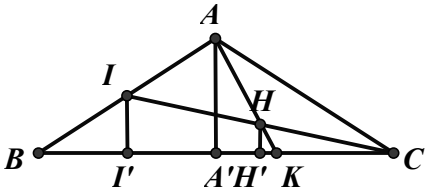
Ta có $HK = \dfrac{1}{3}DC = \dfrac{1}{3}a$. Trong tam giác vuông SHK ta có:

$$HI = \frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{3}.\dfrac{a}{3}}{\sqrt{3a^2 + \dfrac{a^2}{9}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{28}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

Vậy $d(A;(SBC)) = 3d(H;(SBC)) = 3HI = \dfrac{3a\sqrt{21}}{14}$.

Câu 10. ĐÁP ÁN C





Theo định lý Côsin trong tam giác ABC ta được $AB = AC = a$

Ta có $CI^2 = AI^2 + AC^2 - 2AI.AC.\cos 120^o = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow CI = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

Do đó: $AH^2 = \frac{2\left(AI^2 + AC^2\right) - CI^2}{4} = \frac{3a^2}{16} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Suy ra $SH = AH.\tan 60^o = \frac{3a}{4}$

AH cắt BC tại K. Gọi A', H', I' lần lượt là hình chiếu của A, H, I trên BC.

Ta có: $\frac{d\left(A;(SBC)\right)}{d\left(H;(SBC)\right)} = \frac{AK}{HK} = \frac{AA'}{HH'} = 4 \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = 4d\left(H;(SBC)\right)$

Gọi E là hình chiếu của H trên SH' thì $HE \perp (SBC) \Rightarrow d\left(H;(SBC)\right) = HE$

$HH' = \frac{1}{4}AA' = \frac{a}{8}$ và từ $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HH'^2} \Rightarrow HE = \frac{3a}{4\sqrt{37}}$

Vậy $d\left(A;(SBC)\right) = 4HE = \frac{3a\sqrt{37}}{37}$.

Câu 11. ĐÁP ÁN D

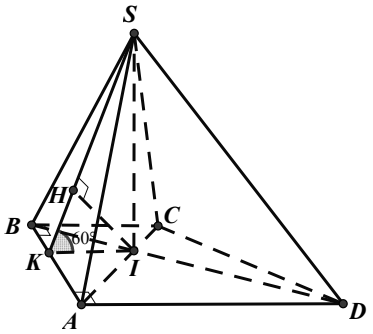
Gọi K là hình chiếu của I lên AB.

Suy ra $\widehat{SKI} = 60^o$.

Do $IK // AD \Rightarrow \frac{KI}{AD} = \frac{BI}{BD}$.

Mà $\frac{BI}{ID} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{BI}{BI + ID} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BI}{BD} = \frac{1}{4}$



Suy ra $\frac{KI}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow KI = \frac{3a}{4} \Rightarrow SI = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$

Gọi H là hình chiếu của I lên SK. Ta có $\left.\begin{matrix} AB \perp IK \\ AB \perp SI \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp IH$

Từ đó suy ra $IH \perp (SAB) \Rightarrow d\left(I;(SAB)\right) = IH$

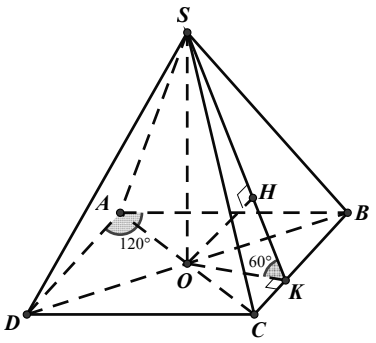
Mà do $DB = 4IB \Rightarrow d\left(D;(SAB)\right) = 4d\left(I;(SAB)\right) = 4IH$

Lại có $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IS^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{16}{27a^2} + \frac{16}{9a^2} \Rightarrow IH = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$. Vậy $d\left(D;(SAB)\right) = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12. ĐÁP ÁN B

$$\left.\begin{array}{l}(SAC)\perp(ABCD)\\(SBD)\perp(ABCD)\\(SAC)\cap(SBD)=SO\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow SO\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp BC$



Kẻ $OK\perp BC\Rightarrow BC\perp(SOK)$

$\Rightarrow((SBC),(ABCD))=\widehat{SKO}=60^o$

$AO\cap(SBC)=C$

$\Rightarrow d(A;(SBC))=2d(O;(SBC))$

$$\left.\begin{array}{l}(SBC)\perp(SOK)\\(SBC)\cap(SOK)=SK\\OH\perp SK\end{array}\right\}\Rightarrow OH\perp(SBC)\Rightarrow d(O;(SBC))=OH$$

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OK^2}+\frac{1}{OS^2}\Rightarrow OH=\frac{3a}{8}\Rightarrow d(A;(SBC))=\frac{3a}{4}.$$

Câu 13. ĐÁP ÁN B

$\widehat{ABC}=120^o\Rightarrow\widehat{BAD}=60^o\Rightarrow\Delta ABD$ đều cạnh a.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

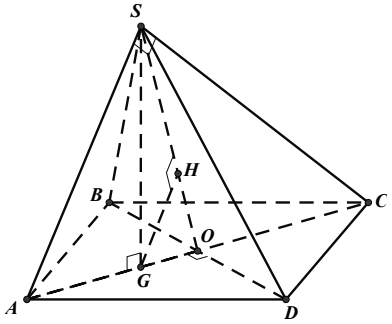
$\Rightarrow AO=\frac{a\sqrt{3}}{2};\ AG=\frac{2}{3}AO=\frac{a\sqrt{3}}{3};\ AC=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SG=\sqrt{GA.GC}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

(ΔSAC vuông tại S, đường cao SG).

Kẻ $GH\perp SO\Rightarrow GH\perp(SBD)$ vì

$BD\perp GH\subset(SAO)\Rightarrow d(G;(SBD))=GH$



ΔSGO vuông tại G, đường cao GH

$$\Rightarrow\frac{1}{GH^2}=\frac{1}{GS^2}+\frac{1}{GO^2}=\frac{27}{2a^2}\Rightarrow GH=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{27}}.$$

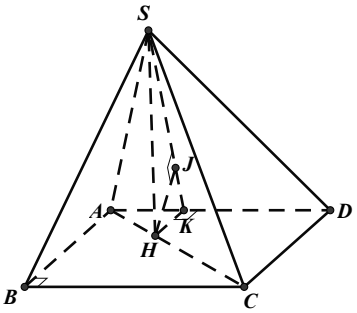
Câu 14. ĐÁP ÁN C

Kẻ $SH\perp AC,\ H\in AC$

Do $(SAC)\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

$SA=\sqrt{AC^2-SC^2}=a,$

$SH=\frac{SA.SC}{AC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$



Ta có:

$AH=\sqrt{SA^2-SH^2}=\frac{a}{2}\Rightarrow CA=4HA\Rightarrow d(C,(SAD))=4d(H,(SAD))$

Do $BC//(SAD)\Rightarrow d(B,(SAD))=d(C,(SAD))=4d(H,(SAD))$

Kẻ $HK \perp AD\ (K \in AD)$, $HJ \perp SK\ (J \in SK)$

Chứng minh được $(SHK) \perp (SAD)$ mà $HJ \perp SK \Rightarrow HJ \perp (SAD)$

$\Rightarrow d(H,(SAD)) = HJ$

ΔAHK vuông tại $K \Rightarrow HK = AH\sin 45^o = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

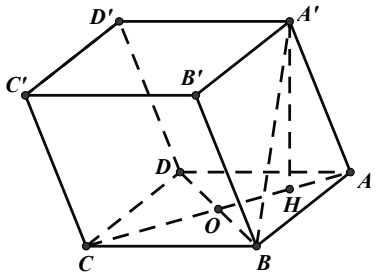
$\Rightarrow HJ = \dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$. Vậy $d(B,(SAD)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 15. ĐÁP ÁN C

Hạ $A'H \perp AC$, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp A'O \end{cases} \Leftrightarrow BD \perp (OAA')$$

$\Rightarrow BD \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$



Và vì $(ABCD)//(A'B'C'D')$ nên $A'H$ chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

Nhận xét rằng hình chóp A'.ABD là hình chóp đều, nên ta lần lượt có:

$$AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

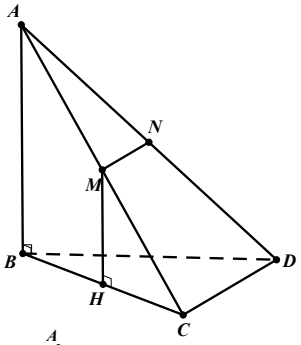
Câu 16.1. ĐÁP ÁN D

$$\left.\begin{matrix} MN//CD \\ CD \subset (BCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN//(BCD)$$

$$\left.\begin{matrix} \text{Từ M kẻ } MH//AB \\ AB \perp (BCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MH \perp (BCD)$$

Vậy: $MH = d(MN,(BCD))$

ΔABC cho: $MH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{5a}{2}$.

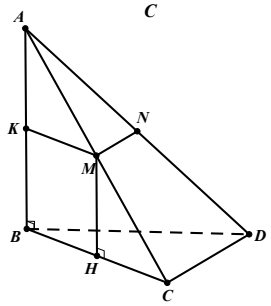


Câu 16.2. ĐÁP ÁN D

Tính $d((P),(BCD))$:

$$\left.\begin{matrix} MN//CD \\ MK//BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow (P)//(BCD)$$

$$\left.\begin{matrix} M \in (P) \\ MH \perp (BCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MH = d((P),(BCD)) = \frac{5a}{2}.$$



Câu 17. ĐÁP ÁN C

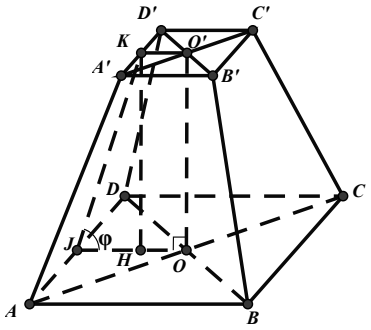
Lưu ý: *Cần chú ý rằng, trong hình chóp cụt đều thì các mặt bên là những hình thang cân bằng nhau, các góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng nhau.*

Gọi O, O′ lần lượt là tâm của hai hình vuông ABCD và A′B′C′D′; K và J lần lượt là trung điểm của A′D′ và AD.

Gọi H là hình chiếu của K trên (ABCD) thì $KH \perp OJ$ tại H và KH là khoảng cách cần tìm.

Gọi φ là góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp cụt thì

$\varphi = \widehat{KJH} = 60^o$.



Ta có: $O'K = \dfrac{b}{2}; OJ = \dfrac{a}{2}$.

KHOO′ là hình chữ nhật nên: $JH = OJ - O'K = \dfrac{a-b}{2}$

$\Delta HJK : \tan\varphi = \dfrac{KH}{HJ} = \dfrac{2.KH}{a-b} \Rightarrow KH = \dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$.

Câu 18. *Phân tích:*

Chứng minh $B'D \perp BC'$:

$$\begin{cases} BC' \perp CB' \\ BC' \perp DC\left(DC \perp (BB'C'C)\right) \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (CDA'B') \Rightarrow BC' \perp B'D \qquad (1)$$

Chứng minh $A'C' \perp B'D$:

$$\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp BB'\left(BB' \perp (A'B'C'D')\right) \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BDD'B') \Rightarrow A'C' \perp B'D \quad (2)$$

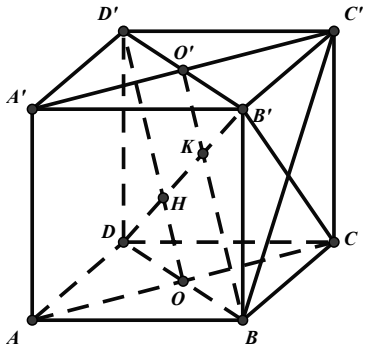
Xác định giao điểm K và H:

$$(BC'A') \cap (BB'D'D) = BO' \left(O' = A'C' \cap B'D'\right) \left.\begin{matrix} (BB'D'D) \supset B'D \\ B'D \cap BO' = K \end{matrix}\right\} \Rightarrow B'D \cap (BC'A') = K$$

$$(ACD') \cap (BB'D'D) = D'O \left(O = AC \cap BD\right) \left.\begin{matrix} (BB'D'D) \supset B'D \\ B'D \cap D'O = H \end{matrix}\right\} \Rightarrow B'D \cap (ACD') = H$$

ĐÁP ÁN B

Từ (1) và (2) suy ra $B'D \perp (BC'A')$ (3)



Mặt khác:

$$\left.\begin{matrix} BC' // AD' \\ BA' // CD' \end{matrix}\right\} \Rightarrow (BC'A') // (ACD') \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra: $B'D \perp (ACD')$ (5)

Ta có: $B'D \cap (BA'C') = K, B'D \perp (BC'A')$,

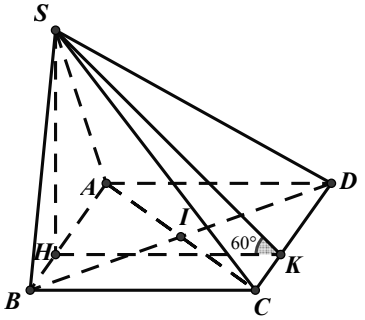
$B'D \cap (D'AC) = H, B'D \perp (ACD')$

Do đó KH là khoảng cách cần tìm.

$\Delta BDB' : B'D^2 = BD^2 + B'B^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow B'D = a\sqrt{3}$

Dễ thấy trong hình chữ nhật BB′D′D ta có: $KH = \dfrac{1}{3}B'D = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 19. ĐÁP ÁN A



Kẻ $HK \perp CD\ (K \in CD)$. Khi đó:

$$\left.\begin{array}{l} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK$$

Vậy góc giữa (SCD) và (ABCD) là góc $\widehat{SKH} = 60^o$

Trong tam giác vuông SHK:

$SH = HK \tan 60^o = 2a\sqrt{3}$

Vì $(SBC) // AD \Rightarrow d(AD,SC) = d(A,(SBC))$.

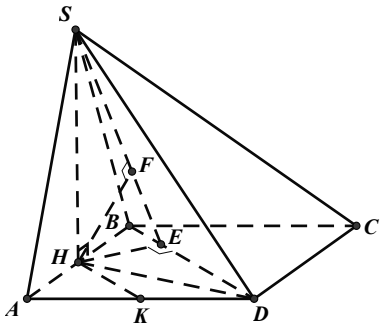
Trong (SAB) kẻ $AI \perp SB$, khi đó:

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AI$$. Mà $SB \perp AI \Rightarrow AI \perp (SBC)$

Vậy $d(AD,SC) = d(A,(SBC)) = AI = \dfrac{SH.AB}{SB} = \dfrac{2a\sqrt{3}.3a}{\sqrt{12a^2 + a^2}} = \dfrac{6a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 20. ĐÁP ÁN D

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HD$. Ta có:



$$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{SD^2 - (AH^2 + HD^2)}$$

$\Rightarrow SH = a\sqrt{3}$

$HK // BD \Rightarrow HK // (SBD)$

$\Rightarrow d(HK,SD) = d(H,(SBD))$

Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên BD và F là hình chiếu vuông góc của H trên SE.

Ta có: $BD \perp HE$ và $BD \perp SH$ nên $BD \perp (SHE) \Rightarrow BD \perp HF$ mà $HF \perp SE$ do đó $HF \perp (SBD)$. Suy ra $d(H,(SBD)) = HF$

Ta có: $HE = HB \sin \widehat{EBH} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow HF = \dfrac{HS.HE}{\sqrt{HS^2 + HE^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.

Vậy $d(HK,SD) = \dfrac{a\sqrt{3}}{5}$.

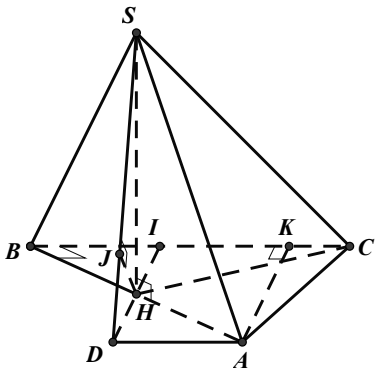
Câu 21. ĐÁP ÁN B

Tam giác AHC vuông cân cạnh a nên

$CH = a\sqrt{2}$

Tam giác SHC vuông tại H nên

$SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$



Dựng $AK \perp BC$, $HI \perp BC$. Đường thẳng qua A song song với BC cắt IH tại D $\Rightarrow BC // (SAD)$

$\Rightarrow d(BC,SA) = s(BC,(SAD)) = d(B,(SAD)) = 2d(H,(SAD))$

$AD \perp (SDH) \Rightarrow (SAD) \perp (SDH)$.

Kẻ $HJ \perp SD \Rightarrow HJ \perp (SAD) \Rightarrow d(H,(SAD)) = HJ$

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AK = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow HD = \frac{a}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{HD^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HJ = \frac{2a}{5}$. Vậy $d(BC,SA) = \frac{4a}{5}$.

Câu 22. ĐÁP ÁN A

Nhận thấy $SH \perp (ABC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow \widehat{SCH} = 60^o$ là góc giữa SC và mặt phẳng (ABC)

Ta có $HC^2 = AC^2 + AH^2 - 2AC.AH.\cos 60^o = 9a^2 + a^2 - 2.3a.a.\frac{1}{2} = 7a^2$

$\Rightarrow HC = a\sqrt{7} \Rightarrow SH = HC.\tan 60^o = a\sqrt{21}$

Dựng $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow AD // CB \Rightarrow BC // (SAD)$

$\Rightarrow d(SA;BC) = d(BC;(SAD)) = d(B;(SAD)) = 3d(H;(SAD))$

Dựng $HE \perp AD$ tại $E \Rightarrow AD \perp (SHE)$

$\Rightarrow (SAD) \perp (SHE)$ (theo giao tuyến SE)

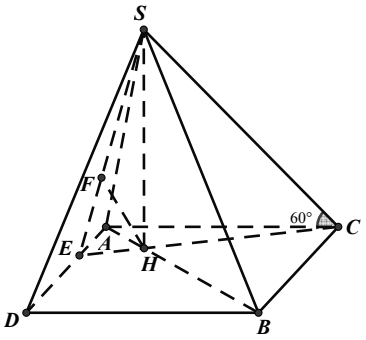
Dựng $HF \perp (SE)$ tại $F \Rightarrow HF \perp (SAD) \Rightarrow HF = d(H;(SAD))$

Ta có: $HE = AH.\sin 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

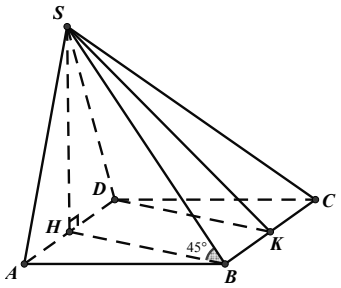
$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{21a^2} = \frac{29}{21a^2}$

$\Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{21}}{\sqrt{29}} \Rightarrow d(B;(SAD)) = \frac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$

Vậy $d(SA;BC) = \frac{3a\sqrt{21}}{\sqrt{29}}$.



Câu 23. ĐÁP ÁN B



Do $SH \perp (ABCD)$ nên góc giữa SB và mặt phẳng đáy (ABCD) là góc $\widehat{SBH} = 45^o$. Ta có ΔSBH vuông cân tại H nên $SH = BH = a\sqrt{2}$

Gọi K là trung điểm của BC, ta có $BH // DK \Rightarrow BH // (SDK)$.

Suy ra: $d(BH;SD) = d(BH;(SDK)) = d(H;(SDK))$

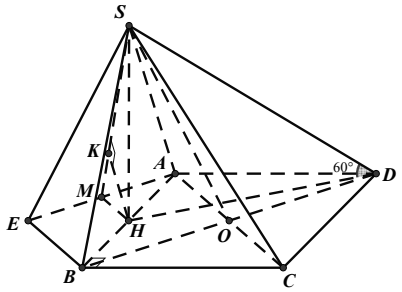
Tứ diện SHDK vuông tại H nên $\frac{1}{d^2(H;(SDK))} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{5}{2a^2}$

Vậy $d(BH;SD) = d(H;(SDK)) = a\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Câu 24. ĐÁP ÁN D

Ta có $SH \perp (ABCD)$.

Tính $HD = \frac{a\sqrt{5}}{2}; SH = \frac{a\sqrt{15}}{2}$



Dựng E sao cho AEBO là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của AE. Hạ HK vuông góc với SM.

Chứng minh $HK \perp (SAE)$ và tính được $HK = \frac{a\sqrt{465}}{62}$

Tính được $d(BD;SA) = 2HK = \frac{a\sqrt{465}}{31}$.

Câu 25. ĐÁP ÁN A

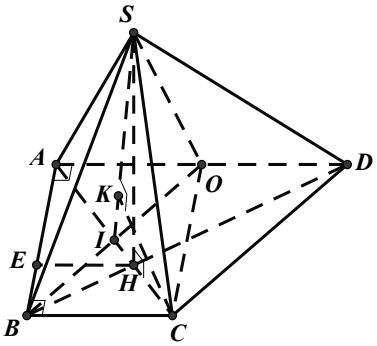
Gọi $H = AC \cap BD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và

$BH = \frac{1}{3}BD$

Kẻ $HE \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHE)$, hay

$((SAB);(ABCD)) = \widehat{SEH} = 60^o$

Mà $HE = \frac{1}{3}AD = \frac{2a}{3} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$



Gọi O là trung điểm AD, ta có ABCD là hình vuông cạnh a $\Rightarrow \Delta ACD$ có trung tuyến $CO = \frac{1}{2}AD$

$CD \perp AC \Rightarrow CD \perp (SAC)$ VÀ $BO // CD$ hay $CD // (SBO)$ và $BO \perp (SAC)$

$d(CD;SB) = d(CD;(SBO)) = d(C;(SBO))$

Tính chất trọng tâm tam giác $BCO \Rightarrow IH = \frac{1}{3}IC = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

$\Rightarrow IS = \sqrt{IH^2 + HS^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$

Kẻ $CK \perp SI$ mà $CK \perp BO \Rightarrow CK \perp (SBO) \Rightarrow d(C,(SBO)) = CK$

Trong tam giác SIC có: $S_{SIC} = \frac{1}{2}SH.IC = \frac{1}{2}SI.CK \Rightarrow CK = \frac{SH.IC}{SI} = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$

Vậy $d(CD,SB) = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$.

Câu 26. ĐÁP ÁN B

Từ giả thiết có tam giác ABC đều cạnh a.

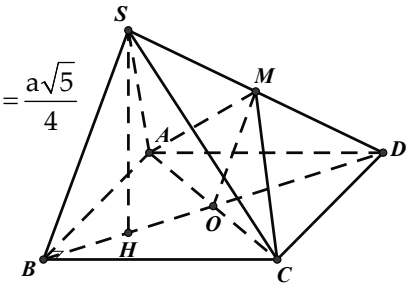
Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow HD = \frac{3}{4}BD = \frac{3}{4}a\sqrt{3}$

$SH^2 = SD^2 - HD^2 = 2a^2 - \frac{27a^2}{16} = \frac{5a^2}{16} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

$SB^2 = SH^2 + HB^2 = \frac{5a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\begin{cases} BD \perp AC \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp OM$



Diện tích tam giác MAC là $S_{MAC}=\frac{1}{2}OM.AC=\frac{1}{4}SB.AC=\frac{1}{4}\frac{a\sqrt{2}}{2}.a=\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$

$SB//OM\Rightarrow SB//(MAC)$

$\Rightarrow d(SB;CM)=d(SB;(MAC))=d(S;(MAC))=d(D;(MAC))$

$V_{M.ACD}=\frac{1}{3}d(M;(ABCD)).S_{ACD}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}d(S;(ABCD)).\frac{1}{2}S_{ABCD}$

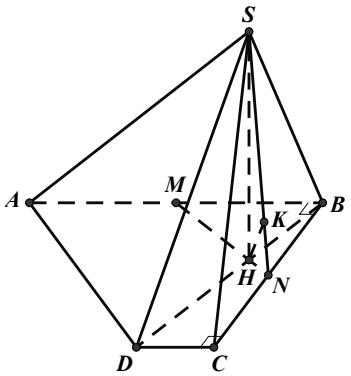
$=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{15}}{96}$

Mặt khác

$V_{M.ACD}=\frac{1}{3}d(D;(MAC)).S_{MAC}$

$\Rightarrow d(D;(MAC))=\frac{3V_{M.ACD}}{S_{MAC}}=\frac{\frac{a^3\sqrt{15}}{32}}{\frac{a^2\sqrt{2}}{8}}=\frac{a\sqrt{30}}{8}.$

Câu 27. ĐÁP ÁN B



Gọi $H=MN\cap BI\Rightarrow (SMN)\cap (SBI)=SH$

Do hai mặt phẳng (SMN) và (SBI) cùng vuông góc với $(ABCD)\Rightarrow SH\perp (ABCD)$

Dễ thấy BH là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng đáy, suy ra $\widehat{SBH}=60^o$.

Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và BC, mà $AB=4CD$ nên suy ra $MN\perp BD$ tại H.

Xét tam giác BMN ta có: $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BM^2}+\frac{1}{BN^2}=\frac{5}{a^2}\Rightarrow BH=\frac{a}{\sqrt{5}}$

Xét tam giác SBH lại có:

$\tan\widehat{SBH}=\frac{SH}{HB}\Rightarrow SH=HB.\tan 60^o=\frac{a\sqrt{15}}{5}$

Tính khoảng cách giữa SN và BD.

Do $\begin{cases}BD\perp SH\\BD\perp MN\end{cases}\Rightarrow BD\perp (SMN)$

Dựng HK vuông góc SN, suy ra HK là đoạn vuông góc chung của SN và BD $\Rightarrow d(BD,SN)=HK$.

Xét ΔBHN có: $HN=\sqrt{BN^2-BH^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{5}}=\frac{a\sqrt{5}}{10}$

Xét ΔSHN ta có: $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HN^2}=\frac{20}{a^2}+\frac{5}{3a^2}=\frac{65}{3a^2}\Rightarrow HK=a\sqrt{\frac{3}{65}}$

Vậy $d(BD,SN)=a\sqrt{\frac{3}{65}}$.

Câu 28. ĐÁP ÁN D

Theo giả thiết ta có $BC=AB=a$

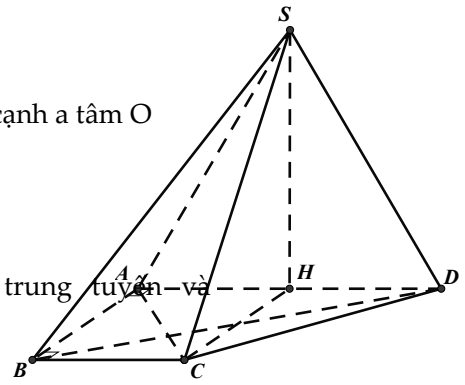
Gọi H là trung điểm của AD

$\Rightarrow HA=HD=a$

Từ giả thiết $\Rightarrow$ ABCH là hình vuông cạnh a tâm O

$$\Rightarrow\begin{cases}CH=a\\CO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Trong tam giác ACD có CH là trung tuyến và $CH=\frac{1}{2}AD$



$\Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C $\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) $\Rightarrow SK\perp(ABCD)$, SK là đường cao của hình chóp S.ABC.

Hơn nữa các tam giác vuông SKA, SKC và SKD bằng nhau vì SK chung và $SA=SD=SC=3a\Rightarrow KA=KC=KD$

$\Rightarrow$ K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD $\Rightarrow$ K trùng với H.

Trong tam giác vuông SHD ta có: $SH^2=\sqrt{SD^2-HD^2}=\sqrt{9a^2-a^2}=2\sqrt{2}a$

Tứ giác BCDH là hình bình hành (vì $HD//BC, HD=BC$) $\Rightarrow CD//BH$

Ta có: $\begin{cases}CD//BH\subset(SBH)\\CD\not\subset(SBH)\end{cases}\Rightarrow CD//(SBH)$

Ta có SB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.

Mặt khác $\begin{cases}CD//(SBH)\\SB\subset(SBH)\end{cases}$

$\Rightarrow d(CD,SB)=d(CD,(SBH))=d(C,(SBH))$

Ta có $\begin{cases}CO\perp HB\\CO\perp SH\end{cases}\Rightarrow CO\perp(SBH)\Rightarrow d(C,(SBH))=CO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.